Міністерство освіти і науки України
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

О.В. Бугрим, Л.Й. Бойко

ЧИСЛОВІ ТА СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

ПРИКЛАДИ ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Навчальний посібник
для студентів напряму підготовки
6.050301 Гірництво

Дніпропетровськ
НГУ
2014

УДК 517.521 (075.8)
ББК 22.161.1я7
Б 90

Автори:
О.В. Бугрим, канд. техн. наук, доц. (розділи 1, 2);
Л.Й. Бойко, канд. фіз.-мат. наук, доц. (розділ 3).

Затверджено до видання редакційною радою ДВНЗ «НГУ» (протокол № 11 від 05.11.2014) за поданням кафедри вищої математики (протокол №7 від 06.03.2014).

Рецензенти:
Т.С. Кагадій – д-р техн. наук, проф. ДВНЗ «НГУ»;
Н.В. Калашникова − канд. фіз.-мат. наук, доц. ДНУ.

Бугрим О.В.

Б 90 Числові та степеневі ряди. Приклади їх застосування: навч. посіб. для студ. напряму підгот. 6.050301 Гірництво / О.В. Бугрим, Л.Й. Бойко ; М-во освіти і науки України; Нац. гірн. ун-т. – Д.: НГУ, 2014. – 82 с.

Розглянуто основні питання теми: поняття числового ряду, його суми та збіжності; властивості збіжних рядів, необхідні й додатні умови збіжності числових додатних рядів; знакозмінні, зокрема знакопереміжні ряди; поняття абсолютної та умовної збіжності знакозмінних рядів; функціональний ряд та його збіжність; поняття радіуса та області збіжності степеневого ряду; розвинення функцій в ряди Тейлора і Маклорена та застосування основних розвинень до наближених обчислень. Наведені питання для самоконтролю, варіанти індивідуальних завдань та модульних контрольних робіт.

УДК 517.521 (075.8)
ББК.22.161.1я7

ЗМІСТ

ВСТУП

Ряди досить широко використовуються в математиці, особливо при дослідженні різноманітних технічних проблем, пов'язаних з наближеним інтегруванням диференціальних рівнянь, обчисленням значень функцій та інтегралів, розв'язуванням трансцендентних та алгебраїчних рівнянь.

Найпростіший ряд - суму членів нескінченної геометричної прогресії вперше ввели вчені Стародавньої Греції, зокрема Архімед застосував такий ряд до обчислення площі параболічного сегмента.

Систематично рядами почали користуватись, починаючи з 17 ст., проте теорія рядів була створена лише в 19 ст. на основі поняття границі в роботах К. Гаусса, О. Коші та багатьох інших учених.

У зв'язку з впровадженням кредитно-модульної системи вищої освіти значна увага приділяється організації самостійної роботи студентів, прищепленню їм навичок опрацювання навчальної літератури. Для успішного засвоєння матеріалу за темою “Ряди” під час підготовки до складання модулів потрібні посібники, у яких навчальний матеріал був би наведений у більш доступній, роз'яснювальній формі, а також були б наведені зразки прикладів і теоретичних запитань, що входять до складу модулів.

Мета даного посібника – допомогти студентам самостійно оволодіти методами дослідження нескінченних рядів на збіжність і розвинення функцій в ряди Тейлора і Маклорена та аналізу отриманих розвинень.

У посібнику розглянуто основні питання теми: поняття числового ряду, його суми та збіжності; властивості збіжних рядів, необхідні і достатні ознаки збіжності числових додатних рядів; знакозмінні, зокрема знакопереміжні ряди; поняття абсолютної та умовної збіжності знакозмінних рядів; функціональний ряд та його збіжність; поняття радіуса та області збіжності степеневого ряду; розвинення функцій в ряди Тейлора і Маклорена та застосування основних розвинень до наближених обчислень. У посібнику також наведені питання для самоконтролю, варіанти розрахункових завдань та модульних контрольних робіт.

Аналіз прикладів, що наведені в кожному розділі, а також осмислення зразків теоретичних модулів дасть можливість закріпити засвоєний матеріал і полегшити студентам опанування практично-розрахункової частини посібника.

Матеріал навчального посібника можна використовувати для дистанційного навчання студентів з розташуванням його у відповідній мережі НГУ.

1. ЧИСЛОВІ РЯДИ

1.1. Основні поняття та означення. Геометрична прогресія. Гармонічний ряд

Нехай задано послідовність дійсних чисел

$$\{u_n\} = \{u_1, u_2, ..., u_n, ...\}.$$

Рядом називають вираз

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n . \quad (1)$$

Цьому виразу ми не приписуємо ніякого числа, оскільки нескінченне число додавань виконати не можна. Для кожного $n \in N$ покладемо

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n .$$

Число u_n називається ***n*-м членом**, а число S_n – ***n*-ю частинною сумою ряду (1).**

Якщо послідовність частинних сум $\{S_n\}$ збіжна і $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то число S називається ***сумою ряду*** (1), а ряд - ***збіжним***. Символічно це записується так:

$$S = u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

Якщо послідовність $\{S_n\}$ скінченної границі не має, то ряд (1) називається ***розбіжним.***

Приклади

Дослідити на збіжність ряди:

а) $1 + 1 + ... + 1 + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1^n$;

б) $1 - 1 + 1 - 1 + ... + (-1)^{n-1} + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$;

в) $\dfrac{1}{1*2} + \dfrac{1}{2*3} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Розв'язання.

а) Розглянемо частинну суму $S_n = 1+1+...+1 = n$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, то ряд а) розбіжний.

б) Випишемо послідовність частинних сум:

$S_1 = 1, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = 1, \quad S_4 = 0, \; ... \;, S_{2n-1} = 1, \quad S_{2n} = 0$.

Ця послідовність границі не має, тому ряд б) розбіжний.

в) Знайдемо суму

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) + \ldots + (\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}) = 1-\frac{1}{n+1}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1}) = 1$, то ряд в) збіжний і його сума $S = 1$.

Нескінченна геометрична прогресія. Ряд виду

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, \quad a \neq 0$$

називають нескінченною геометричною прогресією з першим членом a і знаменником q. Точніше було б сказати — ряд, складений з членів геометричної прогресії. При $q \neq 1$

$$S_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

Якщо $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$. Отже, при $|q| < 1$ ряд збіжний і його сума $S = \frac{a}{1-q}$.

Якщо $|q| > 1, \textit{то} \quad q^n \to \infty \; i \quad \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$. Отже, при $|q| > 1$ ряд розбіжний.

Якщо $q = 1$, то матимемо ряд

$a + a + \ldots + a + \ldots; \quad \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} an = \infty$, тобто ряд розбіжний.

Якщо $q = -1$, то матимемо ряд $a - a + a - a + \ldots$; $S_n = a$ при непарному n і $S_n = 0$ при парному n, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує, і ряд розбіжний.

Таким чином, ***геометрична прогресія збіжна при*** $|q| < 1$ ***і розбіжна при*** $|q| \geq 1$

Гармонічний ряд. Ряд виду

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

називається ***гармонічним***. Покажемо, що він розбіжний.

Відомо, що $(1+\frac{1}{n})^n < e, \quad n \in N$, звідси

$n\ln(1+\frac{1}{n})<1; \quad \frac{1}{n}>\ln\frac{n+1}{n}; \quad \frac{1}{n}>\ln(n+1)-\ln n$,

тобто

$1>\ln 2-\ln 1;$

$\frac{1}{2}>\ln 3-\ln 2;$

$\frac{1}{3}>\ln 4-\ln 3;$

. . . .

$\frac{1}{n}>\ln(n+1)-\ln n.$

Додаючи почленно ліві і праві частини нерівностей, дістанемо $S_n>\ln(n+1)$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$. Отже, ***гармонічний ряд розбіжний***.

1.2. Найпростіші властивості числових рядів

Розглянемо деякі властивості збіжних рядів.

1°. ***Якщо ряд*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ ***збіжний і має суму*** S***, то ряд*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}Cu_n$ ***також збіжний і сума його дорівнює*** CS $(C=const)$***. Іншими словами, збіжний ряд можна множити почленно на одне і те саме число***.

Доведення. Нехай $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$,

$$\sigma_n=Cu_1+Cu_2+\cdots Cu_n=C\sum_{k=1}^{n}U_k=CS_n$$

— частинні суми даних рядів. За умовою $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, тому

$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\lim\limits_{n\to\infty}CS_n=CS$. Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}Cu_n$ збіжний і його сума дорівнює CS.

Зауваження. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ розбіжний, то й ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Cu_n$ також розбіжний.

Наприклад, ряд $-2-1-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-\frac{2}{5}-\cdots$ розбіжний, бо утворюється з гармонічного ряду, якщо всі члени останнього помножити на -2:

$$-2-1-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-\frac{2}{5}-\cdots=-2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\right).$$

2°. ***Збіжні ряди можна почленно додавати та віднімати, тобто якщо ряди*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ ***і*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ ***збіжні і мають відповідно суми*** S ***та*** σ***, то ряди*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ ***також є збіжними і їх суми дорівнюють*** $S \pm \sigma$***.***

Доведення. Нехай

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} u_k, \quad \sigma_n=\sum_{k=1}^{n} v_k, \quad \overline{S_n}=\sum_{k=1}^{\infty}(u_k \pm v_k)$$

- частинні суми відповідних рядів.

Оскільки $\overline{S_n}=S_n \pm \sigma_n$ і за умовою $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{S_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(S_n \pm \sigma_n)=S \pm \sigma$.

Зауваження 1. Ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ називають відповідно сумою та різницею рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$. Отже, згідно з властивістю сума та різниця двох збіжних рядів - збіжні ряди.

Зауваження 2. Доведена властивість справедлива для будь-якої кількості збіжних рядів.

Зауваження 3. Якщо хоч одна з границь $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ або $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$ не існує, то $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{S_n}=\lim\limits_{n\to\infty} S_n+\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$ також не існує, тобто розбіжність одного з рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ або $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ спричиняє розбіжність їх суми та різниці.

Приклади

1. Чи збіжна сума і різниця рядів

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$$

та

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}\ ?$$

Розв'язання. Кожен із заданих рядів збіжний, бо є геометричною прогресією із знаменниками $q_1=\frac{1}{2}<1$, $q_2=\frac{1}{3}<1$ відповідно. Суми цих рядів, обчислені за формулою $S=\frac{a}{1-q}$, є відповідно $S_1=2$, $S_2=\frac{3}{2}$. Отже, сума та різниця заданих рядів

$$2+\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{3^{n-1}}\right)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{3^{n-1}}\right)$$

та

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{36}+\frac{19}{218}+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{3^{n-1}}\right)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{3^{n-1}}\right)$$

є ряди збіжні і їхні суми такі:

$S_1+S_2=\frac{7}{2}$ та $S_1-S_2=\frac{1}{2}$.

2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n+\frac{1}{5^n}\right)$.

Розв'язання. Заданий ряд можна розглядати як суму двох рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}n=1+2+3+\cdots+n+\cdots$$

та

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\cdots+\frac{1}{5^n}+\cdots.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}n$ розбіжний, бо $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}n\neq 0$ (не виконується необхідна умова збіжності ряду), а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ збіжний як геометрична прогресія із знаменником $q = \frac{1}{5}$. Отже, згідно з зауваженням 3, заданий ряд розбіжний.

3°. ***На збіжність ряду не впливає відкидання або приєднання до нього скінченної кількості членів***.

Доведення. Нехай S_n - частинна сума ряду (1), C_m - сума m відкинутих членів (число членів n взяте таким великим, що всі відкинуті члени містяться в S_n), σ_{m-n} - сума членів ряду, які містяться в S_n і не містяться в C_m, тоді $S_n = C_m + \sigma_{n-m}$, $\lim_{n\to\infty} S_n = C_m + \lim_{n\to\infty} \sigma_{n-m}$. Згідно із знайденою рівністю границі в лівій і правій частинах одночасно існують або не існують, тобто ряд (1) збіжний (розбіжний) тоді і тільки тоді, коли збіжний (розбіжний) ряд без m його членів.

Розглянемо ряд (1) і покладемо

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k .$$

Величину r_n ***називають*** n***-м залишком ряду (1),*** її можна розглядати як суму ряду, який утворюється з ряду (1) після відкидання перших n його членів.

Якщо ряд збіжний і $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то $r_n = S - S_n$ і $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$.

Справедливе і більш загальне твердження.

4°. ***Ряд (1) збіжний (розбіжний) тоді і тільки тоді, коли збіжний (розбіжний) довільний його залишок***.

Ця властивість є наслідком властивості 3°.

5°. Необхідна умова збіжності ряду. ***Якщо ряд*** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ***збіжний, то*** $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Доведення. Нехай S —сума заданого ряду, тоді $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ і $\lim_{n\to\infty} = S_{n-1} = S$, де $S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} u_k$. Проте $u_n = S_n - S_{n-1}$, тому $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Умова $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ є тільки необхідною для збіжності ряду, але не достатньою. Це означає, що існують розбіжні ряди, для яких ця умова виконується.

6° Достатня умова розбіжності ряду. ***Якщо*** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$***, то ряд*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ ***розбіжний.***

Дійсно, якби даний ряд був збіжний, то за властивістю 5° його загальний член прямував би до нуля при $n \to \infty$, що суперечить умові.

Приклади

Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n+2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Розв'язання

а) Тут виконується необхідна умова збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$$

проте ряд розбіжний. Дійсно,

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

тобто $S_n > \sqrt{n}$, звідки $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$. Отже, ряд а) розбіжний.

б) Тут виконується достатня умова розбіжності:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+2} = 2 \neq 0,$$

тому ряд б) розбіжний.

в) Ряд збіжний як геометрична прогресія із знаменником $q = \frac{1}{2}$.

Таким чином, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ніякого висновку про збіжність чи розбіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ зробити не можна.

Потрібне додаткове дослідження, яке виконується за допомогою достатніх умов збіжності ряду. Якщо ж $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд розбіжний.

7°. Сполучна властивість збіжного ряду. ***У збіжному ряді можна довільно групувати його члени, тобто, якщо ряд*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ ***збіжний, то збіжним є і ряд***

$$(u_1 + u_2 + \cdots + u_{k_1}) + (u_{k_1+1} + u_{k_1+2} + \cdots + u_{k_2}) + \cdots +$$
$$+ (u_{k_{n-1}+1} + u_{k_{n-1}+2} + \cdots + u_{k_n}) + \cdots,$$

утворений з даного ряду розстановкою дужок, а саме, довільним об'єднанням його членів із збереженням порядку їх слідування. При цьому сума ряду не змінюється.

Приклади для самостійного розв’язування

Чи виконується необхідна умова збіжності для рядів:

1. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\cdots$; 2. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$;

3. $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+\cdots$; 4. $\frac{1}{9}+\frac{4}{13}+\frac{9}{17}+\frac{16}{21}+\cdots$;

5. $\frac{4}{7}+\frac{7}{12}+\frac{7}{12}+\frac{13}{22}+\cdots$; 6. $\frac{1}{9}+\frac{2}{19}+\frac{3}{29}+\frac{4}{39}+\cdots$;

7. $2+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\frac{2^4}{4}+\cdots$; 8. $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots$.

Відповіді: 1. Ні; 2. Так; 3. Так; 4. Ні; 5. Ні; 6. Ні; 7. Ні; 8. Так.

1.3. Знакододатні ряди. Достатні ознаки збіжності

При дослідженні на збіжність знакододатних рядів, тобто рядів з невід'ємними членами, найчастіше користуються такими достатніми умовами (ознаками) збіжності, як ознаки порівняння, ознаки Д'Аламбера і Коші та інтегральна ознака Коші.

Теорема 1. Ознака порівняння. ***Нехай задано два ряди з невід'ємними членами***

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots, \quad u_n\ge 0, \tag{2}$$

$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots, \quad v_n\ge 0, \tag{3}$$

і для всіх n ***виконується нерівність***

$$u_n\le v_n. \tag{4}$$

Тоді, якщо ряд (3) збіжний, то збіжний і ряд (2). Якщо ряд (2) розбіжний, то розбіжний і ряд (3).

Доведення. Нехай ряд (3) збіжний і

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k, \quad \sigma_n=\sum_{k=1}^{n}v_k$$

частинні суми рядів (2) і (3).

Оскільки ряд (3) збіжний, то існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma$ його частинних сум. Члени ряду (3) невід’ємні, тому $\sigma_n\le\sigma$. Але тоді з нерівності (4) випливає, що $S_n\le\sigma_n\le\sigma$, тобто послідовність $\{S_n\}$

частинних сум ряду (2) обмежена зверху. Крім того, члени ряду (2) невід'ємні, тому частинні суми не спадають. Тоді послідовність $\{S_n\}$ має границю, тобто ряд (2) збіжний. Якщо ряд (2) розбіжний, то ряд (3) також розбіжний, бо коли б ряд (3) був збіжний, то за тільки що доведеним ряд (2) теж був би збіжним, а це суперечить умові.

Зауваження 1. Ознаки порівняння можна застосовувати і тоді, коли нерівність (4) виконується не для всіх членів рядів (2) і (3), а починаючи з деякого номера N. Це випливає з властивості 3°.

Зауваження 2. При дослідженні рядів за допомогою ознак порівняння необхідно знати, які ряди збіжні, а які розбіжні

Для порівняння часто користуються рядами:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \begin{cases} \textit{збіжний при } |q|<1, \\ \textit{розбіжний при } |q| \ge 1; \end{cases}$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \textit{збіжний при } \alpha > 1, \\ \textit{розбіжний при } \alpha \le 1. \end{cases}$

Перший з цих рядів, як відомо, називається геометричною прогресією, другий - ***рядом Діріхле, або узагальненим гармонічним рядом***. Його ми дослідимо пізніше. Зокрема, при $\alpha = 1$ дістанемо гармонічний ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

який, як відомо, розбіжний.

Приклади

Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)}$.

Розв'язання. Застосуємо ознаки порівняння.

а) Оскільки $\dfrac{1}{n\cdot 3^n} \le \dfrac{1}{3^n}$, $n=1, 2, \dots$, і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$ збіжний як геометрична прогресія із знаменником $q=\dfrac{1}{3}<1$, то ряд а) теж збіжний.

б) Оскільки $\dfrac{1}{\ln(n+1)} > \dfrac{1}{n+1}$, $n=1, 2, \dots$, і ряд $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n+1}+\cdots$ розбіжний як гармонічний, то ряд б) також розбіжний.

Теорема 2. Гранична ознака порівняння. ***Якщо задано два ряди з додатними членами***

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \ , \qquad \textbf{(5)}$$

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots, \qquad \textbf{(6)}$$

причому існує скінченна, відмінна від нуля границя

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = a, \quad (a \neq 0, \quad a \neq \infty),$$

то ряди або одночасно збіжні, або одночасно розбіжні.

Доведення. Нехай $\lim \frac{u_n}{v_n} = a \neq 0$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ (візьмемо $\varepsilon < a$) знайдеться такий номер $N = N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $\left| \frac{u_n}{v_n} - a \right| < \varepsilon$, звідки

$$(a - \varepsilon)v_n < u_n < (a + \varepsilon)v_n. \qquad (7)$$

Якщо ряд (5) збіжний, то з нерівності (7) і ***теореми 1*** випливає, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a - \varepsilon)v_n$ також збіжний. Тоді, згідно з властивістю **1°**, ряд (6) збіжний.

Якщо ряд (5) розбіжний, то з нерівності (7), ***теореми 1*** і властивості **1°** випливає розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(a + \varepsilon)v_n$ і ряду (6).

Аналогічно, якщо ряд (6) збіжний (розбіжний), то збіжним (розбіжним) буде і ряд (5).

Приклади

Дослідити на збіжність ряди :

а) $\sum_{n=1}^{\infty} tg \frac{\pi}{3n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^3}$.

Розв'язання. Застосуємо граничну ознаку порівняння.

а) Оскільки $\lim_{n \to \infty} \frac{tg \frac{\pi}{3n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{3} \neq 0$ і гармонічний ряд розбіжний, то ряд а) також розбіжний.

б) Порівняємо цей ряд зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (це ряд вигляду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, де $\alpha = 2 > 1$):

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n^3}:\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+n^2}{n^3} = 2 \neq 0.$$

Отже, даний ряд збіжний.

Зауваження. При дослідженні рядів на збіжність за допомогою граничної ознаки порівняння можна скористатися поняттям ***еквівалентних нескінченно малих*** послідовностей, яке формулюється так: ***послідовності*** u_n ***та*** v_n***, нескінченно малі при*** $n \to \infty$***, називаються еквівалентними, якщо***

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Еквівалентність позначають так: $u_n \sim v_n$.

Таким чином, якщо загальні члени u_n та v_n відповідних рядів $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ є еквівалентними нескінченно малими, то, згідно з граничною ознакою порівняння, ряди або одночасно збіжні, або одночасно розбіжні.

Нижче наведемо деякі відомості, які можна використовувати при дослідженні рядів на збіжність.

Еквівалентні нескінченно малі функції

1. $\sin kx \sim kx$ при $x \to 0$;
2. $tgkx \sim kx$ при $x \to 0$;
3. $\arcsin kx \sim kx$ при $x \to 0$;
4. $arctgkx \sim kx$ при $x \to 0$;
5. $1 - \cos kx \sim \frac{(kx)^2}{2}$ при $x \to 0$;
6. $(1+x)^k - 1 \sim kx$ при $x \to 0$;
7. $\ln(1+kx) \sim kx$ при $x \to 0$;
8. $a^x - 1 \sim x\ln a$ при $x \to 0$;
9. $e^{kx} - 1 \sim kx$ при $x \to 0$.

Порівняння нескінченно великих функцій

1. $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \sim a_n x^n$ при $x \to \infty$;
2. $x^n < e^x$ при $x \to \infty$ (для будь-якого N);
3. $\ln x < x^{\varepsilon}$ при $x \to \infty$ (для будь-якого $\varepsilon > 0$.

Формула Стірлінга

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}, \quad 0 < \theta < 1$$

(стр.59 Фихтенгольц Г.М. «Основы математического анализа» - М.: Наука.,1968. -Т.2. – 463).

Приклади

Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\sin\frac{1}{n}\right|$; б) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\ln\frac{n-2}{n+2}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\,arctg\,\frac{1}{n}$; г) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\ln\cos\frac{\pi}{n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{(n+1)^n}$.

Розв'язання

а) Тут $u_n = \left|\sin\frac{1}{n}\right| \sim \frac{1}{n}$. Розглянемо гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

За граничною ознакою порівняння маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|\sin\frac{1}{n}\right|}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right| = 1.$$

Оскільки гармонічний ряд розбіжний, то і заданий ряд розбіжний.

б) Тут $u_n = \ln\frac{n-2}{n+2} = \ln\left(1 - \frac{4}{n+2}\right) \sim -\frac{4}{n+2} \sim -\frac{4}{n}$.

Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty} v_n = -\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{4}{n}$, який є розбіжним. Таким чином, заданий ряд також розбіжний.

в) Тут $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\,arctg\,\frac{1}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n^3}}$.

Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$, який є збіжним (див. п.1.3, зауваження 2). Таким чином, заданий ряд збіжний.

г) Тут $u_n = \ln\cos\frac{\pi}{n} = \ln\left(1 + (\cos\frac{\pi}{n} - 1)\right) \sim (\cos\frac{\pi}{n} - 1) \sim \frac{\pi^2}{2n^2}$.

Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{\pi^2}{2n^2} = \frac{\pi^2}{2} \sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, який є збіжним. Таким чином, заданий ряд збіжний.

д) Підставимо в заданий ряд $n!$ за формулою Стірлінга

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{(n+1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{\frac{\theta}{12n}} \cdot e^n}{e^n (n+1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \sqrt{2\pi n} \cdot e^{\frac{\theta}{12n}}.$$

Легко впевнитися, що цей ряд розбіжний, оскільки його загальний член не прямує до нуля, коли $n \to \infty$.

Дійсно, оскільки $0 < \theta < 1,$ то найменше значення $e^{\frac{\theta}{12n}}$ є одиниця, тобто $e^{\frac{\theta}{12n}} \geq 1$; множник $\left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}$ монотонно спадаючи прямує до $\frac{1}{e}$ і

тому $\left(\frac{n}{n+1} \right)^n \geq \frac{1}{2}$. Таким чином $\left(\frac{n}{n+1} \right)^n \sqrt{2\pi n} \cdot e^{\frac{\theta}{12n}} \geq \frac{1}{2} \sqrt{2\pi n} \to \infty.$

Приклади для самостійного розв'язування

Дослідити на збіжність ряди, застосовуючи ознаку порівняння:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n n}$; 2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n + 1}$; 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n - 1}$;

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n+2}}$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5} \right)^n$; 7. $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \frac{5}{9} + \cdots$;

8. $2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \frac{2^4}{4} + \cdots$; 9. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$; 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2}$.

Відповіді: 1. Збіжний; 2. Розбіжний; 3. Збіжний; 4. Розбіжний; 5. Розбіжний; 6. Збіжний; 7. Розбіжний; 8. Розбіжний; 9. Збіжний; 10. Збіжний.

Теорема 3. Ознака Д'Аламбера. ***Якщо для ряду з додатними членами***

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{8}$$

існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l$***, то:***

1) ряд збіжний при $l<1$***;***

2) ряд розбіжний при $l>1$.

Доведення. 1) Нехай $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l<1$. Тоді для довільного $\varepsilon>0$ існує такий номер $N=N(\varepsilon)$, що для всіх $n>N$ виконується нерівність

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-l\right|<\varepsilon,$$

або

$$l-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<l+\varepsilon\ . \tag{9}$$

Оскільки $l<1$, то $\varepsilon>0$ можна вибрати так, щоб число $q=l+\varepsilon<1$. Тоді з правої частини нерівності (9) дістанемо

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<q,\quad u_{n+1}<qu_n,\quad n>N.$$

Надаючи n значень $N+1,\quad N+2,\ldots$, з останньої нерівності маємо

$$u_{N+2}<u_{N+1}q;$$
$$u_{N+3}<u_{N+2}q<u_{N+1}q^2;$$
$$u_{N+4}<u_{N+3}q<u_{N+1}q^3;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

тобто члени ряду

$$u_{N+2}+u_{N+3}+u_{N+4}+\cdots \tag{10}$$

менші відповідних членів ряду

$$u_{N+1}q+u_{N+1}q^2+u_{N+1}q^3+\cdots.$$

Цей ряд збіжний як геометрична прогресія із знаменником q $(0<q<1)$, тому за ознакою порівняння ряд (10) також збіжний. Ряд (8) утворюється з ряду (10), якщо до останнього приєднати $N+1$ член $u_1, u_2, \ldots, u_{N+1}$. Тому за властивістю 3° (п. 1.2) ряд (8) збіжний.

2) Нехай $l>1$. Візьмемо $\varepsilon>0$ так, щоб $l-\varepsilon>1$, тоді з лівої частини нерівності (9) випливає, що $u_{n+1}>u_n$, $n>N$, тобто члени ряду зростають із зростанням їхнього номера. Тому $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$ і ряд (8) розбіжний (властивість **6°**).

Зауваження 1. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$, то ряд (8) розбіжний, бо існує номер N такий, що $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$ коли $n>N$.

Зауваження 2. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1$, то ряд може бути як збіжним, так і розбіжним. У цьому випадку ряд треба дослідити за допомогою інших ознак.

Приклади

Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{2^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!}$.

Розв'язання. Скористаємося ознакою Д'Аламбера:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2 2^n}{2^{n+1}n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{2n^2}=\dfrac{1}{2}<1$, заданий ряд збіжний.

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!2^n}{2^{n+1}n!}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$, отже, ряд розбіжний.

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{n+1}n!}{n^n(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^n}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e>1$; ряд розбіжний.

Приклади для самостійного розв'язування

Дослідити на збіжність ряди, застосовуючи ознаку Д'Аламбера:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n!}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)!}$; 3. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{3}{(\sqrt{3})^2}+\dfrac{5}{(\sqrt{3})^3}+\cdots$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{e^n}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n^2}{5^n}$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n+2)!}{(3n+5)2^n}$;

7. $\dfrac{2}{2}+\dfrac{2^2\cdot 1\cdot 2}{2\cdot 3}+\dfrac{2^3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{2^4\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\cdots$;

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!}$; 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$; 10. $\dfrac{10}{11}+\left(\dfrac{10}{11}\right)^2\cdot 2^5+\left(\dfrac{10}{11}\right)^3\cdot 3^5+\cdots$

Відповіді: 1. Збіжний; 2. Збіжний; 3. Збіжний; 4. Збіжний; 5.Збіжний; 6. Розбіжний; 7. Розбіжний; 8. Розбіжний; 9. Збіжний; 10. Збіжний.

Теорема 4. Радикальна ознака Коші. ***Якщо для ряду (8) з додатними членами існує границя*** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$***, то цей ряд збіжний при*** $l<1$ ***і розбіжний при*** $l>1$.

Доведення. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$. Це означає, що для довільного числа $\varepsilon>0$ існує номер $N=N(\varepsilon)$, такий, що

$$\left|\sqrt[n]{u_n}-l\right|<\varepsilon,\quad n>N,$$

або

$$l-\varepsilon<\sqrt[n]{u_n}<l+\varepsilon,\quad n>N. \tag{11}$$

Припустимо, що $l<1$. Виберемо число $\varepsilon>0$ так, щоб $l+\varepsilon=q<1$. Тоді з нерівності (11) маємо

$$\sqrt[n]{u_n}<l+\varepsilon=q,\text{ або } u_n<q^n,\quad n>N.$$

Оскільки ряд $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}q^n$ збіжний як геометрична прогресія із знаменником q $(0<q<1)$, то з нерівностей $u_n<q^n$ за ознакою порівняння ряд $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}u_n$ збіжний. Тоді збіжним буде і ряд (8), який утворюється з ряду $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}u_n$ приєднанням до нього N членів: $u_1,u_2,\ldots,u_N$.

Нехай $l>1$. Візьмемо число $\varepsilon>0$ так, щоб число $l-\varepsilon=p>1$. Тоді з нерівності (11) випливає, що $\sqrt[n]{u_n}>l-\varepsilon=p>1$, або $u_n>1$, $n>N$, звідки $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$. Отже, ряд розбіжний (властивість **6°**).

Приклади

Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4n}{n+1}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^n\dfrac{\pi}{3n}$.

Розв'язання. Застосуємо ознаку Коші.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n}{n+1} = 4 > 1$,

тобто заданий ряд розбіжний.

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{3n} = 0 < 1$,

тобто заданий ряд збіжний.

Приклади для самостійного розв'язування

Дослідити на збіжність ряди, застосовуючи радикальну ознаку Коші:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;

4. $\frac{3}{2^3}+\frac{3^3}{2^6}+\frac{3^5}{2^9}+\frac{3^7}{2^{12}}+\cdots$; 5. $1+\frac{2}{2^2}+\frac{4}{3^3}+\frac{8}{4^4}+\cdots$;

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$; 7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$; 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$;

9. $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\left(\frac{3}{8}\right)^5+\left(\frac{4}{11}\right)^7+\cdots$; 10. $3+(2{,}1)^2+(2{,}01)^3+\cdots$.

Відповіді. 1. Збіжний; 2. Розбіжний; 3. Збіжний; 4. Розбіжний; 5. Збіжний; 6. Збіжний; 7. Збіжний; 8. Збіжний; 9. Збіжний; 10. Розбіжний.

Теорема 5. Інтегральна ознака Коші. ***Нехай задано ряд***

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(n)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}f(n) \tag{12}$$

члени якого є значеннями неперервної, додатної і монотонно спадної функції $f(x)$ ***на проміжку*** $[1;+\infty)$***. Тоді ряд (12) збіжний, якщо збіжний невласний інтеграл*** $\int\limits_1^{+\infty}f(x)dx$ ***, і розбіжний, якщо цей інтеграл розбіжний..***

Доведення. Розглянемо криволінійну трапецію, обмежену кривою $y = f(x)$ і прямими $x = 1$, $x = n$, $y = 0$ (рис. 1.1). Площа її дорівнює інтегралу $I_n = \int\limits_1^n f(x)dx$.

Впишемо в цю трапецію і опишемо навколо неї ступінчаті фігури, утворені з прямокутників, основами яких є проміжки $[1; 2]$, $[2; 3]$, ... , $[n-1; n]$, а висоти дорівнюють $f(1)$, $f(2)$, ... , $f(n-1)$, $f(n)$. Тоді

$$f(2) + f(3) + \cdots + f(n) < I_n < f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1)$$

або

$$S_n - f(1) < I_n < S_n - f(n).$$

Звідки

$$S_n < f(1) + I_n, \tag{13}$$

$$S_n > f(n) + I_n, \tag{14}$$

де S_n - частинна сума ряду (12).

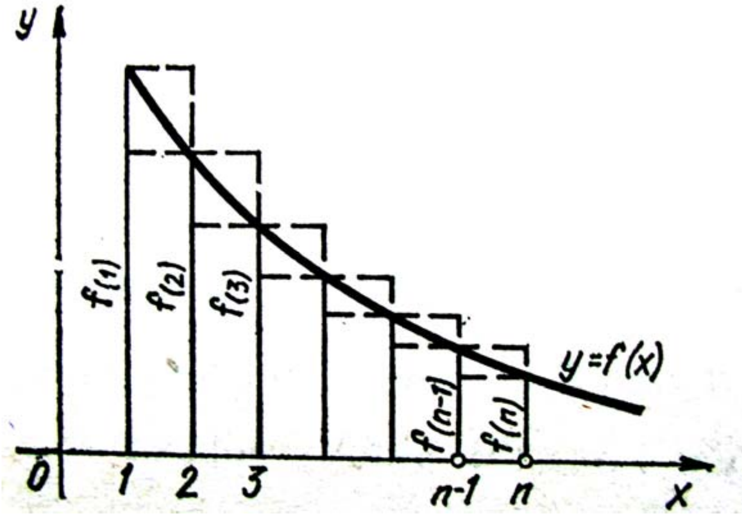

Рис. 1.1

Нехай інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ збіжний. Це означає, що існує границя

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \int\limits_1^n f(x)dx = I.$$

Оскільки $f(x) > 0$, то послідовності $\{S_n\}$ та $\{I_n\}$ зростають зі зростанням n, причому послідовність $\{I_n\}$ обмежена зверху своєю границею: $I_n < I$. З нерівності (13) випливає, що $S_n < f(1) + I$, тобто послідовність $\{S_n\}$ обмежена.

Таким чином, монотонно зростаюча послідовність $\{S_n\}$ обмежена зверху, а тому має границю. Отже, ряд (12) збіжний.

Нехай тепер інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ розбіжний, тоді $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \infty$ і з нерівності (14) випливає, що ряд (12) теж розбіжний.

Приклади

Дослідити на збіжність ряди (див. **п. 1.3**):

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$.

Розв'язання. Застосуємо інтегральну ознаку Коші.

а) Візьмемо функцію $f(x) = \frac{2x}{x^2+3}$, $x \in [1; +\infty)$. Тоді матимемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+3} = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) + \cdots.$$

Розглянемо невласний інтеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{2xdx}{x^2+3} = \lim_{b\to+\infty} \ln(x^2+3)\Big|_1^b = \infty.$$

Цей інтеграл розбіжний, тому і даний ряд розбіжний.

б) Візьмемо функцію $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$, $x \in [1; +\infty)$, $\alpha > 1$. Тоді $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$. Обчислимо невласний інтеграл:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha-1}.$$

Невласний інтеграл збіжний при $\alpha > 1$, тому заданий ряд при $\alpha > 1$ теж збіжний. Розбіжність ряду при $\alpha < 1$ випливає з того, що в цьому разі $\frac{1}{n^{\alpha}} \ge \frac{1}{n}$. Гармонічний ряд розбіжний, тому за ознакою порівняння заданий ряд при $\alpha < 1$ теж розбіжний. Таким чином, узагальнений гармонічний ряд збіжний при $\alpha > 1$ і розбіжний при $\alpha \le 1$.

Приклади для самостійного розв'язування

Дослідити на збіжність ряди, застосовуючи інтегральну ознаку Коші:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n+1}}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2-1}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+1}$; 4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$;

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$; 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctgn}{1+n^2}$; 7. $\frac{1}{2^3}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{4^3}+\frac{4}{5^3}+\cdots+\frac{n}{(n+1)^3}$;

8. $\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{5^2-1}+\frac{1}{7^2-1}+\cdots$; 9. $\frac{1}{9\ln 9}+\frac{1}{19\ln 19}+\frac{1}{29\ln 29}+\cdots$.

Відповіді: 1. Розбіжний; 2. Збіжний; 3. Збіжний; 4. Розбіжний; 5. Збіжний; 6. Збіжний; 7. Збіжний; 8. Збіжний; 9. Розбіжний.

1.4. Ряди, в яких знаки членів строго чергуються. Ознака Лейбніца

У попередньому пункті ми розглянули ряди з додатними членами. Ряди з недодатними членами можна досліджувати аналогічно, оскільки вони від знакододатних відрізняються множником –1, який на збіжність ряду не впливає.

Розглянемо тепер ряд, знаки членів якого строго чергуються, тобто ряд, довільні два сусідні члени якого мають різні знаки:

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+(-1)^{n-1}u_n+\cdots, \tag{15}$$

де $u_n>0, n=1, 2, \dots$. Цей ряд досліджується на збіжність за допомогою достатньої ознаки Лейбніца.

Теорема 1. Ознака Лейбніца. ***Ряд (15) збіжний, якщо:***

1) $u_{n+1}<u_n, \quad n=1, 2, \dots;$ (16)

2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0.$ (17)

При цьому сума ряду додатна і не перевищує першого його члена, тобто $0<S<u_1$.

Доведення. Розглянемо частинну суму з парним числом членів:

$$S_{2n}=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+u_{2n-1}-u_{2n}=$$
$$=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n}).$$

З умови (16) випливає, що кожна різниця в дужках додатна, тому $S_{2n}>0$ і послідовність $\{S_{2n}\}$ зростає зі зростанням n. Крім того,

$$S_{2n}=u_1-[(u_2-u_3)+(u_4-u_5)+\cdots+(u_{2n-2}-u_{2n-1})-u_{2n}]<u_1,$$

тобто послідовність обмежена зверху.

Отже, послідовність $\{S_{2n}\}$ монотонно зростає і обмежена зверху, тому має границю. Нехай $\lim S_{2n}=S$, тоді $S\le u_1$.

Обчислимо границю сум з непарним індексом. Враховуючи умову (17), маємо

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + u_{2n+1}) = S + 0 = S.$$

З рівності

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$$

випливає, що ряд (15) збіжний і сума його $S \le u_1$.

Зазначимо, що до рядів, знаки яких строго чергуються, належить і ряд

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - u_5 + \cdots + (-1)^n u_n + \cdots, \quad u_n > 0. \qquad (18)$$

Якщо для такого ряду виконуються умови 1) і 2) ознаки Лейбніца, то він збіжний, його сума S від'ємна і задовольняє нерівність $|S| \le u_1$.

Таким чином, для рядів (15) і (18) ознака Лейбніца формулюється так: ***якщо модуль n-го члена ряду (15) або (18) зі зростанням n спадає і прямує до нуля, то ряд збіжний, причому модуль його суми не перевищує модуля першого члена***.

Ряди (15) і (18), для яких виконується ознака Лейбніца, називаються рядами ***лейбніцевого типу***.

Наслідок. ***Абсолютна похибка від заміни суми збіжного ряду (15) його частинною сумою не перевищує модуля першого з відкинутих членів ряду, тобто***

$$|S - S_n| \le u_{n+1}.$$

Інакше кажучи, модуль n-го залишку r_n збіжного ряду (15) не перевищує модуля $(n+1)$ члена цього ряду, тобто

$$|r_n| \le u_{n+1}.$$

Дійсно, залишок збіжного ряду (15)

$$r_n = (-1)^n u_{n+1} + (-1)^{n+1} u_{n+2} + \cdots$$

– це збіжний ряд, члени якого строго чергуються. За доведеним абсолютна величина його суми не перевищує абсолютної величини першого члена, тобто $|r_n| \le u_{n+1}$.

Цей наслідок широко використовується при наближених обчисленнях.

Приклад

Довести, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(4n)^3}=\frac{1}{4^3}-\frac{1}{8^3}+\frac{1}{12^3}-\frac{1}{16^3}+\cdots$$

збіжний і знайти його суму з точністю до 0,001.

Розв'язання. Очевидно, всі три умови ознаки Лейбніца виконуються: 1) знаки членів даного ряду строго чергуються; 2) модулі його членів монотонно спадають; 3) $n-й$ член ряду прямує до нуля при $n\to\infty$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(4n)^3}=0$. Отже, ряд збіжний і має певну суму S.

Для того щоб обчислити цю суму з точністю до 0,001, треба взяти стільки членів ряду, щоб перший з наступних членів був за модулем менший від 0,001. Тоді весь залишок ряду, починаючи з цього члена, буде менший від 0,001. У даному разі маємо

$$\frac{1}{4^3}=\frac{1}{64}>0{,}001;\ \frac{1}{8^3}=\frac{1}{512}>0{,}001;\ \frac{1}{12^3}=\frac{1}{1728}<0{,}001,$$

тобто, щоб знайти суму даного ряду з точністю до 0,001, досить залишити перші два члени ряду, а решту відкинути. Таким чином,

$$S\approx S_2=\frac{1}{4^3}-\frac{1}{8^3}=\frac{1}{64}-\frac{1}{512}\approx 0{,}015.$$

Приклад

Дослідити на збіжність ряд $1{,}1-1{,}01+1{,}001-1{,}0001+\cdots$, застосовуючи ознаку Лейбніца.

Розв'язання. Перша умова ознаки Лейбніца виконується, тобто $1{,}1>1{,}01>1{,}001>1{,}0001>\cdots$. З іншого боку, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{10^n})=1$, тобто друга умова ознаки Лейбніца не виконується. Таким чином, ряд розбіжний.

Приклади для самостійного розв'язування

Дослідити на збіжність ряди, застосовуючи ознаку Лейбніца:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2+1}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2n+1}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n!}{n^n}$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sqrt{\frac{n}{100n+1}}$;

7. $\frac{3}{4}-\left(\frac{5}{7}\right)^2+\left(\frac{7}{10}\right)^3-\left(\frac{9}{13}\right)^4+\cdots+(-1)^{n-1}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n+\cdots.$

8. Оцінити похибку, що допускається при заміні суми ряду

$$0{,}1-\frac{0{,}1^2}{2}+\frac{0{,}1^3}{3}-\frac{0{,}1^4}{4}+\cdots$$

сумою трьох перших його членів.

9. Скільки членів ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^2}$ треба взяти, щоб обчислити його суму з точністю до $0{,}01$?

Відповіді. 1. Збіжний; 2. Збіжний; 3. Розбіжний; 4. Збіжний; 5. Збіжний; 6. Розбіжний; 7. Збіжний; 8. $|S-S_3|<0{,}000025$; 9. П’ять членів.

1.5. Знакозмінні ряди. Абсолютна і умовна збіжності

Ряд називається знакозмінним, якщо серед його членів є як від'ємні, так і додатні. (Зрозуміло, що розглядається випадок, коли ряд містить нескінченну кількість додатних членів і нескінченну кількість від'ємних членів).

Розглянуті в попередньому пункті ряди, в яких знаки чергуються, є, очевидно, окремим випадком знакозмінних рядів.

Візьмемо довільний знакозмінний ряд

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots\,, \tag{19}$$

де числа u_i можуть мати довільний знак. Одночасно розглянемо ряд, утворений з модулів ряду (19):

$$|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|+\cdots\,. \tag{20}$$

Для знакозмінних рядів справедлива така ознака збіжності.

Теорема. ***Якщо ряд (20) збіжний, то збіжний і ряд (19)***.

Доведення. Покладемо

$$|u_n|+u_n=2p_n,\quad |u_n|-u_n=2q_n,$$

тоді $0\le p_n\le|u_n|,\quad 0\le q_n\le|u_n|$ для довільного $n\in N$.

За умовою ряд (20) збіжний, тому з останніх нерівностей і ознаки порівняння випливає, що ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ також збіжні. Оскільки $u_n = p_n - q_n$, то згідно з властивістю **2°** (**п. 1.2**), ряд (19) теж збіжний.

Ця теорема показує, що при дослідженні на збіжність знакозмінних рядів можна користуватися ознаками збіжності знакододатних рядів.

Приклади

Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряди:

а) $\dfrac{\sin\alpha}{1^3} + \dfrac{\sin 2\alpha}{2^3} + \cdots + \dfrac{\sin n\alpha}{n^3} + \cdots$, де α – довільне дійсне число;

б) $1 - \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} - \dfrac{1}{4!} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n!} + \cdots$;

в) $1 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} + \cdots$.

Розв’язання.

а) Складемо ряд з модулів членів заданого ряду

$$\frac{|\sin\alpha|}{1^3} + \frac{|\sin 2\alpha|}{2^3} + \cdots + \frac{|\sin n\alpha|}{n^3} + \cdots .$$

Оскільки $\dfrac{|\sin n\alpha|}{n^3} \le \dfrac{1}{n^3}$ і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ збіжний як узагальнений гармонічний (п. 1.3), то за ознакою порівняння ряд з модулів збіжний, тому і заданий ряд збіжний.

б) Складемо ряд з модулів членів заданого ряду

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

За ознакою Д’Аламбера цей ряд збіжний, тому що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n!(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Таким чином, заданий знакозмінний ряд є абсолютно збіжним.

в) Складемо ряд з модулів членів заданого ряду

$$1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \cdots.$$

За інтегральною ознакою Коші цей ряд розбіжний, тому що

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \frac{3}{2}\lim_{b\to\infty} \sqrt[3]{x^2}\Big|_1^b = \frac{3}{2}\lim_{b\to\infty}(\sqrt[3]{b^2} - 1) = \infty .$$

Дослідимо на збіжність заданий знакозмінний ряд.

$$1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\cdots$$

За ознакою Лейбніца цей ряд збігається, тому що його члени монотонно спадають за абсолютною величиною і $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=0$. Таким чином, заданий знакозмінний ряд збігається умовно.

Зауважимо, що доведена теорема дає лише достатню умову збіжності і не є необхідною умовою збіжності знакозмінного ряду, оскільки існують знакозмінні ряди, які є збіжними, а ряди, утворені з модулів їхніх членів, – розбіжними. Наприклад, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ збіжний за ознакою Лейбніца, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, утворений з модулів його членів, розбіжний. У зв'язку з цим усі збіжні ряди можна розділити на абсолютно збіжні і умовно збіжні.

Знакозмінний ряд (19) називають абсолютно збіжним, якщо ряд (20), утворений з модулів його членів, є збіжним.

Якщо ж ряд (19) збіжний, а ряд (20), утворений з модулів його членів, розбіжний, то ряд (19) називають умовно збіжним. Так, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^3}$ є абсолютно збіжним, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ є умовно збіжним.

Зазначимо, що розмежування рядів на абсолютно і умовно збіжні є досить істотним. Справа в тому, що абсолютно збіжні ряди мають цілу низку важливих властивостей скінченних сум, тоді як умовно збіжні ряди таких властивостей не мають. Наприклад, абсолютно збіжні ряди мають переставну властивість: будь-який ряд, утворений за допомогою перестановки членів абсолютно збіжного ряду, також абсолютно збіжний і має ту саму суму, що і заданий ряд.

Умовно збіжні ряди переставної властивості не мають, тому що від перестановки їхніх членів може змінитися сума ряду і навіть утворитись розбіжний ряд.

Приклади для самостійного розв’язування

З’ясувати, які з наведених рядів є абсолютно збіжними, умовно збіжними, або розбіжними:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+1}{2^n}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(3n+1)^2}$; 3. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\ln n}$;

4. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n\ln^2 n}$; 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{2^n}$; 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^3}$;

7. $\frac{3}{1}-\frac{3\cdot 5}{1\cdot 4}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 4\cdot 7}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}+\cdots$;

8. $-\frac{2}{5}+\frac{2\cdot 7}{5\cdot 9}-\frac{2\cdot 7\cdot 12}{5\cdot 9\cdot 13}+\cdots+(-1)^n\frac{2\cdot 7\cdot 12\cdot\ldots\cdot(5n-3)}{5\cdot 9\cdot 13\cdot\ldots\cdot(4n+1)}+\cdots$;

9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^n}{n!}$; 10. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; 11. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\frac{n}{3^n}$.

Відповіді: 1. Абсолютно збіжний; 2. Абсолютно збіжний; 3. Умовно збіжний; 4. Абсолютно збіжний; 5. Абсолютно збіжний; 6. Абсолютно збіжний; 7.Абсолютно збіжний; 8. Розбіжний; 9. Розбіжний; 10. Розбіжний; 11. Абсолютно збіжний.

1.6. Поняття про числові ряди з комплексними членами

Нехай $z_n = x_n + iy_n$, $n = 1, 2, \ldots$ – послідовність комплексних чисел. Комплексне число $a + ib = c$ називають скінченною границею послідовності $\{z_n\}$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує номер $N = N(\varepsilon)$ такий, що $|z_n - c| < \varepsilon$ для всіх $n > N$ і записують як $\lim_{n\to\infty} z_n = c$.

Послідовність, яка має скінченну границю, називають збіжною, а послідовність, яка не має скінченної границі – розбіжною. Зв'язок між границею послідовності комплексних чисел $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ та границями послідовностей дійсних чисел $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ встановлює така теорема: ***для того щоб послідовність $\{z_n\}$ мала скінченну границю $c = a + ib$, необхідно і достатньо, щоб послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ мали скінченні границі, які дорівнюють відповідно a та b.***

Вираз виду

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n , \qquad (21)$$

де $z_n = x_n + iy_n$, $n = 1, 2, \ldots$— комплексні числа, ***називають числовим рядом з комплексними членами.***

Суми $S_1 = z_1$, $S_2 = z_1 + z_2$, $\ldots$, $S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ називають частинними сумами ряду (21).

Ряд (21) називають збіжним, якщо збіжна послідовність $\{S_n\}$, і розбіжним, якщо ця послідовність розбіжна.

Введемо тепер ряди з дійсними членами:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} x_n , \tag{22}$$

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \tag{23}$$

і побудуємо їхні частинні суми

$$X_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n , \quad Y_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n ;$$

тоді $S_n = X_n + iY_n$ і має місце така теорема.

Теорема 1. ***Для того щоб ряд (21) був збіжним до числа $S = X + iY$, необхідно і достатньо, щоб ряди (22) і (23) були збіжними відповідно до чисел X і Y.***

При дослідженні на збіжність рядів з комплексними членами користуються такою ***достатньою ознакою збіжності***.

Теорема 2. ***Якщо ряд, утворений з модулів членів ряду (21)*** $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| + \cdots$, ***де*** $|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$, ***збіжний, то збіжний, причому абсолютно, і ряд (21).***

Приклади

Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{i(-1)^n}{n} \right)$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+in}{2n^2+3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2-i}{3} \right)^n$.

Розв'язання.

а) Розглянемо відповідні ряди з дійсними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad \text{і} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} .$$

Перший з них є збіжним як геометрична прогресія зі знаменником $q = \frac{1}{2} < 1$, а другий є збіжним за ознакою Лейбніца. Отже, за ***теоремою 1*** даний ряд збіжний.

б) Розглянемо відповідні ряди з дійсними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+3} \quad \text{і} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2+3} .$$

За допомогою, наприклад, інтегральної ознаки Коші можна переконатися, що перший з цих рядів збіжний, а другий розбіжний. Отже, за ***теоремою 1*** даний ряд розбіжний.

в) Скористаємося ***теоремою 2***. Складемо ряд з модулів членів даного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(\frac{2-i}{3}\right)^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2-i}{3}\right|^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n .$$

Цей ряд збіжний, бо є геометричною прогресією, у якої знаменник $q = \frac{\sqrt{5}}{3} < 1$. Отже, даний ряд абсолютно збіжний.

Завдання для самоконтролю

1. Що називається числовим рядом? Що називається загальним членом ряду? Навести приклади.

2. Який ряд називається збіжним? Що називається його сумою? Який ряд називається розбіжним? Навести приклади.

3. Сформулювати і довести необхідну ознаку збіжності ряду. У чому полягає найпростіша достатня ознака розбіжності? Навести приклади.

4. Сформулювати і довести такі достатні ознаки збіжності як: ознаки порівняння; граничну ознаку порівняння; ознаку Д'Аламбера; радикальну ознаку Коші; інтегральну ознаку Коші. Для яких рядів застосовні ці ознаки?

5. Сформулювати і довести ознаку Лейбніца. Для якого ряду застосовна ця ознака?

6. Чому не можна досліджувати за ознакою Лейбніца на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n} = -1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots \quad ?$$

7. У чому полягає наслідок із ознаки Лейбніца?

8. Сформулювати і довести достатню ознаку збіжності знакозмінного ряду.

9. Який ряд називається абсолютно збіжним? Який ряд називається умовно збіжним? Навести приклади.

10. Який ряд називається рядом з комплексними членами? Сформулювати ознаки збіжності такого ряду.

11. Дослідити на збіжність ряди з додатними членами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{5n+3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{5^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{10n}}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2n+3}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{n}$; ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{2} n}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n-1}}{(n+1)!}$.

12. Довести, що дані ряди збіжні, і обчислити їхню суму з точністю до 0,01:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(3n)^{2}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$.

13. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3^{n}}{(2n+1)^{n}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 5n}{n^{2}}$.

14. Дослідити на збіжність ряди з комплексними членами:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}+i\sin n}{n^{3}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2+i)i}{4}\right)^{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}n+i}{3n^{2}+1}$.

Відповіді: 11. а), г), д) – розбіжні, інші – збіжні; 12. а) 0,31, б) 0,62; 13. а) – умовно збіжний, б), в) – абсолютно збіжні; 14. а) – розбіжний, б) – абсолютно збіжний, в) – умовно збіжний.

2. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

2.1. Функціональні ряди. Поняття рівномірної збіжності. Ознака Вейєрштрасса

Перейдемо тепер до вивчення функціональних рядів, тобто рядів, членами яких є не числа, а функції, визначені на деякій множині E_1

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x). \tag{24}$$

Якщо взяти довільне число $x_0\in E$ і в ряді (24) покласти $x=x_0$, то дістанемо числовий ряд

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\cdots+u_n(x_0)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0). \tag{25}$$

Цей ряд може бути як збіжним, так і розбіжним. ***Якщо ряд (25) є збіжним, то точка x_0 називається точкою збіжності функціонального ряду (24)***. ***Якщо ж ряд (25) є розбіжним, то точка x_0 називається точкою***

розбіжності ряду (24).

Множина всіх точок збіжності функціонального ряду називається областю його збіжності. Область збіжності функціонального ряду може або збігатися з множиною E, на якій визначені члени ряду, або становити деяку частину цієї множини.

Частинна сума функціонального ряду є функцією від x і визначається за аналогією з числовими рядами:

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x).$$

У кожній точці x, яка належить області збіжності ряду (24), існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x),$$

яку називають ***сумою ряду*** (24) і записують як

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots .$$

Функція $S(x)$ визначена в області збіжності функціонального ряду. Якщо функціональний ряд (24) збіжний до функції $S(x)$, то різниця

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x)$$

називається n***-м залишком ряду***:

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots.$$

Зрозуміло, що для всіх значень x з області збіжності ряду

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0.$$

Відомо, що сума скінченного числа неперервних функцій є функцією неперервною. Крім того, суму скінченного числа функцій можна почленно диференціювати та інтегрувати. Виявляється, що ці властивості не завжди виконуються для сум нескінченного числа функцій, тобто для функціональних рядів. Проте ці властивості зберігаються для так званих рівномірно збіжних рядів.

Функціональний ряд (24) називається ***рівномірно збіжним на множині*** D, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $N = N(\varepsilon)$, яке залежить лише від ε і не залежить від x, що для всіх $n > N$ і для всіх $x \in D$ виконується нерівність $|r_n(x)| < \varepsilon$.

Рівномірно збіжні функціональні ряди мають ряд важливих властивостей. Сформулюємо деякі з них без доведення.

1°. ***Сума членів рівномірно збіжного на деякому проміжку ряду неперервних функцій є функція, неперервна на цьому проміжку.***

2°. ***Якщо на відрізку*** $[a;b]$ ***функціональний ряд*** **(24)** ***рівномірно збіжний і члени ряду неперервні на*** $[a;b]$***, то його можна почленно інтегрувати в межах*** $(\alpha;\beta)$***, де*** $(\alpha;\beta)\subset[a;b]$***:***

$$\int_{\alpha}^{\beta} S(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta} u_n(x)dx.$$

3°. ***Якщо функціональний ряд*** **(24)** ***збіжний на відрізку*** $[a;b]$***, а його члени мають неперервні похідні*** $u_n'(x)$, $x\in[a;b]$, $n=1,2,\ldots,$ ***причому ряд*** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ ***рівномірно збіжний на*** $[a;b]$***, то заданий ряд можна почленно диференціювати, тобто***

$$S'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x),\ \ x\in[a;b].$$

Таким чином, всі збіжні функціональні ряди поділяються за характером збіжності на рівномірно збіжні і нерівномірно збіжні. Рівномірно збіжні ряди мають деякі властивості, які дають змогу ефективно використовувати їх при наближених обчисленнях. У цьому полягає практична перевага рівномірно збіжних рядів перед нерівномірно збіжними.

Для дослідження функціонального ряду на рівномірну збіжність користуються такою достатньою умовою рівномірної збіжності.

Теорема. Ознака Вейєрштрасса. ***Функціональний ряд (24) абсолютно і рівномірно збіжний на відрізку*** $[a;b]$***, якщо існує знакододатний збіжний числовий ряд***

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{26}$$

такий, що

$$|u_n(x)| \le a_n \ \textbf{\textit{для всіх}}\ x\in[a;b],\quad n=1,2,\ldots. \tag{27}$$

З умови (27) і ознаки порівняння випливає, що ряд (24) є абсолютно збіжним у довільній точці $x\in[a;b]$. З абсолютної збіжності ряду (24) дістанемо абсолютну збіжність його залишку. Маємо

$$|r_n(x)| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots| \le$$

$$\le |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \cdots \le a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots = R_n.$$

Але залишок ряду (26) $R_n \to 0$ при $n \to \infty$, тому для довільного $\varepsilon > 0$ існує незалежний від x номер $N = N(\varepsilon)$ такий, що $R_n < \varepsilon$ при $n > N$. Тоді для всіх $n > N$ і $x \in [a; b]$ виконується нерівність $|r_n(x)| < \varepsilon$.

Приклади

1. Знайти область збіжності функціонального ряду

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{1}{x^n} + \cdots.$$

Розв'язання. Кожен член ряду визначений на множині $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. На цій множині ряд є геометричною прогресією із знаменником $q = \frac{1}{x}$, тому при $|q| = \left|\frac{1}{x}\right| < 1$ або $|x| > 1$ заданий ряд збіжний. Отже, $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ – область збіжності цього ряду.

2. Дослідити на рівномірну збіжність ряд

$$\frac{\sin x}{1!} + \frac{\sin 2x}{2!} + \cdots + \frac{\sin nx}{n!} + \cdots.$$

Розв'язання. Скористаємось ознакою Вейєрштрасса. Оскільки при $-\infty < x < +\infty$ і $n \in N$

$$\left|\frac{\sin nx}{n!}\right| \le \frac{1}{n!} \quad \text{і ряд} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

збіжний (за ознакою Д'Аламбера), то заданий функціональний ряд абсолютно і рівномірно збіжний на всій числовій осі.

3. Знайти суму ряду

$$x + 2x^2 + \cdots + nx^n + \cdots, \quad |x| < \frac{1}{2}.$$

Розв'язання. Оскільки при $|x| < \frac{1}{2}$ і $n \in N$ виконується нерівність $|nx^n| < \frac{n}{2^n}$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ збіжний (за ознакою Д'Аламбера), то за ознакою Вейєрштрасса ряд $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$ рівномірно збіжний при $|x| < \frac{1}{2}$. Цей ряд утворюється почленним диференціюванням геометричної прогресії

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < \frac{1}{2}.$$

За властивістю **3°** рівномірно збіжних рядів маємо

$$\frac{d}{dx}(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right), \quad |x| < \frac{1}{2},$$

або

$$1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots=\frac{1}{(1-x)^2},\quad |x|<\frac{1}{2},$$

звідки

$$x(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots)=x+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+\cdots=$$

$$=\frac{x}{(1-x)^2},\quad |x|<\frac{1}{2}.$$

2.2. Поняття степеневого ряду. Теорема Абеля. Інтервал та радіус збіжності степеневого ряду

Степеневим рядом називається функціональний ряд вигляду

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n, \tag{28}$$

де $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ – дійсні числа, які називаються коефіцієнтами ряду.

Степеневим рядом за степенями двочлена $x-x_0$, де x_0 – дійсне число, називають функціональний ряд вигляду

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n. \tag{29}$$

Ряд (29) заміною змінної $x-x_0=t$ зводиться до ряду вигляду (28), тому надалі розглядатимемо лише степеневі ряди вигляду (28).

Всякий степеневий ряд вигляду (28) збіжний у точці $x=0$ до суми $S=a_0$. Тому область збіжності степеневого ряду завжди містить принаймні одну точку. Детальніші відомості про область збіжності ряду (28) дістанемо з наступної, дуже важливої в теорії рядів теореми.

Теорема Абеля. ***Якщо степеневий ряд* (28) *збіжний при.* $x=x_0\neq 0$*, то він абсолютно збіжний для всіх значень* x*, що задовольняють нерівність* $|x|<|x_0|$.**

Якщо при $x=x_1$ ***ряд* (28) *розбіжний, то він розбіжний всюди, де*** $|x|>|x_1|$**.**

Доведення. Оскільки за умовою ряд (28) збіжний в точці x_0, то збіжним є числовий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$, отже, $a_nx_0^n\to 0$ при $n\to\infty$ (5^0, п.1.2). Звідси випливає, що послідовність $\{a_nx_0^n\}$ обмежена, тобто існує таке число M, що

$$\left|a_n x_0^n\right| \le M, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Враховуючи, що для $|x| < |x_0|$ величина $q = \left|\dfrac{x}{x_0}\right| < 1$, маємо

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_0^n\right| \left|\frac{x^n}{x_0^n}\right| \le M q^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots ,$$

тобто модуль кожного члена ряду (28) не перевищує відповідного члена збіжної геометричної прогресії. Тоді за ознакою порівняння при $|x| < |x_0|$ ряд (28) абсолютно збіжний.

Нехай тепер ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ розбіжний при $x = x_1$. Тоді ряд (28) буде розбіжним і для всіх x, що задовольняють нерівність $|x| > |x_1|$. Справді, якби припустити, що він збіжний в якій-небудь точці x, що задовольняє цю нерівність, то за доведеним він був би збіжним і в точці x_1, бо $|x_1| < |x|$. А це суперечить тому, що в точці x_1 ряд розбіжний.

Теорема Абеля характеризує множини точок збіжності та розбіжності степеневого ряду. Дійсно, якщо x_0 – точка збіжності ряду (28), то весь інтервал $\left(-|x_0|; |x_0|\right)$ заповнено точками абсолютної збіжності цього ряду (рис. 2.1). Якщо x_1 – точка розбіжності ряду (28), то вся нескінченна напівпряма $\left(-\infty; -|x_1|\right)$ зліва від точки $-|x_1|$ і вся нескінченна напівпряма $\left(|x_1|; +\infty\right)$ справа від точки $|x_1|$ (рис. 2.1) складається з точок розбіжності цього ряду.

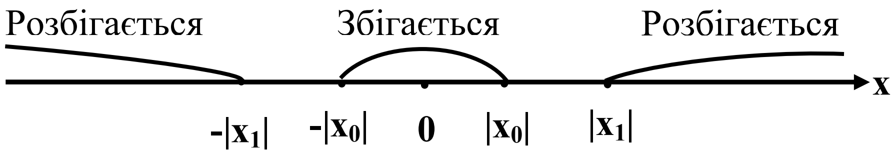

Рис. 2.1

Отже, для області збіжності степеневого ряду можливі три випадки: 1) ряд (28) збіжний лише в точці $x = 0$; 2) ряд (28) збіжний при всіх $x \in (-\infty; +\infty)$; 3) існує таке скінченне число $R \in (0; +\infty)$, що при $|x| < R$ степеневий ряд абсолютно збіжний, а при $|x| > R$ – розбіжний (рис. 2.2).

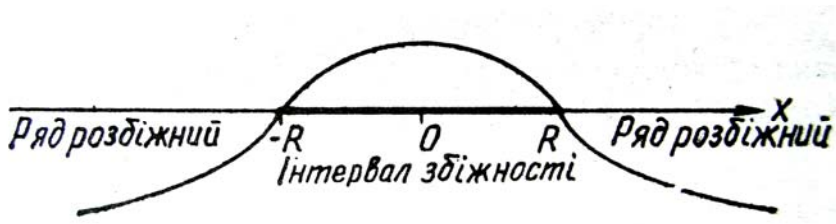

Рис. 2.2

Число R називають радіусом збіжності степеневого ряду, а інтервал $(-R; R)$ – інтервалом збіжності.

Наведемо спосіб визначення радіуса збіжності степеневого ряду. Складемо ряд із модулів членів ряду (28):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|.$$

.

Припустимо, що існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x| = L|x| \neq 0, \quad x \neq 0.$$

Згідно з ознакою Д'Аламбера ряд (28) є абсолютно збіжним при $L|x|<1$ або $|x|<\frac{1}{L}$, і розбіжним при $L|x|>1$ або $|x|>\frac{1}{L}$.

Отже, інтервал $\left(-\frac{1}{L}; \frac{1}{L}\right)$ є інтервалом абсолютної збіжності ряду (28), а число

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

– його радіусом збіжності.

Аналогічно, скориставшись ознакою Коші, можна встановити, що

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}. \tag{31}$$

Зауваження 1. Неважко переконатися, що коли

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 \quad \text{або} \quad L = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 0,$$

то ряд (28) є абсолютно збіжним на всій числовій осі. У цьому разі вважають $R=+\infty$. Якщо ж $L=\infty$, то $R=0$ і степеневий ряд має лише одну точку збіжності $x=0$.

Зауваження 2. Питання про збіжність ряду при $x=\pm R$ (на кінцях інтервалу збіжності) розв'язується для кожного ряду окремо. Таким чином, область збіжності степеневого ряду може відрізнятися від інтервалу $(-R;\, R)$ не більше ніж двома точками $x=\pm R$.

Зауваження 3. Радіус збіжності ряду (29) визначається за тими самими формулами (30) і (31), що і ряду (28).

Інтервал збіжності ряду (29) знаходять з нерівності $|x-x_0|<R$, тобто має вигляд $(x_0-R;\, x_0+R)$.

Зауваження 4. На практиці інтервал збіжності степеневого ряду часто знаходять за ознакою Д'Аламбера або Коші, застосовуючи їх до ряду, складеного з модулів членів заданого ряду.

Приклади

Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(nx)^n$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2n+1}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$.

Розв'язання. Скористаємося формулою (30).

а) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$.

Отже, даний ряд абсолютно збіжний на всій числовій осі.

б) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{e}\cdot 0=0$,

тобто даний ряд збіжний лише в точці $x=0$.

в) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\frac{2n+3}{2n+1}=1$,

отже, $(-1;1)$ – інтервал збіжності даного ряду. Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу. При $x=-1$ маємо числовий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\ ,$$

який є збіжним за ознакою Лейбніца. При $x=1$ дістаємо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots,$$

який є розбіжним за ознакою порівняння з гармонічним рядом. Таким чином, областю збіжності даного ряду є проміжок [—1; 1).

г) Скористаємось ознакою Д'Аламбера. Для даного ряду маємо

$$|u_n| = \frac{|x+3|^n}{n^2}, \quad |u_{n+1}| = \frac{|x+3|^{n+1}}{(n+1)^2};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x+3|^{n+1}n^2}{(n+1)^2|x+3|^n} = |x+3|\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = |x+3|.$$

За ознакою Д'Аламбера ряд буде абсолютно збіжним, якщо $|x+3|<1$, звідки $-1<x+3<1$, або $-4<x<-2$. Таким чином, $(-4; \ -2)$ – інтервал збіжності даного ряду, а $R=1$ –радіус збіжності.

Дослідимо збіжність цього ряду на кінцях інтервалу збіжності.

При $x=-4$ маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4+3)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2},$$

який є збіжним за ознакою Лейбніца.

При $x=-2$ дістаємо узагальнений гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2+3)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

який також збіжний $(\alpha = 2 > 1)$. Отже, областю збіжності даного ряду є відрізок $[-4; -2]$.

2.3. Властивості степеневих рядів

1°. ***Степеневий ряд***

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

абсолютно і рівномірно збіжний на будь-якому відрізку $[-\rho; \rho]$***, який цілком міститься в інтервалі збіжності*** $(-R; R)$**.**

Доведення. За умовою $\rho < R$. Візьмемо точку $x_0 \in (\rho; R)$. За теоремою Абеля ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx_0^n|$ збіжний. Для довільної точки $x \in [-\rho; \ \rho]$ виконується нерівність $|a_nx^n| < |a_nx_0^n|$|, тому за ознакою Вейєрштрасса ряд (28) абсолютно і рівномірно збіжний.

З цієї властивості і властивостей **1° – 3°** функціональних рядів (**п.2.1**) випливають такі твердження.

2°. ***Сума степеневого ряду*** **(28)** ***неперервна всередині його інтервалу збіжності.***

3°. *Якщо границі інтегрування* α *та* β *лежать всередині інтервалу збіжності* $(-R;\ R)$ *ряду* (24), *то на відрізку* $[\alpha;\ \beta]$ *цей ряд можна почленно інтегрувати.*

Зокрема, якщо ряд (28) інтегрувати по відрізку $[0;\ x]$, де $|x| < R$, то в результаті дістанемо степеневий ряд, який має той самий інтервал збіжності, що і ряд (28); при цьому, якщо $S(x)$ – сума ряду (28), тобто

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{, то}$$

$$\int_0^x S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx .$$

4°. *Якщо ряд* (28) *має інтервал збіжності* $(-R;\ R)$, *то ряд, утворений диференціюванням ряду* (28), *має той самий інтервал збіжності* $(-R;\ R)$; *при цьому, якщо* $S(x)$ *– сума ряду* (28), *то*

$$.\ S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad x \in (-R;\ R)$$

Таким чином, ряд (28) на відрізку $[0;\ x]$, $|x| < R$, можна інтегрувати і диференціювати скільки завгодно разів у будь-якій точці $x \in (-R;\ R)$. При цьому інтервалом збіжності кожного ряду є той самий інтервал $(-R;\ R)$.

Сформульовані властивості степеневих рядів широко використовуються в теоретичних дослідженнях і наближених обчисленнях.

Приклад

Знайти суму ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1 .$$

Розв'язання. Позначимо суму даного ряду через $S(x)$, тоді

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots .$$

Цю суму можна розглядати як геометричну прогресію з першим членом $a = 1$ і знаменником $q = -x^2$. Знайшовши суму прогресії, дістанемо

$$S'(x) = \frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

інтегруючи цю рівність на відрізку $[0;\ x] \subset (-1;\ 1)$, маємо

$$\int_0^x S'(x)dx = \int_0^x (1 - x^2 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots)dx = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2},$$

звідки

$$x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = arctg\, x, \quad |x| < 1.$$

Приклади для самостійного розв'язування

Знайти область збіжності рядів:

1. $1 - 4x + 4^2 x^2 - 4^3 x^3 + \cdots + (-4)^n x^n + \cdots;$

2. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \cdots;$

3. $\frac{(x-2)}{\sqrt{1}} + \frac{(x-2)^2}{\sqrt{2}} + \frac{(x-2)^3}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}} + \cdots;$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!} x^{2n};$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^{3n}}{n^2};$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1};$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n;$ 8. $\frac{x}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{6!} - \frac{x^4}{8!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} + \cdots;$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+4)^n}{(n-1)3^n};$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2};$ 11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-3)^n}{2^n \sqrt{n}};$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{2n} x^{2n-1};$ 13. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{(n+1)^2 e^{n-1}};$ 14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n 4^n \ln n}.$

Відповіді: 1. $(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4});$ 2. $(-1; 1];$ 3. $[1; 3);$ 4. $(-\infty; +\infty);$
5. $[-9; -7];$ 6. $[3; 5];$ 7. $(-4; 4);$ 8. $(-\infty; +\infty);$ 9. $(-7; 1);$
10. $[0; 2];$ 11. $(1; 5];$ 12. $(-0{,}1; 0);$ 13. $[-e; e];$ 14. $[-4; 4).$

2. 4. Ряд Тейлора

Досі ми вивчали властивості суми заданого степеневого ряду. Вважатимемо тепер, що функція задана, і з'ясуємо, за яких умов цю функцію можна подати у вигляді степеневого ряду і як знайти цей ряд.

Нехай функція $f(x)$ є сумою степеневого ряду

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots \tag{32}$$

в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$. У цьому разі кажуть, що функція $f(x)$ розвинена в степеневий ряд в околі точки x_0 або за степенями $x - x_0$. Знайдемо коефіцієнти ряду (32). Для цього, згідно з властивістю **4°** (**п 2.3**), послідовно диференціюватимемо ряд (32) і підставлятимемо в знайдені похідні значення $x = x_0$:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 +$$

$$+ a_4(x - x_0)^4 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots \quad ;$$

$$f(x_0) = a_0;$$

$$f'(x) = 1 \cdot a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 +$$

$$+ 4a_4(x - x_0)^3 + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \cdots \quad ;$$

$$f'(x_0) = 1 \cdot a_1;$$

$$f''(x) = 1 \cdot 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - x_0) + 4 \cdot 3a_4(x - x_0)^2 +$$

$$+ \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \cdots \quad ;$$

$$f''(x_0) = 1 \cdot 2a_2;$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4(x - x_0) +$$

$$+ \cdots + n(n-1)(n-2)a_n(x - x_0)^{n-3} + \cdots \quad ;$$

$$f'''(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot 3a_3;$$

$$f^{IV}(x) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1a_4 + \cdots + n(n-1)(n-2)(n-3)\,(x-x_0)^{n-4} + \cdots;$$

$$f^{IV}(x_0) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4a_4;$$

....

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1a_n + (n+1)n(n-1)\;\; 2a_{n+1}(x-x_0) + \cdots;$$

$$f^{(n)}(x_0) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)na_n.$$

Звідси знаходимо коефіцієнти

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \ldots, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \ldots.$$

Підставивши значення цих коефіцієнтів у рівність (32), дістанемо

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots.$$

Ряд

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots \quad (33)$$

називається рядом Тейлора функції $f(x)$. Отже, доведено таку теорему.

Теорема 1. ***Якщо функцію*** $f(x)$ ***в інтервалі*** $(x_0 - R;\, x_0 + R)$ ***можна розвинути в степеневий ряд, то цей ряд єдиний і є рядом Тейлора даної функції.***

Нехай тепер $f(x)$ – довільна нескінченне число разів диференційовна функція. Складемо для неї ряд (33). Виявляється, що сума ряду (33) не завжди збігається з функцією $f(x)$. Інакше кажучи, ряд (33) може збігатися до іншої функції, а не до функції $f(x)$, для якої його формально складено. Встановимо умови, за яких сума ряду (33) збігається з функцією $f(x)$.

Теорема 2. ***Для того щоб ряд Тейлора (33) збігався до функції*** $f(x)$ ***в інтервалі*** $(x_0 - R;\, x_0 + R)$, ***тобто***

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots,$$

необхідно і достатньо, щоб в цьому інтервалі функція мала похідні всіх порядків і залишковий член її формули Тейлора прямував до нуля при $n\to\infty$ ***для всіх*** x ***з цього інтервалу:***

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,\quad x\in(x_0-R;x_0+R). \tag{34}$$

Доведення. Відомо, що для функції, яка має похідні всіх порядків, справедлива формула Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x), \tag{35}$$

де

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\quad 0<\theta<1, \tag{36}$$

– залишковий член формули Тейлора у формі Лагранжа.

Якщо позначити n-у частинну суму ряду (33) через $S_n(x)$, то формула (35) матиме вигляд

$$f(x)=S_n(x)+R_n(x). \tag{37}$$

Нехай $f(x)$ – сума ряду (33), тобто

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=f(x),$$

тоді з формули (37) випливає умова (34). Навпаки, якщо виконується умова (34), то з формули (37) випливає рівність $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=f(x)$.

Таким чином, функцію $f(x)$ можна розвинути у ряд Тейлора в інтервалі $(x_0-R;x_0+R)$ тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови: 1) вона має похідні всіх порядків; 2) залишковий член формули Тейлора (36) прямує до нуля при $n\to 0$ і всіх $x\in(x_0-R;x_0+R)$.

Безпосередня перевірка цих умов нерідко виявляється непростою задачею. Доведемо теорему, яка дає досить прості достатні умови розвинення функції в ряд Тейлора.

Теорема 3. ***Якщо функція*** $f(x)$ ***в інтервалі*** $(x_0 - R; x_0 + R)$ ***має похідні всіх порядків та існує число*** $M > 0$ ***таке, що***

$$\left| f^{(n)}(x) \right| < M, \quad x \in (x_0 - R; x_0 + R), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{38}$$

де $f^{(0)}(x) = f(x)$***, то функцію*** $f(x)$ ***можна розвинути в ряд Тейлора***.

Доведення. Відповідно до теореми 2 досить перевірити умову (34). В силу нерівностей (38) залишковий член формули Тейлора (34) задовольняє нерівність

$$|R_n(x)| < \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}, \quad x \in (x_0 - R; x_0 + R), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{39}$$

Побудуємо степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}. \tag{40}$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{M|x - x_0|^{n+2}(n+1)!}{(n+2)!M|x - x_0|^{n+1}} = |x - x_0| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0 < 1,$$

то за ознакою Д'Аламбера ряд (40) збіжний на всій числовій осі.

Для збіжного ряду

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{M|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

тоді з нерівностей (39) знаходимо

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \quad x \in (x_0 - R; x_0 + R).$$

2.5. Розвинення елементарних функцій в ряд Маклорена

Рядом Маклорена функції $f(x)$ ***називають ряд по степенях*** x***, який можна дістати з ряду (38) при*** $x_0 = 0$ ***:***

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots. \tag{41}$$

З п.2.4 випливає таке правило розвинення функції в ряд: щоб функцію $f(x)$ розвинути в ряд Маклорена, потрібно:

а) знайти похідні $f'(x), \quad f''(x), \dots, f^{(n)}(x), \dots$;

б) обчислити значення похідних в точці $x = 0$;

в) записати ряд Маклорена (41) для даної функції і знайти інтервал його збіжності;
г) визначити інтервал $(-R;\, R)$, в якому залишковий член формули Маклорена $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Якщо такий інтервал існує (він може відрізнятися від інтервалу збіжності ряду (41)), то в цьому інтервалі функція $f(x)$ і сума ряду Маклорена збігаються:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots.$$

Ряди Маклорена деяких елементарних функцій (вони часто використовуються і їх варто запам'ятати):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in (-\infty;+\infty); \tag{42}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty;+\infty); \tag{43}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty;+\infty); \tag{44}$$

$$\begin{aligned}(1+x)^m &= 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots \\ &+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots, \quad m \in R, \quad x \in (-1;1);\end{aligned} \tag{45}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \quad x \in (-1;1); \tag{46}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^{(n-1)}\frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in (-1;1]; \tag{47}$$

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \quad x \in [-1;1]; \tag{48}$$

Доведення формул (42) – (48).

1. Нехай $f(x) = e^x$. Маємо:

а) $f^{(n)}(x) = e^x, \quad n \in N;$ б) $f^{(n)}(0) = 1, \quad n = 0,1,2,\ldots$

в) $1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$;

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty,$$

отже, знайдений ряд збігається в інтервалі (-∞; +∞);

г) $\left|f^{(n)}(x)\right|\le e^{|x|}<e^R, x\in(-R;R),$

тому за теоремою 3 (п.2.4) функцію e^x можна розвинути в степеневий ряд на довільному інтервалі $(-R;R)\subset(-\infty;+\infty)$, а отже, і на всьому інтервалі $(-\infty;+\infty)$. Формулу (42) доведено.

2. Нехай $f(x)=\sin x$. Дістанемо:

а) $f'(x)=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$;

$$f''(x)=-\sin x=\sin(x+2\frac{\pi}{2});$$

$$f'''(x)=-\cos x=\sin(x+3\frac{\pi}{2});$$

....

$$f^{(n)}(x)=\sin(x+n\frac{\pi}{2}),\quad n\in N;$$

б) $f^{(n)}(0)=\sin n\frac{\pi}{2}=\begin{cases}0, & n=0,2,4,6,\ldots;\\ -1, & n=3,7,11,\ldots;\\ +1, & n=1,5,9,\ldots;\end{cases}$

в) $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$;

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)!}{(2n+1)!}=\infty;$$

г) $\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|\sin(x + n\frac{\pi}{2})\right| \le 1 < 2, \quad x \in (-\infty; +\infty), \quad n = 0,1,2,...,$ тобто формулу (43) доведено.

3. Нехай $f(x) = \cos x$. Формулу (44) можна довести так само, як і формулу (43). Проте це можна зробити простіше, продиференціювавши почленно ряд (43).

4. Нехай $f(x) = (1+x)^m, \quad m \in R$.

Маємо:

а) $$f'(x) = m(1+x)^{m-1}, \quad f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}, ...,$$
$$f^{(n)}(x) = m(m-1)...(m-n+1)(1+x)^{m-n}, \qquad n \in N;$$

б) $f^{(n)}(0) = m(m-1)...(m-n+1), \qquad n \in N;$

в) $$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + ...$$
$$+ \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n;$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)...(m-n+1)(n+1)!}{n!m(m-1)...(m-n+1)(m-n)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right| = 1,$$

тобто ряд збіжний в інтервалі $(-1; 1)$. Доведення, що на цьому інтервалі $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0,$ опускаємо.

Ряд (45) називають ***біноміальним***. Якщо $m \in N$, дістанемо відоме розвинення двочлена, яке називають ***біномом Ньютона***:

$$(1+x)^m = \sum_{i=1}^{m}\frac{m!}{i!(m-i)!}x^i$$

Збіжність біноміального ряду в кінцевих точках інтервалу $(-1; 1)$ залежить від числа m.

Ряд (45) збіжний до функції $(1+x)^m$ у таких випадках:

при $m \ge 0$, якщо $x \in [-1; 1]$;

при $-1 < m < 0$, якщо $x \in (-1; 1]$;

при $m \le -1$, якщо $x \in (-1; 1)$.

Приймемо ці твердження без доведення.

5. Нехай $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Формулу (46) виводимо трьома способами: користуючись правилом розвинення функції в ряд; застосувавши формулу (45) і

поклавши у ній $m=-1$ і $-x$ замість x; розглядаючи ряд $1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$ як геометричну прогресію, перший член якої дорівнює одиниці, а знаменник $q=x$. Відомо (**п.1.1**), що даний ряд збіжний при $|x|<1$ і сума його дорівнює $\frac{1}{1-x}$.

6. Якщо у формулі (46) покласти $-x$ замість x і знайдений ряд проінтегрувати, то дістанемо розвинення в степеневий ряд функції $\ln(1+x)$ (формула (47)); якщо у формулі (46) покласти $-x^2$ замість x і знайдений ряд проінтегрувати, то дістанемо розвинення в степеневий ряд функції $arctgx$ (формула (48)).

Ряди (42) – (48) використовуються при знаходженні степеневих рядів для інших функцій.

Приклади

1. Розвинути в ряд функцію $f(x)=x^2\ln(1-x^3)$.

Розв'язання. Поклавши у формулі (47) $-x^3$ замість x, маємо:

$$\ln(1-x^3)=-x^3-\frac{x^6}{2}-\frac{x^9}{3}-\ldots-\frac{x^{3n}}{n}-\ldots,x\in[-1;1);$$

$$x^2\ln(1-x^3)=-x^5-\frac{x^8}{2}-\frac{x^{11}}{3}-\ldots-\frac{x^{3n+2}}{n}-\ldots,x\in[-1;1).$$

2. Розвинути в ряд за степенями x функцію $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язання.Поклавши у формулі (45) $-x^2$ замість x, при $m=-\frac{1}{2}$ дістанемо

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}x^{2n}+\ldots,x\in(-1;1).$$

3. Розвинути в ряд по степенях x функцію $f(x)=\arcsin x$.

Розв'язання. Інтегруючи знайдений в попередньому прикладі ряд в межах від 0 до x, де $|x|<1$, дістанемо

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,\ x\in(-1;1).$$

Можна довести, що ця рівність справедлива і в точках $x=\pm 1$.

Приклади для самостійного розв’язування

Розвинути наведені функції в ряд Маклорена. Вказати інтервали збіжності отриманих рядів:

1. $f(x)=e^{6x}$; 2. $f(x)=e^{-x}$; 3. $f(x)=\sin 3x$; 4. $f(x)=\cos\frac{x}{2}$;

5. $f(x)=\ln(1-\frac{x}{3})$; 6. $f(x)=\ln(1+4x)$; 7. $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$;

8. $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$; 9. $f(x)=\sqrt{1+x^3}$; 10. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^3}}$.

Розвинути наведені функції в ряд Тейлора:

11. $f(x)=\ln x$ за степенями $x-1$;

12. $f(x)=\frac{1}{x}$ за степенями $x+2$;

13. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ за степенями $x+1$;

14. $f(x)=\frac{1}{x-2}$ за степенями $x-5$;

15. $f(x)=e^{-3x}$ за степенями $x+4$;

16. $f(x)=\cos x$ за степенями $x-\frac{\pi}{4}$.

Представляючи функції у вигляді суми, добутку, похідної або інтегралу від елементарних функцій, розвинути наведені функції в ряд Маклорена і вказати інтервали збіжності отриманих рядів:

17. $f(x)=\arcsin x$; 18. $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$;

19. $f(x)=(1+x^2)arctgx$; 20. $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

21. $f(x)=\sin^2 x$; 22 . $f(x)=\frac{x-3}{(x+1)^2}$;

23. $f(x)=\ln(1+3x+2x^2)$; 24. $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$.

Розвинути в степеневий ряд функцію $f(x)$ і знайти $\int\limits_0^x f(x)dx$ у вигляді степеневого ряду:

25. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$; 26. $f(x)=\sqrt[3]{x}\cos x$;

27. $f(x)=e^{-x^2}$; 28. $f(x)=\sqrt{x}e^{x}$;

29. $f(x)=\cos x^2$; 30. $f(x)=\sqrt{1-x^3}$;

31. $f(x)=\sin x^2$; 32. $f(x)=x^3 arctgx$.

Відповіді:

1. $e^{6x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{6^n}{n!}x^n, \quad x\in(-\infty;+\infty)$;

2. $e^{-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{n!}, \quad x\in(-\infty;+\infty)$;

3. $\sin 3x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \quad x\in(-\infty;+\infty)$;

4. $\cos\dfrac{x}{2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{2^{2n}(2n)!}, \quad x\in(-\infty;+\infty)$;

5. $\ln(1-\dfrac{x}{3})=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{3^n n}, \quad x\in[-3;3)$;

6. $\ln(1+4x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{4^n}{n}x^n, \quad x\in(-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}]$;

7. $\dfrac{1}{(1+x)^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n, \quad x\in(-1;1)$;

8. $\dfrac{1}{1-x^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad x\in[-1;1]$;

9. $\sqrt{1+x^3}=1+\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{x^6}{2^2 2!}+\dfrac{3x^9}{2^3 3!}-\cdots, \quad x\in(-1;1)$;

10. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^3}}=1+\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{1\cdot 3x^6}{2^2 2!}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5x^9}{2^3 3!}+\cdots, \quad x\in(-1;1)$;

11. $\ln x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(x-1)^n}{n}$;

12. $\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x+2)^n}{2^n}$;

13. $\dfrac{1}{x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(x+1)^n$;

14. $\dfrac{1}{x-2} = -\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-5)^n}{3^n}$;

15. $e^{-3x} = e^{12}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-3)^n}{n!}(x+4)^n$;

16. $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n-1)!}(x-\dfrac{\pi}{4})^n$;

17. $\arcsin x = x + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\cdot\dfrac{x^7}{7} + \cdots, \quad x\in[-1;1]$;

18. $(1+x)\ln(1+x) = x + \dfrac{x^2}{1\cdot 2} - \dfrac{x^3}{2\cdot 3} + \dfrac{x^4}{3\cdot 4} - \cdots, \quad x\in(-1;1]$;

19. $(1+x^2)arctgx = x + 2\left(\dfrac{x^3}{1\cdot 3} - \dfrac{x^5}{3\cdot 5} + \dfrac{x^7}{5\cdot 7} - \cdots\right), \quad x\in(-1;1)$;

20. $\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = x - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\dfrac{x^5}{5} - \cdots, \quad x\in[-1;1]$;

21. $\sin^2 x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}$;

22. $\dfrac{x-3}{(x+1)^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}(1-4n)x^{n-1}$;

23. $\ln(1+3x+2x^2) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(1+2^n)}{n}x^n, \quad x\in(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}]$;

24. $\dfrac{e^x-1}{x} = 1 + \dfrac{x}{2!} + \dfrac{x^2}{3!} + \cdots + \dfrac{x^{n-1}}{n!} + \cdots, \quad x\in(-\infty;+\infty)$;

25. $\int\limits_0^x\dfrac{\sin x}{x}dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$;

26. $\int\limits_0^x\sqrt[3]{x}\cos x dx = 3\left(\dfrac{x^{\frac{4}{3}}}{4\cdot 1!} - \dfrac{x^{\frac{10}{3}}}{10\cdot 2!} + \dfrac{x^{\frac{16}{3}}}{16\cdot 4!} - \cdots\right)$;

27. $\int\limits_0^x e^{-x^2}dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)(n-1)!}$;

28. $\int\limits_0^x \sqrt{x}\cdot e^x dx = 2\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5\cdot 1!}+\frac{x^{\frac{7}{2}}}{7\cdot 2!}+\frac{x^{\frac{9}{2}}}{9\cdot 3!}+\cdots\right)$;

29. $\int\limits_0^x \cos x^2 dx = x-\frac{x^5}{5\cdot 2!}+\frac{x^9}{9\cdot 4!}-\frac{x^{13}}{13\cdot 6!}+\cdots$;

30. $\int\limits_0^x \sqrt{1-x^3}dx = x-\frac{x^4}{4\cdot 2\cdot 1!}-\frac{x^7}{7\cdot 2^2\cdot 2!}-\frac{3\cdot x^{10}}{10\cdot 2^3\cdot 3!}-\cdots$;

31. $\int\limits_0^x \sin x^2 dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)(2n-1)!}$;

32. $\int\limits_0^x x^3 arctgx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)(2n-1)}$.

2.6. Застосування степеневих рядів

1^0. ***Наближені обчислення значень функцій***. Нехай треба обчислити значення функції $f(x)$ при $x=x_0$. Якщо функцію $f(x)$ можна розвинути в степеневий ряд в інтервалі $(-R;R)$ і $x_0\in(-R;R)$, то точне значення $f(x_0)$ дорівнює сумі цього ряду при $x=x_0$, а наближене – частинній сумі $S_n(x_0)$. Похибку $\left|f(x_0)-S_n(x_0)\right|$ можна знайти, оцінюючи залишок ряду $r_n(x_0)$. Для рядів лейбніцевого типу

$$\left|r_n(x_0)\right| = \left|u_{n+1}(x_0)+u_{n+2}(x_0)+u_{n+3}(x_0)+\ldots\right| < \left|u_{n+1}(x_0)\right|.$$

Для знакозмінних і знакододатних рядів величину $r_n(x_0)$, як правило, оцінюють так:

$$\left|r_n(x_0)\right| \le \left|u_{n+1}(x_0)\right|+\left|u_{n+2}(x_0)\right|+\left|u_{n+3}(x_0)\right|+\ldots < a_1+a_2+a_3+\ldots=S,$$

де $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ – певний знакододатний збіжний ряд, сума якого S легко обчислюється (наприклад, геометрична прогресія) і для якого

$$\left|u_{n+1}(x_0)\right|\le a_1,\quad \left|u_{n+2}(x_0)\right|\le a_2,\quad \left|u_{n+3}(x_0)\right|\le a_3,\ldots.$$

Приклади

Обчислити з точністю до 0,001:

а) значення $\sin 18^0$; б) число e.

Розв'язання.

а) Скориставшись формулою (43) при $x=18^0$ або $x=\dfrac{\pi}{10}$, маємо

$$\sin 18^0=\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{10}-\frac{\pi^3}{10^3\cdot 3!}+\frac{\pi^5}{10^5\cdot 5!}-\frac{\pi^7}{10^7\cdot 7!}+\ldots.$$

Дістали ряд лейбніцевого типу. Оскільки

$\dfrac{\pi}{10}$>0,001, $\dfrac{\pi^3}{10^3\cdot 3!}$>0,001, $\dfrac{\pi^5}{10^5\cdot 5!}$<0,001,

то з точністю до 0,001

$$\sin 18^0\approx\frac{\pi}{10}-\frac{\pi^3}{10^3\cdot 3!}\approx 0{,}309.$$

б) Підставивши в ряд (42) $x=1$, знайдемо знакододатний ряд

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots.$$

Оцінимо n-й залишок цього ряду:

$$r_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+\frac{1}{(n+4)!}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}+\ldots\right)<$$

$$<\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\ldots\right)=\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\dfrac{1}{n+1}}=\frac{1}{n!n}.$$

Залишається підібрати найменше натуральне число n, щоб виконувалася нерівність $\dfrac{1}{n!n}$<0,001. Неважко обчислити, що ця нерівність виконується при $n\geq 6$, тому з точністю до 0,001 $e\approx 1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}+\dfrac{1}{5!}\approx 2{,}717.$

2^0. *Наближене обчислення визначених інтегралів.* Нехай потрібно знайти інтеграл $F(x)=\int\limits_a^x f(x)dx$, який або не виражається через елементарні функції, або складний і незручний для обчислень. Якщо функцію $f(x)$ можна розвинути в степеневий ряд, що рівномірно збігається на деякому відрізку, то для обчислення заданого інтеграла можна скористатися властивістю про почленне інтегрування цього ряду. Похибку обчислень визначають так само, як і при обчисленні значень функцій.

Приклад

Обчислити з точністю до 0,001 інтеграл $\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2}dx$.

Розв'язання. Формула Ньютона –Лейбніца тут незастосовна, тому що первісна від e^{-x^2} в елементарних функціях не виражається.

Скориставшись рядом (42), маємо

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots .$$

Цей ряд рівномірно збіжний на всій числовій осі, тому його можна почленно інтегрувати на будь-якому скінченному сегменті, зокрема на відрізку $\left[0;\ \frac{1}{3}\right]$:

$$\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2}dx = \int_0^{\frac{1}{3}} (1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots)dx = (x - \frac{x^3}{1!\cdot 3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \dots)\Big|_0^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{1!\cdot 3\cdot 3^3} + \frac{1}{2!\cdot 5\cdot 3^5} - \frac{1}{3!\cdot 7\cdot 3^6} + \dots .$$

Дістали ряд лейбніцевого типу. Оскільки

$\frac{1}{3} >$ 0,001, $\quad \frac{1}{1!\cdot 3\cdot 3^3} = \frac{1}{81} >$0,001, $\quad \frac{1}{2!\cdot 5\cdot 3^5} = \frac{1}{2430} <$0,001, то з точністю до 0,001 маємо

$$\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{81} \approx 0{,}321.$$

Як зазначалося, первісна $F(x)$ для функції $f(x) = e^{-x^2}$ не є елементарною функцією. Проте її легко знайти у вигляді степеневого ряду, проінтегрувавши ряд для функції e^{-x^2} в межах від 0 до x:

$$F(x) = \int_0^x e^{-x^2}dx = \int_0^x \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots\right)dx = x - \frac{x^3}{1!\cdot 3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \dots,$$

$$x \in (-\infty; +\infty).$$

3^0. ***Наближене інтегрування диференціальних рівнянь.*** Якщо інтегрування диференціального рівняння не зводиться до квадратур, то для наближеного інтегрування можна скористатися рядом Тейлора.

Нехай треба знайти частинний розв’язок $y(x)$ рівняння

$$y' = f(x, y), \tag{49}$$

який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$.

Припустимо, що шуканий розв’язок рівняння (49) в околі точки x_0, в якій задані початкові умови, можна розвинути в ряд

$$\begin{aligned} y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \\ + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \ . \end{aligned} \tag{50}$$

Нам треба знайти $y(x_0)$, $y'(x_0)$, $y''(x_0)$,.... Значення $y(x_0) = y_0$ задано початковою умовою. Щоб знайти похідну $y'(x_0) = y'_0$, в рівнянні (49) треба покласти $x = x_0$, $y = y_0$.

Похідну $y''(x_0) = y''_0$ знаходимо диференціюванням рівняння (49) по x:

$$y'' = f_1(x, y, y'), \tag{51}$$

поклавши в цьому рівняння $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$.

Продиференціювавши рівняння (51) і поклавши $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$, $y'' = y''_0$, дістанемо $y'''(x_0) = y'''_0$ і т.д. Процес або обривається на деякому коефіцієнті, або завершується знаходженням загального закону побудови коефіцієнтів.

Зауваження. За формулою (50) можна знаходити наближений розв’язок рівняння будь-якого порядку

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

за початковими умовами

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Приклади

Знайти три перших (відмінних від нуля) члени розвинення в ряд розв’язку рівняння:

а) $y'' = xy' + y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$

б) $y' = x^2 + y^3, \quad y(1) = -1.$

Розв’язання.

а) Шукаємо розв’язок $y(x)$ у вигляді ряду Маклорена:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots.$$

Тут $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0 \cdot 1 + 0 = 0$.

Послідовно диференціюючи дане рівняння, дістанемо:

$y''' = y' + xy'' + y' = 2y' + xy''$, $y'''(0) = 2$;

$y^{IV} = 2y'' + y'' + xy''' = 3y'' + xy'''$, $y^{IV}(0) = 0$;

$y^{V} = 3y''' + y''' + xy^{IV} = 4y''' + xy^{IV}$, $y^{V}(0) = 8$.

Підставляючи знайдені похідні в ряд Маклорена, дістанемо шуканий розв’язок

$$y(x) \approx \frac{1}{1!}x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{8}{5!}x^5 = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15}.$$

б) Шукаємо розв'язок $y(x)$ у вигляді ряду Тейлора:

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n + \ldots$$

Маємо

$y(1) = -1$; $y'(1) = 1^2 + (-1)^3 = 0$; $y'' = 2x + 3y^2y'$, $y''(1) = 2$;

$y''' = 2 + 6y(y')^2 + 3y^2y''$, $y'''(1) = 8$.

Отже, $y(x) \approx -1 + \dfrac{2}{2!}(x-1)^2 + \dfrac{8}{3!}(x-1)^3 = -1 + (x-1)^2 + \dfrac{4}{3}(x-1)^3$.

Приклади для самостійного розв’язування

1. Обчислити наближене значення $\cos 20^0$, обмежуючись першими двома членами розвинення в ряд Маклорена функції $\cos x$, і оцінити похибку.

2. Обчислити наближене значення $\ln 1{,}2$, обмежуючись першими трьома членами розвинення в ряд Маклорена функції $\ln(1+x)$ і оцінити похибку.

3. Обчислити наближене значення $\sqrt[3]{30}$, обмежуючись першими трьома членами розвинення в ряд Маклорена функції $\sqrt[3]{1+x}$ і оцінити похибку.

4. Обчислити значення $\sqrt[3]{e}$ з точністю до 0,01.

5. Обчислити значення $\sin 12^0$ з точністю до 0,001.

6. Обчислити значення $\cos 1^0$ з точністю до 0,001.

7. Обчислити значення $\sqrt[4]{80}$ з точністю до 0,001.

8. Обчислити значення $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ з точністю до 0,001.

9. Обчислити значення $\int_0^{0,125} \cos\sqrt{x}dx$ з точністю до 0,001.

10. Обчислити значення $\int_0^{0,2} \sqrt{1+x^2}dx$ з точністю до 0,0001.

11. Обчислити значення $arctg0,2$ з точністю до 0,0001.

12. Обчислити значення $\ln 2$ з точністю до 0,001.

13. Знайти чотири перших відмінних від нуля члени розвинення в ряд розв'язку рівняння $y' = x^2 + y^3, \quad y(0) = 1$.

14. Знайти два перших відмінних від нуля члени розвинення в ряд розв'язку рівняння $y' = x + 2y^2, \quad y(0) = 0$.

15. Знайти чотири перших відмінних від нуля члени розвинення в ряд розв'язку рівняння $y'' - xy^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$.

16. Знайти п'ять перших відмінних від нуля члени розвинення в ряд розв'язку рівняння $y'' = (2x-1)y - 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$.

Відповіді: 1. $\cos 20^0 \approx 0,939$, $\Delta S_2 < 0,01$; 2. $\ln 1,2 \approx 0,183$, $\Delta S_3 < 0,001$; 3. $\sqrt[3]{30} \approx 3,12$, $\Delta S_3 < 0,01$; 4. $\sqrt[3]{e} \approx 1,39$; 5. $\sin 12^0 \approx 0,208$; 6. $\cos 1^0 \approx 1$; 7. $\sqrt[4]{80} \approx 2,991$; 8. 0,748; 9. 0,440; 10. 0,2002; 11. 0,1973; 12. 0,693; 13. $y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{3x^2}{2!} + \frac{17x^3}{3!}$; 14. $y = \frac{x^2}{2!} + \frac{12x^5}{5!}$; 15. $y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{4x^4}{4!}$; 16. $y = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{5x^4}{24} - \frac{x^5}{24}$.

2.7. Рівняння і функції Бесселя

Рівняння Бесселя має вигляд

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad \nu = const. \tag{52}$$

До цього рівняння зводиться багато задач математичної фізики, небесної механіки тощо.

Шукаємо розв'язок рівняння (52) у вигляді ряду

$$y = x^p \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \tag{53}$$

Диференціюючи ряд (53) двічі і підставляючи значення y та y' в (52), дістанемо

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_R x^{k+p}((k+p)^2 + x^2 - \nu^2) = 0.$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнти при однакових степенях x, дістанемо систему рівнянь:

$$
\begin{aligned}
&при\, x^p \Rightarrow \quad a_0(p^2 - \nu^2) = 0;\\
&при\, x^{p+1} \Rightarrow \quad a_1((p+1)^2 - \nu^2) = 0;\\
&при\, x^{p+2} \Rightarrow \quad a_2((p+2)^2 - \nu^2) + a_0 = 0;\\
&при\, x^{p+3} \Rightarrow \quad a_3((p+3)^2 - \nu^2) + a_1 = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&при\, x^{p+k} \Rightarrow \quad a_k((p+k)^2 - \nu^2) + a_{k-2} = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ .
\end{aligned}
\tag{54}
$$

Вважатимемо, що $a_0 \neq 0$, тоді з першого рівняння (54) дістанемо, що $p = \pm\nu$.

Нехай $p = \nu \geq 0$, тоді з другого рівняння (54) знаходимо, що $a_1 = 0$, тому і всі коефіцієнти з непарними індексами дорівнюють нулю: $a_{2k+1} = 0$. Далі

$$
\begin{aligned}
&a_2 = -\frac{a_0}{(\nu+2)^2 - \nu^2} = -\frac{a_0}{2^2(\nu+1)};\\
&a_4 = -\frac{a_2}{(\nu+4)^2 - \nu^2} = -\frac{a_0}{2^4(\nu+1)(\nu+2)\cdot 1\cdot 2};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k!(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k)}.
\end{aligned}
\tag{55}
$$

При $p = -\nu$ так само знаходимо

$$
a_{2k+1} = 0, \quad a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k!(-\nu+1)(-\nu+2)\ldots(-\nu+k)}. \tag{56}
$$

З формул (53) і (55) дістанемо розв'язок рівняння (52) при $p = \nu$:

$$
y = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k} k!(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k)}. \tag{57}
$$

Введемо ***гамма-функцію Ейлера***

$$
\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx \qquad (p > 0).
$$

Відомо, що функція $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$ і для цілих значень $p>0$ маємо $\Gamma(p+1)=p!$. Для від'ємних p функція $\Gamma(p)$ визначається інакше, але властивість $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$ зберігається.

Якщо взяти довільну сталу

$$a_0=\frac{1}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+1)},$$

то розв'язок (57) запишеться так:

$$y=J_{\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}. \qquad (58)$$

Коли $p=-\nu$, $a_0=\dfrac{1}{2^{-\nu}\,\Gamma(-\nu+1)}$, то з (53) і (56) аналогічно дістанемо ще один розв'язок рівняння (52):

$$y=J_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)}. \qquad (59)$$

Функції $J_{\nu}(x)$ і $J_{-\nu}(x)$ називаються функціями Бесселя першого роду порядку ν і –ν відповідно. Ряд (58) збіжний при $x\in(-\infty;+\infty)$, а ряд (59) – при будь-якому $x\neq 0$.

Якщо ν – неціле, то функції $J_{\nu}(x)$ і $J_{-\nu}(x)$ лінійно незалежні, тому що їхні ряди починаються з різних степенів x. Загальний розв'язок рівняння (52) у цьому разі має вигляд

$$y=C_1J_{\nu}(x)+C_2J_{-\nu}(x).$$

Коли ν – ціле число, то $J_{-\nu}(x)=(-1)^{\nu}J_{\nu}(x)$, тобто функції (58) і (59) лінійно залежні.

Другий частинний розв'язок у цьому випадку шукають у вигляді

$$K_{\nu}(x)=J_{\nu}(x)\ln x+x^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k.$$

Підставляючи цей вираз у рівняння (52), визначають коефіцієнти b_k.

Функція $K_{\nu}(x)$ з визначеними коефіцієнтами b_k, помножена на деяку сталу, називається функцією Бесселя другого роду ν-го порядку.

Загальний розв'язок рівняння (52) матиме такий вигляд:

$$y=C_1J_{\nu}(x)+C_2K_{\nu}(x).$$

Приклад

Розв'язати рівняння Бесселя $y'' + \frac{y'}{x} + y = 0$ (при $\nu = 0$).

З формули (57) знайдемо один частинний розв'язок:

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Другий частинний розв'язок треба шукати у вигляді

$$K_0(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

Можна показати, що

$$K_0(x) = J_0(x) \ln x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \ldots.$$

Загальний розв'язок заданого рівняння такий:

$J = C_1 J_0(x) + C_2 K_0(x)$.

2.8. Поняття про степеневі ряди в комплексній області. Формули Ейлера

Ряд виду

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad \textbf{\textit{(60)}}$$

де $z = x + iy$ ***– комплексна змінна,*** $z_0, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ***– сталі комплексні числа, називається степеневим рядом у комплексній області.***

При $z_0 = 0$ з ряду (60) дістанемо ряд за степенями z:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \qquad (61)$$

Збіжність рядів (60) та (61) відповідно у точках $z = z_0$ та $z = 0$ очевидна. Під час дослідження цих рядів на збіжність в інших точках комплексної площини користуються теоремою Абеля.

Теорема. ***Якщо ряд (61) збіжний у точці*** $z = z_0 \neq 0$***, то він абсолютно збіжний і при всіх значеннях*** z***, для яких*** $|z| < |z_0|$***.***

Якщо ряд (61) розбіжний у точці $z = z_1$***, то він розбіжний і при всіх значеннях*** z***, для яких*** $|z| > |z_1|$***.***

Доведення цієї теореми таке саме, як і для степеневих рядів у дійсній області (**п.2.2**). Розглянемо геометричне тлумачення теореми Абеля для ряду (61). Оскільки для змінної $z = x + iy$ значення $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, то нерівність $|z| < |z_0|$, або $x^2 + y^2 < |z_0|^2$, у комплексній площині означає сукупність точок

z, які містяться всередені круга радіуса $|z_0|$ з центром у початку координат (рис. 2.3).

Аналогічно нерівність $|z|>|z_1|$ геометрично означає сукупність точок z комплексної площини, які лежать поза кругом радіуса $|z_1|$ з центром у початку координат. Отже, якщо z_0 – точка збіжності ряду (61), то цей ряд буде абсолютно збіжним у всіх внутрішніх точках круга $|z|<|z_0|$. Якщо z_1 – точка розбіжності ряду (61), то цей ряд буде розбіжним у всіх точках поза кругом $|z|>|z_1|$.

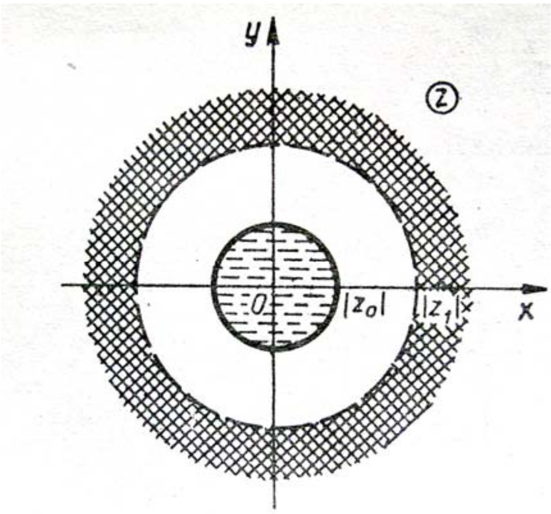

Рис. 2.3

З теореми Абеля випливає існування такого числа R, що для всіх $|z|<R$ степеневий ряд (61) збіжний, а при $|z|>R$ розбіжний.

Круг радіуса R, де $0<R<+\infty$, з центром у початку координат, всередині якого степеневий ряд (61) абсолютно збіжний, а зовні якого розбіжний, називають кругом збіжності цього ряду, а число R – радіусом збіжності. Якщо ряд (61) збіжний лише в точці $z=0$, то вважають, що $R=0$, а якщо ряд (61) збіжний в усій площині, то $R=+\infty$.

Круг збіжності ряду (60) матиме центр у точці $z=z_0$. Радіус збіжності рядів (60) і (61) можна знаходити так само, як і для рядів з дійсними числами (**п. 2.2**). На межі круга збіжності, тобто в точках, де $|z|=R$, залежно від конкретних випадків ряд може бути як збіжним, так і розбіжним. Всередині круга збіжності ряд (61) має властивості, аналогічні властивостям степеневих рядів дійсної змінної.

Сума степеневого ряду в крузі його збіжності є деякою комплексною функцією комплексної змінної z. Такі функції називаються аналітичними.

Приклад

Дослідити на збіжність степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)^2}$.

Оскільки $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|z|^{n+1}(n+1)^2}{|z|^n(n+2)^2} = |z|,$$

то за ознакою Д’Аламбера ряд збіжний у крузі $|z|<1$.

При $|z|=1$ маємо збіжний ряд, оскільки ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots$$

є збіжним (узагальнений гармонічний ряд, у якому $\alpha = 2>1$). Отже, областю збіжності заданого ряду є значення z, для яких $|z|\le 1$.

За допомогою рядів в комлексній області узагальнимо поняття показникової та тригонометричних функцій на випадок комплексної змінної та доведемо формули Ейлера.

Розглянемо розвинення в степеневий ряд функції e^x:

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\quad x\in(-\infty;+\infty). \tag{62}$$

Якщо дійсну змінну x замінити комплексною змінною z, то матимемо ряд вигляду

$$1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots. \tag{63}$$

Оскільки

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty,$$

то ряд (63) є абсолютно збіжним на всій комплексій площині. Позначимо його суму через e^z. Отже, за означенням для довільного комплексного числа

$$e^z = 1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots,\quad |z|<\infty. \tag{64}$$

Сума ряду (64) є ***комплексною функцєю комплексної змінної*** z.

Аналогічно визначаються тригонометричні функції:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + ..., \quad |z| < \infty; \tag{65}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + ..., \quad |z| < \infty. \tag{66}$$

Між показниковою функцією e^z і тригонометричними функціями $\sin z$ та $\cos z$ існує простий зв'язок. Підставимо в ряд (64) значення iz замість z і згрупуємо окремі доданки, які містять множник i і які цього множника не містять:

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \frac{(iz)^6}{6!} + \frac{(iz)^7}{7!} + ... =$$
$$= 1 + i\frac{z}{1!} - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} - i\frac{z^7}{7!} + ... =$$
$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + ...\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + ...\right).$$

Порівнюючи ряди в дужках з рядами (65) і (66), дістаємо

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \tag{67}$$

Аналогічно, підставляючи в ряд (64) замість z значення $-iz$, дістаємо

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \tag{68}$$

Формули (67) і (68) називаються формулами Ейлера. Якщо почленно додати (відняти) рівності (67) і (68), то матимемо іншу форму запису формул Ейлера:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Завдання для самоконтролю

1. Який ряд називається функціональним? Що називається областю його збіжності?
2. Який функціональний ряд називається рівномірно збіжним? Дати геометричне тлумачення рівномірної та нерівномірної збіжності.
3. Сформулювати і пояснити властивості рівномірно збіжних рядів.

4. Сформулювати і довести ознаку Вейєрштрасса.

5. Який ряд називається степеневим? Сформулювати і довести теорему Абеля.

6. Навести приклади степеневих рядів, радіус збіжності яких: 1) R=0; 2) R=+∞; 3) 0<R<+∞.

7. Сформулювати і пояснити властивості степеневих рядів.

8. Що називається рядом Тейлора для функції $f(x)$? Як знайти коефіцієнти ряду Тейлора?

9. Сформулювати і довести теорему про необхідні і достатні умови, за яких сума ряду Тейлора функції $f(x)$ збігається з цією функцією.

10. Який ряд називається рядом Маклорена? Розвинути в ряд Маклорена функції: e^x; $\sin x$; $\cos x$; $(1+x)^m$; $\ln(1+x)$; $arctgx$.

11. Як наближено обчислити значення функції за допомогою степеневого ряду? Вказати способи оцінки залишку ряду. Навести приклади.

12. У чому полягає метод інтегрування функцій за допомогою рядів? Навести приклади.

13. У чому полягає метод інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою рядів? Навести приклади.

14. Що називається степеневим рядом комплексної змінної?

15. Сформулювати теорему Абеля для степеневого ряду комплексної змінної z і довести формули Ейлера.

16. Дати визначення функцій e^z, $\sin z$, $\cos z$, комплексної змінної z та довести формули Ейлера.

17. Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^n x$.

18. Довести, що ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^n}$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ рівномірно збіжні на всій числовій осі.

19. Довести, що радіус збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n n! x^{2n}$ дорівнює $R=\sqrt{\frac{e}{2}}$.

20. Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{n-1}}{(2n-1)^2\sqrt{3^{n-1}}}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3n+1}$.

21. Показати, що:

1) $\ln\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}((-1)^{n+1}2^n+1)\frac{x^n}{n}, \quad x \in \left(-\frac{1}{2};+\frac{1}{2}\right)$.

2) $\frac{1-\cos 2x}{2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty;+\infty)$.

22. Обчислити $\sqrt[3]{130}$ з точністю до 0,0001.

23. Обчислити з точністю до 0,001:

а) $\int\limits_0^{1/2} \frac{arctgx}{x} dx$; б) $\int\limits_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$; в) $\int\limits_0^{1/3} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

24. Знайти чотири відмінні від нуля члени розвинення в степеневий ряд розв'язку диференціальних рівнянь:

а) $y' = y^2 + x^2, \quad y(0) = 0,5$; б) $y'' = (y')^2 + xy, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$.

25. Розв'язати рівняння Бесселя $y'' + y'\frac{1}{x} + y = 0$.

26. Знайти круг і радіус збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n^2(1+i)^n}$.

Відповіді:

17. а) $(0; +\infty)$; б) $(e^{-1}; e)$. 20. а) $\left[\frac{-\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$; б) $[1; 3)$.

22. $\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{125+5} = 5\left(1 + \frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 5,0658$.

23. а) 0,409; б) 0,098; в) 0,333.

24.а) $y = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \ldots$; б) $y = 1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{8} + \ldots$.

26. а) $|z| < 1$, R=1; б) $|z - i| < \sqrt{2}$, $R = \sqrt{2}$.

3. ЗРАЗКИ ВАРІАНТІВ КОНТРОЛЬНОЇ МОДУЛЬНОЇ РОБОТИ ТА ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

3.1. Числові ряди

Варіант 1

1. Для дослідження на збіжність яких рядів застосовується інтегральна ознака Коші:
а) знакозмінних; б) знакододатних; в) степеневих; г) лейбніцевого типу?
2. Сформулювати інтегральну ознаку Коші.
3. Довести інтегральну ознаку Коші.
4. Який з наведених рядів досліджується на збіжність з використанням

інтегральної ознаки Коші:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^n}{(2n+1)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^n$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2+4}$?

Дослідити вибраний ряд на збіжність.

Варіант 2

1. Яка ознака може бути застосована при дослідженні на збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^3}\right)^n:$$

а) інтегральна ознака Коші; б) радикальна ознака Коші; в) ознака Лейбніца; г) ознака Д’Аламбера; д) ознака порівняння; є) необхідна ознака збіжності?

2. Сформулювати вибрану ознаку збіжності.
3. Довести вибрану ознаку збіжності.
4. Дослідити даний ряд на збіжність.

Варіант 3

1. Який з наведених рядів досліджується на абсолютну та умовну збіжність:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n}\frac{n}{n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{2^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\frac{n!}{n^2+1}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$?

2. Який ряд називають знакозмінним? Сформулювати ознаку абсолютної та умовної збіжності для знакозмінного ряду.
3. Довести ознаку збіжності знакозмінних рядів.
4. Дослідити вибраний ряд на абсолютну збіжність.

3.2. Степеневі ряди

Варіант 1

1. Який з наведених рядів є степеневим:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{x^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a_n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x$?

2. Сформулювати теорему Абеля. Що називають радіусом збіжності та інтервалом збіжності степеневого ряду (зробити рисунок)?

За якою з наведених формул обчислюється радіус збіжності степеневого ряду:

а) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right|$; б) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$; в) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$; г) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$?

3. Довести вибрану фрмулу.

4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2^n\cdot(2n+1)}x^n$ і дослідити його на кінцях інтервалу збіжності.

Варіант 2

1. Який з наведених рядів є степеневим:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{(x-x_0)^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-x_0)^n}{a_n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)$?

2. Сформулювати основні властивості степеневих рядів.
3. Для якого з наведених рядів можна знайти радіус збіжності за формулою $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{3n-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^{2n+1}}{n^2+4}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{n^2}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^n}x^{3n}$?

4. Знайти радіус та інтервал збіжності вибраного ряду.

Варіант 3

1. Який ряд називається рядом Тейлора для функції $f(x)$? Записати формулу.
2. Довести записану формулу.
3. Яку з наведених функцій можна розвинути в ряд Тейлора за степенями $(x-2)$ (тобто $x_0=2$):

а) $f(x)=\dfrac{x^2}{(x-2)^3}$; б) $f(x)=\sqrt{x-2}$; в) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$?

4. Розвинути в ряд Тейлора за степенями $(x-2)$ вибрану функцію.

Варіант 4

1. Який ряд називається рядом Маклорена для функції $f(x)$? Записати формулу.
2. Який ряд називають біноміальним? Записати формулу.
3. Довести записану формулу.
4. Використовуючи біноміальний ряд для функції $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{2}}$, розвинути в степеневий ряд функцію $\varphi(x)=x^5\sqrt{1+x}$.

3.3 Індивідуальні завдання

Варіант 1

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а) $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{4}{11}+\ldots$; б) $2+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\frac{2^4}{4}+\ldots$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{20^n}{n!}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$; д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$; е) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(n+3)}$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$; з) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$; и) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}arctg\frac{1}{\sqrt{n}}$; к) $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(\frac{n-1}{n+2}\right)$.

2. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(3n+1)^2}$;в) $\frac{1}{2^4}+\frac{1}{5^4}-\frac{1}{10^4}-\frac{1}{17^4}+\frac{1}{26^4}+\frac{1}{37^4}-\ldots$

3. Знайти область збіжності функціональних рядів:

а) $\frac{x}{2!}-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}-\frac{x^4}{5!}+\ldots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n5^n\sqrt{(x-1)^n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n! x^{2n}}{(2n)!}$.

4. а) Розвинути функцію $f(x)=e^{6x}$ в ряд Маклорена, використовуючи стандартне розвинення елементарної функції, і вказати проміжок збіжності отриманого ряду;

б) Розвинути функцію $f(x)=\ln x$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0=1$.

5. Обчислити $\sqrt[3]{e}$ з точністю до 0,001.

6. Знайти три перших (відмінних від нуля) члени розвинення в степеневий ряд розв’язку рівняння $y'=x^2+y^2-e^x$, $y(0)=0$.

Варіант 2

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а) $\frac{1}{2}+\frac{4}{5}+\frac{7}{8}+\frac{10}{11}+\ldots$; б) $\frac{2^4}{1^4}+\frac{3^4}{2^4}+\frac{4^4}{3^4}+\frac{5^4}{4^4}+\ldots$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n^2}{5^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^n}$;

ж) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2+1}$; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{n}}-1)$; к) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}tg\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

2. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{4n^2-1}$; в) $\frac{1}{3}-\frac{4}{9}+\frac{9}{27}-\frac{16}{81}+\ldots$.

3. Знайти область збіжності функціональних рядів:

а) $1-4x+4^2x^2-4^3x^3+\ldots$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$.

4. а). Розвинути функцію $f(x)=e^{-x}$ в ряд Маклорена, використовуючи стандартне розвинення елементарної функції, і вказати проміжок збіжності отриманого ряду;

б). Розвинути функцію $f(x)=\frac{1}{x}$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0=1$.

5. Обчислити $\cos 20^0$, обмежуючись першими двома членами розвинення функції $\cos x$ в ряд Маклорена, з точністю до 0,0001.

6. Знайти три перших (відмінних від нуля) члени розвинення в степеневий ряд розв'язку рівняння $y'=2x-3\ln y+y,\quad y(0)=1$.

Варіант 3

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а). $\frac{1}{3}+\frac{2}{7}+\frac{3}{11}+\frac{4}{15}+...$; б). $\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{4}{5}}+\sqrt{\frac{6}{7}}+\sqrt{\frac{8}{9}}+...$; в). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(20n+2)!}{(3n+5)2n}$;

г). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{(n+1)!}$; д). $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n$; е). $\sum_{n=1}^{\infty}n^n\sin^n\frac{1}{n}$; ж). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2-1}$;

з). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$; и). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$; к). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

2. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність знакозмінні ряди:

а). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{n-1}}$; б). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$; в). $\frac{1}{10}+\frac{7}{10^2}-\frac{13}{10^3}+\frac{19}{10^4}+\frac{25}{10^5}-...$

3. Знайти область збіжності функціональних рядів:

а). $(x-2)+\frac{(x-2)^2}{\sqrt{2}}+\frac{(x-2)^3}{\sqrt{3}}+\cdots$; б). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}$; в). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^{2n}}{n^2}$.

4. а). Розвинути функцію $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ в ряд Маклорена, використовуючи стандартне розвинення елементарної функції, і вказати проміжок збіжності отриманого ряду.

б). Розвинути функцію $f(x)=\frac{1}{x^2}$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0=-1$.

5. Обчислити з точністю до 0,0001, обмежуючись першими трьома членами розвинення функції $\ln(1+x)$ в ряд Маклорена.

6. Знайти три перших (відмінних від нуля) члени розвинення в степеневий ряд розв'язку рівняння $y'=2x^2+3y\cos x+2,\quad y(0)=0$.

Варіант 4

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\ldots$; б) $\frac{4}{7}+\frac{7}{12}+\frac{10}{17}+\frac{13}{22}+\ldots$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{5n+1}\right)^n$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+3}\right)^{2n}$; ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2+1}$; з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctgn}{n^2+1}$;

и) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n+1}}$; к) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n^3+1)n}}$.

2. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{5}$; в) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}+\ldots$

3. Знайти область збіжності функціональних рядів:

а) $\frac{x}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^3}{6!}-\frac{x^4}{8!}+\ldots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{\sqrt[3]{7n^3-4}}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{n4^n\ln n}$.

4. а) Розвинути функцію $f(x)=\ln(1-\frac{x}{3})$ в ряд Маклорена, використовуючи стандартне розвинення елементарної функції, і вказати проміжок збіжності отриманого ряду.

б) Розвинути функцію $f(x)=\frac{1}{x-2}$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0=5$.

5. Обчислити $\sqrt[3]{30}$ з точністю до 0,0001.

6. Знайти три перших (відмінних від нуля) члени розвинення в степеневий ряд розв'язку рівняння $y'=x^3+y^2-e^x$, $y(0)=1$.

Варіант 5

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{6}{7}+\frac{8}{9}+\ldots;$ б) $\sqrt{\frac{1}{5}}+\sqrt{\frac{2}{7}}+\sqrt{\frac{3}{9}}+\sqrt{\frac{4}{11}}+\ldots;$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n};$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!};$ д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3^n}};$ е) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2};$

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+7};$ з) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n};$ и) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n+1};$ к) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arcsin\frac{1}{n}}{n}.$

2. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{10}{11}\right)^n n^5;$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^3}{e^n};$

в) $\left(\frac{2}{2}\right)^3+\left(\frac{3}{4}\right)^3-\left(\frac{4}{6}\right)^3-\left(\frac{5}{8}\right)^3+\left(\frac{6}{10}\right)^3+\ldots$

3. Знайти область збіжності функціональних рядів:

а) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots;$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+4)^4}{(n+1)3^n};$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}10^{2n}x^{2n-1}.$

4. а) Розвинути функцію $f(x)=\ln(1+4x)$ в ряд Маклорена, використовуючи стандартне розвинення елементарної функції, і вказати проміжок збіжності отриманого ряду.

б) Розвинути функцію $f(x)=e^{-3x}$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0=-4$.

5. Обчислити $\sin 12^0$ з точністю до 0,001.

6. Знайти три перших (відмінних від нуля) члени розвинення в степеневий ряд розв’язку рівняння $y'=x^2y+e^y+x,\quad y(0)=0$.

Варіант 6

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{8}{7}+\frac{16}{9}+\ldots$; б) $\left(\frac{2}{2}\right)^3+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\left(\frac{4}{6}\right)^3+\left(\frac{5}{8}\right)^3+\ldots$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{2^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{\sqrt{n}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{e^n}$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n-1}}$; з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4+9n^2}$; и) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$; к) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{1+\frac{2}{n}}-1)$.

2. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{4^n+1}$; в) $1-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}-\frac{1}{5^4}-\frac{1}{6^4}+\ldots$.

3. Знайти область збіжності функціональних рядів:

а) $\frac{x}{2\cdot 4\ln 2}+\frac{x^2}{3\cdot 4^2\ln 3}+\frac{x^3}{4\cdot 4^3\ln 4}+\frac{x^4}{5\cdot 4^4\ln 5}+\ldots$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-3)^n}{2^n\sqrt{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-4)^{n-1}x^{2n-1}$.

4. а) Розвинути функцію $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$ в ряд Маклорена, використовуючи стандартне розвинення елементарної функції, і вказати проміжок збіжності отриманого ряду.

б) Розвинути функцію $f(x)=\cos x$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0=\frac{\pi}{4}$.

5. Обчислити $\sqrt[4]{80}$ з точністю до 0,001.

6. Знайти три перших (відмінних від нуля) члени розвинення в степеневий ряд розв’язку рівняння $y'=\sin 2x+xy$, $y(0)=1$.

Варіант 7

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а) $\frac{11}{21}+\frac{21}{31}+\frac{31}{41}+\frac{41}{51}+\ldots$; б) $\frac{3}{2+3}+\frac{3^2}{2^2+3^2}+\frac{3^3}{2^3+3^3}+\frac{3^4}{2^4+3^4}+\ldots$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{5^n(2n+1)}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(3n)!}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2^n}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{n^2}$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1}$; з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+4}$; и) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{3n+5}}$; к) $\sum_{n=1}^{\infty}(3^{\frac{1}{n}}-1)$.

2. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+3}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}3^n}{\sqrt{n+1}}$; в) $\frac{1}{1+1^2}-\frac{1}{1+2^2}-\frac{1}{1+3^2}+\frac{1}{1+4^2}-\ldots$.

3. Знайти область збіжності функціональних рядів:

а) $x+\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{3\cdot 4}-\ldots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2x)^n}{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^{2n}}{2^{2n}(2n)!}$.

4. а) Розвинути функцію $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$ в ряд Маклорена, використовуючи стандартне розвинення елементарної функції, і вказати проміжок збіжності отриманого ряду.

б) Розвинути функцію $f(x)=e^x$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0=-2$.

5. Обчислити $\cos 1^0$ з точністю до 0,001.

6. Знайти три перших (відмінних від нуля) члени розвинення в степеневий ряд розв’язку рівняння $y'=e^{-2x}+y^2$, $y(0)=1$.

Варіант 8

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а) $1+\dfrac{3}{2\cdot 2}+\dfrac{3^2}{3\cdot 2^2}+\dfrac{3^3}{4\cdot 2^3}+\ldots;$ б) $\sqrt{\dfrac{1}{2}}+\sqrt{\dfrac{2}{3}}+\sqrt{\dfrac{3}{4}}+\sqrt{\dfrac{4}{5}}+\ldots;$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{2^n};$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{\sqrt{n3^n}};$ д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^n};$ е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{5n-3}{3n+1}\right)^n;$

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(n+1)};$ з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{100n+2};$ и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2^{\frac{1}{n}}-1)}{n};$ к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}.$

2. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n-1}{2^n};$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}n}{6n-5};$

в) $\dfrac{1}{(2\cdot 1-1)^2}-\dfrac{1}{(2\cdot 2-1)^2}-\dfrac{1}{(2\cdot 3-1)^2}+\dfrac{1}{(2\cdot 4-1)^2}-\ldots\ .$

3. Знайти область збіжності функціональних рядів:

а) $x+\dfrac{x^3}{2\cdot 1!}+\dfrac{x^5}{2^2\cdot 2!}+\dfrac{x^7}{2^3\cdot 3!}+\ldots;$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(3x+2)^n}{(2n-1)2^{n-1}};$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n(x-3)^n.$

4. а) Розвинути функцію $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ в ряд Маклорена, використовуючи стандартне розвинення елементарної функції, і вказати проміжок збіжності отриманого ряду.

б) Розвинути функцію $f(x)=\cos^2 x$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

5. Обчислити $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$ з точністю до 0,001.

6. Знайти три перших (відмінних від нуля) члени розвинення в степеневий ряд розв'язку рівняння $y' = \cos x + e^y + x,\quad y(0)=1.$

Варіант 9

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а) $\sqrt{\frac{5}{9}}+\sqrt{\frac{8}{14}}+\sqrt{\frac{11}{19}}+\sqrt{\frac{14}{24}}+\ldots$; б) $\left(\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^3+\left(\frac{3}{2}\right)^4+\ldots$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{2^n n!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^n\left(\frac{e^n n^{n+1}}{n^2}\right)$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}tg\,\frac{\pi}{2^{2n}}$; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3+n^2}$; к) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\sqrt{\ln\ln n}}$.

2. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2n+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln(n+1)}{n+1}$;

в) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3+1}+\frac{1}{3^3+1}-\frac{1}{4^3+1}+\ldots$.

3. Знайти область збіжності функціональних рядів:

а) $\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2}+\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{4}{5}\left(\frac{x}{2}\right)^4+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(5x)^4}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x)^{3n}}{8^n(4n-3)}$.

4. а) Розвинути функцію $f(x)=\sin^2 x$ в ряд Маклорена, використовуючи стандартне розвинення елементарної функції, і вказати проміжок збіжності отриманого ряду.

б) Розвинути функцію $f(x)=e^{-x}$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0=-1$.

5. Обчислити $arctg\ 0{,}2$ з точністю до 0,0001.

6. Знайти три перших (відмінних від нуля) члени розвинення в степеневий ряд

розв'язку рівняння $y'=xe^x+y^2+1,\quad y(0)=0$.

Варіант 10

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а) $\frac{1}{10}+\frac{7}{10^2}+\frac{13}{10^3}+\frac{19}{10^4}+...$; б) $\frac{2\cdot 1}{3\cdot 1-1}+\frac{2\cdot 2}{3\cdot 2-1}+\frac{2\cdot 3}{3\cdot 3-1}+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 4-1}+...$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{5^n+1}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10}{11}\right)^n n^5$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(10n+2)^n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\arcsin\frac{1}{n}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m-1}{m}\right)^n$, m>1; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{5n+2}\right)^{n^2}$;

к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)$.

2. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n+1}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+4n+5}$; в) $\frac{1}{2}-\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}-\frac{7}{2^4}+...$.

3. Знайти область збіжності функціональних рядів:

а) $\frac{x}{1+2}-\frac{x^2}{1+2^2}+\frac{x^3}{1+2^3}-...$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(3x)^{2n}}{4^n}$.

4. а) Розвинути функцію $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$ в ряд Маклорена, використовуючи стандартне розвинення елементарної функції, і вказати проміжок збіжності отриманого ряду.

б) Розвинути функцію $f(x)=e^x$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0=\frac{\pi}{6}$.

5. Обчислити $\int\limits_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$ з точністю до 0,001.

6. Знайти три перших (відмінних від нуля) члени розвинення в степеневий ряд розв’язку рівняння $y'=tgx+xy^2-e^x$, $y(0)=1$.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Овчинников П.П. Вища математика: підручник у 2-х ч. Ч.2. Диференціальні рівняння та інші розділи. / Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. – К.: Техніка, 2004. – 792 с.

2. Шкіль Н.І. Визначений інтеграл, функції багатьох змінних, диференціальні рівняння, ряди. / Шкіль Н.І., Колесник Т.В. – К.: Вища шк., 1986. – 512 с.

3. Бугров Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. / Бугров Я.С., Никольский С.М. – М.: Наука, 1981.- 448 с.

4. Шнейдер В.Е. Краткий курс высшей математики. / Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. – М.: Высш. шк., 1978.– Т.2. –328 с.

5. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. / Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. – М.: Высш. шк., 1980. – Ч.2. – 365 с.

6. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высш. шк., 1966. – 479 с.

7. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа.− М.: Наука., 1968.− Т.2. – 463.

Навчальне видання

Бугрим Ольга Володимирівна
Бойко Любов Йосипівна

ЧИСЛОВІ ТА СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

ПРИКЛАДИ ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Навчальний посібник
для студентів напряму підготовки 6.050301 Гірництво

Друкується в авторській редакції.

Підп. до друку 05.11.2014. Формат 30х42/4.
Папір офсетний. Ризографія. Ум. друк. арк. 4,4.
Обл.-вид. арк. 4,4. Тираж 50 пр. Зам. №

Підготовлено до друку та видрукувано
у Державному вищому навчальному закладі
«Національний гірничий університет».
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК №1842 від 11.06.2004.

49027, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19