МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

ГЕОЛОГОРОЗВІДУВАЛЬНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра вищої математики

В.І. Павліщев
Л.Й. Бойко
М.І. Горбатов

ВИЩА МАТЕМАТИКА НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

(в прикладах і задачах)

Навчальний посібник

Дніпропетровськ
НГУ
2015

УДК 517.3(075.8)
ББК 22.161.1я73
П 12

Рекомендовано вченою радою Державного ВНЗ «Національний гірничий університет» як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (протокол № 8 від 29.09.2014).

Рецензенти:
О.В. Бугрим, канд. фіз.-мат. наук, доц. (Державний ВНЗ «Національний гірничий університет);
В.Ф. Сторчай, канд. фіз.-мат. наук, проф. (Державний ВНЗ «Національний гірничий університет).

Автори:
В.І. Павліщев, канд. техн. наук, доц. (передмова, розд. 1 – 3);
Л.Й. Бойко, канд. фіз.-мат. наук, доц. (розд. 4 – 8);
М.І. Горбатов, ст. викл. (розд. 1 – 8).

Павліщев В.І.
П 12 Вища математика. Невизначений інтеграл (у прикладах і задачах) навч. посіб. / В.І. Павліщев, Л.Й. Бойко, М.І. Горбатов ; М-во освіти і науки України, Нац. гірн. ун-т. – Д.: НГУ, 2015. – 71 с.

Матеріал посібника відповідає програмі вищої математики за розділом «Невизначений інтеграл» для всіх спеціальностей.

Містить 141 типову задачу не вище середнього рівня складності, теоретичні основи, методичні рекомендації, а також, власне, розв’язання задач. Орієнтовано на організацію системної самопідготовки.

Розглядаються визначення, властивості й таблиця невизначених інтегралів, методи заміни змінної та інтегрування за частинами, способи інтегрування раціональних дробів, тригонометричних та ірраціональних функцій.

Для студентів усіх спеціальностей денної, вечірньої, заочної, дистанційної форм навчання та екстернату.

УДК 517.3(075.8)
ББК 22.161.1я73

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник «Вища математика. Невизначений інтеграл» підготовлено з метою підвищення якості та прогнозування результатів навчання студентів у галузях знань: розробка корисних копалин, інформатика та обчислювальна техніка, машинобудування та матеріалообробка.

Обсяг і зміст посібника відповідає дисципліні «Вища математика». Містить основні питання теорії, завдання, методичні вказівки, рекомендації та приклади розв'язання задач. Тут зібрані задачі не вище середнього рівня складності. Використано матеріали задачників Г.М. Бермана, В.П. Мінорського, підручників Г.М. Фіхтенгольца, М.С. Піскунова та ін.

Прослухавши лекції, студенти за допомогою даного навчального посібника навчаться практично застосовувати теорію до вирішення задач, установлювати тип невизначеного інтеграла, ідентифікувати його з відомими методами і способами обчислення.

Матеріал цього видання може також бути використаний для планування і формування загальних та індивідуальних контрольних і тестових завдань, діагностування засвоєння навчальної програми, а також загального та індивідуального контролю знань і прогнозування результатів.

1. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

1.1. Поняття первісної і невизначеного інтеграла

Диференціювання та інтегрування – дві основні операції математичного аналізу. Перша встановлює поведінку функції у кожній окремо взятій точці проміжку, тобто характеризує функцію локально, а друга описує той самий об'єкт на проміжку в цілому, іншими словами, є глобальною характеристикою функції. Так, похідна від пройденого шляху за часом визначає миттєву швидкість руху. При інтегруванні швидкості вирішується зворотне завдання: пройдений шлях за даний проміжок часу дорівнює інтегралу від швидкості, а при інтегруванні прискорення отримуємо швидкість руху.

Інтегруванням можна знайти роботу змінної сили, площу, об`єм, момент інерції тіла, масу і центр ваги тіла, міцність конструкції, загазованість шахти і багато інших важливих характеристик.

Визначення 1. Первісною від даної функції $f(x)$ називається така функція $F(x)$, похідна якої дорівнює даній функції або, що те ж саме, диференціал якої дорівнює виразу $f(x)dx$:

$$F'(x) = f(x) \text{ або } dF(x) = f(x)dx.$$

Приклад 1. Нехай $f(x) = 2x$. Для якої функції $2x$ служить похідною? Очевидно, що для x^2, оскільки $\left(x^2\right)' = 2x$ або $d(x^2) = 2xdx$. Отже, $F(x) = x^2$. Але не тільки ця функція є первісною для функції $f(x) = 2x$. Дійсно, $\left(x^2 - 5\right)' = 2x$, $\left(x^2 + 10\right)' = 2x$ і взагалі $\left(x^2 + C\right)' = 2x$ (C – довільна постійна). Тому виникає питання про відшукання всіх первісних від даної функції.

Теорема 1. Якщо $F(x)$ є первісна від функції $f(x)$ на проміжку X, то всяка інша первісна від $f(x)$ відрізняється від $F(x)$ на величину постійного доданка, тобто може бути подана у вигляді $F(x) + C$, де C – довільна стала.

Теорема 2. Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку X, то для цієї функції завжди існує первісна.

Визначення 2. Сукупність усіх первісних від функції $f\left(x\right)$ на проміжку x, тобто вираз $F\left(x\right) + C$, де C – довільна стала, називається **невизначеним інтегралом**.

Записують

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Тут $f(x)$ – підінтегральна функція; $f(x)dx$ – підінтегральний вираз; x – змінна інтегрування; $\int$ – знак невизначеного інтеграла.

Зауваження 1. Під знаком невизначеного інтеграла стоїть не похідна шуканої функції, а її диференціал.

Зауваження 2. Відшукання всіх первісних для функції $f(x)$ називається інтегруванням цієї функції.

Зауваження 3. Графік функції F(x), первісної від функції $f(x)$, називається інтегральною кривою.

Приклад 2. Нехай $\int 2xdx = x^2 + C$.

Побудуємо кілька інтегральних кривих, наприклад, $y = F(x) + 1$, $y = F(x)$, $y = F(x) - 1$, де $F(x) = x^2$ (рис. 1).

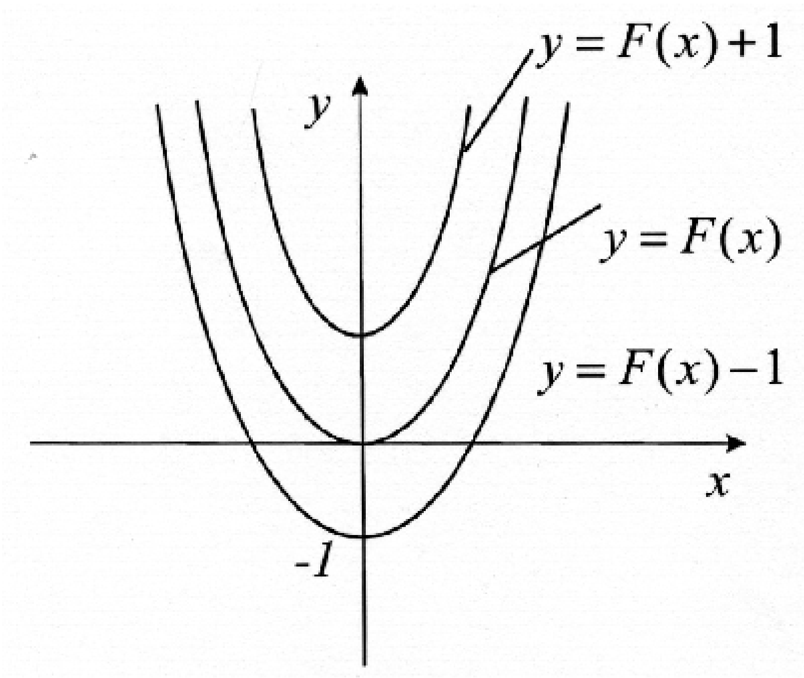

Рис. 1

Очевидно, що всі криві сім'ї $y = F(x) + C$ можуть бути отримані з однієї інтегральної кривої паралельним зміщенням у напрямку осі OY.

Отже, геометрично безліч первісних – це сімейство інтегральних кривих, що відрізняються одна від одної зміщенням по осі OY (рис. 1).

1.2. Властивості невизначеного інтеграла

Відповідно до визначень 1 і 2 справедливі подані далі твердження.

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції, а диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \; d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

2. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої :

$$\int dF(x) = F(x) + C .$$

3. Постійний множник можна виносити за знак інтеграла. Якщо $A = const \neq 0$, то

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx .$$

4. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від доданків:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx .$$

Висновок з 3 і 4 властивостей лінійності запишемо так:

$$\int [Af(x) + Bg(x)]dx = A\int f(x)dx + B\int g(x)dx ,$$

де A і B – постійні.

5. Нехай на одному і тому ж проміжку $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = u(x)$ – довільна неперервно диференційовна (гладка) функція. Тоді

$$\int f\left[u(x)\right]du(x) = F\left[u(x)\right] + C .$$

Зокрема, при $u = ax + b$, де a і b – постійні, маємо

$$\int f(ax+b)d(ax+b) = F(ax+b) + C \quad \text{або} \quad a\int f(ax+b)dx = F(ax+b) + C .$$

Отже, якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C .$$

Пояснимо суть останньої властивості на прикладах.

Приклад 3. Оскільки $\int x^2dx = \frac{x^3}{3} + C$, то $\int (\sin x)^2 d(\sin x) = \frac{(\sin x)^3}{3} + C$,

$$\int (\ln x)^2 d(\ln x) = \frac{(\ln x)^3}{3} + C, \quad \int \left(e^x\right)^2 d\left(e^x\right) = \frac{\left(e^x\right)^3}{3} + C,$$

$$\int (arctgx)^2 d(arctgx) = \frac{(arctgx)^3}{3} + C .$$

Приклад 4. $\int (2x-3)^2 dx = \frac{1}{2}\frac{(2x-3)^3}{3} + C = \frac{1}{6}(2x-3)^3 + C$.

1.3. Таблиця невизначених інтегралів

На підставі визначень 1, 2 і наведених вище властивостей складається таблиця невизначених інтегралів. Її правильність перевіряється диференціюванням. Будемо користуватися цією досить короткою таблицею, де як змінна інтегрування виступає довільна гладка функція.

Таблиця основних інтегралів

1. $\int du = u + C$.	8. $\int ctgu du = \ln\lvert \sin u \rvert + C$.
2. $\int u^a du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C, a \neq -1$.	9. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\lvert tg\frac{u}{2}\right\rvert + C$.
2а. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$.	10. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\lvert tg\left(\frac{u}{2} + \frac{p}{4}\right)\right\rvert + C$.
2б. $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$.	11. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \int \sec^2 u du = tgu + C$.
3. $\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u \rvert + C$.	12. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = \int \operatorname{cosec}^2 u du = -\operatorname{ctg} u + C$.
4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$, $a>0, a\neq 1$.	13. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C$.
4а. $\int e^u du = e^u + C$.	14. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert \frac{u-a}{u+a}\right\rvert + C$.
5. $\int \sin u du = -\cos u + C$.	15. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$.
6. $\int \cos u du = \sin u + C$.	16. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\rvert + C$.
7. $\int tgu du = -\ln\lvert \cos u \rvert + C$.	17. $\int u dv = uv - \int v du$.

Перевіримо, наприклад, правильність формули 4 . Для цього знайдемо диференціали від обох частин рівності, використовуючи формулу $dy = y' \cdot dx$:

$d(\int a^u du) = d(\frac{a^u}{\ln a} + C)$; $d(\int a^u du) = a^u du$ (див. властивість 1);

$$d(\frac{a^u}{\ln a} + C) = d(\frac{a^u}{\ln a}) + dC = \frac{1}{\ln a} \cdot d(a^u) + 0 = \frac{1}{\ln a} \cdot a^u \cdot \ln a \cdot du = a^u du .$$

При інтегруванні часто використовують такі перетворення диференціала, в яких a і b – постійні величини:

I. $dx = d(x + a)$.

II. $dx = \frac{1}{a} d(ax)$, $a \neq 0$.

III. $dx = \frac{1}{a} d(ax + b)$, $a \neq 0$.

IV. $j'(x)dx = d j(x)$ – підведення множника під знак диференціала.

1.4. Основні тригонометричні формули, використовувані при інтегруванні

При інтегруванні тригонометричних виразів необхідно їх перетворювати для отримання табличних інтегралів. У зв'язку з цим слід нагадати основні тригонометричні формули.

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

2. $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

3. $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.

4. $1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, $tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$.

5. $1 + ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$, $ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$.

6. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$.

7. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$.

8. $tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

9. $ctgx = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

10. $tgx \cdot ctgx = 1$.

11. $\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$.

12. $\cos a - \cos b = -2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$.

13. $\sin a + \sin b = 2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$.

14. $\sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$.

15. $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$.

16. $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$.

17. $\sin x = \dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$.

18. $\cos x = \dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$.

2. ОСНОВНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

Таблицю невизначених інтегралів необхідно доповнити способами або методами інтегрування. Одним з основних методів є безпосереднє інтегрування: після перетворення підінтегрального виразу виявляються табличні інтеграли.

Другий ефективний спосіб інтегрування – заміна змінної або підстановка. Третім основним методом є інтегрування за частинами. Суть кожного методу – звести інтеграл до табличного вигляду.

2.1. Безпосереднє інтегрування

Цей метод заснований на використанні відомих способів з елементарної математики (формул алгебри і тригонометрії, способів перетворення підінтегральної функції в суму кількох функцій), властивостей невизначеного інтеграла і формул таблиці інтегралів.

При обчисленні інтегралів праворуч від знака рівності в дужках будемо наводити формули і давати пояснення, необхідні для їх обчислення.

Приклад 5.

$$\int 5x^2(3x^2-2)^2dx = \left[(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 \right] = \int 5x^2(9x^4-12x^2+4)dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} \textit{Розподільний закон}: & \textit{дії над степенями}: \\ a(m+n+p) = am+an+ap & \quad x^k \cdot x^m \cdot = x^{k+m} \end{array} \right] =$$

$$= \int (45x^6-60x^4+20x^2)dx = \left[\begin{array}{l} \textit{властивість лінійності}: \\ \int [c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)+c_2 f_3(x)]dx = \\ = c_1\int f_1(x)dx + c_2\int f_2(x)dx + c_3\int f_3(x)dx, \\ \text{де } c_1, c_2, c_3 - \text{постійні} \end{array} \right] =$$

$$= 45\int x^6dx - 60\int x^4dx + 20\int x^2dx = \left[\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C,\ \ k \neq -1 \right] =$$

$$= 45\cdot\frac{x^7}{7} - 60\cdot\frac{x^5}{5} + 20\cdot\frac{x^3}{3} + C = \frac{45}{7}\cdot x^7 - 12\cdot x^5 + \frac{20}{3}\cdot x^3 + C.$$

Приклад 6.

$$\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx = \left[\begin{array}{l|l} \textit{почленне ділення}: & \\ \dfrac{m-n+p}{k} = \dfrac{m}{k} - \dfrac{n}{k} + \dfrac{p}{k} & \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \end{array} \right] =$$

$$= \int \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}} - 2\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}} \right) dx = \left[\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \right] = \int \left(x^{\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{5}{12}} + x^{-\frac{1}{4}} \right) dx =$$

$$= [\text{властивість } \textit{лінійності і табличний інтеграл } 2] =$$
$$= \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} - \frac{24}{17}x^{\frac{17}{12}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + C.$$

Приклад 7. $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx = \begin{bmatrix} \textit{Розподільний закон}: \\ a(m+n) = a\cdot m + a\cdot n; \\ x^m\cdot x^n = x^{m+n};\ \ a^0 = 1, \\ \text{де } a - \textit{довільне } \text{число.} \end{bmatrix} =$

$$\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx = \begin{bmatrix} \textit{Розподільний закон}: \\ a(m+n) = a\cdot m + a\cdot n; \\ x^m\cdot x^n = x^{m+n};\ \ a^0 = 1, \\ \text{де } a - \textit{довільне число}. \end{bmatrix} =$$
$$= \int e^x dx - \int\frac{dx}{x^2} = [\textit{табличні інтеграли}] = e^x + \frac{1}{x} + C.$$

Приклад 8.

$$\int\frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx = \begin{bmatrix} \textit{почленне ділення} \\ \textit{і властивість лінійності}; \\ \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \end{bmatrix} = \int\frac{dx}{\sin^2 x} - \int\sin x dx =$$
$$= \begin{bmatrix} \textit{табличні інтеграли} \\ 12\ \textit{і}\ 5 \end{bmatrix} = -ctgx + \cos x + C.$$

Приклад 9.

$$\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx = \begin{bmatrix} \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x; \\ \textit{почленне ділення } \text{і} \\ \textit{скорочення спільних множників} \end{bmatrix} =$$
$$= \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = [\textit{властивість лінійності}] =$$
$$= \int\frac{dx}{\sin^2 x} - \int\frac{dx}{\cos^2 x} = -ctgx - tgx + C = -(ctgx + tgx) + C.$$

Приклад 10.

$$\int tg^2 x dx = \left[tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1\right] = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx =$$

$$= [\,\textit{властивість лінійності}\,] = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx =$$

$$= [\,\textit{табличні інтеграли}\,] = tgx - x + C.$$

Приклад 11.

$$\int \left(1 - \sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} \right) dx = \left[\sin a \cdot \cos a = \frac{1}{2}\sin 2a \right] =$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{2}\sin x \right) dx = [\,\textit{властивість лінійності}\,] =$$

$$= \int dx - \frac{1}{2}\int \sin x dx = x + \frac{1}{2}\cos x + C.$$

Приклад 12.

$$\int \cos^2\frac{x}{2} dx = \left[\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x) \right] = \int \frac{1}{2}(1 + \cos x) dx =$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{2}\sin x \right) dx = [\,\textit{властивість лінійності}\,] =$$

$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C = \frac{1}{2}(x + \sin x) + C.$$

Приклад 13.

$$\int \frac{3 - 2ctg^2 x}{\cos^2 x} dx = [\,\textit{почленне ділення}\,] =$$

$$= \int \left(\frac{3}{\cos^2 x} - 2\frac{ctg^2 x}{\cos^2 x} \right) dx = \left[ctgx = \frac{\cos x}{\sin x} \right] =$$

$$= \int \left(\frac{3}{\cos^2 x} - 2\frac{\cancel{\cos^2 x}}{\sin^2 x \cdot \cancel{\cos^2 x}} \right) dx = [\,\textit{властивість лінійності}\,] =$$

$$= 3\int \frac{dx}{\cos^2 x} - 2\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \left[\begin{matrix} \textit{табличні інтеграли} \\ \text{11 і 12} \end{matrix} \right] = 3tgx + 2ctgx + C.$$

Приклад 14.

$$\int \left(3^x - \frac{x^2 - 1}{x} \right) dx = [\,\textit{почленне ділення}\,] =$$

$$= \int \left(3^x - x + \frac{1}{x} \right) dx = [\,\textit{властивість лінійності}\,] =$$

$$= \int 3^x dx - \int x dx + \int \frac{dx}{x} = \left[\begin{matrix} \textit{табличні інтеграли} \\ \text{4, 2 і 3} \end{matrix} \right] =$$

$$= \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C.$$

Приклад 15.

$$\int \frac{dx}{5+4x^2} = \int \frac{dx}{4\left(\frac{5}{4}+x^2\right)} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\frac{5}{4}+x^2} = \left[\begin{array}{l} \textit{табличний інтеграл} \\ 13, \text{ де } a = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} arctg\,\frac{x}{\frac{\sqrt{5}}{2}} + C = \frac{1}{2\sqrt{5}} arctg\,\frac{2x}{\sqrt{5}} + C.$$

Приклад 16. $\int \frac{dx}{2x^2-3} = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{dx}{x^2-\frac{3}{2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$

$$= \left[\begin{array}{l} \textit{табличний інтеграл} \\ 14, \text{ де } a = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}\ln\left|\frac{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{x+\frac{\sqrt{3}}{2}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{2x-\sqrt{3}}{2x+\sqrt{3}}\right| + C.$$

Приклад 17.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+6}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3\left(x^2+2\right)}} = \int \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} = [\textit{табличний інтеграл } 16] = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right| + C.$$

Приклад 18.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3\cdot\left(\frac{1}{3}-x^2\right)}} = \int \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}-x^2}}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-x^2}} = \left[\begin{array}{l} \textit{табличний інтеграл} \\ 15, \text{ де } a = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\arcsin\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + C = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(x\sqrt{3}\right) + C.$$

Приклад 19.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{7\left(x^2-\frac{5}{7}\right)}} = \int \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-\frac{5}{7}}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{5}{7}}} = [\,\textit{табличний інтеграл } 16\,] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}} \ln\left| x + \sqrt{x^2-\frac{5}{7}} \right| + C .$$

Приклад 20. $\int \frac{3x^4 - 8x^2\sqrt[3]{x} + 9\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx.$

Розділимо почленно чисельник на знаменник; у результаті підінтегральна функція розкладається на доданки, кожний з яких проінтегруємо:

$$\int \frac{3x^4 - 8x^2\sqrt[3]{x} + 9\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx = \int \frac{3x^4}{x^{\frac{3}{2}}} dx - \int \frac{8x^2 x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}} dx + \int \frac{9\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx =$$

$$= 3\int x^{4-\frac{3}{2}} dx - 8\int x^{\frac{7}{3}-\frac{3}{2}} dx + 9\int \frac{dx}{x} = 3\int x^{\frac{5}{2}} dx - 8\int x^{\frac{5}{6}} dx + 9\int \frac{dx}{x} =$$

$$= \begin{bmatrix} \textit{табличні інтеграли} \\ 2 \text{ і } 3 \end{bmatrix} = 3\frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} - 8\frac{x^{\frac{5}{6}+1}}{\frac{5}{6}+1} + 9\ln|x| + C =$$

$$= \frac{6}{7} x^{\frac{7}{2}} - \frac{48}{11} x^{\frac{11}{6}} + 9\ln|x| + C .$$

Довільні постійні, що виходять при інтегруванні кожного доданка, тут об'єднані в одну довільну постійну С.

Приклад 21. $\int \frac{x^2}{x^2+16} dx .$

Додаючи і віднімаючи в чисельнику підінтегральної функції число 16, отримаємо

$$\int \frac{\left(x^2+16\right)-16}{x^2+16} dx = \int \frac{x^2+16}{x^2+16} dx - \int \frac{16}{x^2+4^2} dx = \int dx - 16\int \frac{dx}{x^2+4^2} =$$

$$= \begin{bmatrix} \textit{табличні інтеграли} \\ 1\ i\ 13 \end{bmatrix} = x - 16\frac{1}{4} arctg\frac{x}{4} + C = x - 4 arctg\frac{x}{4} + C .$$

Приклад 22. $\int\left(1-5^x\right)^2 dx$.

Після піднесення до квадрата та інтегрування кожного доданка маємо:

$$\int\left(1-5^x\right)^2 dx=\int\left(1-2\cdot 5^x+25^x\right)dx=\int dx-2\int 5^x dx+\int 25^x dx=$$

$$=\begin{bmatrix} \textit{табличні інтеграли} \\ 1 \text{ і } 4 \end{bmatrix}=x-2\frac{5^x}{\ln 5}+\frac{25^x}{\ln 25}+C=x-\frac{2}{\ln 5}5^x+\frac{5^{2x}}{2\ln 5}+C.$$

Приклад 23. $\int 4\cos^2\frac{x}{2}dx$.

Використовуючи тригонометричну формулу $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$, знаходимо

$$\int 4\cos^2\frac{x}{2}dx=2\int(1+\cos x)dx=2\int dx+2\int\cos x dx=$$

$$=\begin{bmatrix} \textit{табличні інтеграли} \\ 1 \text{ і } 6 \end{bmatrix}=2x+2\sin x+C.$$

Приклад 24. $\int(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2 dx$.

Після піднесення до квадрата і застосування формули $2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=\sin x$ і $\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=1$, одержимо

$$\int(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2 dx=\int(\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2})dx=$$

$$\int(1+\sin x)dx=[\textit{властивість } 4]=\int dx+\int\sin x dx=x-\cos x+C.$$

Приклад 25.

$$\int\frac{3x^2-2}{x^3}dx=\int\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{x^3}\right)dx=3\int\frac{dx}{x}-2\int x^{-3}dx=3\ln|x|+\frac{1}{x^2}+C.$$

У прикладі виконується ділення, а потім застосовуються властивості інтеграла 3, 4 і табличні інтеграли 2, 3.

Приклад 26.

$$\int\left(4e^x-3\sin x+\frac{4}{9+x^2}\right)dx=\int 4e^x dx-\int 3\sin x dx+\int\frac{4}{9+x^2}dx=$$

$$= 4\int e^x dx - 3\int \sin x dx + 4\int \frac{dx}{9+x^2} = 4e^x + 3\cos x + \frac{4}{3} arctg \frac{x}{3} + C.$$

У прикладі використовуються властивості інтегралів 3, 4 і формули 4а, 5 і 13 таблиці інтегралів.

Приклад 27. $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx = I$

Застосувавши властивості 4 і 5, отримаємо $I = 3\int dx - 2\int \left(\frac{3}{2}\right)^x dx.$

Користуючись таблицею інтегралів, знайдемо $I = 3x - 2\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} + C.$

Приклад 28.

$$\int \frac{tg^2 x + 5}{\sin^2 x} dx = \int \frac{tg^2 x}{\sin^2 x} dx + \int \frac{5dx}{\sin^2 x} = \left[tgx = \frac{\sin x}{\cos x} \right] = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + 5\int \frac{dx}{\sin 2x} =$$

$$= [\text{формули } 11 \, i \, 12] = tgx - 5ctgx + C.$$

Вправи

Знайти інтеграли

1. $\int \left(4x^3 + \frac{1}{x^2} - 5 \right) dx.$ Відповідь: $x^4 - \frac{1}{x} - 5x + C.$
2. $\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + x\sqrt[4]{x} \right) dx.$ Відповідь: $\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + \frac{4}{9}x^2 \sqrt[4]{x} + C.$
3. $\int \frac{3x^2 - 2}{x^3} dx.$ Відповідь: $3\ln|x| + \frac{1}{x^2} + C.$
4. $\int \frac{5\sqrt{x} + x - 2x^2 + 1}{x\sqrt{x}} dx.$ Відповідь: $5\ln|x| + 2\sqrt{x} - \frac{4}{3}x\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C.$
5. $\int 5^x e^x dx.$ Відповідь: $\frac{5^x e^x}{1 + \ln 5} + C.$
6. $\int \left(8^{2x-1} + a^x \right) e^x dx.$ Відповідь: $\left(\frac{8^{2x-1}}{1 + 6\ln 2} + \frac{a^x}{1 + \ln a} \right) e^x + C.$
7. $\int \left(e^{2x} + 7x^3 e^x \right) e^{-x} dx.$ Відповідь: $e^x + \frac{7}{4}x^4 + C.$

8. $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$. Відповідь: $-ctgx - tgx + C$.

9. $\int \frac{\cos 8x + \cos 6x}{\cos 7x} dx.$ Відповідь: $2\sin x + C$.

10. $\int (ctgx - tgx)^2 dx.$ Відповідь: $tgx - ctgx - 4x + C$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}$. Відповідь: $\arcsin\frac{x}{4} + C$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}}$. Відповідь: $\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}} + C$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}$. Відповідь: $\frac{1}{2}\arcsin 2x + C$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 4x^2}}$. Відповідь: $\frac{1}{2}\arcsin x\sqrt{2} + C$.

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 5}}$. Відповідь: $\ln\left| x + \sqrt{x^2 + 5} \right| + C$.

16. $\int \frac{2dx}{\sqrt{2x^2 - 3}}$. Відповідь: $\sqrt{2}\ln\left| x\sqrt{2} + \sqrt{2x^2 - 3} \right| + C$.

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 4x^2}}$. Відповідь: $\frac{1}{2}\ln\left| 2x + \sqrt{1 + 4x^2} \right| + C$.

18. $\int \frac{dx}{64 + x^2}$. Відповідь: $\frac{1}{8} arctg \frac{x}{8} + C$.

19. $\int \frac{dx}{8 + x^2}$. Відповідь: $\frac{\sqrt{2}}{4} arctg \frac{x\sqrt{2}}{4} + C$.

20. $\int \frac{dx}{1 + 9x^2}$. Відповідь: $\frac{1}{3} arctg 3x + C$.

21. $\int \frac{dx}{2 + 3x^2}$. Відповідь: $\frac{\sqrt{6}}{6} arctg \frac{x\sqrt{6}}{2} + C$.

22. $\int \frac{dx}{x^2 - 9}$. Відповідь: $\frac{1}{6}\ln\left| \frac{x - 3}{x + 3} \right| + C$.

23. $\int \frac{dx}{x^2 - 7}$. Відповідь: $\frac{\sqrt{7}}{14}\ln\left| \frac{x - \sqrt{7}}{x + \sqrt{7}} \right| + C$.

24. $\int \frac{dx}{5 - x^2}$. Відповідь: $\frac{\sqrt{5}}{10}\ln\left| \frac{x + \sqrt{5}}{x - \sqrt{5}} \right| + C$.

25. $\int \frac{dx}{9x^2 - 1}$. Відповідь: $\frac{1}{6}\ln\left| \frac{3x - 1}{3x + 1} \right| + C$.

26. $\int \frac{dx}{2x^2 - 3}$. Відповідь: $\frac{\sqrt{6}}{12}\ln\left| \frac{x - \sqrt{1,5}}{x + \sqrt{1,5}} \right| + C$.

2.2. Заміна змінної у невизначеному інтегралі

Заміна змінної у невизначеному інтегралі виконується з метою зведення його до табличного. Здійснюється заміна змінної за допомогою підстановок двох видів.

1. Задамо $x = j(t)$, де $j(t)$ – неперервна функція з неперервною похідною, що має зворотну функцію $t = y(x)$, при цьому $dx = j'(t)dt$. Тоді

$$\int f(x)dx = \int f\left(j(t)\right) \cdot j'(t)dt.$$

Після знаходження інтеграла в правій частині здійснюється повернення до змінної x за допомогою функції $t = y(x)$.

2. При інтегруванні іноді доцільніше підбирати заміну змінної у вигляді підстановки $y(x) = t$.

Приклад 29 . Знайти інтеграл $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = J$.

Зробимо заміну $x = t^3$, тоді $dx = 3t^2dt$. Отримаємо

$J = \int \frac{\sin t}{t^2} 3t^2 dt = 3\int \sin t dt = -3\cos t + C$.

Повернемося до колишньої змінної, враховуючи, що $t = \sqrt[3]{x}$:

$$J = -3\cos\sqrt[3]{x} + C.$$

Приклад 30. $\int x\sqrt{x-1}dx$.

Зробимо підстановку $\sqrt{x-1} = t$, звідси $x = t^2 + 1$, і $dx = 2tdt$. Отже,

$\int x\sqrt{x-1}dx = \int \left(t^2+1\right) \cdot t \cdot 2tdt = 2\int t^4 dt + 2\int t^2 dt =$

$= \frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + C = \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C$.

Приклад 31. $\int e^{\sin x} \cos x dx$.

Застосовуючи підстановку $t = \sin x$, зведемо інтеграл до формули 4а. Задамо $t = \sin x$, тоді $dt = \cos x dx$.

$\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C.$

На останньому етапі вирішення замінюємо t на $\sin x$.

Приклад 32. $\int \frac{xdx}{x^2+1}$.

Застосовуючи підстановку $t = x^2+1$, зведемо даний інтеграл до табличного інтегралу 3. Задамо $t = x^2+1$, тоді $dt = 2xdx$, $xdx = \frac{dt}{2}$.

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C .$$

Приклад 33. $\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$.

Застосовуючи підстановку $t = \ln x$, зведемо інтеграл до формули 13.

Покладемо $t = \ln x$, тоді $dt = \frac{dx}{x}$.

$$\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \int \frac{dt}{1+t^2} = arctgt + C = arctg \ln x + C .$$

Приклад 34. $\int \frac{x^2dx}{1+x^6}$.

Застосовуючи підстановку $t = x^3$, зведемо інтеграл до формули 13.

Нехай $t = x^3$, тоді $dt = 3x^2dx$, а $x^2dx = \frac{dt}{3}$. Отже,

$$\int \frac{x^2dx}{1+x^6} = \int \frac{\frac{dt}{3}}{1+t^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{3}arctgt + C = \frac{1}{3}arctgx^3 + C .$$

Приклад 35.

$$\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{1+2\cos x}} = \begin{bmatrix} 1+2\cos x = t, \\ -2\sin xdx = dt, \quad \sin xdx = -\frac{dt}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\sqrt{t} + C = -\sqrt{1+2\cos x} + C .$$

Приклад 36.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+a}} = \begin{bmatrix} x^2 + a = t \\ 2xdx = dt, \quad xdx = \frac{dt}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{3}}dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} = \frac{3}{4}t^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+a)^2} + C .$$

Приклад 37.

$$\int \frac{dy}{\sqrt{e^y+1}} = \begin{bmatrix} e^y+1=t^2 \\ e^y dy = 2tdt \end{bmatrix} = \int \frac{2tdt}{t(t^2-1)} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{e^y+1}-1}{\sqrt{e^y+1}+1}\right| + C.$$

Приклад 38.

$$\int x^2\cdot 7^{x^3}dx = \begin{bmatrix} x^3 = t \\ 3x^2dx = dt \\ x^2dx = \dfrac{dt}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int 7^t dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{7^t}{\ln 7} + C = \frac{7^{x^3}}{3\ln 7} + C.$$

Приклад 39.

$$\int \frac{x^7dx}{4x^8+5} = \begin{bmatrix} 4x^8+5=t \\ 32x^7dx = dt \\ x^7dx = \dfrac{dt}{32} \end{bmatrix} = \frac{1}{32}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{32}\ln|t| + C = \frac{1}{32}\ln(4x^8+5) + C.$$

Приклад 40.

$$\int \frac{x^3dx}{x^8-49} = \begin{bmatrix} x^4 = t \\ 4x^3dx = dt \\ x^3dx = \dfrac{dt}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2-49} = \begin{bmatrix} \textit{табличний інтеграл } 14, \\ \text{де } a=7 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\cdot 7}\ln\left|\frac{t-7}{t+7}\right| + C = \frac{1}{56}\ln\left|\frac{x^4-7}{x^4+7}\right| + C.$$

Приклад 41.

$$\int \frac{x^4dx}{\sqrt{4-x^{10}}} = \begin{bmatrix} x^5 = t \\ 5x^4dx = dt \\ x^4dx = \dfrac{dt}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \begin{bmatrix} \textit{табличный интеграл } 15, \\ \text{где } a=2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\arcsin\frac{t}{2} + C = \frac{1}{5}\arcsin\frac{x^5}{2} + C.$$

Приклад 42.

$$\int \frac{e^x dx}{7+e^{2x}} = \begin{bmatrix} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{7+t^2} = \begin{bmatrix} \text{табличний інтеграл } 13, \\ \text{де } a = \sqrt{7} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}} arctg \frac{t}{\sqrt{7}} + C = \frac{1}{\sqrt{7}} arctg \frac{e^x}{\sqrt{7}} + C.$$

Приклад 43.

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-5}} = \begin{bmatrix} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-5}} = [\text{табличний інтеграл } 16] =$$

$$= \ln\left|t+\sqrt{t^2-5}\right| + C = \ln\left|e^x + \sqrt{e^{2x}-5}\right| + C.$$

Приклад 44.

$$\int \sqrt{tgx+7} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \begin{bmatrix} tgx+7 = t \\ \dfrac{dx}{\cos^2 x} = dt \end{bmatrix} = \int \sqrt{t} \cdot dt = \int t^{\frac{1}{2}} dt =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{табличний інтеграл } 2, \\ \text{де } a = \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = 2\sqrt{t^3} + C = 2\sqrt{(tgx+7)^3} + C.$$

Приклад 45. $\int x^2\sqrt{x^3+5}dx = I$

Покладемо $t = x^3+5$. Тоді $dt = 3x^2dx$ і $x^2dx = \frac{1}{3}dt$. Отже,

$$I = \int \sqrt{t}\frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9}\sqrt{(x^3+5)^3} + C.$$

Вправи

Знайти інтеграли

1. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+3x^2}}$. Відповідь: $\frac{1}{3}\sqrt{1+3x^2} + C$.
2. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{4+x^2}}$. Відповідь: $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(4+x^2)^2} + C$.
3. $\int \sqrt{x^2+k} \cdot xdx$. Відповідь: $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+k)^3} + C$.

4. $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^{4x}-1}}.$ Відповідь: $\frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}+\sqrt{e^{4x}-1}\right|+C.$

5. $\int \frac{2^{x}dx}{1+4^{x}}.$ Відповідь: $\frac{1}{\ln 2}arctg\,2^{x}+C.$

6. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{4-\cos^{2}x}}.$ Відповідь: $-\arcsin\frac{\cos x}{2}+C.$

7. $\int \frac{a^{x}dx}{a^{2x}-9}.$ Відповідь: $\frac{1}{6\ln a}\ln\left|\frac{a^{x}-3}{a^{x}+3}\right|+C.$

8. $\int \frac{x^{2}dx}{5-x^{6}}.$ Відповідь: $\frac{1}{6\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+x^{3}}{\sqrt{5}-x^{3}}\right|+C.$

9. $\int \frac{x^{2}dx}{\sqrt{x^{6}+3}}.$ Відповідь: $\frac{1}{3}\ln\left|x^{3}+\sqrt{x^{6}+3}\right|+C.$

10. $\int \frac{\sqrt[3]{3-\ln x}dx}{x}.$ Відповідь: $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(3-\ln x)^{4}}+C.$

11. $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{\ln x+5}}.$ Відповідь: $2\sqrt{\ln x+5}+C.$

12. $\int \frac{2ctgx+3}{\sin^{2}x}dx.$ Відповідь: $-\frac{(2ctgx+3)^{2}}{4}+C.$

13. $\int \frac{dx}{\cos^{2}x\cdot\sqrt{2tgx+1}}.$ Відповідь: $\sqrt{2tgx+1}+C.$

14. $\int \frac{dx}{(ax+b)^{k}},\quad k>1.$ Відповідь: $\frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{1-k}}{1-k}+C.$

15. $\int 5^{x^{4}}\cdot x^{3}dx.$ Відповідь: $\frac{1}{4}\cdot\frac{5^{x^{4}}}{\ln 5}+C.$

16. $\int \frac{x^{5}dx}{3-x^{6}}.$ Відповідь: $-\frac{1}{6}\ln\left|3-x^{6}\right|+C.$

17. $\int \frac{e^{x}dx}{3+4e^{x}}.$

Підстановка: $3+4e^{x}=t.$ Відповідь: $\frac{1}{4}\ln(3+4e^{x})+C.$

18. $\int (tg^{4}j-1)dj.$

Підстановка: $tgj=t.$ Відповідь: $\frac{tg^{3}j}{3}-tgj+C.$

19. $\int \frac{(x^{2}-x)dx}{(x-2)^{3}}.$

Підстановка: $x-2=t.$ Відповідь: $\ln|x-2|-\frac{3x-5}{(x-2)^{2}}+C.$

20. $\int x \cdot \sqrt{a-x}dx.$

Підстановка: $a - x = t^2$. Відповідь: $\frac{2}{15}\left(3x^2 - ax - 2a^2\right)\sqrt{a-x} + C.$

21. $\int \frac{e^{2x}dx}{e^x - 1}.$

Підстановка: $e^x - 1 = t.$ Відповідь: $e^x + \ln\left|e^x - 1\right| + C.$

22. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{2+\cos^2 x}}.$ Відповідь: $-2\sqrt{2+\cos^2 x} + C.$

2.3. Інтегрування шляхом підведення функції під знак диференціала

Цей метод заснований на використанні формули заміни змінної в такому формальному вигляді

$$\int f(x)dx = \int f\left[x(t)\right]d\left[x(t)\right] + C.$$

За цією формулою (див. також властивість 5 невизначеного інтеграла) таблицю основних інтегралів можна узагальнити на випадок, коли в формулах замість змінної інтегрування x стоїть функція, що залежить від x. При цьому необхідно знати формулу першого диференціала $dy = y' \cdot dx$ і таблицю похідних.

Приклад 46.

$$\int \sin 5x dx = \int \sin 5x \cdot \frac{1}{5}d(5x) = \frac{1}{5}\int \sin 5x d(5x) = -\frac{1}{5}\cos 5x + C.$$

Тут використано властивість інтеграла 5 і табличний інтеграл 5.

Приклад 47.

$$\int e^{5x+2}dx = \int e^{5x+2} \cdot \frac{1}{5}d(5x+2) = \frac{1}{5}\int e^{5x+2}d(5x+2) = \frac{1}{5}e^{5x+2} + C.$$

У розв'язанні приклада застосовуються формула перетворення диференціала і табличний інтеграл 4а.

Приклад 48.

$$\int \frac{\arcsin 3x dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \frac{1}{3}\int \arcsin 3x \cdot \frac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \frac{1}{3}\int \arcsin 3x \cdot d(\arcsin 3x) =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{(\arcsin 3x)^2}{2} + C = \frac{1}{6}\arcsin^2 3x + C.$$

Приклад 49.

$$\int \sqrt{x+3}dx = \int \sqrt{x+3}d(x+3) = \int (x+3)^{\frac{1}{2}} d(x+3) =$$

$$= \frac{(x+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(x+3)\sqrt{x+3} + C.$$

У розв'язанні приклада застосовуються формула перетворення диференціала і табличний інтеграл 2.

Приклад 50.

$$\int (2x+5)^9 dx = \int (2x+5)^9 \cdot \frac{1}{2} d(2x+5) = \left\{ \frac{1}{2} \int u^9 du \right\} = \frac{(2x+5)^{10}}{20} + C.$$

Приклад 51.

$$\int \frac{dx}{(4x+5)^3} = \int (4x+5)^{-3} \frac{1}{4} d(4x+5) = \left\{ \frac{1}{4} \int u^{-3} du \right\} = \frac{1}{4} \frac{(4x+5)^{-2}}{-2} + C =$$

$$= -\frac{1}{8(4x+5)^2} + C.$$

Приклад 52. Знайти інтеграл $\int \sin^3 x \cos x dx = I$.

Перетворимо інтеграл таким чином: $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx = \int \sin^3 x d(\sin x)$. Тепер як змінну інтегрування ми маємо функцію і відносно цієї змінної отримаємо інтеграл від степеневої функції. Отже, $\int \sin^3 x d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C$.

Приклад 53. Знайти інтеграл $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = I$.

Оскільки $d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{dx}{x^2}$, запишемо: $I = -\int e^{\frac{1}{x}} d\left(\frac{1}{x}\right) = -e^{\frac{1}{x}} + C$.

Приклад 54. Знайти інтеграл $\int \frac{xdx}{1+x^4} = I$.

Шляхом підведення функції x^2 під знак диференціала зведемо даний інтеграл до табличного:

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2} arctg(x^2) + C.$$

Знайти інтеграл

Приклад 55.

$$\int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2} \cdot 2x dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2} dx^2 = \frac{1}{2}e^{x^2} + C .$$

Приклад 56.

$$\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \ln|x-a| + C .$$

Приклад 57.

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m} = \int (x-a)^{-m} \cdot d(x-a) = \frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1} + C, \qquad (m \neq 1) .$$

Приклад 58.

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{adx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C .$$

Приклад 59.

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^m} = \frac{1}{a}\int (ax+b)^{-m} \cdot adx = \frac{1}{a}\int ax+b)^{-m} \cdot d(ax+b) =$$

$$= \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{-m+1}}{-m+1} + C, \qquad (m \neq 1).$$

Приклад 60.

$$\int \frac{dx}{2-5x} = \int \frac{-\frac{1}{5}d(2-5x)}{2-5x} = \left\{-\frac{1}{5}\int \frac{du}{u}\right\} = -\frac{1}{5}\ln|2-5x| + C .$$

Приклад 61.

$$\int 3^{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int 3^{\sqrt{x}} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2\int 3^{\sqrt{x}} d(\sqrt{x}) = 2\frac{3^{\sqrt{x}}}{\ln 3} + C .$$

Приклад 62.

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x| + C .$$

Приклад 63.

$$\int \frac{\sqrt{tgx+1}}{\cos^2 x} dx = \int (tgx+1)^{\frac{1}{2}} d(tgx+1) = \frac{2}{3}(tgx+1)^{\frac{3}{2}} + C .$$

Приклад 64.

$$\int (5\cos x+2)^3\cdot \sin x dx = -\frac{1}{5}\int (5\cos x+2)^3(-5\sin x)dx =$$

$$= -\frac{1}{5}\int (5\cos x+2)^3 d(5\cos x+2) = -\frac{1}{5}\frac{(5\cos x+2)^4}{4}+C =$$

$$= -\frac{1}{20}(5\cos x+2)^4+C.$$

Приклад 65.

$$\int \cos x^3\cdot 3x^2dx = \int \cos x^3 d(x^3) = \left\{\int \cos u du\right\} = \sin x^3 + C.$$

Приклад 66.

$$\int \frac{1}{\sin^2 x^3}x^2dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sin^2 x^3}3x^2dx = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{\sin^2 x^3} = \left\{\frac{1}{3}\int \frac{du}{\sin^2 u}\right\} = -\frac{1}{3}ctgx^3 + C.$$

Приклад 67.

$$\int e^{2-3x}dx = \int e^{2-3x}(-\frac{1}{3})d(2-3x) = \left\{-\frac{1}{3}\int e^u du\right\} = -\frac{1}{3}e^{2-3x}+C.$$

Приклад 68.

$$\int \frac{dx}{\cos^2(5x-3)} = \int \frac{\frac{1}{5}d(5x-3)}{\cos^2(5x-3)} = \left\{\frac{1}{5}\int \frac{du}{\cos^2 u}\right\} = \frac{1}{5}tg(5x-3)+C.$$

Приклад 69.

$$\int (arctgx)^3\frac{dx}{1+x^2} = \int (arctgx)^3 d(arctgx) = \left\{\int u^3 du\right\} = \frac{(arctgx)^4}{4}+C.$$

Приклад 70.

$$\int e^{arctg\,3x}\frac{dx}{1+9x^2} = \frac{1}{3}\int e^{arctg\,3x}\frac{3dx}{1+9x^2} = \frac{1}{3}\int e^{arctg\,3x}d(arctg\,3x) = \frac{1}{3}e^{arctg\,3x}+C.$$

Приклад 71.

$$\int \frac{1}{\ln^2 x+4}\cdot\frac{1}{x}dx = \int \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x+4} = \left\{\int \frac{du}{u^2+2^2}\right\} = \frac{1}{2}arctg\frac{\ln x}{2}+C.$$

Приклад 72.

$$\int \cos(\ln x)\frac{1}{x}dx = \int \cos\ln x d(\ln x) = \left\{\int \cos u du\right\} = \sin\ln x + C.$$

Приклад 73.

$$\int \frac{1}{\sqrt{\arcsin x}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{\arcsin x}} d(\arcsin x) = \left\{ \int \frac{du}{\sqrt{u}} \right\} = 2\sqrt{\arcsin x} + C .$$

Приклад 74.

$$\int \frac{(\arcsin 4x)^4}{\sqrt{1-16x^2}} dx = \frac{1}{4} \int (\arcsin 4x)^4 \frac{4dx}{\sqrt{1-16x^2}} = \frac{1}{4} \int (\arcsin 4x)^4 d(\arcsin 4x) =$$

$$= \left\{ \frac{1}{4} \int u^4 du \right\} = \frac{1}{4} \frac{(\arcsin 4x)^5}{5} + C = \frac{1}{20} (\arcsin 4x)^5 + C .$$

Вправи

Знайти інтеграл

1. $\int \cos^2 x dx$. Відповідь: $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin 2x) + C$.
2. $\int \frac{xdx}{x^4+9}$. Відповідь: $\frac{1}{6} arctg \frac{x^2}{3} + C$.
3. $\int x \cos x^2 dx$. Відповідь: $\frac{1}{2}\sin(x^2) + C$.
4. $\int \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}$. Відповідь: $2e^{\sqrt{x}} + C$.
5. $\int \frac{x^5 dx}{x^6+4}$. Відповідь: $\frac{1}{6}\ln\left|x^6+4\right| + C$.
6. $\int \frac{x^2 dx}{x^6+4}$. Відповідь: $\frac{1}{6} arctg \frac{x^3}{2} + C$.
7. $\int \sin^8 x \cos x dx$. Відповідь: $\frac{\sin^9 x}{9} + C$.
8. $\int \frac{\cos(\sqrt{x})dx}{\sqrt{x}}$. Відповідь: $2\sin\sqrt{x} + C$.
9. $\int \frac{\cos x dx}{2+3\sin x}$. Відповідь: $\frac{1}{3}\ln\left|2+3\sin x\right| + C$.
10. $\int \frac{\sqrt{\ln x}dx}{x}$. Відповідь: $\frac{2}{3}\ln x\sqrt{\ln x} + C$.
11. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x} \cdot x}$. Відповідь: $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 x} + C$.
12. $\int \frac{dx}{\sin^2 5x}$. Відповідь: $-\frac{1}{5} ctg 5x + C$.
13. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$. Відповідь: $\frac{1}{3} tg 3x + C$.

14. $\int e^{3arctgx}\dfrac{dx}{1+x^2}$. Відповідь: $\frac{1}{3}e^{3arctgx}+C$.

15). $\int 3^{ctgx}\dfrac{dx}{\sin^2 x}$. Відповідь: $-\dfrac{3^{ctgx}}{\ln 3}+C$.

16. $\int \cos\sqrt{x}\cdot\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$. Відповідь: $2\sin\sqrt{x}+C$.

17. $\int 5^{-x^2}\cdot xdx$. Відповідь: $-\dfrac{1}{2\ln 5}\cdot 5^{-x^2}+C$.

18. $\int \dfrac{e^x dx}{(7-e^x)^2}$. Відповідь: $\dfrac{1}{7-e^x}+C$.

19. $\int \dfrac{a^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$. Відповідь: $-\dfrac{a^{\frac{1}{x}}}{\ln a}+C$.

20. $\int \sqrt{\dfrac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$. Відповідь: $\dfrac{2\sqrt{\arcsin^3 x}}{3}+C$.

2.4. Інтегрування частинами

Інтегруванням частинами називається знаходження інтеграла за формулою

$$\int udv = u\cdot v - \int vdu,$$

де $u = u(x)$, $v = v(x)$ – безперервно диференційовні функції від *x*. За допомогою цієї формули знаходження інтеграла зводиться до відшукання іншого інтеграла; її застосування доцільно в тих випадках, коли останній інтеграл або табличний, або простіше вихідного, або до нього подібний.

При цьому за u береться така функція, яка при диференціюванні спрощується, а dv – та частина підінтегрального виразу, інтеграл від якої може бути знайдений.

Розглянемо деякі інтеграли, які обчислюються методом інтегрування частинами.

2.4.1 . Інтеграли виду $\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\sin axdx$, $\int P(x)\cos axdx$

Тут $P(x)$ – багаточлен. У кожному із зазначених інтегралів припустимо, що $u = P(x)$, тоді для першого інтеграла $dv = e^{ax}dx$. Обчислюємо $du = P'(x)dx$ та інтегруючи, знаходимо $v = \int e^{ax}dx = \dfrac{1}{a}e^{ax}$. Далі застосовуємо формулу інтегрування послідовно частинами m разів. Аналогічно проводимо обчислення другого і третього інтегралів.

Обчислити інтеграл

Приклад 75.

$$\int(2x-5)e^{-3x}dx=\left\{\begin{array}{l}u=2x-5\\ dv=e^{-3x}dx\end{array}\right|\left.\begin{array}{l}du=2dx\\ v=\int e^{-3x}dx=-\frac{1}{3}e^{-3x}\end{array}\right\}=$$

$$=(x-5)\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)-\int\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)\cdot 2dx=-\frac{1}{3}(2x-5)e^{-3x}+\frac{2}{3}\int e^{-3x}dx=$$

$$=-\frac{1}{3}(2x-5)e^{-3x}-\frac{2}{9}e^{-3x}+C=\frac{1}{9}(13-6x)e^{-3x}+C.$$

Приклад 76.

$$\int x\sin 3xdx=\left\{\begin{array}{l}u=x\\ dv=\sin 3xdx\end{array}\right|\left.\begin{array}{l}du=dx\\ v=\int\sin 3xdx=-\frac{1}{3}\cos 3x\end{array}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{3}x\cos 3x+\frac{1}{3}\int\cos 3xdx=-\frac{1}{3}x\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+C.$$

Приклад 77.

$$\int x^2\cos 5xdx=\left\{\begin{array}{l}u=x^2\\ dv=\cos 5xdx\end{array}\right|\left.\begin{array}{l}du=2xdx\\ v=\int\cos 5xdx=\frac{1}{5}\sin 5x\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{1}{5}x^2\sin 5x-\frac{2}{5}\int x\sin 5xdx=$$

$\left\{\begin{array}{l}\text{Ми добилися зниження степеня } x \text{ на одиницю.}\\ \int x\sin 5xdx \quad \text{знову інтегруємо частинами:}\end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{l}u=x\\ dv=\sin 5xdx\end{array}\right|\left.\begin{array}{l}du=dx\\ v=\int\sin 5xdx=-\frac{1}{5}\cos 5x\end{array}\right\}\left.\right\}=$$

$$=\frac{1}{5}x^2\sin 5x-\frac{2}{5}\left(-\frac{x}{5}\cos 5x+\frac{1}{5}\int\cos 5xdx\right)=$$

$$=\frac{1}{5}x^2\sin 5x+\frac{2x}{25}\cos 5x-\frac{2}{125}\sin 5x+C=\frac{1}{125}\left(25x^2-2\right)\sin 5x+\frac{2}{25}x\cos 5x+C.$$

Приклад 78.

$$\int x\cdot e^{5x}dx=\left\{\begin{matrix} u=x \\ dv=e^{5x}dx \end{matrix}\left|\begin{matrix} du=dx \\ v=\frac{1}{5}e^{5x} \end{matrix}\right.\right\}=x\cdot\frac{e^{5x}}{5}-\int\frac{e^{5x}}{5}dx=$$

$$=x\cdot\frac{e^{5x}}{5}-\frac{1}{5^2}\int e^{5x}d(5x)=x\cdot\frac{e^{5x}}{5}-\frac{1}{25}e^{5x}+C=\frac{e^{5x}}{25}(5x-1)+C.$$

Приклад 79.

$$\int(ax+b)\cos xdx=\left\{\begin{matrix} u=ax+b \\ dv=\cos xdx \end{matrix}\left|\begin{matrix} du=a\cdot dx \\ v=\sin x \end{matrix}\right.\right\}=$$

$$=(ax+b)\sin x-\int\sin x\cdot adx=(ax+b)\sin x-a\int\sin xdx=$$

$$=(ax+b)\sin x+a\cos x+C.$$

Приклад 80.

$$\int x^2e^xdx=\left\{\begin{matrix} u=x^2 \\ dv=e^xdx \end{matrix}\left|\begin{matrix} du=2xdx \\ v=e^x \end{matrix}\right.\right\}=x^2e^x-2\int xe^xdx=$$

$$=\left\{\begin{matrix} u=x \\ dv=e^xdx \end{matrix}\left|\begin{matrix} du=dx \\ v=e^x \end{matrix}\right.\right\}=x^2e^x-2(xe^x-e^x)+C=(x^2-2x+2)e^x+C.$$

2.4.2. Інтеграли виду $\int P(x)\ln xdx$, $\int P(x)\arcsin xdx$, $\int P(x)\arccos xdx$, $\int P(x)\mathrm{arc}\,tgxdx$, $\int P(x)\mathrm{arc}\,ctgxdx$

Зазначені інтеграли як функцію u рекомендується позначати відповідно до функцій $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$ або $arcctgx$. При цьому $dv=P(x)dx$.

Приклад 81.

$$\int x^2\ln xdx=\left\{\begin{matrix} u=\ln x \\ dv=x^2dx \end{matrix}\left|\begin{matrix} du=\frac{1}{x}dx \\ v=\int x^2dx=\frac{x^3}{3} \end{matrix}\right.\right\}=$$

$$=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^3\frac{1}{x}dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^2dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{9}x^3+C.$$

Приклад 82.

$$\int x\,arctgx\,dx = \left\{\begin{array}{l} u = arctgx \\ dv = xdx \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{x^2}{2}arctgx - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}arctgx + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)arctgx - \frac{x}{2} + C\,.$$

Приклад 83.

$$\int x\ln(x-1)dx = \left\{\begin{array}{l} u = \ln(x-1) \\ dv = xdx \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} du = \dfrac{dx}{x-1} \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{x^2\ln(x-1)}{2} - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x-1} = \frac{x^2\ln(x-1)}{2} - \frac{1}{2}\int\frac{(x^2-1)+1}{x-1}dx =$$

$$= \frac{x^2\ln(x-1)}{2} - \frac{1}{2}\int\frac{(x-1)(x+1)+1}{x-1}dx =$$

$$= \frac{x^2\ln(x-1)}{2} - \frac{1}{2}\int\left(\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} + \frac{1}{x-1}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2\ln(x-1)}{2} - \frac{1}{2}\left(\int(x+1)dx + \int\frac{dx}{x-1}\right) =$$

$$= \frac{x^2\ln(x-1)}{2} - \frac{1}{2}\left(\int(x+1)d(x+1) + \int\frac{d(x-1)}{x-1}\right) =$$

$$= \frac{x^2\ln(x-1)}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{(x+1)^2}{2} + \ln|x-1|\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2-1\right)\ln(x-1) - \frac{1}{4}(x+1)^2 + C\,.$$

Приклад 84.

$$\int arctg3x\,dx = \left\{\begin{array}{l} u = arctg3x \\ dv = dx \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} du = \dfrac{3dx}{1+9x^2} \\ v = x \end{array} \right\} = x\,arctg3x - \int x\cdot\frac{3dx}{1+9x^2} =$$

$$= x\cdot arctg3x - \frac{1}{6}\int\frac{18xdx}{1+9x^2} = x\cdot arctg3x - \frac{1}{6}\int\frac{d(1+9x^2)}{1+9x^2} =$$

$$= x\cdot arctg3x - \frac{1}{6}\ln(1+9x^2) + C\,.$$

Приклад 85.

$$\int \ln^2 xdx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln^2 x \\ dv = dx \end{matrix} \left| \begin{matrix} du = \dfrac{2\ln xdx}{x} \\ v = x \end{matrix} \right. \right\} = x\ln^2 x - \int x \cdot \frac{2\ln xdx}{x} =$$

$$= x\ln^2 x - 2\int \ln xdx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln x \\ dv = dx \end{matrix} \left| \begin{matrix} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = x \end{matrix} \right. \right\} =$$

$$= x\ln^2 x - 2\left(x\ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} \right) = x\ln^2 x - 2(x\ln x - x) + C =$$

$$= x \cdot \ln^2 x - 2x(\ln x - 1) + C.$$

Приклад 86.

$$\int \frac{xdx}{\sin^2 7x} = \left\{ \begin{matrix} u = x \\ dv = \dfrac{dx}{\sin^2 7x} \end{matrix} \left| \begin{matrix} du = dx \\ v = -\dfrac{1}{7} ctg 7x \end{matrix} \right. \right\} =$$

$$= -\frac{x}{7} ctg 7x + \frac{1}{7}\int ctg 7xdx = -\frac{x}{7} ctg 7x + \frac{1}{49}\ln|\sin 7x| + C$$

2.4.3. Інтеграли виду $\int e^{ax}\cos bxdx$, $\int e^{ax}\sin bxdx$

Інтеграли зазначеного виду необхідно інтегрувати частинами двічі. При першому інтегруванні не має значення, як розбивати підінтегральний вираз на співмножники, а при повторному інтегруванні замість u потрібно задати функцію того ж типу (тобто або показникову, або тригонометричну), що спочатку. У результаті одержують рівняння відносно шуканого інтеграла.

Приклад 87. $\int e^x \cos xdx = \left\{ \begin{matrix} u = e^x \\ dv = \cos xdx \end{matrix} \left| \begin{matrix} du = e^x dx \\ v = \int \cos xdx = \sin x \end{matrix} \right. \right\} =$

$= e^x \sin x - \int e^x \sin xdx \quad = \Big\{$ До інтеграла $\int e^x \sin xdx$ застосуємо знову формулу інтегрування частинами при позначеннях:

$$\left\{ \begin{matrix} u = e^x \\ dv = \sin xdx \end{matrix} \left| \begin{matrix} du = e^x dx \\ v = \int \sin xdx = -\cos x \end{matrix} \right. \right\} \Big\} =$$

$$= e^x \sin x - \left[-e^x \cos x + \int \cos x \cdot e^x dx \right] \Rightarrow \int e^x \cos xdx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos xdx.$$

Перенесемо шуканий інтеграл в ліву частину й отримаємо

$$2\int e^x \cos x dx = e^x(\sin x + \cos x) + C_1.$$

Звідси $\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x(\sin x + \cos x) + C$.

Приклад 88. $\int e^{ax} \sin bx dx = \left\{ \begin{array}{l|l} u = e^{ax} & du = a \cdot e^{ax} dx \\ dv = \sin bx dx & v = -\frac{1}{b}\cos bx \end{array} \right\} =$

$$= -\frac{e^{ax}}{b}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax} \cdot \cos bx dx = \left\{ \begin{array}{l|l} u = e^{ax} & du = a \cdot e^{ax} dx \\ dv = \cos bx dx & v = \frac{1}{b}\sin bx \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{e^{ax}}{b}\cos bx + \frac{a}{b}\left(\frac{e^{ax}}{b}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax} \cdot \sin bx dx \right) =$$

$$= -\frac{e^{ax}}{b}\cos bx + \frac{a}{b} \cdot \frac{e^{ax}}{b}\sin bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax} \cdot \sin bx dx.$$

Введемо позначення $I = \int e^{ax} \cdot \sin bx dx$ і розв'яжемо рівняння першого степеня відносно невідомого інтеграла I:

$$I = -\frac{e^{ax}}{b}\cos bx + \frac{a}{b^2} \cdot e^{ax} \cdot \sin bx - \frac{a^2}{b^2} \cdot I;$$

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \cdot I = \frac{e^{ax}}{b^2}(-b \cdot \cos bx + a \sin bx);$$

$$(a^2 + b^2) \cdot I = e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \sin bx - b \cos bx) \quad \text{або}$$

$$\int e^{ax} \cdot \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \sin bx - b \cos bx) + C.$$

Вправи

Обчислити інтеграли

1. $\int (x+2)e^x dx$. Відповідь: $e^x(x+1) + C$.

2. $\int \left(x^2 - 5\right) e^{-\frac{x}{3}} dx$. Відповідь: $-3e^{-\frac{x}{3}}\left(x^2 + 6x + 13\right) + C$.

3. $\int x \cdot 5^{-x} dx$. Відповідь: $-\frac{5^{-x}}{\ln 5}\left(x + \frac{1}{\ln 5}\right) + C$.

4. $\int x^2 \sin 2x dx$. Відповідь: $-\frac{x^2}{2}\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$.

5. а) $\int \ln x dx$. Відповідь: $x\ln x - x + C$.

6. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$. Відповідь: $-\frac{1}{x}(\ln x + 1) + C$.

7. $\int \arcsin x dx$. Відповідь: $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

8. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1+x}} dx$. Відповідь: $2\sqrt{1+x}\arccos x - 4\sqrt{1-x} + C$.

9. $\int x \cdot 3^x dx$. Відповідь: $\frac{3^x}{\ln^2 3}(x\ln 3 - 1) + C$.

10. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$. Відповідь: $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\ln x - \frac{9}{4}\sqrt[3]{x^2} + C$.

11. $\int (x^2 - 2x + 3)\cos x dx$. Відповідь: $(x^2 - 2x + 1)\sin x + 2(x-1)\cos x + C$.

12. $\int (x^2 - x + 1)\ln x dx$. Відповідь: $\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right)\ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{4} - x + C$.

13. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$. Відповідь: $x tgx + \ln|\cos x| + C$.

14. $\int \frac{x \sin x dx}{\cos^3 x}$. Відповідь: $\frac{x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2} tgx + C$.

15. $\int (5+x)^2 \cdot 4^x dx$. Відповідь: $4^x\left(\frac{(5+x)^2}{2\ln 2} - \frac{5+x}{2\ln^2 2} + \frac{1}{4\ln^3 2}\right) + C$.

16. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx$. Відповідь: $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 \pm a^2} + a^2 \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|\right) + C$.

17. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$. Відповідь: $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right) + C$.

18. $\int \cos(\ln x) dx$. Відповідь: $\frac{1}{2}x(\cos\ln x + \sin\ln x) + C$.

19. $\int e^x \sin x dx$. Відповідь: $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$.

20. $\int e^{2x}\cos x dx$. Відповідь: $\frac{1}{5}e^{2x}(\sin x + 2\cos x) + C$.

3. ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ФУНКЦІЙ, ЩО МІСТЯТЬ КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН

Інтеграли виду $I_1=\int\frac{dx}{X}$; $I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$; $I_3=\int\frac{Ax+B}{X}dx$; $I_4=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{X}}dx$, де $X=ax^2+bx+c$, зводяться до табличних шляхом виділення з X повного квадрата: $X=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]$.

Для інтегралів I_1, I_2 цієї операції досить, проте для інтегралів I_3, I_4 слід попередньо утворити в чисельнику диференціал величини X.

Дійсно, $I_3=\int\frac{Ax+B}{X}dx=\left\{\begin{array}{l}u=ax^2+bx+c\\ du=(2ax+b)dx\end{array}\right\}=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{ax^2+bx+c}dx=$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Перший інтеграл справа типу $\int\frac{du}{u}$ знаходиться за формулою 3 таблиці основних інтегралів, до другого інтеграла залежно від знака виразу $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}$ застосовується формула 13 або 14. Так само знаходиться інтеграл I_4.

Приклад 89. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{x^2+6x+25}$.

Виділимо в знаменнику повний квадрат:

$$\int\frac{dx}{(x+3)^2+16}=\int\frac{d(x+3)}{(x+3)^2+4^2}=\{13\}=\frac{1}{4}arctg\,\frac{x+3}{4}+C.$$

Приклад 90. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{1+\frac{3}{2}x-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2-\frac{3}{2}x-1\right)}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{-\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}-1\right]}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{16}-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}}=\{15\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x-\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}+C.$$

Приклад 91. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{4x^2+4x+17}$.

$$\int\frac{dx}{4x^2+4x+17}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+x+\frac{17}{4}}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2+4}=\left\{x+\frac{1}{2}=t, dx=dt\right\}=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2+4}=\frac{1}{8}arctg\frac{t}{2}+C=\frac{1}{8}arctg\frac{2x+1}{4}+C.$$

Приклад 92. Знайти $\int\frac{x-4}{x^2+6x+25}dx$.

Знаходимо похідну знаменника підінтегральної функції

$\left(x^2+6x+25\right)'=2x+6$.

Перетворимо чисельник так, щоб з нього можна було виділити вираз $2x+6$, потім розіб'ємо інтеграл на два інших

$$\int\frac{x-4}{x^2+6x+25}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+6-14}{x^2+6x+25}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+6}{x^2+6x+25}dx-$$

$$-7\int\frac{dx}{x^2+6x+25}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+6x+25\right)}{x^2+6x+25}-7\int\frac{d(x+3)}{(x+3)^2+4^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+6x+25\right)-\frac{7}{4}arctg\frac{x+3}{4}+C.$$

При знаходженні інтеграла використані такі перетворення диференціала:

$$d\left(x+3\right)=dx,$$

$$\left(2x+6\right)dx=d\left(x^2+6x+25\right).$$

Приклад 93. $\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(2x+1)-3}{x^2+x+1}dx=$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1}-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}-$$

$$-\frac{3}{2}\int\frac{d(x+\frac{1}{2})}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-\sqrt{3}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Приклад 94. $\int\frac{(3x-2)dx}{x^2+6x+9}=\int\frac{3x-2}{(x+3)^2}dx=\left\{\begin{matrix}x+3=u\\ x=u-3\\ dx=du\end{matrix}\right\}=$

$$=\int\frac{3u-11}{u^2}du=\int\left(\frac{3}{u}-\frac{11}{u^2}\right)du=3\int\frac{du}{u}-11\int\frac{du}{u^2}=$$

$$=3\ln|u|+\frac{11}{u}+C=3\ln|x+3|+\frac{11}{x+3}+C\,.$$

Приклад 95. $\int\frac{7-8x}{2x^2-3x+1}dx=\left\{\begin{matrix}2x^2-3x+1=2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)=\\ =2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right]=2\left(u^2-\frac{1}{16}\right),\\ \text{де}\quad u=x-\frac{3}{4},\;\; x=u+\frac{3}{4},\;\; dx=du\end{matrix}\right\}=$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{7-8\left(u+\frac{3}{4}\right)}{u^2-\frac{1}{16}}du=\frac{1}{2}\int\frac{1-8u}{u^2-\frac{1}{16}}du=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2-\frac{1}{16}}-$$

$$-2\int\frac{2udu}{u^2-\frac{1}{16}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{1}{4}}\ln\left|\frac{u-\frac{1}{4}}{u+\frac{1}{4}}\right|-2\int\frac{d\left(u^2-\frac{1}{16}\right)}{u^2-\frac{1}{16}}=$$

$$=\ln\left|\frac{x-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}{x-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}\right|-2\ln\left|u^2-\frac{1}{16}\right|+C=\ln\left|\frac{x-1}{x-0,5}\right|-$$

$$-2\ln\left|x^2-1,5x+0,5\right|+C.$$

Приклад 96. Знайти інтеграл $\int \frac{xdx}{\sqrt{4x^2-12x+1}}$.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{4x^2-12x+1}} = \left\{\begin{matrix} u = 4x^2-12x+1 \\ du = (8x-12)dx \end{matrix}\right\} = \int \frac{\frac{1}{8}(8x-12)+\frac{12}{8}}{\sqrt{4x^2-12x+1}}dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{8x-12}{\sqrt{4x^2-12x+1}}dx + \frac{3}{2\cdot 2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{8}\int \frac{du}{\sqrt{u}} + \frac{3}{4}\int \frac{d\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-2}} =$$

$$= \{2a,16\} = \frac{1}{8}2\sqrt{u} + \frac{3}{4}\ln\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-2}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{4x^2-12x+1} + \frac{3}{4}\ln\left|x-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{4x^2-12x+1}\right| + C.$$

Приклад 97. Знайти інтеграл $\int \sqrt{1-3x-4x^2}dx$.

Виділимо в підкореневому виразі повний квадрат:

$$1-3x-4x^2 = -4\left[x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\right] = -4\left[\left(x^2+2\frac{3}{8}x+\frac{9}{64}\right)-\frac{9}{64}-\frac{1}{4}\right] =$$

$$= -4\left[\left(x+\frac{3}{8}\right)^2-\frac{25}{64}\right] = 4\left[\frac{25}{64}-u^2\right], \text{ де } u = x+\frac{3}{8}, \ x = u-\frac{3}{8}, \ dx = du.$$

Тоді

$$\int \sqrt{1-3x-4x^2}dx = 2\int \sqrt{\frac{25}{64}-u^2}du = 2\cdot\frac{1}{2}\left(u\sqrt{\frac{25}{64}-u^2}+\frac{25}{64}\arcsin\frac{8u}{5}\right)+C =$$

$$= \left(x+\frac{3}{8}\right)\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}x-x^2}+\frac{25}{64}\arcsin\frac{8x+3}{5}+C$$

Вправи

Знайти інтеграл

1. $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$. Відповідь: $\frac{1}{2}arctg\frac{x+2}{2}+C$.
2. $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$. Відповідь: $\frac{1}{2}arctg\frac{x-1}{2}+C$.

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-3}}$. Відповідь: $\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x-3}\right|+C$.

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$. Відповідь: $\frac{1}{2}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+3}\right|+C$.

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$. Відповідь: $\arcsin\frac{x+2}{3}+C$.

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}$. Відповідь: $\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x}\right|+C$.

7. $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{x^2+6x}}$. Відповідь: $\sqrt{x^2+6x}-6\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x}\right|+C$.

8. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-2x-3x^2}}$. Відповідь: $-\frac{1}{3\sqrt{3}}\arcsin\frac{3x+1}{2}-\frac{1}{3}\sqrt{1-2x-3x^2}+C$.

9. $\int \frac{xdx}{\sqrt{4x^2-12x+1}}$. Відповідь: $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2-12x+1}+\frac{3}{4}\ln\left|2x-3+\sqrt{4x^2-12x+1}\right|+C$.

10. $\int \frac{x+4}{\sqrt{2-x-x^2}}dx$. Відповідь: $-\sqrt{2-x-x^2}+\frac{7}{2}\arcsin\frac{2x+1}{3}+C$.

11. $\int \sqrt{3+4x-x^2}\,dx$. Відповідь: $\frac{1}{2}\left[(x-2)\sqrt{7-(x-2)^2}+7\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{7}}\right]+C$.

12. $\int \sqrt{x^2+2x+6}\,dx$. Відповідь: $\frac{1}{2}\left[(x+1)\sqrt{x^2+2x+6}+5\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+6}\right|\right]+C$.

4. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ

Раціональним дробом називається дріб виду $P(x)/Q(x)$, де $P(x)$ і $Q(x)$ – багаточлени. Якщо степінь змінної чисельника нижче степеня змінної знаменника, то дріб називається правильним, якщо вище – неправильним. Перед інтегруванням раціонального дробу треба зробити такі алгебраїчні перетворення й обчислення:

1) якщо дано неправильний раціональний дріб, то необхідно виділити з нього цілу частину, тобто подати у вигляді

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

де $M(x)$ – багаточлен, а $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ – правильний раціональний дріб;

2) розкласти знаменник дробу на лінійні й квадратичні множники:

$$Q(x) = (x-a)^m \dots \left(x^2+px+q\right)^n \dots,$$

де $p^2/4 - q < 0$;

3) правильний раціональний дріб розкласти на суму найпростіших дробів:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_m}{(x-a)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x-a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-a} + \dots +$$

$$+\frac{B_n x + C_n}{\left(x^2+px+q\right)^n} + \frac{B_{n-1}x + C_{n-1}}{\left(x^2+px+q\right)^{n-1}} + \dots + \frac{B_1 x + C_1}{x^2+px+q} + \dots;$$

4) за методом невизначених коефіцієнтів обчислити $A_m,\ A_{m-1},\ \dots, A_1,\ \dots,$ $B_n,\ C_n,\ \dots\ B_1,\ C_1$.

У результаті інтегрування раціонального дробу зводиться в основному до знаходження інтегралів від багаточлена і від простих раціональних дробів таких типів:

1. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln\left|x-a\right| + C$.

2. $\displaystyle\int \frac{Adx}{(x-a)^m} = \frac{A}{m-1}\frac{1}{(x-a)^{m-1}} + C$.

3. $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{(A/2)(2x+p) + \left(B - \dfrac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx +$

$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}=$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C\,.$$

Приклад 98. Виділити цілу частину раціонального дробу

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}.$$

$$\begin{array}{r|l}
-\;x^3+3x^2+5x+7 & x^2+2 \\ \cline{2-2}
x^3+2x \qquad\quad & x+3 \\ \cline{1-1}
-\;3x^2+3x+7 & \\
3x^2+6 \qquad & \\ \cline{1-1}
3x+1 &
\end{array}$$

$$\frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}=x+3+\frac{3x+1}{x^2+2}.$$

Приклад 99. Знайти $\int\frac{x^2}{x+1}dx$.

Насамперед подамо підінтегральну функцію у вигляді суми багаточлена та правильного раціонального дробу. Для цього потрібно розділити чисельник на знаменник за правилом ділення багаточлена на багаточлен.

$$\begin{array}{r|l}
-\;x^2 \qquad & x+1 \\ \cline{2-2}
x^2+x & x-1 \\ \cline{1-1}
-\;-x \quad & \\
-x-1 & \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}$$

Отримаємо частку $x-1$ і остачу 1,

тобто $\frac{x^2}{x+1}=x-1+\frac{1}{x+1}$.

Тоді

$$\int\frac{x^2}{x+1}dx=\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx=\int(x-1)\,dx+\int\frac{1}{x+1}dx=\frac{(x-1)^2}{2}+\ln|x+1|+C\,.$$

Приклад 100. Знайти інтеграл $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$.

Оскільки дріб неправильний, виділимо з нього цілу частину:

$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+4\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}$.

Інтегруючи обидві частини, отримуємо

$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+4\int\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}dx$.

Розкладемо знаменник правильного дробу $\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}$ на множники $x^3-4x=x(x+2)(x-2)$. Тоді

$$\frac{x^2+4x-2}{x(x+2)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-2}=\frac{A\left(x^2-4\right)+Bx(x-2)+Cx(x+2)}{x(x+2)(x-2)}.$$

Оскільки знаменники в лівій і правій частинах однакові, прирівняємо чисельники: $x^2+4x-2=A\left(x^2-4\right)+Bx(x-2)+Cx(x+2)$. Отже,

$$x^2+4x-2=Ax^2-4A+Bx^2-2xB+Cx^2+2Cx.$$

Порівнявши коефіцієнти при однакових степенях *x*, отримаємо систему рівнянь $\begin{cases} A+B+C=4; \\ -2B+2C=4; \\ -4A=-2, \end{cases}$ розв'язавши яку знайдемо значення шуканих коефіцієнтів: $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{3}{4}$, $C=\frac{5}{4}$.

Наведений тут метод знаходження коефіцієнтів *A*, *B*, *C* називають **методом невизначених коефіцієнтів**.

Зауваження. У вихідну тотожність, за якою складається система рівнянь з невідомими коефіцієнтами, можна підставляти будь-які значення *x* (метод частинних значень). Виникають нові рівності з тими ж невідомими. Якщо знаменник дробу з лівої частини має дійсні корені, то зручно підставляти в тотожність саме ці значення. Потім визначається будь-який із невідомих коефіцієнтів, що значно спрощує вирішення системи, або взагалі визначаються послідовно всі невідомі коефіцієнти, не зводячи до системи. Часто буває корисно комбінувати обидва способи обчислення коефіцієнтів.

Отже, розкладання раціонального дробу на суму найпростіших має вигляд

$$\frac{x^2+4x-2}{x(x+2)(x-2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+2}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x-2}.$$

Таким чином, $\int \frac{x^2+4x-2}{x(x+2)(x-2)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} - \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{5}{4}\int \frac{dx}{x-2} =$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{3}{4}\ln|x+2| + \frac{5}{4}\ln|x-2| + C.$$

Остаточно отримаємо $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right| + C.$

Приклад 101. Знайти інтеграл $\int \frac{x^2dx}{1-x^4}$.

Розкладемо підінтегральний дріб на суму найпростіших:

$$\frac{x^2}{1-x^4} = \frac{x^2}{(1-x)(1+x)\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Помноживши обидві частини рівності на знаменник $(1-x^4)$, будемо мати

$$x^2 = A(1+x)\left(x^2+1\right) + B(1-x)\left(1+x^2\right) + (Cx+D)\left(1-x^2\right);$$

$$x^2 = Ax^3 + Ax^2 + Ax + A - Bx^3 + Bx^2 - Bx + B + Cx + D - Cx^3 - Dx^2.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях *x*, отримаємо систему рівнянь $\begin{array}{c|l} x^3 & A-B-C=0; \\ x^2 & A+B-D=1; \\ x & A-B+C=0; \\ x^0 & A+B+D=0, \end{array}$, з якої знайдемо $A=\frac{1}{4}$; $B=\frac{1}{4}$; $C=0$; $D=-\frac{1}{2}$.

Отже, $\int \frac{x^2dx}{1-x^4} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1-x} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} =$

$$= -\frac{1}{4}\ln|1-x| + \frac{1}{4}\ln|1+x| - \frac{1}{2}arctgx + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{2}arctgx + C.$$

Приклад 102. Знайти $\int \frac{2x-8}{x^4-4x^2}dx$.

Розкладемо знаменник підінтегральної функції на множники $\frac{2x-8}{x^4-4x^2} = \frac{2x-8}{x^2(x-2)(x+2)}$. Далі подамо підінтегральну функцію у вигляді суми елементарних дробів

$$\frac{2x-8}{x^2(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}.$$

Привівши праву частину до спільного знаменника і прирівнюючи чисельники, отримаємо $2x-8=Ax(x-2)(x+2)+B(x-2)(x+2)+Cx^2(x+2)+$

$$+Dx^2(x-2)=(A+C+D)x^3+(B+2C-2D)x^2-4Ax-4B.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях аргументу в правій і лівій частинах рівності, отримаємо систему рівнянь $\begin{cases} A+C+D=0; \\ B+2C-2D=0; \\ -4A=2; \\ -4B=-8. \end{cases}$

Розв'язавши цю систему, отримаємо: $A=-\frac{1}{2}$; $B=2$; $C=-\frac{1}{4}$; $D=\frac{3}{4}$.

Отже, $\quad \dfrac{2x-8}{x^2(x-2)(x+2)}=-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{4(x-2)}+\dfrac{3}{4(x+2)}.$

Тому $\displaystyle\int\frac{2x-8}{x^4-4x^2}dx=\int\frac{2x-8}{x^2(x-2)(x+2)}dx=\int\left[-\frac{1}{2x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{4(x-2)}+\frac{3}{4(x+2)}\right]dx=$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{x^2}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x+2}=-\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{2}{x}-\frac{1}{4}\ln|x-2|+\frac{3}{4}\ln|x+2|+C.$$

Приклад 103. Знайти $\displaystyle\int\frac{x^2+2x+2}{(x-2)^2(x+3)}dx$.

Подамо підінтегральну функцію у вигляді суми елементарних дробів

$$\frac{x^2+2x+2}{(x-2)^2(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x+3}.$$

Привівши праву частину до спільного знаменника і прирівнюючи чисельники, отримаємо

$$x^2+2x+2=A(x-2)(x+3)+B(x+3)+C(x-2)^2=$$
$$=(A+C)x^2+(A+B-4C)x-6A+3B+4C.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях аргументу в правій і лівій частинах рівності, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} A+C=1; \\ A+B-4C=2; \\ -6A+3B+4C=2. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо: $A=\frac{4}{5}$, $\quad B=2$, $\quad C=\frac{1}{5}$.

Отже,

$$\frac{x^2+2x+2}{(x-2)^2(x+3)}=\frac{4}{5(x-2)}+\frac{2}{(x-2)^2}+\frac{1}{5(x+3)}.$$

Тому

$$\int\frac{x^2+2x+2}{(x-2)^2(x+3)}dx=\frac{4}{5}\int\frac{dx}{x-2}+2\int\frac{dx}{(x-2)^2}+$$

$$+\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+3}=\frac{4}{5}\ln|x-2|-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{5}\ln|x+3|+C.$$

Приклад 104. Знайти $\int\frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2\left(x^2+2x+2\right)}dx$.

Запишемо розкладення підінтегрального дробу на елементарні

$$\frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2\left(x^2+2x+2\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Mx+N}{x^2+2x+2}.$$

Зводимо дроби до спільного знаменника і прирівнюємо чисельники

$$x^2-5x+9=A(x-1)\left(x^2+2x+2\right)+B\left(x^2+2x+2\right)+(Mx+N)(x-1)^2$$

Звідси $$x^2-5x+9=(A+M)x^3+(A+B+N-2M)x^2+$$

$$+(2B+M-2N)x+(-2A+2B+N).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при x^3, x^2, x і вільні члени в правій і лівій частинах рівності, отримаємо систему рівнянь $\begin{cases}A+M=0;\\ A+B-2M+N=1;\\ 2B+M-2N=-5;\\ -2A+2B+N=9.\end{cases}$

Розв’язуючи цю систему, отримаємо $N=\frac{21}{5}$; $A=-\frac{7}{5}$; $M=\frac{7}{5}$; $B=1$.

Отже, $$\frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2\left(x^2+2x+2\right)}=-\frac{7}{5(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{7x+21}{5\left(x^2+2x+2\right)}.$$

$$\int\frac{x^2-5x+9}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+2x+2\right)}dx=\int\left[-\frac{7}{5(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}+\right.$$

$$+\frac{7x+21}{5\left(x^2+2x+2\right)}\Bigg]dx=-\frac{7}{5}\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}+$$

$$+\frac{7}{5}\int\frac{x+3}{x^2+2x+2}dx=-\frac{7}{5}\int\frac{dx}{x-1}+\int(x-1)^{-2}dx+$$

$$+\frac{7}{5}\int\frac{\frac{1}{2}(2x+2+4)}{x^2+2x+2}dx=-\frac{7}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{7}{5}\int\frac{\frac{1}{2}(2x+2)}{x^2+2x+2}dx+\frac{14}{5}\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}=$$

$$=-\frac{7}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{7}{10}\ln\left|x^2+2x+2\right|+\frac{14}{5}arctg\,(x+1)+C.$$

Приклад 105. Знайти $\int\frac{xdx}{x^3-8}$.

Розкладаємо підінтегральну функцію на елементарні дроби.

$$\frac{x}{x^3-8}=\frac{x}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+D}{x^2+2x+4}.$$

Знайдемо невизначені коефіцієнти. Зведемо елементарні дроби до спільного знаменника і прирівняємо чисельники:

$$A\left(x^2+2x+4\right)+(Bx+D)(x-2)=x$$

або $(A+B)x^2+(2A-2B+D)x+(4A-2D)=x$.

Прирівнюємо також коефіцієнти при x^2, x і вільні члени:

$$\begin{cases}A+B=0,\\2A-2B+D=1,\\4A-2D=0.\end{cases}$$

Вирішивши систему, знаходимо:

$$3A=\frac{1}{2}\Rightarrow A=\frac{1}{6};B=-A=-\frac{1}{6};D=2A=2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

Отже,

$$\int\frac{xdx}{x^3-8}=\int\left(\frac{\frac{1}{6}}{x-2}+\frac{-\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}}{x^2+2x+4}\right)dx=\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{6}\int\frac{x-2}{x^2+2x+4}dx=$$

$$=\frac{1}{6}\int\frac{d(x-2)}{x-2}-\frac{1}{6}\int\frac{\frac{1}{2}(2x+2)-3}{x^2+2x+4}dx=$$

$$=\frac{1}{6}\ln|x-2|-\frac{1}{6\cdot 2}\int\frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+4}+\frac{3}{6}\int\frac{dx}{x^2+2x+4}=$$

$$=\frac{1}{6}\ln|x-2|-\frac{1}{12}\int\frac{d\left(x^2+2x+4\right)}{x^2+2x+4}+\frac{1}{2}\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+3}=$$

$$=\frac{1}{6}\ln|x-2|-\frac{1}{12}\ln\left|x^2+2x+4\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Приклад 106. Знайти $I=\int\frac{2x-1}{x^3-3x^2+2x}dx$.

Раціональний дріб $\frac{2x-1}{x^3-3x^2+2x}$ є правильним. Розкладемо знаменник на множники, а дріб на найпростіші дроби:

$$\frac{2x-1}{x^3-3x^2-2x}=\frac{2x-1}{x\left(x^2-3x+2\right)}=\frac{2x-1}{x(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}.$$

Помножимо рівність на $x(x-1)(x-2)$:

$$2x-1=A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-1).$$

Коефіцієнти знаходимо методом частинних (окремих) значень, який полягає в тому, що змінній надають конкретні значення стільки разів, скільки невідомих коефіцієнтів. При цьому отримана система значно спрощується, якщо змінній надавати значення, що дорівнюють дійсним кореням знаменника дробу. Справді,

$x=0,\qquad -1=2A\Rightarrow A=-\frac{1}{2},$

$x=1,\qquad 1=B(1-2)\Rightarrow B=-1,$

$x=2,\qquad 3=C\cdot 2\cdot(2-1)\Rightarrow C=\frac{3}{2}.$

Отже, $I=\int\left(\frac{-\frac{1}{2}}{x}+\frac{-1}{x-1}+\frac{\frac{3}{2}}{x-2}\right)dx=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{\frac{3}{2}}{x-2}dx=$

$$=-\frac{1}{2}\ln|x|-\int\frac{d(x-1)}{x-1}+\frac{3}{2}\int\frac{d(x-2)}{x-2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|x|-\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln|x-2|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x-2)^3}{x(x-2)^2}\right|+C.$$

Приклад 107. Знайти $\int \frac{(x+2)dx}{x^3-2x^2}$.

$$I = \int \frac{(x+2)dx}{x^3-2x^2} = \int \frac{(x+2)dx}{x^2(x-2)} = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2} \right) dx.$$

Визначимо коефіцієнти A, B, C, застосовуючи метод окремих значень:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2} = \frac{x+2}{x^2(x-2)} \Rightarrow A \cdot x(x-2) + B(x-2) + Cx^2 = x+2$$

$$\begin{array}{lll} x = 2, & 4C = 4, & C = 1; \\ x = 0, & -2B = 2, & B = -1; \\ x = 1, & -A - B + C = 3, & A = 3 + B - C = 3 - 1 - 1 = 1. \end{array}$$

Отже, $\quad I = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-2} \right) dx =$

$$= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{d(x-2)}{x-2} = \ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|x-2| + C.$$

Вправи

Обчислити інтеграл

1. $\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)} dx$.

Відповідь: $3\ln|x-1| - 7\ln|x-2| + 5\ln|x-4| + C = \ln\left| \frac{(x-1)^3 (x-4)^5}{(x-2)^7} \right| + C$.

2. $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3 (x+3)} dx$.

Відповідь: $-\frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{3}{8(x-1)} + \frac{5}{32} \ln\left| \frac{x-1}{x+3} \right| + C$.

3. $\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2} dx$.

Відповідь: $\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{3}{2}\ln\left(x^2+2\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{x}{\sqrt{2}} + C$.

4. $\int \frac{dx}{x^3+2x}$. Відповідь: $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{x^2+2} + C$.

5. $\int \frac{x^3+2}{x^3-4x}dx$. Відповідь: $x-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2(x+2)^3}{(x-2)^5}\right|+C$.

6. $\int \frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}dx$.

Відповідь: $-\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{7}{2}\ln|x-2|+\frac{17}{3}\ln|x-3|+C$.

7. $\int \frac{x^6+x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}dx$.

Відповідь: $\frac{x^3}{3}+\ln|x|-\frac{7}{3}\ln|x+1|+\frac{2}{3}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

8. $\int \frac{2t^5-2t+1}{1-t^4}dt$. Відповідь: $-t^2+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+\frac{1}{2}arctgt+C$.

9. $\int \frac{dx}{x^4+a^2x^2}dx$. Відповідь: $-\frac{1}{a^2x}-\frac{1}{a^3}arctg\frac{x}{a}+C$.

10. $\int \frac{dx}{x^4-a^4}dx$. Відповідь: $\frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|-\frac{1}{2a^3}arctg\frac{x}{a}+C$.

5. ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

5.1. Інтеграл виду $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

Розглянемо інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, де R – раціональна функція. Інтеграли цього виду зводяться до інтегралів від раціональних функцій за допомогою підстановки

$$t = tg\frac{x}{2}.$$

Застосувавши цю підстановку, отримаємо

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2};\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Розглянута вище підстановка дозволяє проінтегрувати будь-яку функцію виду $R(\sin x, \cos x)$, тому її іноді називають «універсальною тригонометричною підстановкою».

Приклад 108. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{3+5\cos x} = I$.

Підінтегральна функція раціонально залежить від $\cos x$. Застосувавши універсальну підстановку, будемо мати

$$I = 2\int \frac{1}{3+5\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+tg\frac{x}{2}}{2-tg\frac{x}{2}}\right| + C.$$

Приклад 109.

$$\int \frac{dx}{\sin x - \cos x} = \left[\begin{array}{l} tg\frac{x}{2} = t, \quad x = 2arctgt, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = 2\int \frac{dt}{t^2+2t-1} = 2\int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2-2} =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+1-\sqrt{2}}{tg\frac{x}{2}+1+\sqrt{2}}\right| + C.$$

На практиці універсальна підстановка часто призводить до інтегрування громіздких раціональних дробів, тому в багатьох окремих випадках використовують інші тригонометричні підстановки, які швидше ведуть до мети.

5.2. Інтеграли виду $\int R(\sin x, \cos^2 x)\cos x dx$, $\int R(\cos x, \sin^2 x)\sin x dx$

Розглянемо інтеграл $\int R(\sin x, \cos^2 x)\cos x dx = I_1$. За допомогою підстановки $t = \sin x$ задача зводиться до інтегрування функції, раціонально залежної від t.

Дійсно, $I_1 = \int R\left(t, 1-t^2\right)dt$.

При знаходженні інтеграла виду $\int R\left(\cos x, \sin^2 x\right)\sin x dx = I_2$ використовується підстановка $t = \cos x$. І в цьому випадку завдання зводиться до інтегрування функції, раціонально залежної від t: $I_2 = -\int R\left(t, 1-t^2\right)dt$.

Обчислити інтеграл

Приклад 110.

$$\int \frac{\sin x dx}{3-\cos^2 x} = \begin{bmatrix} \cos x = t, \\ -\sin x dx = dt, \\ \sin x dx = -dt \end{bmatrix} = -\int \frac{dt}{3-t^2} = \int \frac{dt}{t^2-3} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}-\cos x}{\sqrt{3}+\cos x}\right| + C.$$

Приклад 111.

$$\int \frac{\cos 3x dx}{\sin^5 3x} = \begin{bmatrix} \sin 3x = t, \\ \cos 3x \cdot 3 \cdot dx = dt, \\ \cos 3x dx = \dfrac{dt}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^5} = \frac{1}{3}\int t^{-5}dt =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{t^4} + C = -\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{\sin^4 3x} + C.$$

Приклад 112.

$$\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos x = t, \\ -\sin x dx = dt, \\ \sin x dx = -dt \end{bmatrix} = -\int \frac{(1-t^2)dt}{t^2} =$$

$$= -\int \left(\frac{1}{t^2} - 1 \right) dt = \int dt - \int \frac{dt}{t^2} = t + \frac{1}{t} + C = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C .$$

Приклад 113.

$$\int \frac{(2-\cos^2 x)}{2\cos^2 x - 1} \sin x dx = \begin{bmatrix} \cos x = t, \\ -\sin x dx = dt, \\ \sin x dx = -dt \end{bmatrix} = \int \frac{(2-t^2)}{2t^2 - 1} \cdot (-dt) =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{t^2 - 2}{t^2 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \int \frac{\left(t^2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{3}{2}}{t^2 - \frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \left(\int dt - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^2 - \frac{1}{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(t - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} \ln \left| \frac{t - \frac{1}{\sqrt{2}}}{t + \frac{1}{\sqrt{2}}} \right| \right) + C \ = \frac{1}{2} \left(\cos x - \frac{3\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{2} \cdot \cos x - 1}{\sqrt{2} \cdot \cos x + 1} \right| \right) + C .$$

Приклад 114.

$$\int \frac{\cos^3 x dx}{2 + \sin x} = \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x dx}{2 + \sin x} = \int \frac{(1 - \sin^2 x) \cos x dx}{2 + \sin x} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sin x = t, \\ \cos x dx = dt \end{bmatrix} = \int \frac{(1-t^2)dt}{2+t} = -\int \frac{t^2 - 1}{t + 2} dt =$$

$$= -\int \frac{(t^2 - 4) + 3}{t + 2} dt = -\int \frac{(t-2)(t+2) + 3}{t + 2} dt =$$

$$= -\int (t-2) dt - 3 \int \frac{dt}{t+2} = -\int (t-2) d(t-2) - 3 \int \frac{d(t+2)}{t+2} =$$

$$= -\frac{(t-2)^2}{2} - 3 \ln |t + 2| + C = -\frac{(\sin x - 2)^2}{2} - 3 \ln |\sin x + 2| + C .$$

5.3. Інтеграл виду $\int \sin^m x \cos^n x dx$

Розглянемо інтеграл $\int \sin^m x \cos^n x dx$.

Нехай, принаймні, один з показників (m або n) – непарне додатне число. Якщо n – непарне ціле число, то використовується підстановка $t=\sin x$, а якщо m, то – підстановка $t=\cos x$.

Якщо обидва показники степеня m і n – парні цілі додатні числа, то слід перетворити підінтегральну функцію за допомогою формул зниження степеня:

$$\left.\begin{aligned}&\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x;\\&\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x);\\&\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x).\end{aligned}\right\}$$

Приклад 115. Знайти $\int\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx=I$.

Даний інтеграл належить до інтегралів вказаного вище виду, де n – непарне додатне число $(n=3)$. Уявімо його у вигляді $I=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\cos xdx$ і використаємо підстановку $t=\sin x$; $dt=\cos xdx$. Тоді

$$I=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^4 x}\cos xdx=\int\frac{1-t^2}{t^4}dt=\int t^{-4}dt-\int t^{-2}dt=$$

$$=-\frac{1}{3t^3}+\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{1}{\sin x}+C.$$

Приклад 116. Знайти $\int\sin^3 x\cos^2 xdx$.

Оскільки $m=3$ – непарне і додатне, то $t=\cos x$, тоді $dt=-\sin xdx$.

$$\int\sin^3 x\cdot\cos^2 xdx=\int\sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\sin xdx=$$

$$=\int\left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 x\sin xdx=\int\left(1-t^2\right)t^2(-dt)=$$

$$=\int\left(t^4-t^2\right)dt=\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}+C=\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}+C.$$

Приклад 117.

$$\int\sin^3 x\cdot\cos^5 xdx=\int\sin^2 x\cdot\cos^5 x\cdot\sin xdx=\int(1-\cos^2 x)\cos^5 x\cdot\sin xdx=$$

$$=\begin{bmatrix}\cos x=t,\\-\sin xdx=dt,\\\sin xdx=-dt\end{bmatrix}=-\int(1-t^2)\cdot t^5dt=$$

$$=\int t^7dt-\int t^5dt=\frac{t^8}{8}-\frac{t^6}{6}+C=\frac{1}{8}\cos^8 x-\frac{1}{6}\cos^6 x+C.$$

Приклад 118. Знайти $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$.

Оскільки $n = 3$ – непарне, додатне, то $t = \sin x$, тоді $dt = \cos x dx$.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\left(1 - \sin^2 x\right)\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 - t^2}{t^2} dt = \int \frac{dt}{t^2} - \int dt =$$

$$= -\frac{1}{t} - t + C = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C.$$

Приклад 119.

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^3 x dx = \int (\sin x \cdot \cos x)^3 dx = \int \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right)^3 dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \sin^3 2x dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cdot \sin 2x dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos^2 2x) \cdot \sin 2x dx =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2x = t, \\ -2 \sin 2x dx = dt, \\ \sin 2x dx = -\frac{1}{2} dt \end{bmatrix} = -\frac{1}{16} \int (1 - t^2) dt = -\frac{1}{16} \left(\int dt - \int t^2 dt \right) =$$

$$= -\frac{1}{16} \left(t - \frac{t^3}{3} \right) + C = \frac{1}{16} \left(-\cos 2x + \frac{\cos^3 2x}{3} \right) + C.$$

Приклад 120. Знайти $\int \cos^2 x dx$.

Оскільки $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, то

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int \left(1 + \cos 2x\right) dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{4} \int \cos 2x d(2x) = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

Приклад 121.

$$\int \sin^2 3x dx = \left[\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a) \right] =$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 6x \right) dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 6x dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{12} \sin 6x + C.$$

Приклад 122. Знайти інтеграл $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx = I$.

Використаємо перетворення $\sin^2 x \cdot \cos^2 x = (\sin x \cos x)^2 = \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 =$

$= \frac{1}{4}\sin^2 2x$ і врахуємо формулу для зниження степеня, після чого одержимо: $\sin^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{1}{4} \cdot \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1}{8}(1-\cos 4x)$.

Отже, $$I = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)\,dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x dx;$$

$$I = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Приклад 123. Знайти $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx =$$

$$= \int \frac{1}{4}\sin^2 2x \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d(\sin 2x) =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

Приклад 124.

$$\int \sin^4 x dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4}\left(\int dx - \int \cos 2x \cdot 2dx + \int \cos^2 2x dx\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - \int \cos 2x d(2x) + \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x) dx \right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - \sin 2x + \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\int \cos 4x \cdot 4dx \right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - \sin 2x + \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\int \cos 4x d(4x) \right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x \right) + C.$$

Приклад 125.

$$\int (1+2\cos x)^2 dx = \left[(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \right] =$$

$$= \int (1+4\cos x + 4\cos^2 x)dx = \int dx + 4\int \cos x dx + 4\int \cos^2 x dx =$$

$$= \left[\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \right] = x + 4\sin x + 2\int (1+\cos 2x)dx =$$

$$= x + 4\sin x + 2\int dx + 2\int \cos 2x dx = x + 4\sin x + 2x + \sin 2x + C =$$

$$= 3x + 4\sin x + \sin 2x + C.$$

5.4. Інтеграл виду $\int R(tgx, \sin^2 x, \cos^2 x)dx$

При інтегруванні функцій, що раціонально залежать від $\sin x$ і $\cos x$ в парних степенях і tgx, використовується підстановка $t = tgx$.

Застосувавши цю підстановку, матимемо

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}; \; dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Таким чином, завдання знаходження інтегралів зводиться до інтегрування функцій, раціонально залежних від t.

Приклад 126. Знайти $\int \frac{dx}{4-\cos^2 x} = I$.

Застосуємо підстановку $tgx = t$, тоді $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

$$I = \int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(4-\frac{1}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{4t^2+3} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(2t\right)}{(2t)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \frac{\sqrt{3}}{6} arctg \frac{2tgx}{\sqrt{3}} + C.$$

Приклад 127.

$$\int \frac{dx}{2-\sin^2 x} = \left[\begin{array}{l} tgx = t, \quad x = arctgt, \quad dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \dfrac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \dfrac{t^2}{1+t^2} \end{array} \right] =$$

$$=\int\frac{dt}{\left(2-\frac{t^2}{1+t^2}\right)\left(1+t^2\right)}=\int\frac{dt}{2+t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}+C=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right)+C\,.$$

Приклад 128.

$$\int tg^4xdx=\left[\begin{array}{l} tgx=t, \\ x=arctgt, \\ dx=\frac{dt}{1+t^2}\end{array}\right]=\int\frac{t^4dt}{1+t^2}=\int\frac{t^4-1+1}{t^2+1}dt=$$
$$=\int\frac{\left(t^2+1\right)\left(t^2-1\right)+1}{t^2+1}dt=\int\left(t^2-1\right)dt+\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{t^3}{3}-t+arctgt+C=$$
$$=\frac{tg^3x}{3}-tgx+arctg(tgx)+C=\frac{tg^3x}{3}-tgx+x+C\,.$$

5.5. Інтеграли виду $\int\sin mx\cos nxdx, \int\cos mx\cos nxdx, \int\sin mx\sin nxdx$

При знаходженні даних інтегралів використовуються формули тригонометрії:

$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\right],$$
$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\right],$$
$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\right],$$

з їх допомогою добуток тригонометричних функцій можна подати у вигляді суми функцій, інтегрування яких не викликає принципових труднощів.

Приклад 129. Знайти інтеграл $\int\cos x\sin 3xdx=I$.

Застосувавши першу з формул, отримаємо

$$I=\frac{1}{2}\left[\int\sin 4xdx+\int\sin 2xdx\right]=\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 4x}{4}-\frac{\cos 2x}{2}\right]+C=C-\frac{1}{4}\left(\frac{\cos 4x}{2}+\cos 2x\right).$$

Приклад 130.

$$\int \sin 3x \cdot \sin 5x dx = \frac{1}{2}\int (\cos(-2x) - \cos 8x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 2x dx - \frac{1}{2}\int \cos 8x dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C.$$

Вправи

Знайти інтеграл

1. $\int \frac{dx}{3+5cosx}$. Відповідь: $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+tg\frac{x}{2}}{2-tg\frac{x}{2}}\right| + C$.

2. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$. Відповідь: $\frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{8}\frac{1}{tg^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{8}tg^2\frac{x}{2} + C$.

3. $\int \cos^4 x dx$. Відповідь: $\frac{3x}{8} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$.

4. $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx$. Відповідь: $\frac{1}{8}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{6}\sin^3 2x\right) + C$.

5. $\int \sin^4 x \cdot \cos^4 x dx$. Відповідь: $\frac{1}{64}\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{16}\sin 8x\right) + C$.

6. $\int \sin^3 x dx$. Відповідь: $\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$.

7. $\int (1+2\cos x)^3 dx$. Відповідь: $7x + 14\sin x + 3\sin 2x - \frac{8}{3}\sin^3 x + C$.

8. $\int \cos^7 x dx$. Відповідь: $\sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C$.

9. $\int \sin^6 kx \cdot \cos^3 kx dx$. Відповідь : $\frac{1}{k}\left(\frac{1}{7}\sin^7 kx - \frac{1}{9}\sin^9 kx\right) + C$.

10. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[5]{\cos x}}$. Відповідь: $\frac{5}{14}\sqrt[5]{\cos^{14} x} - \frac{5}{4}\sqrt[5]{\cos^4 x} + C$.

11. $\int tg^3 x dx$. Відповідь: $\frac{1}{2}tg^2 x + \ln|\cos x| + C$.

12. $\int \frac{\sec^4 x dx}{\sqrt{tgx}}$. Відповідь: $2\sqrt{tgx}+\frac{2}{5}\sqrt{tg^5 x}+C$.

13. $\int \cos\left(5x-\frac{p}{4}\right)\cdot\cos\left(x+\frac{p}{4}\right)dx$. Відповідь: $\frac{1}{12}\sin 6x-\frac{1}{8}\cos 4x+C$.

14. $\int \sin 7x\cdot\cos x\cdot\sin 8x dx$.

Відповідь: $\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{16}\sin 16x+\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{14}\sin 14x\right)+C$.

15. $\int \frac{\cos x+\cos^3 x}{\cos 2x}dx$. Відповідь: $\frac{1}{2}\left(\sin x-\frac{3\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\sin x-1}{\sqrt{2}\sin x+1}\right|\right)+C$.

6. ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

6.1. Інтеграл виду $\int R\left(x,\ (ax+b)^{\frac{m}{n}},\ ...,\ (ax+b)^{\frac{r}{s}}\right)dx$

Розглянемо інтеграл $\int R\left(x,\ (ax+b)^{\frac{m}{n}},\ ...,\ (ax+b)^{\frac{r}{s}}\right)dx$, де R – раціональна функція.

Підстановка $ax+b=t^p$, де p – найменше спільне кратне чисел $n,\ ...,\ s$, перетворює цей інтеграл в інтеграл від раціональної функції змінної t.

$$x=\frac{t^p-b}{a};\quad dx=\frac{pt^{p-1}}{a}dt.$$

Приклад 131. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}=I$.

Тут $I=\int\frac{dx}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}-(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$; $n=3,\ s=2$, тому $p=6$.

Застосувавши підстановку $2x+1=t^6$ і враховуючи вирази для x і dx, отримаємо

$$I=\int\frac{3t^5}{t^4-t^3}dt=3\int\frac{t^2dt}{t-1}=3\int\frac{t^2-1+1}{t-1}dt=$$
$$=3\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=\frac{3}{2}t^2+3t+3\ln|t-1|+C.$$

Повернемося до колишньої змінної, враховуючи, що $t=\sqrt[6]{2x+1}$:

$$I=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1}+3\sqrt[6]{2x+1}+3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right|+C.$$

Приклад 132. Знайти $\int x\sqrt[3]{x+3}dx$.

Припустимо, що $t=\sqrt[3]{x+3}$, звідси знаходимо $x=t^3-3,\ dx=3t^2dt$.

$$\int x\sqrt[3]{x+3}dx=\int\left(t^3-3\right)t\cdot 3t^2dt=3\int\left(t^6-3t^3\right)dt=$$
$$=3\int t^6dt-9\int t^3dt=\frac{3}{7}t^7-\frac{9}{4}t^4+C=$$

$$=3t^4\left(\frac{1}{7}t^3-\frac{3}{4}\right)+C=3\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^4\left[\frac{1}{7}\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^3-\frac{3}{4}\right]+C=$$

$$=3(x+3)\sqrt[3]{(x+3)}\left(\frac{1}{7}x-\frac{9}{28}\right)+C=\frac{3(x+3)\sqrt[3]{(x+3)}\,(4x-9)}{28}+C.$$

Приклад 133. Знайти $\int\frac{xdx}{\sqrt{2+4x}}$.

Припустимо, що $t=\sqrt{2+4x}$, звідси знаходимо $x=\frac{t^2-2}{4}$, $dx=\frac{tdt}{2}$.

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{2+4x}}=\int\frac{\frac{t^2-2}{4}\cdot\frac{tdt}{2}}{t}=\frac{1}{8}\int\left(t^2-2\right)dt=\frac{1}{8}\left[\frac{t^3}{3}-2t\right]+C=$$

$$=\frac{t\left(t^2-6\right)}{24}+C=\frac{\sqrt{2+4x}\,(x-1)}{6}+C.$$

Приклад 134. $\int\frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}dx=\left[\begin{matrix}2x-1=t^2, & x=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}, \\ dx=tdt, & x-1=\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}\end{matrix}\right]=$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\left(t^2-1\right)tdt}{t}=\frac{1}{2}\int\left(t^2-1\right)dt=\frac{1}{2}\left(\int t^2dt-\int dt\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)+C=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{(2x-1)^3}}{3}-\sqrt{2x-1}\right)+C=\frac{1}{3}(x-2)\sqrt{2x-1}+C.$$

Приклад 135.

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+1}=\left[\begin{matrix}\sqrt{x}=t, & x=t^2 \\ dx=2tdt & \end{matrix}\right]=2\int\frac{t^2}{t+1}dt=$$

$$=2\int\frac{\left(t^2-1\right)+1}{t+1}dt=2\int\frac{(t-1)(t+1)+1}{t+1}dt=2\int(t-1)dt+2\int\frac{dt}{t+1}=$$

$$=2\int(t-1)d(t-1)+2\int\frac{d(t+1)}{t+1}=2\frac{(t-1)^2}{2}+2\ln|t+1|+C=$$

$$=(\sqrt{x}-1)^2+2\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C.$$

Приклад 136.

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}dx = \begin{bmatrix} \dfrac{x+1}{x} = t^2, & x = \dfrac{1}{t^2-1} \\ dx = -\dfrac{2tdt}{\left(t^2-1\right)^2}, & t = \sqrt{\dfrac{x+1}{x}} \end{bmatrix} =$$

$$= -2\int \frac{\left(t^2-1\right)^2 t^2 dt}{\left(t^2-1\right)^2} = -2\int t^2 dt = -\frac{2}{3}t^3 + C = -\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{x+1}{x}\right)^3} + C.$$

6.2. інтеграл виду $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

Інтеграл $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$, де R – раціональна функція, шляхом виділення повного квадрата з квадратного тричлена зводиться до одного з трьох видів:

1. $\int R\left(t, \sqrt{t^2+a^2}\right)dt, \quad (t = a\,tgz)$.
2. $\int R\left(t, \sqrt{t^2-a^2}\right)dt, \quad \left(t = \dfrac{a}{\cos z}\right)$.
3. $\int R\left(t, \sqrt{a^2-t^2}\right)dt, \quad (t = a\sin z)$.

За допомогою зазначених у дужках підстановок завдання знаходження інтегралів зводиться до інтегрування функцій, раціонально залежних від тригонометричних.

Приклад 137. Знайти інтеграл $\int \sqrt{1-4x-x^2}dx = I$.

Перетворимо підінтегральну функцію, виділивши повний квадрат в квадратному тричлені: $I = \int \sqrt{-\left(x^2+4x+4\right)+5}dx = \int \sqrt{5-(x+2)^2}dx$.

Позначивши через $t = x+2$ і застосувавши підстановку $t = \sqrt{5}\sin z$; $dt = \sqrt{5}\cos zdz$, отримаємо

$$I = \int \sqrt{5-t^2}dt = 5\int \cos^2 zdz = 5\int \frac{1+\cos 2z}{2}dz =$$

$$= \frac{5}{2}z + \frac{5}{4}\sin 2z + C = \frac{5}{2}z + \frac{5}{2}\sin z\cos z + C.$$

Повернемося до колишньої змінної, враховуючи, що

$$z = \arcsin\frac{t}{\sqrt{5}}, \quad \sin z = \frac{t}{\sqrt{5}}, \quad \cos z = \sqrt{1-\sin^2 z} = \sqrt{1-\frac{t^2}{5}},$$

$$I = \frac{5}{2}\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}} + \frac{5}{2}\frac{x+2}{\sqrt{5}}\sqrt{1-\frac{x^2+4x+4}{5}} + C.$$

Остаточно

$$I = \frac{5}{2}\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}(x+2)\sqrt{1-x^2-4x} + C.$$

Обчислити інтеграл

Приклад 138.

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{bmatrix} x = \sin t, & dx = \cos t dt, \\ t = \arcsin x & \end{bmatrix} =$$

$$= \int\frac{\sin^2 t\cos t dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int\sin^2 t dt = \frac{1}{2}\int(1-\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = \frac{1}{2}(t - \sin t\cos t) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t - \sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right) + C = \frac{1}{2}\left(\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}\right) + C.$$

Приклад 139.

$$\int\sqrt{3+2x-x^2}dx = \int\sqrt{4-(x-1)^2}dx = \begin{bmatrix} x-1 = 2\sin t, \\ dx = 2\cos t dt, \\ t = \arcsin\frac{x-1}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \int\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt = 4\int\cos^2 t dt =$$

$$= 2\int(1+\cos 2t)dt = 2\left(\int dt + \int\cos 2t dt\right) =$$

$$= 2\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = 2\left(t + \sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right) + C =$$

$$= 2\left(\arcsin\frac{x-1}{2} + \frac{x-1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}\right) + C =$$

$$= 2\arcsin\frac{x-1}{2} + \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{3+2x-x^2} + C.$$

Приклад 140.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(2+x^2\right)^3}} = \left[\begin{array}{ll} x=\sqrt{2}tgt, & t=arctg\,\dfrac{x}{\sqrt{2}} \\ dx=\dfrac{\sqrt{2}dt}{\cos^2 t}=\sqrt{2}\cdot\sec^2 tdt & \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{\sqrt{2}\sec^2 tdt}{\sqrt{\left(2+2tg^2t\right)^3}} = \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2 tdt}{\sec^3 t} = \frac{1}{2}\int \cos tdt =$$

$$= \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin\left(arctg\,\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

Приклад 141.

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{\sin t}, \qquad\qquad dx=-\dfrac{\cos tdt}{\sin^2 t}, \\ x^2-1=\dfrac{1}{\sin^2 t}-1=\dfrac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}=\dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t}=ctg^2t, \\ ctg^2t=\dfrac{1}{\sin^2 t}-1, \quad t=\arcsin\dfrac{1}{x} \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{\sqrt{ctg^2t}}{\dfrac{1}{\sin t}}\left(-\frac{\cos tdt}{\sin^2 t}\right) = -\int ctg^2tdt = -\int\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt =$$

$$= \int dt - \int \frac{dt}{\sin^2 t} = t + ctgt + C = \arcsin\frac{1}{x} + \frac{\cos\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)}{\sin\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)} + C =$$

$$= \arcsin\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)}}{\dfrac{1}{x}} + C = \arcsin\frac{1}{x} + x\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} + C =$$

$$= \arcsin\frac{1}{x} + \sqrt{x^2-1} + C.$$

Вправи

Знайти інтеграл

1. $\int x\sqrt{a-x}dx$. Підстановка: $a-x=t^2$.

Відповідь: $-\frac{2}{3}a\sqrt{(a-x)^3}+\frac{2}{5}\sqrt{(a-x)^5}+C$.

2. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}dx$. Підстановка: $x=t^2$.

Відповідь: $2\sqrt{x}-2\sqrt{2}arctg\sqrt{\frac{x}{2}}+C$.

3. $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}dx$. Підстановка: $2x-1=t^2$.

Відповідь: $\frac{(x-2)\sqrt{2x-1}}{3}+C$.

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$. Підстановка: $x=t^6$.

Відповідь: $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C$.

5. $\int \frac{\sqrt[6]{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}$. Підстановка: $x=t^6$.

Відповідь: $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-6arctg\sqrt[6]{x}+C$.

6. $\int \frac{xdx}{1+\sqrt{x-1}}$. Підстановка: $x-1=t^2$.

Відповідь: $\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}-x+4\sqrt{x-1}-4\ln\left|1+\sqrt{x-1}\right|+C$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$. Підстановка: $1-2x=t^4$.

Відповідь: $-\sqrt{1-2x}-2\sqrt[4]{1-2x}-2\ln\left|\sqrt[4]{1-2x}-1\right|+C$.

8. $\int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x}+4\right)\sqrt{x}}$. Підстановка: $x=t^6$.

Відповідь: $6\sqrt[6]{x}-12arctg\frac{\sqrt[6]{x}}{2}+C$.

9. $\int \sqrt{x^2-a^2}dx$. Підстановка: $x=\frac{a}{\sin t}=a\cos ect$.

Відповідь: $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|\right)+C$.

10. $\int \frac{dx}{\left(x^2-3\right)\sqrt{4-x^2}}$. Підстановка: $x = 2\sin t$.

Відповідь: $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}\sqrt{4-x^2}}{x+\sqrt{3}\sqrt{4-x^2}}\right|+C$

11. $\int \frac{\sqrt{x^2+5}}{x^2}dx$. Підстановка: $x = \sqrt{5}\cdot tgt$.

Відповідь: $-\frac{\sqrt{x^2+5}}{x}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)+C$.

12. $\int \frac{dx}{\left(x^2+4x+7\right)^2}$. Підстановка: $x+2=\sqrt{3}tgt$.

Відповідь: $\frac{1}{3}\frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x+7}}+C$.

7. ПРО ІНТЕГРАЛИ, ЯКІ НЕМОЖНА ВИРАЗИТИ ЧЕРЕЗ ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ

У підрозділі 1.1 ми вже відзначали, що будь-яка функція, неперервна на проміжку X, має на цьому проміжку первісну, тобто існує така функція $F(x)$, що $d(F(x)) = f(x)dx$. Проте не всяка первісна, навіть тоді, коли вона існує, виражається в кінцевому вигляді через елементарні функції. Останнє відбувається через вузькість класу елементарних функцій. При цьому говорять, що інтеграл в елементарних функціях «не береться». Сказане має відношення до e^{x^2}, $\frac{1}{\ln x}$, $\frac{\sin x}{x}$, $\sqrt{1+x^3}$ і до безлічі інших функцій. У таких випадках для інтегрування використовують наближені методи.

Наприклад, потрібно обчислити інтеграл $\int \frac{\sin x}{x} dx$. Функція $y = \sin x$ має розкладення в так званий ряд Маклорена:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \; .$$

Отже,

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = \int \frac{1}{x}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \right] dx =$$

$$= \int \left[1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots \right] dx =$$

$$= x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + \ldots + C \, .$$

Якби потрібно було обчислити інтеграл $\int e^{x^2} dx$, то використали б розкладення $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$, у яке замість x підставили б x^2.

8. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Визначення первісної.
2. Сформулювати теорему про властивість первісних.
3. Яка функція має первісну?
4. Визначення невизначеного інтеграла.
5. Як називають вираз, який стоїть під знаком невизначеного інтеграла?
6. Геометричний зміст невизначеного інтеграла.
7. У чому полягає сенс заміни змінної у невизначеному інтегралі?
8. Як записати формулу інтегрування частинами.
9. Для яких типів інтегралів застосовується формула інтегрування частинами?
10. Як називають дію відшукання всіх первісних?
11. Чому дорівнює похідна від невизначеного інтеграла?
12. Чому дорівнює невизначений інтеграл від диференціала деякої функції?
13. Чи можна постійний множник виносити за знак невизначеного інтеграла?
14. Чому дорівнює невизначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій?
15. Який дріб називається раціональним?
16. Який раціональний дріб називається неправильним
17. Який раціональний дріб називається правильним?
18. Як потрібно проінтегрувати неправильний дріб?
19. Як інтегрується найпростіший правильний дріб (1 випадок)?
20. Як інтегрується найпростіший правильний дріб (2 випадок)?
21. Як інтегрується найпростіший правильний дріб (3 випадок)?
22. Яку підстановку використовують при інтегруванні $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$?
23. Яку підстановку використовують при інтегруванні $\int R\left(\sin x, \cos^2 x\right)\cos x dx$?
24. Яку підстановку використовують при інтегруванні $\int R\left(\sin^2 x, \cos x\right)\sin x dx$?
25. Як знайти $\int \sin^m x \cos^n x dx$, якщо n – непарне ціле додатне число?
26. Як знайти $\int \sin^2 2x \cdot \cos^2 2x dx$?
27. Яка підстановка використовується при інтегруванні $\int R(tgx)dx$?
28. Яку формулу потрібно застосувати, щоб $\int \sin mx \cdot \cos nx dx$ звести до табличного?
29. Яку формулу потрібно застосувати, щоб $\int \sin mx \sin nx dx$ звести до табличного?

30. Яку формулу потрібно застосувати, щоб $\int \cos mx \cos nx dx$ звести до табличного?

31. Яка підстановка використовується для знаходження
$\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)dx$?

32. Яка підстановка використовується для знаходження
$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$?

33. Яка підстановка використовується для знаходження
$\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)dx$?

34. Яка підстановка використовується для знаходження
$\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: в 2-х т. / Н.С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 1. – 432 с.

2. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа: в 2-х т. / Г.М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1967. – Т. 1. – 440 с.

3. Синайский Е.С. Высшая математика : учеб. пособие / Е.С. Синайский, Л.В. Новикова, Л.И. Заславская. – Д. : НГУ, 2004. – Ч. 1. – 398 с.

4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович – М.: Наука, 1990. – 624 с.

5. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике /В.П. Минорский. – М. : Наука, 1987. – 352 с.

6. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М. : Наука, 1977. – 416 с.

Навчальне видання

Павліщев Валентин Іванович
Бойко Любов Йосипівна
Горбатов Микола Іванович

ВИЩА МАТЕМАТИКА
НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

(в прикладах і задачах)

Навчальний посібник

Редактор Ю.В. Рачковська

Підп. до друку 23.03.2015. Формат 30 х 42/4.
Папір офсетний. Ризографія. Ум. друк. арк. 3,8.
Обл.-вид. арк. 3,8. Тираж 10 пр. Зам. №

Підготовлено до друку та видрукувано
у Державному вищому навчальному закладі
«Національний гірничий університет»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004.

49005, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19