

## ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО МЕТОДА К РЕШЕНИЮ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ТЕЛ С ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

Рассмотрена задача о вдавливании жесткого штампа в упругую грань ортотропной полуполосы, противоположные кромки которой закреплены. В области контакта существует два симметрично расположенных участка проскальзывания и участок сцепления. Применен асимптотический метод, определены размеры участка сцепления и распределение напряжения под штампом.

Розглянуто задачу про втискання твердого штампу в пружну грань ортотропної напівсмуги, якщо її протилежні крайки закріплені. В області контакту існує дві симетрично розташованих ділянки зсуву і ділянка зчеплення. Застосовано асимптотичний метод, визначені розміри ділянки зчеплення та розподіл напруги під штампом.

The problem on pressing of solid stamp in a resilient verge to the orthotropic floor of bar is considered, the endless edges of floor are fastened. It is assumed that in area of contact exist two symmetric located sliding area and coupling area. The problem is decided by asymptotic method. Distributing of tangent tension under a stamp and sizes of coupling area is found.

К решению контактных задач теории упругости приводят различные сложные практические исследования. Вопросы взаимодействия деталей конструкций, их износа являются актуальными для гражданского строительства, авиастроения, машиностроения, горного дела, медицины. Контактные задачи с трением рассмотрены в работах [1, 2]. В работе Л.А. Галина [1] впервые была решена плоская контактная задача с учетом трения и сцепления. Наличие участков проскальзывания и участка сцепления значительно усложнило решение задачи. В дальнейшем подобные контактные задачи исследовались многими авторами, применялись различные подходы и методы, однако и сейчас решение усложненных контактных задач остается актуальным.

**Постановка задачи и метод решения.** Пусть упругая ортотропная полуполоса  $0 \leq x < \infty$ ,  $|y| \leq b$  закреплена по продольным кромкам  $y = \pm b$ , главные направления анизотропии материала полуполосы совпадают с декартовыми координатами  $x, y$ .

В свободную грань полуполосы вдавливается жесткий прямоугольный штамп с плоским основанием ширины  $2l$  ( $l < b$ ). Под действием центральной силы  $P_0$  штамп движется поступательно параллельно оси  $Ox$ . Предполагается, что в области контакта существуют два участка скольжения, примыкающие к концевым точкам области контакта и участок сцепления, расположенный между ними. В зонах скольжения сдвигающие усилия направлены в противоположные стороны. Граничные точки участка сцепления (которые заранее неизвестны и подлежат определению в ходе решения задачи) расположены симметрично относительно оси  $Ox$ . Напряжения в этих точках должны быть непрерывны.

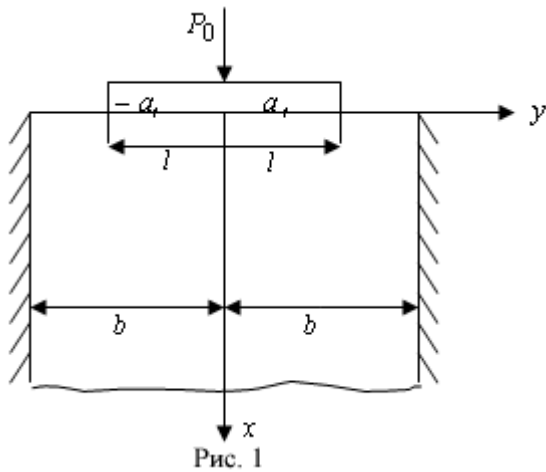


Рис. 1

Требуется определить закон распределения напряжений под штампом и размеры участка сцепления.

Данная задача может быть сведена к интегрированию уравнений равновесия полуполосы в перемещениях

$$B_1 u_{xx} + G v_{yy} + m G v_{xy} = 0 \quad (1)$$

$$B_2 v_{yy} + G v_{xx} + m G u_{xy} = 0,$$

$$B_j = \frac{E_j h^*}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad G = G_{12} h^*, \quad m = 1 + \nu_{21} \frac{B_1}{G},$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_{12} = 0 \quad (x=0, \quad l < |y| < b), \quad u = v = 0 \quad (y = \pm b), \\ u = const \quad (x=0, \quad |y| < l) \quad v = 0 \quad (x=0, \quad |y| < a), \\ \sigma_{12} = sign(y) \cdot \rho \sigma_{11} \quad (x=0, \quad a < |y| < l), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\pm a$  – концевые точки участка сцепления при  $x = 0$ .

Здесь  $E_1, E_2$  – модули упругости вдоль главных направлений  $Ox, Oy$ ,  $\nu_{12}, \nu_{21}$  – коэффициенты Пуассона,  $G_{12}$  модуль сдвига,  $\sigma_{11}, \sigma_{22}$  – нормальные напряжения,  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$  – касательные напряжения;  $u$  и  $v$  – компоненты вектора перемещений;  $h^*$  – толщина пластинки; индексы  $x$  и  $y$  означают дифференцирование по соответствующим координатам

На бесконечности напряжения и перемещения равны нулю. Кроме того, должно выполняться условие равновесия штампа.

Для решения задачи используется метод возмущений Л.И. Маневича и А.В. Павленко [2,3], который позволяет расщепить напряженно-деформированное состояние пластины на две составляющие, определение каждой из которых сводится к решению задач теории потенциала.

Определение напряженного состояния первого типа в нулевом приближении сводится к интегрированию уравнений

$$B_1 u_{xx}^{1,0} + G u_{yy}^{1,0} = 0, \quad B_2 v_y^{1,0} + m G u_x^{1,0} = 0; \quad (3)$$

при следующих граничных условиях

$$\sigma_{11}^{1,0} = B_1 u_x^{1,0} = 0 \quad (x=0, \quad l < |y| < b), \quad (4)$$

$$u^{1,0} = const \quad (x=0, \quad |y| < l), \quad u^{1,0} = 0 \quad (y = \pm b).$$

На бесконечности все функции обращаются в нуль.

Введем новые независимые переменные  $x_I = (G/B_I)^{1/2} x/l$ ;  $y_I = y/l$ , тогда краевая задача (1), (2) для функции  $u$  принимает вид

$$u_{x_I x_I}^{1,0} + u_{y_I y_I}^{1,0} = 0,$$

$$B_2 v_{y_I}^{1,0} + m G (G/B_I)^{1/2} u_{x_I}^{1,0} = 0 \quad (5)$$

$$u_{x_I}^{1,0} = 0 \quad (x_I = 0, \quad l < |y_I| < \beta), \quad u^{1,0} = \text{const} \quad (x_I = 0, \quad |y_I| < l), \quad (6)$$

$$u_x^{1,0} = 0 \quad (y_I = \pm \beta = b/l).$$

Таким образом, требуется найти аналитическую в полуполосе  $0 \leq x_I < \infty$ ,  $|y_I| \leq \beta$  функцию  $u^{1,0}$  по заданным граничным условиям (6). Эту задачу будем решать отображением полубесконечной полосы из плоскости  $z_I$  ( $z_I = y_I + i x_I$ ) в верхнюю полуплоскость изображений  $\zeta_I$  ( $\zeta_I = \eta_I + i \xi_I$ ). Такое отображение можно выполнить, пользуясь преобразованиями Шварца-Кристоффеля, причем постоянные будем определять таким образом, чтобы при  $\beta \rightarrow \infty$   $\zeta_I \rightarrow z_I$ . Функция отображения будет иметь вид

$$\zeta_I = \frac{2\beta}{\pi} \sin \frac{\pi z_I}{2\beta}. \quad (7)$$

При этом точки  $x_I = 0$ ,  $y_I = \pm \beta$  отображаются в точки  $\xi_I = 0, \eta_I = \pm b_I$ , а точки  $x_I = 0, y_I = \pm l$  – в точки  $\zeta_I = 0, \eta_I = \pm l_I$ , где  $b_I = \frac{2\beta}{\pi}$ ,  $l_I = b_I \sin(l/b_I)$ .

Пусть  $\varphi^0 = u^{1,0} + i Q^{1,0}$  ( $Q^{1,0}$  – гармоническая функция, сопряженная с  $u^{1,0}$ ). Рассмотрим  $\varphi_I^0 = \varphi_{y_I}^0 = u_{y_I}^{1,0} + Q_{y_I}^{1,0} = u_{y_I}^{1,0} - i u_{x_I}^{1,0}$ . Функцию  $\varphi_I^0$  можно определить в полуплоскости  $\zeta_I$ . Из условий (6) видно, что на одних участках действительной оси  $\eta$  задана действительная часть этой функции, а на других – мнимая. Такая задача может быть решена при помощи формулы Келдыша-Седова. Так как на границе полуполосы  $\zeta_I$  в интервале  $|\eta_I| < l$   $Re \varphi_I^0 = 0$ , а на остальной ее части  $Im \varphi_I^0 = 0$ , то решение для функции  $\varphi_I^0$  во всей полуплоскости имеет вид [4]

$$\varphi_I^0(\zeta_I) = \frac{A}{\sqrt{\zeta_I^2 - l_I^2}},$$

где  $A$  – действительная постоянная, и выбирается та часть корня, которая положительна при положительных значениях аргумента.

$$\operatorname{Re} \varphi_I^0(\zeta_I) = u_{y_I}^{1,0}, \quad \operatorname{Im} \varphi_I^0(\zeta_I) = u_{x_I}^{1,0}. \quad (8)$$

Нормальное напряжение  $\sigma_{I1}^{1,0}$  и составляющая касательного напряжения  $\sigma_{I2}^{1,0}$ , соответствующая функции  $u^{1,0}$ , находятся по формулам

$$\sigma_{I1}^{1,0} = B_I u_x^{1,0} = (\sqrt{GB_I}/l) u_{x_I}^{1,0}, \quad \sigma_{I2}^{1,0} = G u_y^{1,0} = (G/l) u_{y_I}^{1,0}.$$

Постоянная  $A$  определяется из условия равновесия штампа и равна

$$A = -\frac{P_0}{2\sqrt{GB_I} K(1/\beta_I)}. \quad (9)$$

Тогда нормальное напряжение под штампом в нулевом приближении определяется по формуле

$$\sigma_{I1}^{1,0} = -\frac{P_0}{2l K(1/\beta_I)} \frac{1}{\sqrt{l_I^2 - \eta_I^2}}. \quad (10)$$

При  $\xi_I = 0$ ,  $|\eta_I| > l_I$

$$u_{y_I}^{1,0} = -\frac{P_0}{2l K(1/\beta_I)} \frac{1}{\sqrt{\eta_I^2 - l_I^2}}. \quad (11)$$

При  $\xi_I = 0$ ,  $|\eta_I| < l_I$ ,  $u_{y_I}^{1,0} = 0$ .

Из второго уравнения системы (3) получим

$$v_{y_I}^{1,0} = -(mG/B_2) \sqrt{GB_I} u_{x_I}^{1,0}.$$

Компонента  $v^{2,0}$  вектора перемещений, соответствующая напряженно-му состоянию второго типа определяется из первого уравнения системы, аналогично (3)

$$G v_{x x}^{2,0} + B_2 v_{y y}^{2,0} = 0, \quad B_I u_{x x}^{2,0} + mG v_{y y}^{2,0} = 0, \quad (12)$$

при следующих граничных условиях

$$\begin{aligned} \sigma_{I2}^0 = 0 \quad (x=0, \quad l < |y| < b), \quad v^{2,0} = v_x^{2,0} = 0 \quad (y = \pm b), \\ \sigma_{I2}^0 = \operatorname{sign}(y) \rho \sigma_{I1}^{1,0} \quad (x=0, \quad a < |y| < l), \quad v^{2,0} = 0 \quad (x=0, \quad |y| < a). \end{aligned} \quad (13)$$

После введения переменных  $x_2 = (B_2/G)^{1/2} x/l$ ;  $y_2 = y/l$  краевая задача (12), (13) примет вид

$$v_{x_2 x_2}^{2,0} + v_{y_2 y_2}^{2,0} = 0, \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
v_{x_2}^{2,0} &= -(G/B_2)^{1/2} u_{y_2}^{1,0} \quad (x_2 = 0, \quad l < |y_2| < \beta), \quad v_{x_2}^{2,0} = 0 \quad (y = \pm\beta), \\
v_{x_2}^{2,0} &= -(G/B_2)^{1/2} u_{y_2}^{1,0} \quad (x_2 = 0, \quad l < |y_2| < \beta), \quad v_{x_2}^{2,0} = 0 \quad (y = \pm\beta), \\
v_{x_2}^{2,0} &= \text{sign}(y_2) \rho l (GB_2)^{-1/2} \sigma_{11}^{1,0} \quad (x_2 = 0, \quad \alpha < |y_2| < l), \\
v^{2,0} &= 0 \quad (x_2 = 0, \quad |y_2| < \alpha),
\end{aligned} \tag{15}$$

где  $\alpha = a/l$ .

Задачу (14), (15) будем решать отображением полуполосы  $(0 \leq x_2 < \infty, |y_2| \leq \beta)$  из плоскости  $z_2$  ( $z_2 = y_2 + ix_2$ ) в верхнюю полуплоскость изображений  $\zeta_2$  ( $\zeta_2 = \xi_2 + i\xi_2$ ). Функция отображения имеет вид аналогичный (7), а ее действительная и мнимая части записываются по формулам аналогичным (8). Из соотношений (15) с учетом (10), (11) получаем формулы при ( $\xi_2 = 0$ )

$$\begin{aligned}
v_{x_2}^{2,0} &= \frac{P_0}{2\sqrt{B_1 B_2} K(l/\beta_1)} \frac{l}{\sqrt{\eta_2^2 - l_1^2}} \quad (l_1 < |\eta_2| < b_1), \\
v_{x_2}^{2,0} &= 0 \quad (|\eta_2| > b_1), \quad v_{y_2}^{2,0} = 0 \quad (|\eta_2| < \alpha_1), \\
v_{x_2}^{2,0} &= -\text{sign}(\eta_2) \frac{\rho P_0}{2\sqrt{GB_2} K(l/\beta_1)} \frac{l}{\sqrt{l_1^2 - \eta_2^2}} \quad (\alpha_1 < |\eta_2| < l_1),
\end{aligned} \tag{16}$$

где  $\alpha_1 = b_1 \sin(\alpha/b_1)$ .

Если  $\psi^0 = v^{2,0} + iQ^{2,0}$  ( $Q^{2,0}$  – гармоническая функция, сопряженная с  $v^{2,0}$ ), то  $\psi_I^0 = i\psi_{y_2}^0 = v_{x_2}^{2,0} + iv_{y_2}^{2,0}$ . Функцию  $\psi_I^0$  в любой точке верхней полуплоскости можно определить при помощи формулы Келдыша-Седова:

$$\begin{aligned}
\psi_I^0(\zeta_2) &= \frac{P_0}{2K(l/\beta_1)} \frac{\sqrt{\zeta_2^2 - \alpha_1^2}}{\pi i} \left[ \frac{l}{\sqrt{B_1 B_2}} \left( \int_{-b_1}^{-l_1} \frac{f(t) dt}{t - \zeta_2} + \int_{l_1}^{b_1} \frac{f(t) dt}{t - \zeta_2} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\rho}{\sqrt{GB_2}} \left( \int_{-l_1}^{-\alpha_1} \frac{f(t) dt}{t - \zeta_2} + \int_{\alpha_1}^{l_1} \frac{f(t) dt}{t - \zeta_2} \right) \right];
\end{aligned} \tag{17}$$

$$f(t) = \left[ (t^2 - \alpha_1^2) \left( |t^2 - l_1^2| \right) \right]^{-1/2}. \tag{18}$$

Для убывания напряжений на бесконечности необходимо, чтобы  $\psi_I^0(\zeta_2) \rightarrow 0$ , при  $|\text{Re } \zeta_2| \rightarrow \infty$ . Из этого условия получаем, учитывая (18), соотношение

$$\sqrt{\frac{G}{B_1}} \int_1^{\beta_1} \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau^2 - \alpha_*^2)(\tau^2 - 1)}} = \rho \int_{\alpha_*}^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau^2 - \alpha_*^2)(1 - \tau^2)}}, \quad (19)$$

где  $\tau = t/l_1$ ,  $\beta_1 = b_1/l_1$ ,  $\alpha_* = \alpha_1/l_1$  ( $\beta_1 > 1$ ,  $\alpha_* < 1$ ).

Интеграл в левой части соотношения (19) является неполным эллиптическим интегралом первого рода  $F(\varphi, \alpha_*)$  [5], причем  $\varphi$  определяется равенством

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{\beta_1^2 - 1}{\beta_1^2 - \alpha_*^2}}; \quad (20)$$

а интеграл в правой части (19) – полный эллиптический интеграл первого рода  $K(\sqrt{1 - \alpha_*^2}) = K'(\alpha_*)$  [5]. Поэтому равенство (19) можно записать в виде:

$$F(\varphi, \alpha_*) = \rho (B_1/G)^{1/2} K'(\alpha_*). \quad (21)$$

Последнее соотношение устанавливает зависимость между размерами участка сцепления, коэффициентом трения и жесткостными характеристиками материала.

Из равенства (17) при  $\xi_2 = 0$ ,  $|\eta_2| < \alpha_1$  (на участке сцепления) получим

$$\psi_1^0(\eta) = v_{x_2}^{2,0} = \frac{2 P_0}{2 K(1/\beta_1) l_1 \pi \sqrt{GB_2}} \left( \sqrt{\frac{G}{B_1}} \int_1^{\beta_1} \frac{1}{\sqrt{(\tau^2 - \alpha_*^2)(\tau^2 - 1)}} \frac{d\tau}{(\tau^2 - \eta^2)} - \rho \int_{\alpha_*}^1 \frac{1}{\sqrt{(\tau^2 - \alpha_*^2)(1 - \tau^2)}} \frac{d\tau}{(\tau^2 - \eta^2)} \right), \quad \eta = \frac{\eta_2}{l_1}. \quad (22)$$

**Анализ полученных результатов.** Касательное напряжение под штампом  $x = 0$ ,  $|y| < l$  в нулевом приближении находится по формулам

$$\sigma_{12} = \text{sign}(y) \rho \sigma_{11}^{1,0} \quad (a < |y| < l), \quad \sigma_{12} = G v_x^{2,0} = (\sqrt{GB_2}/l) v_{x_2}^{2,0} \quad (|y| < a), \quad (23)$$

где  $\sigma_{11}^{1,0}$  и  $v_{x_2}^{2,0}$  находятся по формулам (10), (22).

При  $\beta_1 \rightarrow \infty$  ( $b \rightarrow \infty$ )  $l_1 \rightarrow 1$ ,  $2 K(1/\beta_1) \rightarrow \pi$ ,  $\alpha_* \rightarrow \alpha$  ( $\alpha = a/l$ ),  $\varphi$  в равенстве (20)  $\rightarrow \pi/2$ , интеграл  $F(\varphi, \alpha_*)$  становится полным эллиптическим интегралом первого рода  $F\left(\frac{\pi}{2}, \alpha_*\right) = K(\alpha)$ , а равенство (21) переходит в аналогичное равенство для полуплоскости

$$K(\alpha_*) = \rho (B_1/G)^{1/2} K'(\alpha_*), \quad K'(\alpha)/K(\alpha) = \sqrt{G/B_1}/\rho \quad (24)$$

При этом закон распределения напряжений под штампом в нулевом приближении определяется следующим образом:

$$\sigma_{12} = -\text{sign}(y) \rho \frac{P_0}{2l K(1/\beta_1)} \frac{1}{\sqrt{\eta_l^2 - l_l^2}},$$

( $a < |y| < l$  – на участках скольжения),

$$\sigma_{12} = \frac{2 P_0}{\pi^2 l} \eta \sqrt{\alpha^2 - \eta^2} \left( \sqrt{\frac{G}{B_1}} \frac{1}{\eta^2} \left[ \Pi_1(\eta^2, \alpha) - K(\alpha) \right] - \frac{\rho}{1 - \eta^2} \Pi_1 \left( \frac{1 - \alpha^2}{1 - \eta^2}, \alpha' \right) \right), \quad (25)$$

( $|y| < a$  – на участке сцепления).

где  $\Pi_1(v, \alpha'_*)$  – полный эллиптический интеграл третьего рода,  $\alpha'_* = \sqrt{1 - \alpha_*^2}$ ,  $\kappa = K(\alpha) / K(\alpha)$ .

$$\alpha = 4 \left( \left[ \sum_{v=0}^{\infty} q^{(v+1/2)^2} \right] \left[ 1 + 2 \sum_{v=1}^{\infty} q^{v^2} \right]^{-1} \right)^2, \quad q = e^{-\pi\kappa}, \quad K(\alpha) = \frac{\pi}{2} \left( 1 + 2 \sum_{v=1}^{\infty} q^{v^2} \right),$$

Кроме того, для определения  $\alpha$  при заданном отношении (24) можно использовать таблицу 17.3 [5] с учетом, что  $m = \alpha^2$ .

Отметим, что если коэффициент трения  $\rho$  равен нулю то  $\alpha = 0$ , т.е. участок сцепления исчезает. С ростом коэффициента  $\rho$  участок сцепления возрастает. Величина этого участка зависит также и от параметра  $(G/B_1)^{1/2}$ , т.е. от жесткостных характеристик материала полуполосы. Причем с уменьшением  $(G/B_1)^{1/2}$  участок сцепления увеличивается. Указанные закономерности следуют из табл. 1, 2, где даны значения  $\alpha_*$  в зависимости от  $\rho$  для двух значений  $(G/B_1)^{1/2}$  (табл. 1) и в зависимости от  $(G/B_1)^{1/2}$  при  $\rho = 0,5$  (табл.2).

Таблица 1

$\rho$	0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
$(G/B_1)^{1/2} = 0.3$	0	0.0359	0.707	0.958	0.994	0.999
$(G/B_1)^{1/2} = 0.5$	0		0.284	0.707	0.906	0.973

Таблица 2

$(G/B_1)^{1/2}$	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
$\alpha_*$	0.9999	0.9583	0.707	0.4227	0.2334

При конечных, но достаточно больших значениях  $\beta_l$  (т.е. значительной ширине  $b$  полуполосы) при вычислении  $\nu_{x_2}^{2,0}$  по формуле (22) используются размеры  $\alpha_*$ , найденные из (24).

Таким образом, если используется формулы (24), то можно считать  $\alpha_* = \alpha$ , а влияние продольных кромок полуполосы учитывается множителем  $\gamma = \pi / (2K(1/\beta_l)l_1)$  и параметром  $\varphi$ , определяемым по формуле (20). Если  $\beta_l$  близко к единице ( $\beta = b/l \approx 1$ ), то из условия (9) следует, что либо коэффициент трения близок к нулю, либо  $\alpha_*$  близко к единице. На рисунке 1 представлена зависимость размера участка сцепления  $\alpha_*$  от параметра  $H = (G/B_l)^{-1/2} \rho$ , причем кривые снизу-вверх соответствуют следующим значениям безразмерной ширины полуполосы  $\beta$ : 1.02; 1.1; 1.4; 3; 100. На рисунке 2 представлена зависимость размера участка сцепления  $\alpha_*$  от ширины полуполосы  $\beta$  при  $\rho = 0.5, G/B_l = 0.25$ . Вертикальная линия соответствует  $\beta \rightarrow \infty$ , то есть для полуплоскости, что совпадает с результатами, полученными в [1].

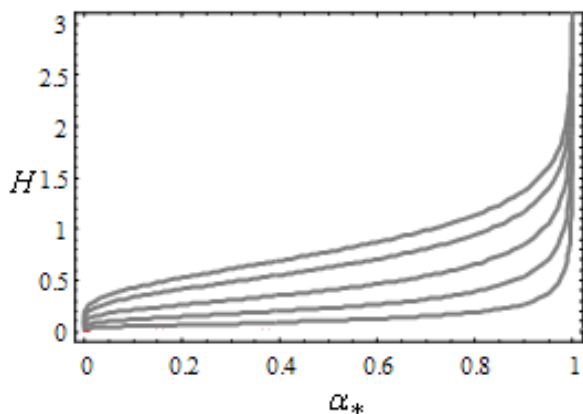


Рис. 1

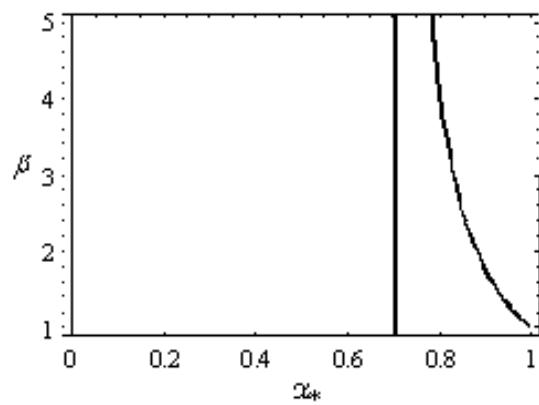


Рис. 2

#### Список литературы

1. Галин Л.А Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости.- М.-1980. - 304 с.
2. Маневич Л.И., Павленко А.В., Коблик С.Г. Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела. - Киев-Донецк: Вища школа- 1982. -152 с.
3. Маневич Л.И., Павленко А.В. Асимптотический метод в микромеханике композиционных материалов.- Киев: Вища школа,-1991. -131 с.
4. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., 1966. - 448 с.
5. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами /под редакцией М. Абрамовица и И.Стиган.-М.,1979. - 832 с.

*Рекомендовано до публікації д.т.н. Сдвіжковою О.О.  
Надійшла до редакції 11.04.2013*