

## ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПЛАСТИН С ОТВЕРСТИЯМИ

В статье приведены точные решения, полученные в замкнутой форме для четырех задач о напряженно-деформируемом состоянии ортотропной пластины с цилиндрической анизотропией.

У статті наведені точні розв'язки, що отримані у замкненій формі для чотирьох задач про напружено-деформований стан ортотропної пластини з циліндричною анізотропією.

The exact decisions received in the closed form for four tasks about an intense-deformable condition of an orthotropic plate with cylindrical anisotropy are resulted in the article.

Решения краевых задач с учетом анизотропии упругой среды сопряжено с дополнительными трудностями. В случае прямолинейной анизотропии приходится рассматривать пару связанных аналитических функций, зависящих от различных комплексных переменных [1]. Для среды с криволинейной анизотропией непосредственное применение методов теории аналитических функций вообще оказывается невозможным.

Эти трудности удастся преодолеть в некоторых специальных случаях (малая анизотропия, специальный закон изменения упругих свойств и т. п.), причем соответствующая задача для изотропной среды считается обычно эталоном простоты. В задачах 3 и 4 решения получены с помощью методов возмущения [2].

Преимущество предложенного подхода состоит в том, что исходная задача сводится к последовательному решению задач теории потенциала, учитывается любая степень анизотропии материала.

1. Рассматривается пластина, ослабленная круговым отверстием радиуса  $R$ , со свободной границей либо с жестким подкреплением и подвергается осевому растяжению на бесконечности усилиями интенсивности  $p_1$  и  $p_2$ . Уравнения равновесия в полярных координатах удовлетворяются, если ввести функцию напряжений  $F(r, \theta)$ :

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}; \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}; \tau_{r\theta} = -\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left( \frac{F}{r} \right).$$

Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция напряжений, для пластины с цилиндрической ортотропией, записывается в виде [1]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 F}{\partial \xi^4} - 4 \frac{\partial^3 F}{\partial \xi^3} + 5 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial F}{\partial \xi} + a \frac{\partial^4 F}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} - 2a \frac{\partial^3 F}{\partial \xi \partial \eta^2} + q \frac{\partial^4 F}{\partial \eta^4} - \\ & - q \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + 2q \frac{\partial F}{\partial \xi} + a \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + 2q \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = 0, \quad a = q\varepsilon^{-1} (1 - \nu_1^2 q - 2\nu_1 \varepsilon); \\ & \sigma_{11} = e^{-2\xi} \frac{\partial F}{\partial \xi} + e^{-2\xi} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}, \quad \sigma_{22} = e^{-2\xi} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + e^{-2\xi} \frac{\partial F}{\partial \xi}, \end{aligned}$$

$$\tau = - \left( e^{-2\xi} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} + e^{-2\xi} \frac{\partial F}{\partial \eta} \right), \quad (\sigma_{11} = \sigma_r, \sigma_{22} = \sigma_\theta, \tau_{r\theta} = \tau) \quad (1)$$

Здесь

$$q = \frac{E_\theta}{E_r}, \quad \varepsilon = \frac{G_{r\theta}}{E_r/(1-\nu_1\nu_2)}, \quad \nu_1 = \nu_r, \quad \nu_2 = \nu_1 q, \quad r = R \cdot e^\xi, \quad \xi = \ln \left( \frac{r}{R} \right), \quad \theta = \eta.$$

В сплошной пластине без отверстия:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^0 &= \frac{p_1 + p_2}{2} + \frac{p_1 - p_2}{2} \cos 2\eta; \quad \sigma_{22}^0 = \frac{p_1 + p_2}{2} - \frac{p_1 - p_2}{2} \cos 2\eta; \\ \tau^0 &= -\frac{p_1 - p_2}{2} \sin 2\eta. \end{aligned} \quad (2)$$

Образование отверстия в пластине равносильно приложению к точкам вообразаемого контура напряжений  $\sigma_{11} = -\sigma_{11}^0$ ,  $\tau = -\tau^0$ . Действие нормальных и касательных напряжений приводит к возникновению второго поля напряжений. Полное решение задачи с отверстием состоит из суммы решения (2) и указанного второго поля напряжений. Для определения второго поля напряжений необходимо рассмотреть задачу, когда контур отверстия ( $\xi = 0$ ) нагружен нормальными и касательными напряжениями, на бесконечности напряжения равны нулю, т.е. граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{при } \xi = 0 \quad \sigma_{11} &= -\frac{p_1 + p_2}{2} - \frac{p_1 - p_2}{2} \cos 2\eta, \quad \tau = \frac{p_1 - p_2}{2} \sin 2\eta, \\ \text{при } \xi \rightarrow \infty \quad \sigma_{11} &\rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Граничные условия (3) могут быть разбиты на две части:

$$\sigma_{11}^{(1)} = -\frac{p_1 + p_2}{2}, \quad \tau = 0 \quad (\text{часть, которая не зависит от координаты } \eta)$$

$$\sigma_{11}^{(2)} = -\frac{p_1 - p_2}{2} \cos 2\eta, \quad \tau = \frac{p_1 - p_2}{2} \sin 2\eta \quad (\text{зависит от координаты } \eta).$$

Полное решение поставленной задачи состоит из суперпозиции решений для первой и второй части граничных условий и имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{p_1 + p_2}{2} \left( 1 - e^{-(1+\sqrt{q})\xi} \right) + \frac{p_1 - p_2}{2} \left[ 1 - \frac{(3 + \sqrt{t_1})(1 + \sqrt{t_2})}{2(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1})} e^{-(1+\sqrt{t_1})\xi} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(3 + \sqrt{t_2})(1 + \sqrt{t_1})}{2(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1})} e^{-(1+\sqrt{t_2})\xi} \right] \cos 2\eta; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\sigma_{22} = \frac{p_1 + p_2}{2} \left( 1 + \sqrt{q} e^{-(1+\sqrt{q})\xi} \right) - \frac{p_1 - p_2}{2} \left[ 1 + \frac{\sqrt{t_1}(1 - \sqrt{t_1})(1 + \sqrt{t_2})}{2(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1})} e^{-(1+\sqrt{t_1})\xi} + \right.$$

$$\tau = -\frac{p_1 - p_2}{2} \left[ 1 + \frac{\sqrt{t_1}(1 + \sqrt{t_2})}{(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1})} e^{-(1 + \sqrt{t_1})\xi} - \frac{\sqrt{t_2}(1 + \sqrt{t_1})}{(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1})} e^{-(1 + \sqrt{t_2})\xi} \right] \sin 2\eta,$$

$$+ \frac{\sqrt{t_2}(\sqrt{t_2} - 1)(1 + \sqrt{t_1})}{2(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1})} e^{-(1 + \sqrt{t_2})\xi} \left] \cos 2\eta;$$

где  $t_1 = (1 + 2a) - \sqrt{(1 + 2a)^2 - 9}$ ,  $t_2 = (1 + 2a) + \sqrt{(1 + 2a)^2 - 9}$

В случае изотропной пластины ( $q = 1$ ,  $\varepsilon = \frac{1 - \nu}{2}$ ,  $a = 2$ ,  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 9$ ) решение (4) переходит в известное решение аналогичной задачи.

2. Рассмотрим случай, когда контур отверстия в пластине подкреплен жестким кольцом (бесконечности подвергается осевому растяжению усилиями интенсивности  $p_1$  и  $p_2$ ). В сплошной пластине кроме соотношений (2) имеют место выражения:

$$U_1^0 = \frac{\text{Re}^\xi}{E_1} \left[ \frac{(1 - \nu_1)(p_1 + p_2)}{2} + \frac{(1 + \nu_1)(p_1 - p_2)}{2} \cos 2\eta \right],$$

$$U_2^0 = \frac{\text{Re}^\xi}{E_1} \left[ \frac{(q^{-1} - 1)(p_1 + p_2)}{2} \eta + \frac{p_1 - p_2}{2} \frac{1 + q^{-1} + 2\nu_1}{2} \sin 2\eta \right] \quad (5)$$

В (5) отброшены функции, появляющиеся при интегрировании.

В пластине с жестким кольцом на контуре отверстия  $R$  ( $\xi = 0$ ) отсутствуют смещения  $U_1$  и  $U_2$ , т.е. образование отверстия, подкрепленного жестким кольцом в пластине равносильно приложению к точкам воображаемого контура перемещений  $U_1 = -U_1^0$  и  $U_2 = -U_2^0$ . Действие  $U_1$  и  $U_2$  приводит к появлению второго поля смещений. Полное решение задачи с отверстием состоит из суммы решения (5) и указанного второго поля смещений. Для определения второго поля смещений необходимо рассмотреть задачу, когда на контуре отверстия ( $\xi = 0$ ) заданы перемещения  $U_1$  и  $U_2$ , на бесконечности смещения равны нулю, т.е. граничные условия имеют вид:

$$\text{при } \xi = 0, U_1 = -\frac{R}{E_1} \frac{(1 - \nu_1)(p_1 + p_2)}{2} - \frac{R}{E_1} \frac{(1 + \nu_1)(p_1 - p_2)}{2} \cos 2\eta,$$

$$U_2 = -\frac{R}{E_1} \frac{(q^{-1} - 1)(p_1 + p_2)}{2} \eta + \frac{R}{E_1} \frac{(p_1 - p_2)(1 + q^{-1} + 2\nu_1)}{4} \sin 2\eta, \quad (6)$$

при  $\xi \rightarrow \infty$   $U_1 \rightarrow 0$ ,  $U_2 \rightarrow 0$ .

Граничные условия (6) могут быть разбиты на две части:

$$U_1 = -\frac{R(1-\nu_1)(p_1+p_2)}{E_1} \frac{1}{2}, U_2 = -\frac{R(q^{-1}-1)(p_1+p_2)}{E_1} \frac{1}{2} \eta;$$

$$U_1 = -\frac{R(1+\nu_1)(p_1-p_2)}{E_1} \frac{1}{2} \cos 2\eta, U_2 = \frac{R(p_1-p_2)(1+q^{-1}+2\nu_1)}{E_1} \frac{1}{4} \sin 2\eta$$

Полное решение поставленной задачи имеет вид:

$$U_1 = \frac{\operatorname{Re} \xi}{E_1} \left[ \frac{(1-\nu_1)(p_1+p_2)}{2} + \frac{(1+\nu_1)(p_1-p_2)}{2} \cos 2\eta \right] +$$

$$+ \frac{Rq^{-1}(m\varepsilon + \varepsilon + \nu_1 q)}{E_1} \frac{p_1+p_2}{2} e^{-\sqrt{q}\xi} -$$

$$- \frac{Rq^{-1}(m\varepsilon + \varepsilon + q)}{E_1} \frac{p_1+p_2}{2} e^{-\xi} + \frac{1}{E_1} \left[ \frac{4-(1-t_1)(1-2\nu_1+\nu_1\sqrt{t_1})}{\sqrt{t_1}} C_1 e^{-\sqrt{t_1}\xi} + \right.$$

$$\left. + \frac{4-(1-\sqrt{t_2})(1-2\nu_1+\nu_1\sqrt{t_2})}{\sqrt{t_2}} C_3 e^{-\sqrt{t_2}\xi} \right] \cos 2\eta;$$

$$U_2 = \frac{\operatorname{Re} \xi}{E_1} \left[ \frac{(q^{-1}-1)(p_1+p_2)}{2} \eta - \frac{p_1-p_2}{2} \frac{1+q^{-1}+2\nu_1}{2} \sin 2\eta \right] -$$

$$- \frac{R(q^{-1}-1)}{E_1} \frac{p_1+p_2}{2} e^{-\xi} \eta + \frac{1}{E_1} \left[ \frac{4(\nu_1\sqrt{t_2}-1)-(1-\sqrt{t_2})(q^{-1}t_2-1+2\nu_1)}{2\sqrt{t_2}} C_3 e^{-\sqrt{t_2}\xi} - \right.$$

$$\left. - \frac{4(1-\nu_1\sqrt{t_1})+(1-\sqrt{t_1})(q^{-1}t_1-1+2\nu_1)}{2\sqrt{t_1}} C_1 e^{-\sqrt{t_1}\xi} \right] \sin 2\eta;$$

$$\sigma_{11} = E^*(e_{11} + \nu_1 q e_{22}); \sigma_{22} = E^*q(e_{22} + \nu_1 e_{11}); \tau = G e_{12};$$

$$e_{11} = \frac{e^{-\xi}}{R} \left( \frac{\partial U_1}{\partial \xi} \right); e_{22} = \frac{e^{-\xi}}{R} \left( \frac{\partial U_2}{\partial \eta} + U_1 \right); e_{12} = \frac{e^{-\xi}}{R} \left( \frac{\partial U_2}{\partial \xi} + \frac{\partial U_1}{\partial \eta} - U_2 \right).$$

Проведены сравнения результатов с известными точными решениями, в частности, для изотропного материала.

3. Пластина ослаблена эллиптическим отверстием со свободной границей ина бесконечности подвергается осевому растяжению усилиями интенсивности  $p_1$  и  $p_2$ .

Функция  $\omega(\zeta) = R(\zeta + c\zeta^{-1})$ . Тогда  $x = R(e^\xi + ce^{-\xi})\cos\eta$ ,  
 $y = R(e^\xi - ce^{-\xi})\sin\eta$ ,  $H = R(e^{2\xi} - 2c \cdot \cos 2\eta + c^2 e^{-2\xi})^{\frac{1}{2}}$ . Здесь  $R = \frac{1}{2}a\left(1 + \frac{b}{a}\right)$ ,  
 $c = \left(1 - \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{b}{a}\right)^{-1}$ ,  $a, b$  – полуоси эллиптического отверстия.

В пластине без отверстия

$$\sigma_{11}^0 = \left(e^{4\xi} - 2ce^{2\xi} \cos 2\eta + c^2\right)^{-1} \left[ \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(e^{4\xi} + c^2) - c(p_1 - p_2)e^{2\xi} + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{2}(p_1 - p_2)(e^{4\xi} + c^2) - c(p_1 + p_2)e^{2\xi} \right) \cos \eta \right],$$

$$\sigma_{22}^0 = \left(e^{4\xi} - 2ce^{2\xi} \cos 2\eta + c^2\right)^{-1} \left[ \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(e^{4\xi} + c^2) + c(p_1 - p_2)e^{2\xi} - \right. \\ \left. - \left( \frac{1}{2}(p_1 - p_2)(e^{4\xi} + c^2) + c(p_1 + p_2)e^{2\xi} \right) \cos \eta \right],$$

$$\sigma_{12}^0 = -\frac{1}{2}(p_1 - p_2)\left(e^{4\xi} - 2ce^{2\xi} \cos 2\eta + c^2\right)^{-1} \cdot (e^{4\xi} - c^2) \sin 2\eta.$$

Квазиосесимметричное решение

$$\sigma_{11} = -\sigma_{22} = -\frac{1}{2}\left(e^{4\xi} - 2ce^{2\xi} \cos 2\eta + c^2\right)^{-1} \left[ p_1(1-c)^2 + p_2(1+c)^2 \right] e^{2\xi}, \quad \sigma_{12} = 0.$$

Решение задачи с граничными условиями

$$\sigma_{11} = -\frac{1}{2}\left(1 - 2c \cdot \cos 2\eta + c^2\right)^{-1} \left[ p_1(1-c)^2 - p_2(1+c)^2 \right] \cos 2\eta,$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{2}(p_1 - p_2)\left(1 - 2c \cdot \cos 2\eta + c^2\right)^{-1} \cdot (1-c)^2 \sin 2\eta, \quad (\xi = 0),$$

$\sigma_{11} \rightarrow 0$ ,  $\sigma_{12} \rightarrow 0$ , ( $\xi \rightarrow \infty$ ) разыскивается методом возмущений [2]. При этом предполагается, что  $\frac{b}{a} = 1 - \chi\varepsilon$  ( $\chi \sim 1$ ),  $R = a\left(1 - \frac{1}{2}\chi\varepsilon\right)$ ,  $c = \chi\varepsilon(2 - \chi\varepsilon)^{-1}$ .

Тогда ряды метода принимают вид:

$$H = ae^\xi - \frac{1}{2}a\chi e^\xi \left(1 + e^{-2\xi} \cos 2\eta\right)\varepsilon + 0\left[(\chi\varepsilon)^2\right],$$

$$f_1 = 1 + \left(\chi e^{-2\xi} \cos 2\eta\right)\varepsilon + 0\left[(\chi\varepsilon)^2\right], \quad f_2 = \left(\chi e^{-2\xi} \sin 2\eta\right)\varepsilon + 0\left[(\chi\varepsilon)^2\right],$$

$$f_3 = \left(-2\chi e^{-2\xi} \cos 2\eta\right)\varepsilon + 0\left[(\chi\varepsilon)^2\right], \quad f_4 = \left(-2\chi e^{-2\xi} \sin 2\eta\right)\varepsilon + 0\left[(\chi\varepsilon)^2\right];$$

$$\psi_1(\eta) = -\frac{1}{2}(p_1 - p_2)\cos 2\eta + \frac{1}{2}\chi\left[(p_1 + p_2)\cos 2\eta - (p_1 - p_2)\cos^2 2\eta\right]\varepsilon + 0\left[(\chi\varepsilon)^2\right],$$

$$\psi_2(\eta) = \frac{1}{2}(p_1 - p_2)\left(\sin 2\eta + (\chi \sin 2\eta \cos 2\eta)\varepsilon + 0\left[(\chi\varepsilon)^2\right]\right), \quad \eta_1 = \eta_2 = 2\eta.$$

Приведем окончательную формулу для определения напряжений  $\sigma_{22}$ , действующих на площадках, нормальных к контуру эллиптического отверстия ( $\xi = 0$ ), которые представляют наибольший интерес. Напряжения  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$  на контуре равны нулю.

$$\sigma_{22} = \frac{1}{2}\left(1 - 2c \cdot \cos 2\eta + c^2\right)^{-1}\left(2(1 + c^2)(p_1 + p_2) - \left[p_1(1 + c)^2 - p_2(1 - c)^2\right]\cos 2\eta\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)(p_1 - p_2)\cos 2\eta - \varepsilon\left\{\frac{1}{2}(p_1 - p_2)\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\cos 2\eta - \frac{1}{2}\chi\left[(p_1 + p_2)\cos 2\eta - \frac{1}{4}\left(1 + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)(p_1 - p_2)(1 + 2\cos 4\eta)\right]\right\} + 0(\varepsilon^2), \quad (1)$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0.$$

Если  $c = 0$  ( $\chi = 0$ ), то (1) переходит в решение соответствующей задачи для пластины с круговым отверстием.

Сравнение  $(\sigma_{22})_{\max}$ , вычисленного по формуле (1) для изотропной пластины с учетом первых двух приближений, с точным решением [3] показывает, что, например, при  $\frac{b}{a} = 0,65$  погрешность для различных случаев нагружения не превышает 5-10%.

4. Рассмотрим анизотропную пластину, ослабленную гипотрохоидным отверстием, которая на бесконечности подвергается осевому растяжению усилиями интенсивности  $p_1$  и  $p_2$ .

$$\text{Здесь } \omega(\zeta) = R\left(\zeta + ck^{-1}\zeta^{-k}\right) (0 < c < 1), \quad x = R\left(e^\xi \cos \eta + ck^{-1}e^{-k\xi} \cos k\eta\right),$$

$$y = R\left(e^\xi \sin \eta - ck^{-1}e^{-k\xi} \sin k\eta\right), \quad H = R\left(e^{2\xi} - 2ce^{-(k-1)\xi} \cos(k+1)\eta + c^2e^{-2k\xi}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

При  $k = 1$  возвращаемся к случаю эллипса, при целых  $k > 1$  получаем кривые, представляющие собой правильные криволинейные многоугольники со скругленными углами: треугольник при  $k = 2$ , квадрат при  $k = 3$  и т.д.

На контуре отверстия

$$\begin{aligned} \sigma_{22} = & \frac{1}{2} \left( 1 - 2c \cdot \cos(k+1)\eta + c^2 \right)^{-1} \left[ 2(1+c^2)(p_1+p_2) - (p_1-p_2)\cos 2\eta + \right. \\ & \left. + 2c(p_1-p_2)\cos(k-1)\eta - 2c(p_1+p_2)\cos(k+1)\eta - c^2(p_1-p_2)\cos 2k\eta \right] - \\ & - \frac{1}{2} \left( 1 + \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \right) (p_1-p_2)\cos 2\eta - \varepsilon \left\{ \frac{1}{2}(p_1-p_2)\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \cos 2\eta + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\chi \left[ \left( 2\varepsilon^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) (p_1-p_2)\cos(k-1)\eta - 2(p_1+p_2)\cos(k+1)\eta + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( 1 + \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \right) (p_1-p_2)\cos(k+3)\eta \right] \right\} + o(\varepsilon^2), \quad (k=2,3,\dots). \end{aligned} \quad (2)$$

При решении задачи предложенным методом предполагалось, что  $c = \chi\varepsilon$  ( $\chi \sim 1$ ).

Для изотропной пластинки имеется возможность провести сравнение полученного решения с точным. Погрешность при вычислении  $(\sigma_{22})_{\max}$  (в частности, при  $k=3$ ,  $c = \frac{1}{3}$ ) по формуле (2) с учетом первых двух приближений даже в этом, неблагоприятном с точки зрения применяемого метода, случае не превышает 5-10% при различных видах нагружения.

Таким образом, предложенный метод может быть с успехом применен в исследовании краевых задач теории упругости для изотропных пластин.

#### Список литературы

1. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела/ С.Г. Лехницкий.- М.: Наука, 1977.- 416 с.
2. Маневич Л.И. Асимптотический метод в теории упругости ортотропного тела/ Л.И. Маневич, А.В. Павленко, С.Г. Коблик.-К.:Вища школа, 1991.-131с.
3. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости/ Н.И. Мухелишвили.-М.: Наука, 1966.-708с.

*Рекомендовано до публікації д.т.н. Сдвіжковою О.А..  
Надійшла до редакції 10.03.2013*