

## К ВОПРОСУ ОЦЕНКИ СТЕПЕНИ СООТВЕТСТВИЯ СОВРЕМЕННЫХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ПРОЧНОСТИ ШИХТОВИХ МАТЕРИАЛОВ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ ДЛЯ ПРИМЕНЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ДЕЗИНТЕГРАЦИИ

*Н.Г. Малич, Национальная металлургическая академия Украины  
О.А. Усов, Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова НАН Украины*

Приведен анализ литературных источников, который показывает, что экспериментально наблюдаемое влияние характеристик трения учитывается в расчетах методами традиционной механики только частично и фрагментарно, а в расчетах процессов дробления и измельчения при определении напряженного состояния разрушаемых минералов трение не учитывается вообще. Показана необходимость разработки новых математических моделей, адекватно отражающих физические процессы разрушения горной породы при дезинтеграции.

Для описания предельного состояния материалов разработано более 40 теорий прочности, из которых – теория прочности максимальных растягивающих нормальных напряжений Г.Галилея (I теория прочности); – теория прочности максимальной деформации Е. Мариотта (II теория прочности); – теория прочности максимальных касательных напряжений Кулона (III теория прочности); – энергетическая теория прочности М.Т. Губера (IV теория прочности); – теория прочности Мора (V теория прочности), признаны классическими. В них наступление предельного состояния – текучести или разрушения (как постулат) связывается с расчетной величиной напряжения или деформации. Природа физических процессов вещества на кристаллическом уровне практически не учитывается.

Существует статистическая теория прочности С. Н. Журкова. Развиваются теории трещин и дислокаций, однако они не позволяют с хорошей достоверностью проводить инженерные расчеты. Рассматривая две первые классические теории прочности, основанные на методах механики сплошной среды, которые относятся к гипотезе отрыва, видно, что недостаток I теории – невозможность ее использования в области сжимающих нагрузок (даже в простейшем случае – одноосного сжатия она не применима – в материале нет растягивающих напряжений). Она, как показывают опыты Журкова, не отражает действительного характера поведения пластичного материала даже при растяжении. II теория может быть использована, кроме растяжения, только для одноосного сжатия. При нем материал расширяется в направлении двух других осей (коэффициент Пуассона). В случае всестороннего сжатия с разными значениями нагрузок теория не применяется.

III и IV теории относятся к теории сдвига, а V – к гипотезе отрыва и сдвига. III теория прочности хорошо подтверждается в случае пластического состояния материала, вследствие чего критерий этой теории принято в литературе называть условием текучести. Разновидностью III теории является теория максимальных эффективных касательных напряжений. Для повышения достоверности этой теории применительно к грунтам и горным породам Кулон ввел фрикционный член  $\mu\sigma_a$ , где  $\mu$  – коэффициент внутреннего трения,  $\sigma_a$  – нормальное напряжение, действующее на площадке скольжения. Ввиду отсутствия более достоверной теории, она широко применяется в теории напряженного состояния грунтов и многими авторами в области разрушения горных пород [1].

IV теория – теория предельной удельной потенциальной энергии формоизменения трактуется как теория предельных касательных напряжений, но в отличие от III теории, в ней имеются ввиду октаэдрические касательные напряжения, возникающие на площадках, равнонаклонённых ко всем трем главным под углом  $\sim 80^\circ$ . В механике горных пород критерий, основанный на этой теории, получил широкое распространение, однако, здесь используется одинаковость угла наклона площадок разрушения (текучести) для различных материалов при однотипных нагрузках, например, при одноосном сжатии. Это не соответствует результатам экспериментов для ряда горных пород.

Широкое применение в механике разрушения горных пород получила и теория Мора. Она

не связывает достижение предельного состояния с каким-то одним типом напряжений в материале (касательных или нормальных), а использует в качестве характеристики материала огибающей кругов предельных состояний, что позволяет объяснить наблюдаемые случаи разрушения как «отрывом», так и «сдвигом». Теория Мора дает удовлетворительное соответствие экспериментам для хрупких материалов по трем типам нагрузок – растяжению, сжатию и кручению, а для пластичных – по двум типам – растяжению и сжатию [2].

А.Н. Ставрогин и А.Г. Протосеня, исследуя соответствие пяти классических теорий прочности экспериментальным данным, пришли к выводу: «для полного описания предельных состояний во всем исследованном диапазоне напряженных состояний требуется привлечение, по крайней мере, трех теорий прочности: I и III, а также теории Мора». Эта универсальность теории Мора оказалась достаточно продуктивной и обеспечила ей распространение в механике разрушения горных пород.

Следующим возникла теория Кулона – Мора (модифицированная теория Кулона), которая основана на предположении, что сопротивляемость породы сдвигу на рассматриваемой площадке равна сумме предельного сопротивления материала сдвигу от сцепления и величины, пропорциональной нормальному напряжению на этой площадке (сжатие положительно)

$$|\tau_{\alpha}| = k_n + tg\rho \cdot \sigma_{\alpha}, \quad (1.1)$$

где  $k_n$  – предельное касательное сопротивление сдвигу от сцепления;

$tg\rho = \mu$  - коэффициент внутреннего трения;  $\rho$  – угол внутреннего трения породы.

В поле напряжений наибольшее напряжение сдвига по теории Кулона определяется наибольшим напряжением  $\sigma_1$  и наименьшим  $\sigma_3$ . В плоскости напряжений  $\sigma_1 = \sigma_y$  – продольное (вертикальное) напряжение и  $\sigma_3 = \sigma_x$  – поперечное (горизонтальное) напряжение. В плоскости напряжений  $\sigma_y$  и  $\sigma_x$  (рис.1) нормальное напряжение на наклонной площадке при  $0 < \psi < \pi/2$  определяют по выражению [1]

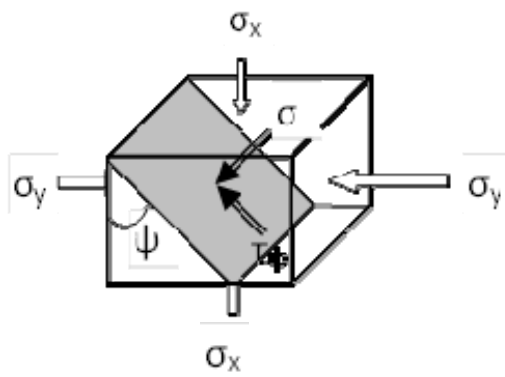


Рис. 1. Напряжения на наклонной площадке

$$\sigma_{\alpha} = \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_x) + \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \cos 2\psi \quad (1.2)$$

а абсолютную величину активного касательного напряжения – по формуле

$$|\tau_{\alpha}| = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\psi. \quad (1.3)$$

После подстановки в левую часть уравнения (1.1) выражений (1.2) и (1.3) в которых  $\sigma_{\alpha}$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_x$  берутся со знаком минус, производится дифференцирование, производная

приравняется нулю и находится значение угла экстремальной плоскости, при которой левая часть формулы (1.1) достигает максимума

$$\psi = \pi / 4 + \rho / 2 \quad (1.4)$$

Площадки, наклоненные относительно площадки максимального главного напряжения под этими углами, называют потенциальными поверхностями скольжения [1], или предельными площадками.

Входящий в формулу параметр  $\rho$  выражают через отношение предельных нагрузок при растяжении и сжатии все по той же диаграмме Мора (рис. 2), записывая очевидное геометрическое соотношение

$$\cos(\pi - 2\psi) = AC / AB = (\sigma_{сж} - \sigma_p) / (\sigma_{сж} + \sigma_p).$$

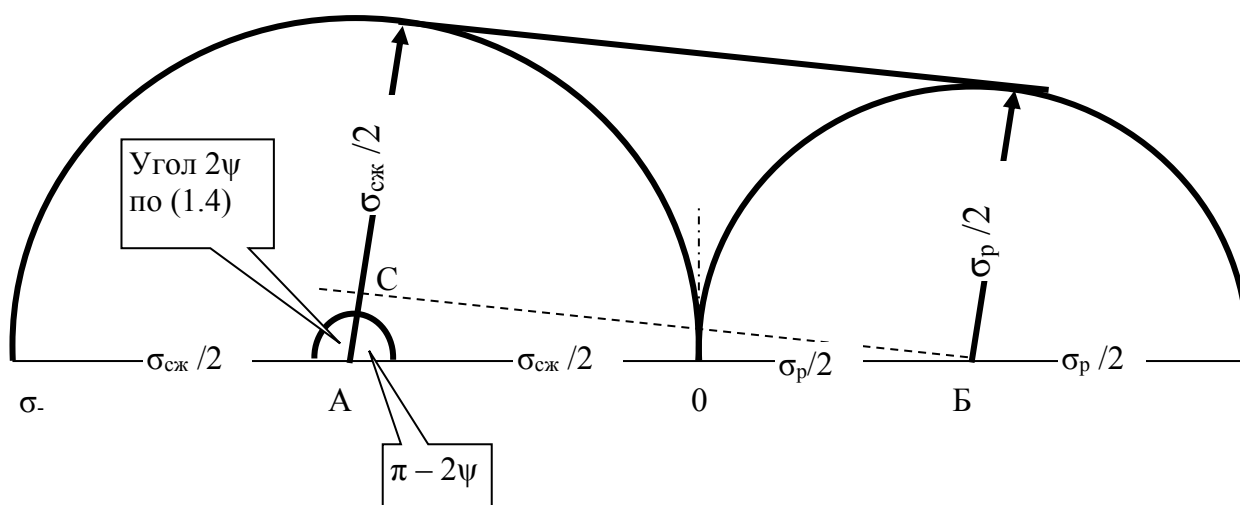


Рис.2 - К определению  $\rho$  по кругам Мора для одноосного растяжения и сжатия

Подставив в которое формулу (1.4) получим:

$$\cos(\pi/2 - \rho) = \sin \rho = (\sigma_{сж} - \sigma_p) / (\sigma_{сж} + \sigma_p)$$

$$\operatorname{tg} \psi = (\sigma_{сж} / \sigma_p)^{0,5} \quad (1.5)$$

Эта формула выведена из условия прямолинейности огибающей кругов Мора.

Прочность на одноосное сжатие равна

$$\sigma_c = 2k_n \cdot \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right). \quad (1.6)$$

Таким образом, теория Кулона-Мора, кроме предела прочности, содержат и дополнительный важный параметр свойств горных пород – коэффициент внутреннего трения, зависящий от соотношения пределов прочности при одноосном растяжении и сжатии. Такие зависимости в таком или другом видах широко использовались в работах

А.Ф.Булата, В.В.Виноградова, Ю.З. Заславского, А.Н. Зорина, А.Д.Алексеева, Б.М. Усаченко и др. Однако и эта теория не объясняет различие в характере разрушения хрупких материалов при сжатии и растяжении.

По гипотезе Л.В. Васильева причина заключается в не прямолинейности огибающей кругов Мора, что наглядно иллюстрируется таблицей (1.1) значений углов внутреннего трения пород железорудных месторождений, подсчитанного по формуле (1.5) и определенного экспериментально.

Таблица 1.1 - Сравнение экспериментальных значений угла внутреннего трения с расчетом по коэффициенту хрупкости по формуле (1.5)

Месторождение, порода	К-т хрупкости $K_{хр} = \sigma_{сж} / \sigma_p$	$\rho, ^\circ$	
		экспер.	расчёт
<b>Первомайский карьер СевГОК Кривбасс</b>			
Роговик брекчированный. Гор. 17м	12,7	32	59
Роговик неокисл. тонко-слоистый. Гор. 65м	9	33	53
Роговик силикатно- магнетитовый. Гор. 17м	21,5	29	66
Сланец хлоритовый. Гор.17м	28,1	31	69
Сланец хлоритовый. Гор.41м	43	33	73
<b>Ингулецкий карьер ИнГОК Кривбасс</b>			
Арконы	9,4	42	54
Граниты	19,7	40	65
Мигматиты	14,1	25	60
Роговик окисленный	12,5	37	58
Роговик силикатно- магнетитовый. Зап. борт	10,7	40	56
Сланец хлоритовый	9,2	21	54
Филлиты	12	28	58
<b>Михайловское месторождение КМА</b>			
Кварциты маршалитизиров. выщелоченные	12	29	58
Кварциты гематито-мартитовые окисленные	8	26	51
Кварциты гемат-магнет-мартит полуокисл.	6,9	25	48
Руда гематит-мартит сильно лимонитизиров.	15,6	31	62
Руда карбонатная гематито-мартитовая	8,5	28	52

Эта таблица показывает, что расчет из условия прямолинейной огибающей кругов Мора дает в два раза более высокие значения углов внутреннего трения, чем эксперимент. Кроме того, между расчетом и экспериментом не прослеживается корреляционной связи, необходимой даже для грубых расчетов, а постановка специальных экспериментов для определения внутреннего трения, а не расчет этой величины по показателям  $\sigma_{сж}$  и  $\sigma_p$  безусловно создает определенные неудобства применения теории Кулона – Мора.

И, наконец, в ряде случаев при одноосном сжатии образцы раскалываются вдоль действия сжимающей нагрузки – там, где, по всем канонам сопромата, вообще никаких напряжений не должно быть. Это явление, названное Бриджменом парадоксальным, как правило, связывают с отрывом, а некоторые авторы [3] связывают с отрывом любые формы разрушения, независимо от комбинации сжимающих нагрузок.

Распространением предположения о возникновении внутренних напряжений в плоскостях, нормальных к направлению действия внешних сил и наличии связи между поперечными деформациями и вызывающими их напряжениями занимались В.А. Кузьменко, Б.К. Норель.

Г.Т. Кирничанский и Б.М. Усаченко привлекли в основу своих изысканий термофлуктуационную теорию и пришли к выводу, что разрушение практически всегда происходит отрывом, и даже от трехосных сжимающих нагрузок могут возникать растягивающие напряжения вдоль одной или нескольких осей. В качестве критерия разрушения авторы рекомендуют принимать достижение результирующей растягивающих напряжений предела прочности на растяжение, то есть

$$\frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2} \leq \sigma_p, \quad (1.7)$$

где  $\sigma_i$  – только растягивающие напряжения, определяемые по деформационным характеристикам;  $n$  – их количество;  $\sigma_p$  – предел прочности материала на растяжение. При одноосном сжатии  $\sigma_x = -\nu_{np} \sigma_y$ , где  $\nu_{np}$  – коэффициент поперечных деформаций.

Как видим из анализа постулатов этих авторов, о методологии расчета поперечных (горизонтальных) сжимающих напряжений не может быть и речи. По их представлению, даже при трехосном сжатии возникают растягивающие напряжения. Из изложенного сделаем вывод о том, что большинство известных теорий не отражают в полной мере предельного, да и не только предельного, а и допредельного состояния горных пород, наблюдаемого в экспериментах.

При сопоставлении теории и эксперимента мы (и все цитированные авторы) исходили из того, что напряженное состояние образца в экспериментах по одноосному растяжению и сжатию однокомпонентно. Т.е. в образце возникает только одна компонента нормальных напряжений – в направлении внешней нагрузки. Остальные нормальные и касательные компоненты равны 0.

Для испытаний на растяжение с этим можно согласиться, но при сжатии всегда возникают силы трения по площадке контакта образца и плиты пресса. Они вызваны разными значениями модуля поперечной деформации образца и плиты и относятся к категории касательных напряжений.

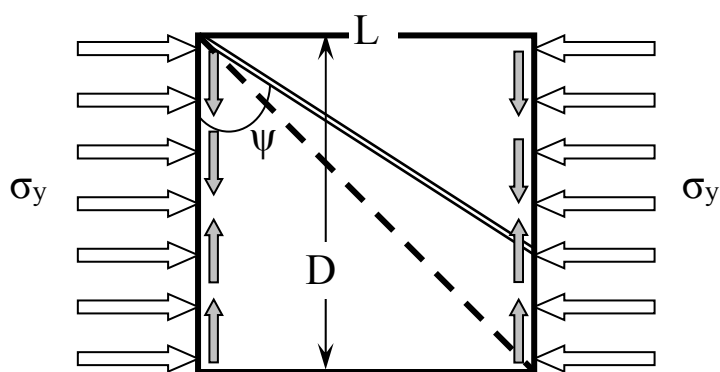


Рис. 3 - Силы трения на контакте с плитами пресса при одноосном сжатии

На этих площадках, кроме нормальных сжимающих усилий действуют еще и контактные силы трения с плитами пресса. Схематически они показаны на рис. 3. Направление угла  $\psi$  ориентации площадки разрушения выбрано в соответствии с рисунком, а его величина – с формулой 1.4. Встречное направление этих сил от краев к центру выбрано по соображениям симметрии поперечных деформаций.

Из рисунка 3. понятно, что суммарное усилие трения на левом торце равно 0, а на правом – нет. Т.е. внешние одноосные нагрузки от пресса не являются для образца кубической формы главными. Они были бы главными, в первом приближении, если бы суммарное усилие трения было =0 на обоих нагруженных торцах. В соответствии с принципом Сен-Венана это возможно, если плоскость разрушения не пересекает нагруженные грани образца. Т.е. угол наклона плоскости разрушения  $\psi$  меньше угла диагонального сечения, показанного на рис. 3. пунктиром.

О влиянии внешнего трения на прочностные характеристики горных пород также указывают и другие исследователи [4], однако не дают способа учета этого влияния.

Поэтому возникает необходимость перерасчета полученных с помощью пресса экспериментальных значений предела прочности с учетом реальных значений коэффициентов контактного трения между породой и инструментом, т.е. возникает необходимость определения влияния внешнего и внутреннего трения при разрушении горных пород на их предел прочности даже при одноосном сжатии.

В механике пластичных материалов, наоборот, учитывают внешнее трение, но не учитывают внутреннего (в пластичных материалах оно принимается равным 0).

В целом в геомеханике горных пород и механике пластичных материалов характеристики трения все же учитываются, хотя бы по отдельности, а в области дробления и измельчения полезных ископаемых – не учитываются не только фрикционные характеристики, но и напряженное состояние вообще.

Анализ литературных источников последних лет [5,6] показывает, что здесь продолжают господствовать чисто эмпирические зависимости, основанные на статистических энергетических критериях работы разрушения (Риттингера) и т.н. «кинетике измельчения». Эмпирико-статистический подход тормозит изучение механизмов разрушения хрупких материалов, в частности Криворожских железистых кварцитов. В результате, среди ряда специалистов в этой сфере до сих пор существуют взгляды, как минимум, спорные с позиций механики хрупких и механики пластичных материалов.

Примером может служить работа [7] в которой провозглашается что дробление материала в условиях всестороннего сжатия более эффективно, чем при одноосном сжатии.

Этот пример показывает, что простое перенесение уже накопленных знаний в геомеханике в сферу измельчения полезных ископаемых обещает интересные результаты, несмотря на сложность происходящих там процессов.

Таким образом, приведенный анализ показал, что экспериментально подтверждаемое влияние характеристик трения в расчетах прочности дробимых материалов учитывается явно недостаточно и без отсутствия общей системы.

Определенным исключением из этого правила являются работы [8], в которых Л.М. Васильевым аналитическим способом получена формула для расчета предельных напряжений для одноосного сжатия, с учетом внутреннего и внешнего трения

$$\beta = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{b \cos \rho}{\sin \rho - \sqrt{1 - b^2}} ; \quad (1.8)$$

$$b = \frac{f \sigma_y}{k_n + \mu \sigma_y} \quad (1.9)$$

$$\sigma_c = -\frac{k_n}{\mu} \left( 1 - \frac{1 + \sin \rho}{1 - \sin \rho \sqrt{1 - b^2}} e^{2\mu\beta} \right) \quad (1.10)$$

где  $\beta$  – угол поворота линии скольжения от контактного трения;  $f$  – коэффициент контактного трения.

Эти формулы содержат оба параметра – и внутреннее трение и внешнее, но только для равномерного распределения внешней нагрузки по контакту.

Поэтому необходима разработка математических моделей влияния характеристик трения на прочность и подтверждение ее новыми экспериментальными данными для расчета предельного состояния шихтовых материалов и минералов для их эффективной дезинтеграции [9].

#### Выводы

1) Проведенный анализ литературных источников показал, что экспериментально наблюдаемое влияние характеристик трения учитывается в расчетах только частично и фрагментарно – в геомеханике хрупких материалов учтено внутреннее трение, в механике пластичных материалов – внешнее, а в расчетах процессов дробления и измельчения трение не учитывается вообще при определении напряженного состояния разрушаемых минералов.

2) Анализ теорий прочности позволил обосновать выбор в качестве критерия прочности теорию Кулона – Мора, а в качестве метода расчета – метод кривых предельного напряженного состояния – т.н. метод характеристик.

3) Сложность и громоздкость существующих расчетов прочности хрупких материалов методами традиционной механики без учета влияния внешнего и внутреннего трения актуализируют разработку более простых математических моделей, адекватно отражающих физические процессы разрушения горной породы при дезинтеграции в дробилках и мельницах.

#### Литература

1. Прочность и деформируемость горных пород / Карташев Ю.М., Матвеев Б.В., Михеев Г.В. и др.-М.:Недра, 1979.-269с.

2. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела / А.П. Филин.-М.:Физматгиз, 1975.-832с.

3. Криничанский Г.Т. Элементы теории деформирования и разрушения горных пород / Г.Т. Криничанский.-К.: Наук. Думка, 1989.-184с.

4. Баклашев И.В. Механика горных пород / И.В. Баклашев, Б.А. Картозия. М.: Недр, 1975.-271с.

5. Выскребенец А.С. Коэффициент измельчаемости в мельницах динамического самоизмельчения / А.С. Выскребенец // Обогащение руд.-2006.-№4.-С.3-4.

6. Аккерман Ю.Э. Методы определения измельчаемости руд для расчета производительности промышленных барабанных мельниц / Ю.Э. Аккерман // Обогащение руд.-2004.-№5.-С.35-41

7. Мельникова Т.Н. К вопросу оптимизации процессов измельчения руд / Т.Н.Мельникова, К.Г. Ятлугова, Н.М. Литвинова // Обогащение руд.-2006.-№4.-С.5-7.

8. Васильев Л.М. Метод расчета напряжений при внедрении штампа в упругий материал, обладающий внешним и внутренним трением / Л.М. Васильев, О.Н. Бычков // Новые методы разрушения и механика горных пород: сб. науч. тр./ ИГТМ НАН Украины.-К.: Наук. думка, 1973.-195с.

9. Блохин В.С. Основные параметры технологических машин. Машины для дезинтеграции твердых материалов / В.С. Блохин, В.И. Большаков, Н.Г. Малич, уч. пособие. ч.1– Днепропетровск; ИМА-пресс.- 2006.- 404с.