

В.П. НАДУТЫЙ, Е.С. ЛАПШИН, д-ра техн. наук,

А.И. ШЕВЧЕНКО, канд. техн. наук

(Украина, Днепропетровск, Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова НАН Украины)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВИЙ ПРОХОЖДЕНИЯ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ПРОСЕИВАЮЩУЮ ПОВЕРХНОСТЬ ВИБРАЦИОННОГО ГРОХОТА

Обезвоживание горной массы на вибрационном грохоте происходит в результате прохождения жидкости через отверстия просеивающей поверхности. При тонком и сверхтонком грохочении этому процессу препятствует поверхностное натяжение жидкости. Ни одна из теорий грохочения не позволяет определять, при каких режимах вибровозбуждения обеспечивается обезвоживание.

Обзор работ, посвященных особенностям грохочения при обезвоживании, приведен в [1], из которого следует, что для определения рациональных параметров вибрационного грохота необходим учет влияния капиллярных сил, поэтому основное внимание уделим методам их вычисления.

Начало теоретическим исследованиям поведения жидкости со свободной поверхностью, когда существенное влияние оказывает поверхностное натяжение, положили работы Юнга и Лапласа [2].

Из всего многообразия работ, связанных с учетом влияния поверхностного натяжения жидкости на границе с газом и твердой поверхностью, выделим два класса работ: первый – работы, посвященные равновесию жидкости, второй – работы, в которых рассматривается поведение жидкости при вибрационном воздействии.

При изучении равновесия жидкости в основном используют уравнение статики жидкости с учетом скачка давления на свободной поверхности, который вычисляют по уравнению Лапласа. Граничными значениями служат равновесные краевые углы. При этом накладывают ограничение – постоянство объема жидкости. Также широкое применение получил вариационный метод [3].

Решения классических задач на равновесие жидких масс под действием капиллярных сил, а также сил гравитационного, электрического и магнитного полей приведены в работе [4].

В монографии [3] известного американского специалиста в области вариационного исчисления Р. Финна изложена математическая теория следующих физических задач: формы равновесия жидкости в капиллярах, формы равновесия капель на горизонтальной и наклонной поверхностях, угол контакта жидкости со стенками сосуда.

Эти результаты могут служить основой для анализа равновесного состояния жидкости в отверстии просеивающей поверхности.

Что же касается математического описания колебаний жидкости с учетом влияния поверхностного натяжения, то этот класс задач существенно сложнее.

Підготовчі процеси збагачення

Сложность описания динамики вязкой жидкости со свободной поверхностью заключается в необходимости решения уравнения Навье-Стокса с учетом граничных условий на свободной поверхности с одновременным определением ее положения. Особо следует отметить, что изменением свободной поверхности во многом определяются основные характеристики гидродинамических процессов.

Впервые колебания невязкой капли рассмотрены в работах Релея и Кельвина [5, 6]. Было установлено, что колебания невязкой капли описываются линейной суперпозицией сферических гармоник.

Свободные колебания столба невязкой жидкости описаны в монографии [7].

Монография [8] посвящена изучению влияния вибраций на гидродинамические системы со свободной поверхностью жидкости или поверхностью раздела несмачивающихся жидкостей. Рассмотрено резонансное возбуждение колебаний. Получены уравнения и граничные условия, позволяющие определять пульсационные и средние характеристики движения сред при высокочастотных малоамплитудных поступательных вибрациях произвольной поляризации.

Под малоамплитудными вибрациями понимаются вибрации, при которых амплитуда существенно меньше характерного размера области, занимаемой жидкостью. При тонком и особо тонком грохочении применительно к анализу колебаний жидкости в отверстии просеивающей поверхности это допущение не выполняется.

При рассмотрении колебания жидкости, контактирующей с твердой поверхностью, ситуация еще более усложняется из-за гистерезиса краевого угла.

Гистерезис краевых углов почти всегда сопутствует смачиванию. При внешней простоте гистерезиса его изучение достаточно сложно, так как различие краевых углов могут вызывать разные причины, и часто они действуют одновременно [9].

Обзор работ, посвященных определению краевых углов и исследованию динамики растекания, приведены в статье [10]. В ней отмечается, что все межфазные эффекты весьма чувствительны к примесям и физическому состоянию поверхности. В частности, гистерезис краевого угла зависит от шероховатости поверхности, химических примесей или неоднородностей в структуре твердой поверхности, а также от растворенных в жидкости веществ.

Определение параметров для горной массы, характеризующие эти факторы, весьма сложная задача.

Проблеме разработки численных методов решения задач со свободными границами посвящено большое число публикаций. Обзор их приведен в статьях [11, 12].

Численные методы позволяют найти решения, наиболее полно отвечающие сути движения жидкости в отверстиях просеивающей поверхности при вибрационном возбуждении. Однако разработка математической программы сопряжена с большими затратами и требует продолжительного времени. А самое главное – и в этом случае остается проблема описания гистерезиса краевого угла.

Цель данной работы – исследовать равновесие жидкости в отверстии просеивающей поверхности. Это позволит определить минимальный размер отверстия, при котором жидкость проходит через просеивающую поверхность даже при отсутствии вибровозбуждения, а также выявить пути, позволяющие уменьшить размер отверстий.

В работе рассматривались просеивающие поверхности с круглыми и со щелевыми отверстиями.

Просеивающая поверхность с круглыми отверстиями

Слой жидкости 1 находится в равновесии на просеивающей поверхности 2 (рис. 1).

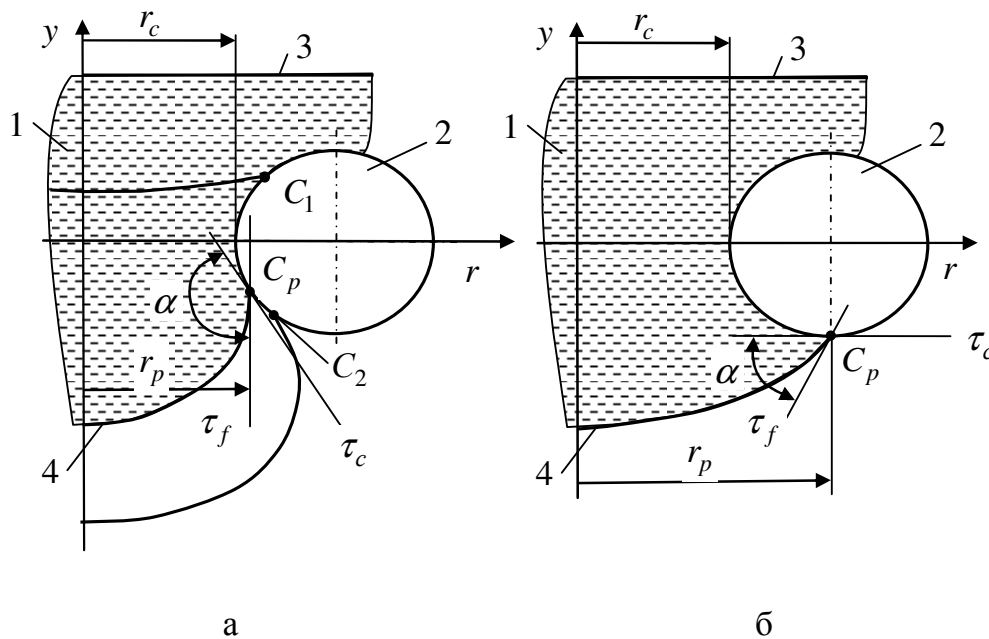


Рис. 1. Равновесие жидкости в отверстии просеивающей поверхности
 а – несмачивание; б – смачивание
 1– жидкость; 2– проволока просеивающей поверхности;
 3 – плоская свободная поверхность; 4 – мениск

Выделим одно отверстие. Будем считать, что отверстие круглое, а стенка его выполнена по радиусу. Жидкость сверху ограничена плоской поверхностью 3, а снизу – мениском 4. При равновесии имеет место следующее равенство [3, 4, 13]

$$p_k + G = 0, \tag{1}$$

где G – сила гидростатического давления; p_k – капиллярное давление.

Капиллярное давление вычисляется по формуле Лапласа

$$p_k = \sigma K, \tag{2}$$

Підготовчі процеси збагачення

где σ – коэффициент поверхностного натяжения; K – кривизна поверхности.

Поскольку отверстие круглое, то введем цилиндрическую систему координат $yr\varphi$, где y – аппликата, r и φ – полярные радиус и угол. В этой системе кривизна мениска [13]

$$K = \frac{h''}{(1+(h')^2)^{3/2}} + \frac{h'}{r(1+(h')^2)^{1/2}}, \quad (3)$$

где h – координата y точек поверхности мениска;

штрих обозначает производную по радиусу r .

Гидростатическое давление, действующее на мениск, вычисляется так:

$$\rho g (h - H), \quad (4)$$

где ρ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения; H – координата y плоской свободной поверхности.

Подставляя (2), (3) и (4) в (1), получим дифференциальное уравнение равновесия жидкости [13]

$$\frac{h''}{(1+(h')^2)^{3/2}} + \frac{h'}{r(1+(h')^2)^{1/2}} + \frac{\rho g}{\sigma} (h - H) = 0. \quad (5)$$

Решение уравнения должно удовлетворять краевым условиям:

1) в силу симметрии поверхности мениска касательная в точке $r = 0$ должна быть горизонтальна, т. е. $h'(0) = 0$;

2) в точке контакта свободной поверхности 1 мениска со стенкой 2 отверстия угол между касательными к свободной поверхности τ_f и поверхностью стенки отверстия τ_c должен быть равен краевому углу α (рис. 1).

Рассмотрим случай, когда жидкость не смачивает материал просеивающей поверхности ($\alpha > 90^\circ$).

Сложность решения уравнения (5) обусловлена его нелинейностью и неизвестностью положения точки контакта. Эксперименты показали, что с увеличением высоты слоя жидкости точка контакта перемещается от положения C_1 до C_p (рис. 1). Для несмачивающей жидкости положение C_p – предельное. Как только точка контакта перемещается ниже C_p , образуется перетяжка на мениске, что приводит к отрыву жидкости. В точке C_p касательная к жидкости вертикальна. Именно эта особенность позволяет свести краевую задачу к задаче Коши. Будем численно решать уравнение (5) при начальном значении $h'(0) = 0$ и после каждого шага вычислений проверять значение угла наклона касатель-

ной $\beta = \arctg(h')$. При $\beta = \pi/2$ следует остановить счет и определить соответствующее значение радиуса. Этот радиус обозначим – r_p . Из простейших геометрических соотношений следует, что предельное состояние достигается при радиусе отверстия

$$r_c = r_p - r_n(1 + \cos \alpha), \quad (6)$$

где r_n – радиус проволоочки сита.

Из (6) следует, что r_c зависит от радиуса проволоочки. Решение существует при различных значениях r_n . Однако просеивающая поверхность должна иметь максимально высокое живое сечение при обеспечении требуемой прочности, поэтому существует рациональное соотношение между r_c и r_n . Обозначим $\zeta = r_n/r_c$. Зависимость этого отношения от диаметра d_c отверстия для металлических просеивающих поверхностей [14], выпускаемых промышленностью, приведена на рис. 2.

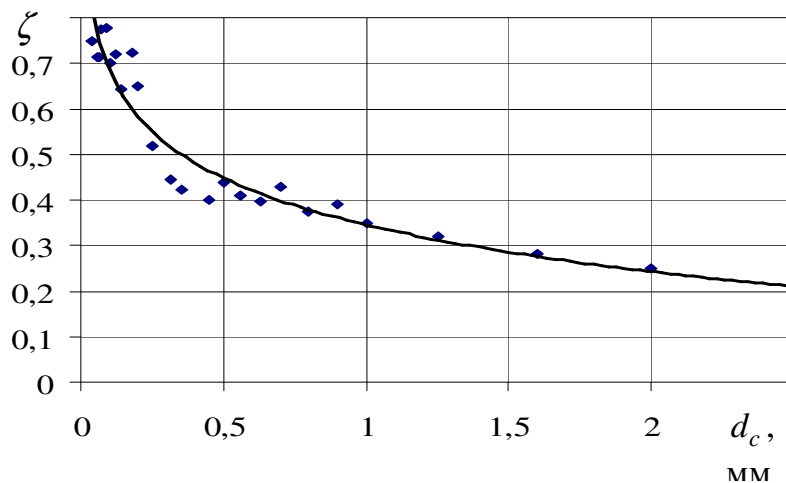


Рис. 2. Зависимость ζ от диаметра отверстия:
 точки – данные для просеивающих поверхностей, выпускаемых промышленностью; линия – аппроксимация данных

Эти данные аппроксимированы логарифмической функцией (коэффициент детерминации 0,926)

$$\zeta = -0,1481 \ln d_c + 0,3454. \quad (7)$$

Решая нелинейную алгебраическую систему численно, получим значения r_c и r_n .

Перейдем к рассмотрению случая, когда жидкость смачивает материал просеивающей поверхности (рис. 1 б). Здесь по прежнему точка C_p соответ-

Підготовчі процеси збагачення

вует предельному положению линии контакта. Поскольку $\alpha \leq 90^\circ$, то C_p находится на горизонтальной касательной к проволочке 2. Если C_p сместится правее вертикального диаметра проволочки, то мениск 4 начнет контактировать с мениском в соседнем отверстии, что приведет к их слиянию и образованию пленки жидкости под просеивающей поверхностью. Условие остановки численного решения уравнения (5) имеет вид $\alpha = \arctg(h')$. Тогда радиус отверстия

$$r_c = r_p - r_n. \quad (8)$$

Численно решая систему алгебраических нелинейных уравнений, определим r_c и r_n .

Графическое представление решений дифференциального уравнения (5) методом Рунге-Кутты (четвертого и пятого порядков точности) при различных значениях краевого угла приведено на рис. 3. Чем меньше диаметр отверстия и хуже смачивание, тем больше жидкости удерживается на сите. Этот качественный вывод – тривиален. Главное то, что получено количественное описание этого эффекта. Так, например, если необходимо, чтобы сито пропускало слой воды высотой 50 мм, то при краевом угле 150° диаметр отверстий должен быть больше 0,563 мм, а при краевом угле 20° отверстия должны быть больше 0,123 мм. Иными словами, чем лучше смачивание, тем по более мелкому классу возможна классификация.

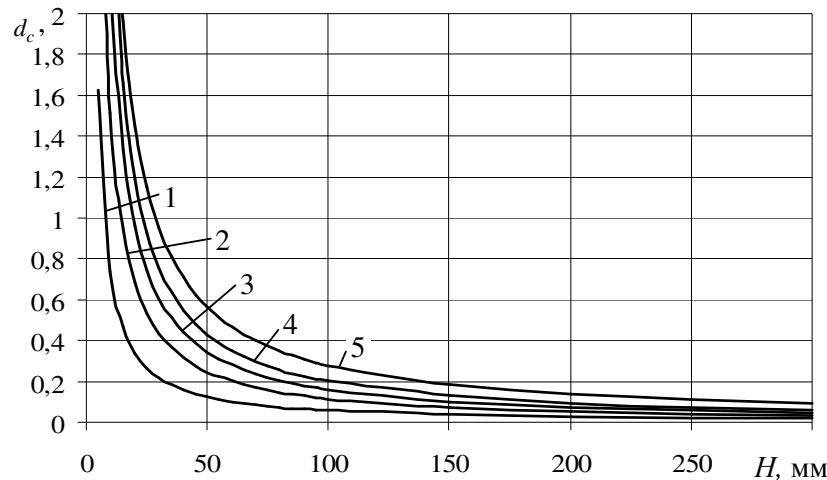


Рис. 3. Граничный диаметр отверстия, при котором на просеивающей поверхности удерживается слой воды высотой H :
1, 2, 3, 4 и 5 – краевой угол 20° , 40° , 60° , 100° и 150°

Просеивающая поверхность со щелевыми отверстиями

При щелевых отверстиях ширина щели в несколько раз превосходит длину щели, поэтому кривизной нижней свободной поверхности вдоль щели будем пренебрегать. Рассмотрим щель со стенками, выполненными по радиусу. Вве-

Підготовчі процеси збагачення

дем декартову систему координат xOy , начало которой поместим по середине поперечного сечения щели. Ось абсцисс x проведем через центр кривизны стенки, а ось ординат y направим вертикально вверх. Кривизна нижней свободной поверхности определяется по формуле

$$K_h = \frac{h''}{(1+(h')^2)^{3/2}}. \quad (9)$$

С учетом (2), (4) и (9) уравнение (1), описывающее равновесие жидкости над щелью, имеет вид

$$\frac{h''}{(1+(h')^2)^{3/2}} + \frac{\rho g}{\sigma}(h-H) = 0. \quad (10)$$

Краевые условия и метод решения уравнения (10) остаются прежними. На рис. 4 приведены результаты вычисления. Из сравнения влияния высоты слоя воды на предельный диаметр отверстия и ширину щели следует, что для удержания одного и того же слоя размер щели должен быть от 2,01 до 2,26 раза меньше диаметра отверстия (рис. 3 и 4). Следовательно, щелевое сито позволяет классифицировать сырье по меньшему классу крупности.

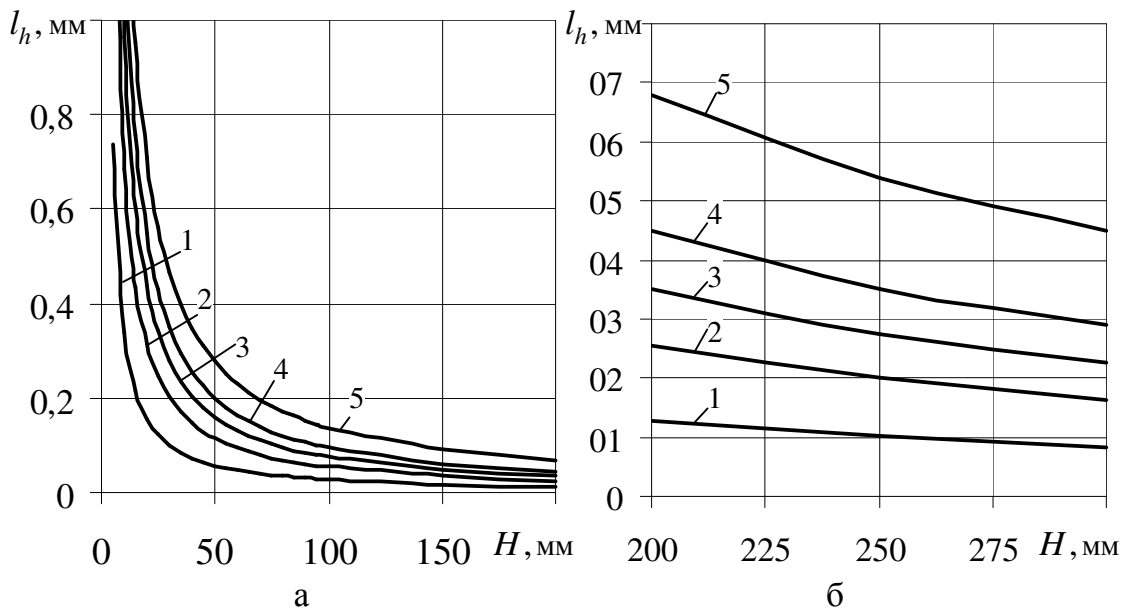


Рис. 4. Граничная ширина щелевого отверстия, при котором на сите удерживается слой воды высотой H :
а и б – интервал изменения высоты 0-200 мм и 200-300 мм;
1, 2, 3, 4 и 5 – краевой угол 20°, 40°, 60°, 100° и 150°

Підготовчі процеси збагачення

Таким образом, получены уравнения равновесия жидкости над круглым отверстием (5) и над щелевым (10). Определены граничные размеры отверстия (рис. 3) и щели (рис. 4), при которых на просеивающей поверхности удерживается слой воды заданной высоты.

Полученные данные будут использованы при математическом моделировании для определения рациональных конструктивных и динамических параметров процесса обезвоживания горной массы.

Список литературы

1. **Надутый В.П., Калинин В.В.** Вибрационное грохочение горной массы повышенной влажности. – Днепропетровск: НГУ Украины, 2004. – 135 с.
2. **Laplace P.S.** Theory of capillary attractions / Tenth Book of Celestial. – New York: Academic press, 1966. – 276 p.
3. **Финн Р.** Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория. – М.: Мир, 1989. – 312 с.
4. **Саранин В.А.** Равновесие жидкостей и его устойчивость. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 144 с.
5. **Релей Д.** Теория звука. Т. 2. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1954. – 460 с.
6. **Clift R., Grace J., Weber M.** Bubbles, drops, and particles. – New York.: Academic press, 1978. – 394 p.
7. **Ламб Г.** Гидродинамика. – М., Л.: ГИТТЛ, 1947. – 928 с.
8. Любимов Д.В., Любимова Т.П., Черепанов А.А. Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 216 с.
9. **Сумм Б.Д.** Гистерезис смачивания / Соросовский образовательный журнал. – 1999. – № 7. – С. 98–102.
10. **Де Жен П.Ж.** Смачивание: статика и динамика / Успехи физических наук. – 1987. – Т. 151. – Вып. 4 – С. 619–681.
11. **Майков И.Л., Директор Л.Б.** Численная модель динамики капли вязкой жидкости / Вычислительные методы и программирование. – 2009. – Т. 10. – С. 148–157.
12. **Майков И.Л., Директор Л.Б.** Численное решение задачи о затухающих нелинейных колебаниях капли вязкой жидкости / ЖЭТФ – 2008. – Т. 133, Вып. 6. – С. 1314–1321.
13. Равновесные слои жидкости в капиллярной ситовой ячейке / **В.И. Елисеев, В.И. Луценко, В.П. Надутый, И.П. Хмеленко** // Геотехническая механика: Межвед. сб. науч. тр. / ИГТМ НАН Украины. – Днепропетровск, 2008. – Вып. 74. – С. 44–54.
14. **Вайсберг Л.А., Картавый А.Н., Коровников А.Н.** Просеивающие поверхности грохотов. Конструкция, материалы, опыт применения. – СПб.: ВСЕГЕИ, 2005. – 252 с.

© Надутый В.П., Лапшин Е.С., Шевченко А.И., 2011

*Надійшла до редколегії 12.02.2011 р.
Рекомендовано до публікації д.т.н. Б.О. Блюссом*