

Е.А. КИРИЧЕНКО, д-р техн. наук,
В.Г. ШВОРАК, В.Е. КИРИЧЕНКО, кандидаты техн. наук,
А.В. РОМАНЮКОВ, А.А. ТАТУРЕВИЧ
(Украина, Днепропетровск, Национальный горный университет)

МЕТОД РАСЧЕТА ДИНАМИКИ МНОГОФАЗНЫХ ПОТОКОВ В СИСТЕМАХ ТРУБОПРОВОДНОГО ПНЕВМОГИДРОТРАНСПОРТА

В Украине уже в настоящее время ощущается дефицит ряда стратегических цветных металлов, добыча которого производится из материковых месторождений традиционным способом. Этот факт определяет зависимость дальнейшего успешного развития экономики нашей страны от разработки технических средств и способов добычи полезных ископаемых со дна Мирового океана.

Особую актуальность упомянутой выше проблеме придает решение Совета национальной безопасности и обороны Украины от 16 мая 2008 года "О мероприятиях по обеспечению развития Украины как морского государства", приведенным в действие указом Президента Украины № 463/2008 от 20 мая 2008 года, предусмотрена разработка новой "Национальной программы исследований и использования ресурсов Азово-Черноморского бассейна, других районов Мирового океана на 2009-2034 годы". Таким образом, разработка технических средств подъема полезных ископаемых с морского дна является одним из приоритетных направлений исследований. Данная статья посвящена *актуальной проблеме* освоения минерального потенциала Мирового океана, решение которой напрямую связано с разработкой эффективных способов регулирования и управления глубоководными насосными установками.

В настоящее время специалисты выделяют два конкурирующих между собой метода транспортировки твердых полезных ископаемых со дна океана – насосный и эрлифтный [1-3]. В гидравлических трактах таких установок реализуются многофазные течения. Так в подъемной трубе эрлифта (выше смесителя) реализуется трехфазный поток, состоящий из смеси жидкости, твердых частиц и газа, а в подводящей трубе (ниже смесителя), равно как и в насосном гидроподъеме, транспортируется двухфазная смесь.

Как известно, нестационарное движение однородной жидкости в трубопроводах описывается дифференциальными уравнениями в частных производных гиперболического типа, эффективным средством решения которых является метод характеристик [4]. В случае же нестационарных течений многофазных потоков система уравнений значительно усложняется и, вообще говоря, теряет свою гиперболичность [5], что означает, что задача Коши с начальными условиями, заданными на нехарактеристической поверхности однозначно неразрешима.

Известны единичные попытки расчета динамики многофазных потоков [1-3], которые позволяют в некотором приближении решать ограниченный ряд

Усреднения та транспортування

прикладних задач и для для решения которых, допускались определенные (иногда существенные) упрощения. Тем не менее, в перечисленных работах были сделаны первые шаги к разработке метода расчета динамики многофазных сред.

Существуют различные подходы к расчету динамических характеристик многофазных потоков [6-10], опирающиеся на разной сложности математические модели движения смеси. В работе [11] разработана универсальная раздельная математическая модель движения трехфазной смеси и получено обобщенное выражение для определения скорости распространения упругих волн в трехфазных средах, однако вопрос о способе численного интегрирования полученной системы уравнений остался открытым, т.к. для нее не были выведены характеристические соотношения. В работе [12] такие характеристические соотношения были успешно получены и заложены основы для разработки универсального метода расчета динамики многофазных потоков.

Следует отметить, что большую часть времени глубоководные установки работают именно в нестационарных режимах. Это связано с большой протяженностью пневмогидравлических трактов и многообразием быстрых и медленных переходных процессов, сопровождающих работу такого добычного комплекса. Такими процессами могут быть, как стандартные режимы планового пуска или останова системы, так и внештатные ситуации, связанные с забутовкой трубопровода, аварийной остановкой насосов и т.д.

Таким образом, на сегодняшний день ощущается острая необходимость разработки комплексного теоретического метода расчета всех параметров многофазных потоков, который бы учитывал взаимовлияние распределений волн давлений, скоростей и концентраций фаз, что должно существенно повысить точность получаемых результатов. Этим обусловлена *актуальность* разработки физически обоснованного метода расчета динамики многофазных сред.

Целью данной статьи является разработка метода расчета динамики многофазных потоков в системах трубопроводного пневмогидротранспорта, комплексно учитывающего взаимовлияние давлений, скоростей и концентраций фаз в гетерогенном потоке.

Рассмотрим гидросмесь, состоящую из несущей жидкости и двух дискретных фаз: твердых частиц и газовых пузырей. Будем предполагать, что движение одномерное. Пренебрегаем силами непосредственного трения частиц о стенки трубопровода, взаимовлиянием твердых и газообразных частиц, а также считаем, что собственные скорости фаз малы по сравнению со скоростью звука в смеси.

При сделанных основных допущениях математическая модель течения трехфазной гидросмеси может быть представлена следующей системой дифференциальных уравнений неразрывности (1)-(3) и движения (4)-(6), записанных соответственно для жидкой, твердой и газообразной фаз [11]:

$$(1 - C_1 - C_2) \frac{\partial p}{\partial t} - \rho_0 a_0^2 \frac{\partial C_1}{\partial t} - \rho_0 a_0^2 \frac{\partial C_2}{\partial t} + \rho_0 a_0^2 (1 - C_1 - C_2) \frac{\partial V_0}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$C_1 \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_1 a_1^2 \frac{\partial C_1}{\partial t} + \rho_1 a_1^2 C_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$C_2 \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_2 a_2^2 \frac{\partial C_2}{\partial t} + \rho_2 a_2^2 C_2 \frac{\partial V_2}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$\left(1 + \frac{C_1 k_1 + C_2 k_2}{2}\right) \frac{\partial V_0}{\partial t} - \frac{C_1 k_1}{2} \frac{\partial V_1}{\partial t} - \frac{C_2 k_2}{2} \frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{(1 - C_1 - C_2)}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = \phi_0, \quad (4)$$

$$\left(\frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{k_1}{2}\right) \frac{\partial V_1}{\partial t} - \left(1 + \frac{k_1}{2}\right) \frac{\partial V_0}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = \phi_1, \quad (5)$$

$$\left(\frac{\rho_2}{\rho_0} + \frac{k_2}{2}\right) \frac{\partial V_2}{\partial t} - \left(1 + \frac{k_2}{2}\right) \frac{\partial V_0}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = \phi_2, \quad (6)$$

где

$$\phi_0 = -(1 - C_1 - C_2) g \sin \alpha - \frac{\lambda}{2D} \frac{\rho_{cm}}{\rho_0} |V_{cm}| V_{cm} - \frac{3}{8} \left[\frac{C_1 C_{xm}}{R_1} |V_0 - V_1| (V_0 - V_1) + \frac{C_2 C_{xg}}{R_2} |V_0 - V_2| (V_0 - V_2) \right],$$

$$\phi_1 = -\frac{\rho_1}{\rho_0} g \sin \alpha + \frac{3}{8} \frac{C_{xm}}{R_1} |V_0 - V_1| (V_0 - V_1),$$

$$\phi_2 = -\frac{\rho_2}{\rho_0} g \sin \alpha + \frac{3}{8} \frac{C_{xg}}{R_2} |V_0 - V_2| (V_0 - V_2),$$

$$\frac{1}{a_1^2} = \frac{\rho_1}{K_1} + \frac{\rho_1}{F} \left(\frac{\partial F}{\partial p} \right), \quad \frac{1}{a_2^2} = \frac{\rho_2}{K_2} + \frac{\rho_2}{F} \left(\frac{\partial F}{\partial p} \right), \quad \frac{1}{a_0^2} = \frac{1}{a_{жс}^2} + \frac{\rho_0}{F} \left(\frac{\partial F}{\partial p} \right), \quad a_{жс}^2 = \frac{K_{жс}}{\rho_0}, \quad K_1 = \frac{E_1}{3(1-2\nu_1)}, \quad \frac{1}{K_2} = \frac{1}{\rho_2} \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial p} \right),$$

$$\rho_{cm} = \rho_0^* + \rho_1^* + \rho_2^* = (1 - C_1 - C_2) \rho_0 + C_1 \rho_1 + C_2 \rho_2,$$

$$V_{cm} = \frac{1}{\rho_{cm}} (\rho_0^* V_0 + \rho_1^* V_1 + \rho_2^* V_2)$$

где K_2 – модуль объемного сжатия газовых пузырьков; R_2 – эквивалентный радиус газовых пузырьков; k_2 – коэффициент, учитывающий влияния несферичности а также концентрации пузырьков воздуха на присоединенные массы; индекс "2" обозначает величины, относящиеся к пузырькам газа.

Заметим, что производные от концентраций C_1 и C_2 входят только в уравнения неразрывности. Поэтому, выразив производную $\frac{\partial C_1}{\partial t}$ из уравнения (2), а производную $\frac{\partial C_2}{\partial t}$ из уравнения (3) и подставив их в уравнение (1), получим

Усреднения та транспортування

общее уравнение неразрывности вида

$$\rho_0 a_0^2 (1 - C_1 - C_2) \frac{\partial V_0}{\partial x} + \rho_0 a_0^2 C_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} + \rho_0 a_0^2 C_2 \frac{\partial V_2}{\partial x} + \left[(1 - C_1 - C_2) + \frac{\rho_0 a_0^2 C_1}{\rho_1 a_1^2} + \frac{\rho_0 a_0^2 C_2}{\rho_2 a_2^2} \right] \frac{\partial p}{\partial t} = 0. \quad (7)$$

При этом общая система уравнений (1)-(6) разбивается на две подсистемы: первая подсистема, которая состоит из уравнений (4), (5), (6) и (7) и содержит производные только от величин V_0 , V_1 , V_2 и p , но не содержит производных от концентраций C_1 и C_2 , и вторая подсистема (2), (3), которая содержит производные по времени от C_1 и C_2 и связана с первой подсистемой через производные от величин p , V_1 и V_2 . В свою очередь, первая подсистема связана со второй подсистемой только через значения концентраций C_1 и C_2 (но не их производных), которые входят как в коэффициенты первой подсистемы, так и в правые части выражений для ϕ_0 , ϕ_1 и ϕ_2 .

Из первой подсистемы (4)-(7), определяются скорости распространения возмущений в смеси и характеристические соотношения на фронтах возмущений. Вторая подсистема (2), (3) представляет собой по сути дела систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения изменения концентраций C_1 и C_2 с течением времени в каждой фиксированной точке x трубопровода после того, как на каждом временном слое времени t уже определены значения V_0 , V_1 , V_2 и p как функции координаты x .

Отметим, что в [13] выведено наиболее полное выражение для скорости звука в многофазной смеси D_0 :

$$D_0 = \frac{1}{\sqrt{\rho_y \left(\frac{(1 - C_1 - C_2)}{K_0} + \frac{C_1}{K_1} + \frac{C_2}{K_2} + \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial p} \right)}}, \quad (8)$$

Где

$$\rho_y = \mu \cdot \rho_0, \quad \mu = \frac{A}{B},$$

$$A = \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{k_1}{2} \right) \left(\frac{\rho_2}{\rho_0} + \frac{k_2}{2} \right) \left(1 + \frac{C_1 k_1 + C_2 k_2}{2} \right) - \frac{C_1 k_1}{2} \left(1 + \frac{k_1}{2} \right) \left(\frac{\rho_2}{\rho_0} + \frac{k_2}{2} \right) - \frac{C_2 k_2}{2} \left(1 + \frac{k_2}{2} \right) \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{k_1}{2} \right), \quad (9)$$

$$B = \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{k_1}{2} \right) \left(\frac{\rho_2}{\rho_0} + \frac{k_2}{2} \right) (1 - C_1 - C_2)^2 + C_1 \left(\frac{\rho_2}{\rho_0} + \frac{k_2}{2} \right) \left[(1 + k_1)(1 - C_1 - C_2) + 1 + \frac{C_1 k_1}{2} + \frac{C_2 k_2}{2} \right] + C_2 \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{k_1}{2} \right) \left[(1 + k_2)(1 - C_1 - C_2) + 1 + \frac{C_1 k_1}{2} + \frac{C_2 k_2}{2} \right] - \frac{1}{4} C_1 C_2 (k_1 - k_2)^2.$$

На рис. 1 показаны зависимости изменения скорости звука от истинной объемной концентрации воздуха в пульпе (далее от объемной концентрации

Усреднения та транспортування

пульпы) для различных значений волнового числа трубопровода, плотности твердых частиц сферической формы диаметром 0,005 м.

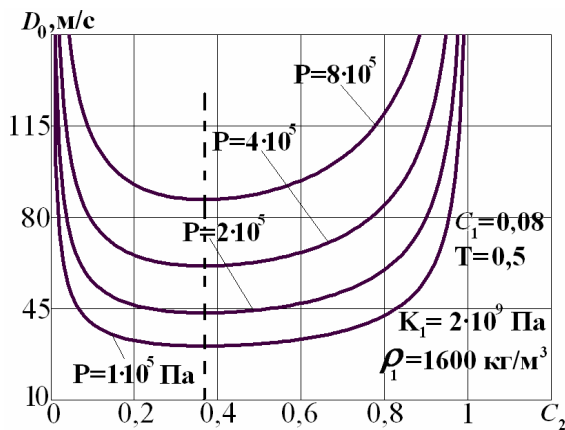


Рис. 1. Зависимости скорости звука в водовоздушной смеси от концентрации воздуха при различных давлениях

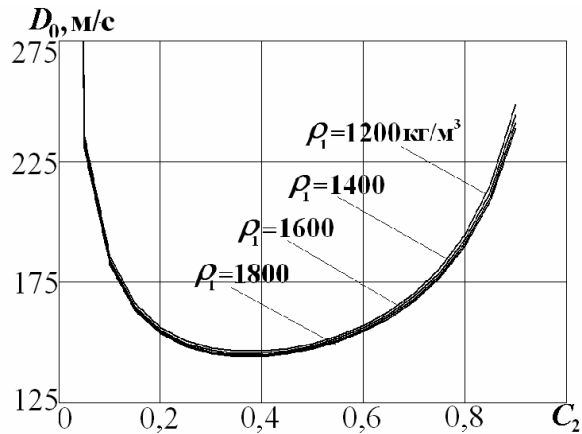


Рис. 2. Зависимости скорости звука в трехфазной смеси в подъемной трубе ГЭГ от концентрации воздуха при различных плотностях твердого

Как видно из рис. 1, в трехфазной смеси величина скорости звука изменяется прямо пропорционально давлению и имеет экстремальный характер в зависимости от газосодержания с минимумом при $C_2=0,37$ и фактически не зависит от характеристик твердого материала и параметров трубопровода (рис. 2 и 3). В подъемной трубе глубоководного эрлифтного гидроподъема (ГЭГ) при $C_2 < 0,37$ снижение скорости звука обусловлено падением давления и ростом газосодержания, а при $C_2 > 0,37$ – доминирующим влиянием падения давления, несмотря на рост газосодержания.

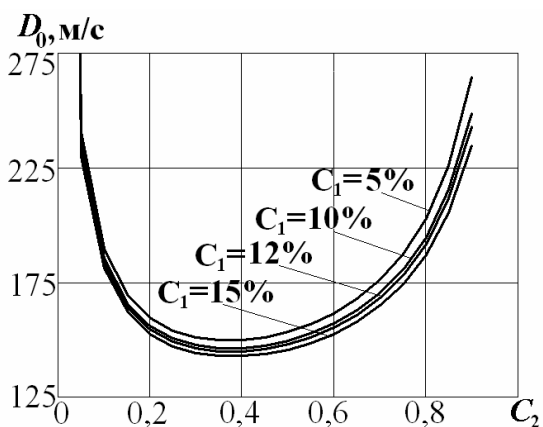


Рис. 3. Зависимости скорости звука в трехфазной смеси в подъемной трубе ГЭГ от концентрации воздуха при различных концентрациях твердого

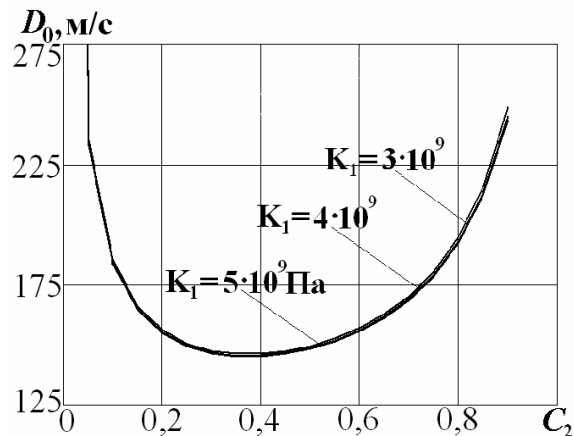


Рис. 4. Зависимости скорости звука в подъемной трубе от концентрации воздуха при различных коэффициентах объемного сжатия твердых частиц

Усреднення та транспортування

В работе [12] получено, что для системы (1)-(6) справедливы характеристические соотношения на четырех семействах характеристик:

$$dp + \mu\rho_0 D_0 [(1 - C_1 - C_2)dV_0 + C_1 dV_1 + C_2 dV_2] - \frac{\mu\rho_0 D_0}{A} \psi dt = 0. \quad (10)$$

$$- dp + \mu\rho_0 D_0 [(1 - C_2 - C_1)dV_0 + C_2 dV_2 + C_1 dV_1] - \frac{\mu\rho_0 D_0}{A} \psi dt = 0. \quad (11)$$

для акустических характеристик вида

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = D_1 = D_0, \quad (12)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = D_2 = -D_0. \quad (13)$$

и

$$\left[(1 - C_1 - C_2) \left(1 + \frac{k_1}{2} \right) + 1 + \frac{C_1 k_1}{2} + \frac{C_2 k_2}{2} \right] dV_0 - \left[(1 - C_1 - C_2) \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{k_1}{2} \right) + \frac{C_1 k_1}{2} \right] dV_1 - \frac{C_2 k_2}{2} dV_2 - \Omega_1 dt = 0, \quad (14)$$

$$\left[(1 - C_1 - C_2) \left(1 + \frac{k_2}{2} \right) + 1 + \frac{C_1 k_1}{2} + \frac{C_2 k_2}{2} \right] dV_0 - \frac{C_1 k_1}{2} dV_1 - \left[(1 - C_1 - C_2) \left(\frac{\rho_2}{\rho_0} + \frac{k_2}{2} \right) + \frac{C_2 k_2}{2} \right] dV_2 - \Omega_2 dt = 0, \quad (15)$$

для характеристик вида

$$D_{3,4} = 0, \quad (16)$$

где

$D = x'(t)$ – скорость распространения фронта возмущений,

$$\psi = \varphi_{\text{ж}} g \sin \alpha - \frac{\lambda \rho_{\text{см}} |V_{\text{см}}| V_{\text{см}}}{2 D_{\text{мп}} \rho_0} \varphi_{\text{мп}} + \frac{3 C_{\text{зм}}}{8 R_1} |V_0 - V_1| (V_0 - V_1) \varphi_1 + \frac{3 C_{\text{зв}}}{8 R_2} |V_0 - V_2| (V_0 - V_2) \varphi_2,$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{ж}} = & -(1 - C_1 - C_2) \varphi_{\text{мп}} + \frac{C_1 C_2}{2} (k_2 - k_1) \left[\left(1 + \frac{k_2}{2} \right) \frac{\rho_1}{\rho_0} - \left(1 + \frac{k_1}{2} \right) \frac{\rho_2}{\rho_0} \right] - \\ & -(1 - C_1 - C_2) \left[\frac{C_1 k_1}{2} \frac{\rho_1}{\rho_0} \left(\frac{\rho_2}{\rho_0} + \frac{k_2}{2} \right) + \frac{C_2 k_2}{2} \frac{\rho_2}{\rho_0} \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{k_1}{2} \right) \right] - \\ & - \left(1 + \frac{C_1 k_1}{2} + \frac{C_2 k_2}{2} \right) \left[C_1 \frac{\rho_1}{\rho_0} \left(\frac{\rho_2}{\rho_0} + \frac{k_2}{2} \right) + C_2 \frac{\rho_2}{\rho_0} \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{k_1}{2} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\varphi_{mp} = C_2 \left(1 + \frac{k_2}{2}\right) \left(\frac{\rho_1 + k_1}{\rho_0}\right) + C_1 \left(1 + \frac{k_1}{2}\right) \left(\frac{\rho_2 + k_2}{\rho_0}\right) + (1 - C_1 - C_2) \left(\frac{\rho_2 + k_2}{\rho_0}\right) \left(\frac{\rho_1 + k_1}{\rho_0}\right),$$

$$\varphi_1 = \frac{C_1 C_2}{2} \left(1 + \frac{k_2}{2}\right) (k_1 - k_2) - C_1 C_2 \left(1 + \frac{k_2}{2}\right) \left(\frac{\rho_1 + k_1}{\rho_0}\right) + C_1 \left(\frac{\rho_2 + k_2}{\rho_0}\right) \left[\left(1 + \frac{k_1}{2}\right) (1 - C_1) + \frac{C_2}{2} (k_2 - k_1)\right] - C_1 (1 - C_1 - C_2) \left(\frac{\rho_1 + k_1}{\rho_0}\right) \left(\frac{\rho_2 + k_2}{\rho_0}\right),$$

$$\varphi_2 = \frac{C_1 C_2}{2} \left(1 + \frac{k_1}{2}\right) (k_2 - k_1) - C_1 C_2 \left(1 + \frac{k_1}{2}\right) \left(\frac{\rho_2 + k_2}{\rho_0}\right) + C_2 \left(\frac{\rho_1 + k_1}{\rho_0}\right) \left[\left(1 + \frac{k_2}{2}\right) (1 - C_2) + \frac{C_1}{2} (k_1 - k_2)\right] - C_2 (1 - C_1 - C_2) \left(\frac{\rho_1 + k_1}{\rho_0}\right) \left(\frac{\rho_2 + k_2}{\rho_0}\right).$$

$$\Omega_2 = (1 - C_1 - C_2) \left(\frac{\rho_2}{\rho_0} - 1\right) g \sin \alpha - \frac{\lambda \rho_{cm} |V_{cm}| V_{cm}}{2D_{mp} \rho_0} - \frac{3}{8} \frac{C_1 C_{sm}}{R_1} |V_0 - V_1| (V_0 - V_1) - \frac{3}{8} \frac{(1 - C_1) C_{sg}}{R_2} |V_0 - V_2| (V_0 - V_2).$$

Характеристические условия (14), (15) выполняются вдоль линий $x = \text{const}$, так что содержащиеся в них дифференциалы dV_0 , dV_1 и dV_2 означают приращение соответствующих функций по времени в каждом фиксированном сечении трубопровода.

В общем случае смеси жидкости с твердой и газообразной дискретными фазами имеется четыре семейства характеристик (семейство $D = 0$ является двукратным), вдоль каждого из которых выполняется некоторая связь между полными дифференциалами искомых функций dp , dV_0 , dV_1 и dV_2 .

Дифференциалы концентраций dC_1 и dC_2 в эти характеристические соотношения не входят. Значения концентраций C_1 и C_2 подлежат определению из решения дифференциальных уравнений (2), (3), которые по отношению к $\frac{\partial C_1}{\partial t}$ и $\frac{\partial C_2}{\partial t}$ являются обыкновенными дифференциальными уравнениями, что позволяет осуществить их численное интегрирование с помощью конечно-разностных схем.

Численное интегрирование уравнений движения многофазных смесей.

Рассмотрим общий случай движения несущей жидкости с двумя дискретными фазами: твердой сыпучей и газообразной в виде пузырьков.

Запишем характеристические соотношения (10), (11), (14), (15) соответственно в виде

$$\pm dp + a_{00} dV_0 + a_{01} dV_1 + a_{02} dV_2 - b_0 dt = 0, \tag{17}$$

$$a_{10} dV_0 + a_{11} dV_1 + a_{12} dV_2 - b_1 dt = 0, \tag{18}$$

Усреднения та транспортування

$$a_{20}dV_0 + a_{21}dV_1 + a_{22}dV_2 - b_2dt = 0, \quad (19)$$

где значения введенных коэффициентов a_{ij} и b_i определяются сопоставлением последних выражений с исходными соотношениями. В выражении (17) дифференциалы вычисляются вдоль кривых $x'_{1,2} = \pm D_0$, а в выражениях (18) и (19) – вдоль прямых $x = \text{const}$.

Указанный подход можно продемонстрировать на примере решения задачи для элементарной характеристической ячейки. На рис. 5 представлена характеристическая сетка акустических характеристик, начиная от некоторого момента времени $t = 0$, для которого состояние движения предполагается полностью известным. Решение строится пошагово, и пусть на каком-то шаге n решение задачи полностью определено в узлах на линии PABR. Эта линия является ломаной, поскольку в методе характеристик звенья ячеек имеют различные длины, из-за чего узлы линии PABR не находятся на одном и том же временном слое $t = \text{const}$. Рассмотрим типовую элементарную характеристическую ячейку ACB, где A и B принадлежат расчетному шагу n , а точка C – расчетному шагу $n + 1$.

Проведем через точку A элемент касательной к характеристике первого семейства (12) вычисляя значение D_0 в точке A:

$$x - x_A = (D_0)_A (t - t_A). \quad (20)$$

Аналогично проведем элемент характеристики второго семейства (13) через точку B:

$$x - x_B = -(D_0)_B (t - t_B). \quad (21)$$

Совместное решение уравнений прямых (20) и (21) определяет координаты их точки пересечения $C(x_C, t_C)$. Значение x_C определяет положение точки E, $x_E = x_C$, которая находится на одной и той же характеристике третьего семейства с точкой C.

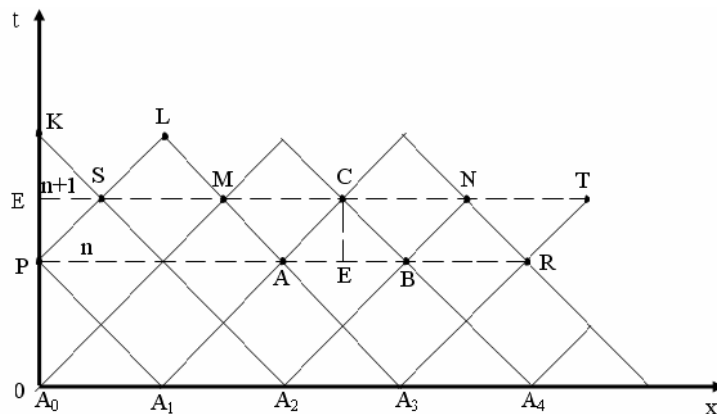


Рис. 5. Схема применения разработанного метода для расчета нестационарных параметров гидросмеси

Запишем соотношение (17) вдоль элемента характеристики первого семейства AC и второго семейства BC, вычисляя все коэффициенты и правые части по значениям функций в точке A и в точке B, соответственно:

$$p_C - p_A + (a_{00})_A (V_{0C} - V_{0A}) + (a_{01})_A (V_{1C} - V_{1A}) + (a_{02})_A (V_{2C} - V_{2A}) = (b_0)_A (t_C - t_A), \quad (22)$$

$$-(p_C - p_B) + (a_{00})_B (V_{0C} - V_{0B}) + (a_{01})_B (V_{1C} - V_{1B}) + (a_{02})_B (V_{2C} - V_{2B}) = (b_0)_B (t_C - t_B) \quad (23)$$

Кроме того, запишем соотношения (18) и (19) вдоль элемента характеристики третьего семейства EC:

$$(a_{10})_E (V_{0C} - V_{0E}) + (a_{11})_E (V_{1C} - V_{1E}) + (a_{12})_E (V_{2C} - V_{2E}) = (b_1)_E (t_C - t_E), \quad (24)$$

$$(a_{20})_E (V_{0C} - V_{0E}) + (a_{21})_E (V_{1C} - V_{1E}) + (a_{22})_E (V_{2C} - V_{2E}) = (b_2)_E (t_C - t_E). \quad (25)$$

Значения параметров в точке E определяются интерполированием по известным параметрам в узловых точках A и B.

Система (22)-(25) является системой четырех алгебраических уравнений для определения четырех неизвестных величин в узле C: p_C , V_{0C} , V_{1C} , V_{2C} на новом расчетном шаге $n + 1$.

Аналогичным образом находятся параметры p , V_0 , V_1 и V_2 и во всех других внутренних узлах на $(n + 1)$ -м расчетном слое SMCNT.

Процедура определения гидродинамических параметров p , V_0 , V_1 и V_2 отличается от описанной только при расчете граничных узлов.

Рассмотрим граничный узел типа узла K на границе $x = 0$ (рис. 5) и будем считать, что в данный момент времени эта граница представляет собой закрытый конец. Тогда в узле K

$$V_{0K} = V_{1K} = V_{2K} = 0,$$

и характеристическое соотношение (17), записанное вдоль элемента характеристики второго семейства SK

$$-(p_K - p_S) - (a_{00})_S V_{0S} - (a_{01})_S V_{1S} - (a_{02})_S V_{2S} = (b_0)_S (t_K - t_S)$$

сразу определяют значение давления p_K в этом узле.

Аналогичным образом видоизменяется расчет параметров и при других условиях на границе.

После того как гидродинамические параметры p , V_0 , V_1 и V_2 на слое SMCNT уже определены, следующим расчетным шагом является определение концентраций C_1 и C_2 на этом слое из уравнений (2) и (3), которые запишем в виде

Усреднения та транспортування

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = -C_1 \left(\frac{1}{\rho_1 a_1^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial V_1}{\partial x} \right), \quad (26)$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial t} = -C_2 \left(\frac{1}{\rho_2 a_2^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial V_2}{\partial x} \right). \quad (27)$$

Применим эти уравнения для определения концентраций C_1 и C_2 в точке C . Для аппроксимации производной $\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_C$ будем использовать соотношение

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_C = \frac{p_C - p_E}{t_C - t_E},$$

где p_E определяется интерполяцией по значениям p_A и p_B в узлах A и B .

Для аппроксимации производных $\frac{\partial V}{\partial x}$ ($V \equiv V_1$ или $V \equiv V_2$) в точке C необходимо использовать значения функции V в узлах, соседних с узлом C . Если бы три соседних узла M , C и N из $(n + 1)$ -ого расчетного шага находились на одном временном слое $t_M = t_C = t_N$, то для аппроксимации производной $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_C$ можно было бы использовать или любое из односторонних разностных отношений

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_C = \frac{V_N - V_C}{x_N - x_C}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_C = \frac{V_M - V_C}{x_M - x_C}, \quad (28)$$

или двустороннее разностное отношение

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_C = \frac{V_N - V_M}{x_N - x_M}. \quad (29)$$

Однако, при использовании характеристической сетки три соседних узла M , C и N в общем случае не будут принадлежать одному и тому же временному слою $t = \text{const}$, поэтому аппроксимация производной $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_C$ по двум точкам (M , C), (N , C) или (M , N) вообще становится невозможной. При этом, если узлы M , C и N не расположены на одной прямой, то в принципе возможна аппроксимация производной $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_C$ по трем точкам M , C и N , однако такой аппроксимацией практически пользоваться неудобно, так как в частном случае, когда точки M , C и N оказываются на одной прямой, возможность такого представления исчезает, и все коэффициенты аппроксимационной формулы становятся неопределенными.

Поэтому для представления производной $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_C$ нужна такая аппроксима-

Усреднення та транспортування

ционная формула, которая была бы в равной мере пригодной как для случая произвольного расположения узлов М, С, N, так и для случая, когда они расположены на одной прямой, и в частности, когда $t_M = t_C = t_N$. Такую формулу можно получить, если для аппроксимации $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_C$ использовать информацию из предыдущего расчетного шага.

Рассмотрим сначала внутренний узел типа узла С, который имеет с двух сторон соседние узлы на одном и том же расчетном слое (см. рис. 5). Для такого узла аппроксимацию производной $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_C$ можно осуществить как на одностороннем шаблоне типа буквы "Г" вперед (рис. 6, а) или типа буквы "Г" назад (рис. 6, б), так и на двустороннем шаблоне типа буквы "Г" (рис. 7).

Для одностороннего шаблона типа АСN (рис. 3, а) представление $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_C$ ищем в виде

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_C = \alpha_C V_C + \alpha_N V_N + \alpha_A V_A, \quad (30)$$

где $\alpha_C, \alpha_N, \alpha_A$ – некоторые коэффициенты, подлежащие определению.

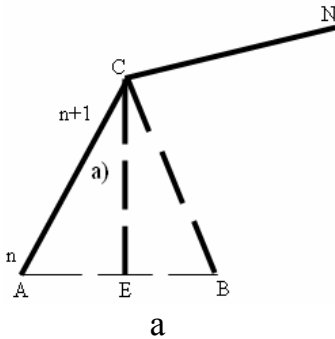


Рис. 6. Односторонние шаблоны для аппроксимации производной $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_C$

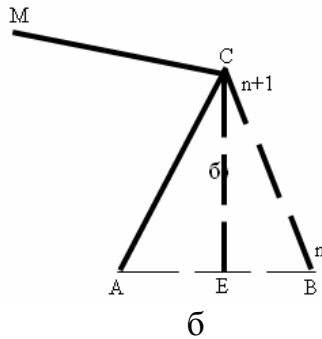


Рис. 7. Двусторонний шаблон для аппроксимации производной $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_C$

Представляя значения функций V_N и V_A их Тейлоровскими разложениями в окрестности точки С, получим

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_C = (\alpha_C + \alpha_N + \alpha_A) V_C + [\alpha_N(x_N - x_C) + \alpha_A(x_A - x_C)] \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_C + [\alpha_N(t_N - t_C) + \alpha_A(t_A - t_C)] \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_C.$$

Чтобы последнее выражение аппроксимировало производную $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_C$, необходимо чтобы выполнялись условия

$$\alpha_C + \alpha_N + \alpha_A = 0,$$

Усреднения та транспортування

$$\alpha_N(x_N - x_C) + \alpha_A(x_A - x_C) = 1, \quad (31)$$

$$\alpha_N(t_N - t_C) + \alpha_A(t_A - t_C) = 0.$$

Решая эти уравнения, найдем

$$\alpha_C = \frac{t_N - t_A}{\Delta}, \quad \alpha_N = \frac{t_A - t_C}{\Delta}, \quad \alpha_A = \frac{t_C - t_N}{\Delta}, \quad (32)$$

$$\Delta = (x_A - x_C)(t_C - t_N) - (x_N - x_C)(t_C - t_A). \quad (33)$$

Определитель системы (31) Δ в нуль не обращается, так как он равен удвоенной площади треугольника CAN.

Формулы (32), (33) годятся и в случае замены элемента характеристики первого семейства AC на элемент характеристики второго семейства CB или на элемент характеристики третьего семейства CE; при этом нужно координаты точки A(x_A, t_A) заменить соответственно на (x_B, t_B) или (x_E, t_E). Более того, формулы (32), (33) пригодны и в случае замены точки N на точку M.

При использовании для аппроксимации производной $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_C$ двустороннего шаблона, например MCAN (рис. 7), производная $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_C$ представляется в виде

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_C = \beta_M V_M + \beta_A V_A + \beta_N V_N, \quad (34)$$

откуда, аналогично предыдущему, найдем

$$\beta_M = \frac{t_A - t_N}{\Delta_1}, \quad \beta_A = \frac{t_N - t_M}{\Delta_1}, \quad \beta_N = \frac{t_M - t_A}{\Delta_1}, \quad (35)$$

$$\Delta_1 = (x_M - x_C)(t_C - t_N) - (x_N - x_C)(t_C - t_M) + (x_N - x_C)(t_C - t_A) - (x_A - x_C)(t_C - t_N) + (x_A - x_C)(t_C - t_M) - (x_M - x_C)(t_C - t_A). \quad (36)$$

Нетрудно видеть, что определитель Δ_1 , равный удвоенной площади треугольника AMN, в процессе расчета обратиться в нуль не может.

Формулы (35) и (36) остаются в силе и при замене координат точки A на координаты точки B или E.

Формулы (34) – (36) двусторонней аппроксимации $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_C$ могут применяться только для расчета внутренних узлов с наличием соседних узлов с двух сторон, а формулы для односторонней аппроксимации (30), (32), (33) – как для внутренних узлов, так и для обработки узлов на границе (типа узла K на рис. 5)

Усреднения та транспортування

и в приграничной зоне (типа узла S, у которого соседние узлы на одном расчетном слое есть только с одной стороны).

Аппроксимируя производные $\frac{\partial C_1}{\partial t}$ и $\frac{\partial C_2}{\partial t}$ конечно-разностными соотношениями

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = \frac{C_{1C} - C_{1E}}{t_C - t_E}, \quad \frac{\partial C_2}{\partial t} = \frac{C_{2C} - C_{2E}}{t_C - t_E}, \quad (37)$$

из уравнений (26) и (27) получим следующие их конечно-разностные решения:

$$(C_1)_C = (C_1)_E \left[1 - \left(\frac{1}{\rho_1 a_1^2} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_C + \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} \right)_C \right) (t_C - t_E) \right], \quad (38)$$

$$(C_2)_C = (C_2)_E \left[1 - \left(\frac{1}{\rho_2 a_2^2} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_C + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} \right)_C \right) (t_C - t_E) \right], \quad (39)$$

где производные $\left(\frac{\partial V_1}{\partial x} \right)_C$ и $\left(\frac{\partial V_2}{\partial x} \right)_C$ выражаются по формулам (30) или (34), а C_{1E} и C_{2E} – интерполяцией по соседним узлам А и В.

Для расчета концентраций в узловых точках на границе (типа точки К) справедливы также выражения типа (38), (39), но вместо точки Е следует использовать точку Р (рис. 5).

На базе изложенного метода разработан программный комплекс HydroWorks 3p, предназначенный для расчета динамики многофазных потоков. Комплекс совместим с САD-платформой SolidWorks 2010/2011 и поддерживает операционные системы Windows Vista (x32, x64) и Windows 7 (x32, x64). Пользователю предлагается два режима установки пакета: добавление (add-in) к SolidWorks и автономное (stand-alone) приложение, позволяющее производить расчет без наличия пакета SolidWorks. Приложение состоит из следующих модулей:

- расчетный модуль – библиотека классов (Dynamic-link library – dll), реализующая методику расчета динамики движения многофазных смесей, библиотека имеет открытый API-интерфейс и может быть интегрирована в другие САD/САЕ-системы;
- модуль-добавление (dll), интегрированный в среду SolidWorks;
- автономное Windows-приложение (executable – exe);
- визуализатор (dll). Формирование отчетов, отображение графиков и таблиц.

Среди основных функциональных возможностей приложения можно выделить:

- построения сложных параметрических трубопроводных систем;

Усреднения та транспортування

- полное интегрирование со средой SolidWorks;
- сохранение результатов во внешние форматы (excel, word, txt).

Пользователю предлагается простой, интуитивно понятный пользовательский интерфейс. Процесс расчета можно разделить на несколько шагов:

- проектирование трубопроводной системы (добавления патрубков, элементов запорной арматуры, насосов и т.д.);
- определение условий среды;
- определение параметров расчетной сетки (частота разбиения, шаги интегрирования);

– расчет;

– обработка результатов (построение таблиц, графиков, отчетов), поддержка 3D графического отображение результатов (только в среде SolidWorks). Позволяет отображать результаты исследования (скорости, давление, концентрации) в виде трехмерных эпюр непосредственно в графической области SolidWorks;

– оптимизатор. Инструмент, позволяющий выполнить несколько сценариев расчета, варьируя геометрическими параметрами трубопровода, расположением запорных арматур, режимами работы силовых агрегатов и др. В результате программа выдаст наиболее оптимальный вариант исходной схемы.

Научный результат. Разработан метод расчета динамики многофазных потоков в проточных частях глубоководных эрлифтных гидроподъемов, учитывающий при определении нестационарных расходных параметров потока взаимодействие полей распределения скоростей, давлений и концентраций фаз при изотермическом и адиабатном процессах расширения газовой фазы, а также влияние формы и концентрации твердых частиц на величину присоединенных масс. Высокая точность метода достигается за счет использования адекватной, физически обоснованной трехскоростной модели гетерогенного течения с наиболее полным учетом сил межфазного взаимодействия между несущей и дискретной фазами, и, прежде всего, сил инерционной природы, доминирующих при быстропротекающих динамических процессах.

Сформулированный научный результат позволяет сделать следующие *выводы*.

Разработан комбинированный метод расчета динамики многофазных потоков, представляющий собой комбинацию численного метода характеристик для решения гиперболической системы дифференциальных уравнений относительно скоростей и давлений, а также традиционного метода сеток для определения концентраций дискретных фаз. Метод базируется на универсальной многофункциональной математической модели и может быть обобщен практически на любые трубопроводные системы, транспортирующие многофазные многокомпонентные смеси.

На базе комбинированного метода разработано специальное программное обеспечение, представляющее собой набор прикладных динамических библиотек, предназначенный для расчета динамики многофазных потоков. Модуль

способен интегрироваться в САЕ-системы, наиболее удобной из которых является система COSMOS. Для работы в автономном режиме (executable), приложение оснащено интуитивно понятным графическим интерфейсом, позволяющим оперативно задавать исходные данные для расчета глубоководного гидроподъема.

Дальнейшим этапом работы является исследование на базе разработанного метода параметров нестационарных и переходных процессов в проточных частях глубоководных эрлифтных установок и разработка алгоритмов управления.

Список литературы

1. Кириченко Є.О. Наукове обґрунтування параметрів трубних систем для гідропідйому корисних копалин: Автореф. дис. ... доктора техн. наук. – Національна гірнична академія України. – Д., 2001.
2. Кириченко Е.А. Выбор и обоснование рациональных параметров глубоководной эрлифтной установки с учетом влияния питающей пневмосистемы: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. – Ин-т геотехнической механики. – Д., 1989.
3. Кириченко В.Е. Обоснование параметров глубоководных эрлифтов с учетом переходных процессов: Дис. ... канд. техн. наук 05.06.06. – Д., 2009. – 176 с.
4. Чарный И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. – М.: Недра, 1975. – 296 с.
5. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. – М.: Наука, 1987, ч. 1. – 464 с.
6. Картвелишвили Н.А. Динамика напорных трубопроводов. – М.: Энергия, 1979. – 224 с.
7. Махарадзе Л.И., Кирмелашвили Г.И. Нестационарные процессы в напорных гидротранспортных системах и защита от гидравлических ударов. – Тбилиси: Мецниереба, 1986. – 152 с.
8. Фокс Д.А. Гидравлический анализ неустановившегося течения в трубопроводах. – М.: Энергоиздат, 1981. – 248 с.
9. Вуд А. Звуковые волны и их применение. – М.-Л.: Гостехтеоретиздат, 1934. – 284 с.
10. Уоллис Г. Одномерные двухфазные течения. – М.: Мир, 1972. – 440 с.
11. Разработка многофункциональной динамической модели многофазной среды применительно к эрлифтному гидроподъему / О.Г. Гоман, Е.А. Кириченко, В.Е. Кириченко, А.В. Романюков // Науковий вісник НГУ. – Дніпропетровськ: НГУ. – 2008. – №8. – С. 89-93.
12. К вопросу разработки численного метода для расчета динамики многофазных потоков
13. Определение скорости распространения волн давления в элементах глубоководного эрлифтного гидроподъема / О.Г. Гоман, Е.А. Кириченко, В.Е. Кириченко [и др.] // Науковий вісник НГУ. – 2008. – №9. – С. 77-81.

© Кириченко Е.А., Шворак В.Г., Кириченко В.Е., Романюков А.В., Татуревич А.А., 2011

*Надійшла до редколегії 08.04.2011 р.
Рекомендовано до публікації д.т.н. В.І. Самусею*