МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

В.В. Фомичов
В.М. Почепов
Л.Я. Фомичова

МАТЕМАТИКА 2

Теорія ймовірностей

Навчальний посібник

Дніпро
НТУ «ДП»
2018

УДК 519.21(075.8)
Ф 42

Рекомендовано вченою радою університету як навчальний посібник для студентів спеціальності 184 Гірництво (протокол № 2 від 13.03.2018).

Рецензенти:
Т.С. Кагадій − д-р фіз.-мат. наук, проф. Національного технічного університету «Дніпровська політехніка», проф. кафедри вищої математики;
О.М. Кузменко − д-р тех. наук, проф. Національного технічного університету «Дніпровська політехніка», проф. кафедри підземної розробки родовищ.

Фомичов В.В.
Ф 42 Математика 2. Теорія ймовірностей : навч. посіб. / В.В. Фомичов, В.М. Почепов, Л.Я. Фомичова ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро: НТУ «ДП», 2018. – 80 с.

ISBN 978–966–350–679–1

Викладено набір загальних теоретичних принципів та положень теорії ймовірностей. Розв’язання типових завдань характеризуються високим науково-методичним рівнем та продуманою логічною послідовністю. Достатня кількість задач для самостійної роботи дозволяє використовувати посібник для всіх видів занять.

УДК 519.21(075.8)

ISBN 978–966–350–679–1

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Даний посібник являє собою систематичне викладання основ теорії ймовірностей та містить багато прикладів розв’язання задач, що потребують використання ймовірнісних методів та належать до різних галузей знань.

Робота написана на базі лекцій, що пропонувалися студентам електротехнічного та гірничого факультетів НГУ, містить теорію, приклади і задачі для самостійного розв’язування та відрізняється доступною по можливості строгою мовою, що, безумовно, полегшить студентам освоєння цієї дисципліни.

Мета цієї розробки – допомогти студентові у випадках, коли він не встиг законспектувати матеріал лекції або пропустив лекцію, або йому важко розібратися в науковій літературі щодо деяких питань, або він обмежений за часом при вивченні матеріалу.

Предмет теорії ймовірностей

На практиці часто зустрічаються такі ситуації, у яких результат дії не визначено однозначно.

Наприклад. 1. Одне й те саме тіло декілька разів зважують на аналітичних вагах. Результат повторних зважувань трохи відрізняється один від одного. Ці відмінності зумовлені впливом багатьох факторів, що супроводжують зважування, таких як розташування тіла на вагах, випадкові вібрації апаратури, помилки відліку показників прибору і т. ін.

2. Літак летить на заданій висоті, теоретично він летить горизонтально та рівномірно. Фактично політ супроводжується відхиленнями центру маси літака від теоретичної траєкторії та коливаннями літака навколо центра маси. Ці коливання та відхилення − випадкові: від разу до разу вони не повторюються.

Досконально відомо, що в природі нема жодного явища, в якому не були б присутні в тій чи іншій мірі випадковості.

Але випадкові явища являють собою інтерес не тільки тому, що вони − неминучі супутники будь-якого виміру. Існує багато ситуацій, коли випадковість виступає не як приправа до основної закономірності, а й сама є головною діючою особою. Врахування випадковості в цьому випадку − єдина можливість вивчити явище та виявити приховані в ньому закономірності.

Наприклад. 1. Вживання деякого препарату інколи вгамовує головний біль, а інколи ніякої дії не чинить. Результат кожного випробування − випадковість. Але, якщо позитивний ефект спостерігається у 80 % випадків, то дія препарату ─ закономірність і його можна використовувати як ліки.

2. Неможливо передбачити, який бік монети буде зверху під час її підкидання. На результат цього експерименту впливає величезна кількість факторів, таких як початкове положення монети, початкова швидкість, опір повітря, особливості поверхні, на яку падає монета та ін.

Може показатися, що в подібних задачах нічого певного сказати неможна, але навіть звичайна ігрова практика показує протилежне: при великій кількості підкидань монети приблизно в половині випадків випадає «герб», а в половині — «решітка». А це вже певна закономірність і в одному експерименті її виявити не можливо.

3. Тиск газу зумовлено ударами молекул об стінку посудини. Кожна молекула має випадкову траєкторію. Але тиск газу на всі стінки посудини однаковий та підкорюється цілком певній закономірності.

Виявлення в хаосі випадковостей прихованих закономірностей — важна задача науки. Розділ математики, у якому розробляються методи вивчення закономірностей **масових** випадкових явищ, називається **теорією ймовірностей**.

Історичні відомості

У 1663 році Блез Паскаль (1623 −1662) мандрує по Франції. Один з його супутників, кавалер де Мере, людина світська та шанувальник азартних ігор, звертається до Паскаля з двома задачами: 1) при якій кількості кидків гральної кості шанси на появу хоч би в одному випадку «6» будуть вище шансів на те, що вона не з'явиться жодного разу? Таке саме питання для двох кісток с двома «6»; 2) два гравця роблять грошові ставки та домовляються зіграти низку партій. Гравець, який першим виграє певну кількість партій, наприклад 6, забирає всі гроші. З якихось причин гра обірвалася в той момент, коли один гравець виграв 5 разів, а інший – 3. Як тепер справедливо розділити між ними гроші, що залишились у банку?

Паскаль листується з видатним математиком Франції того часу Ферма (1601 − 1665). В листах 1654 року обидва вчених обговорюють задачі де Мере. Під час обговорення складаються основні поняття та підходи до розв'язання ймовірнісних задач. Саме так закладалася база майбутньої теорії ймовірностей.

Задачі, що мають відношення до азартних ігор, завжди цікавили вчених. Таким задачам присвячувалися спеціальні дослідження. Наприклад, «Книга об игре в кости» − Д. Кардано (1501 −1576) написана в 1526 році, а видана лише у 1663-му. «О выходе очков при игре в кости» − Г. Галілея (1564 − 1642) видана у 1718 році . «О расчете в азартных играх» − Х. Гюйгенса (1629 − 1695) побачила світ у 1657 році.

Не азарт гравця і не прагнення стати заможним керувало вченими. Вони розуміли, що задачі, які мають зв'язок з іграми – лише зручні моделі випадкових явищ, що виконують важливу роль як у науці, так і в житті кожної людини. Ще Галілей чітко усвідомлював, що будь-який вимір містить випадкову помилку, отже, випадковість треба вивчати. Гюйгенс у передмові до своєї книги писав: «Я вважаю, що під час уважного вивчення предмету читач помітить, що має справу не тільки з грою, але що тут закладається база дуже цікавої та глибокої теорії».

Головним стимулом у розвитку теорії ймовірностей стала необхідність в обробці статистичних даних. Відомості про чисельність населення, про кількість зібраного врожаю хліба, про податки складалися ще у стародавніх Єгипті, Греції, Римі. З XVI століття в Англії фіксуються відомості смертності населення із зазначенням причин. З розвитком торгівлі та грошового обігу з'являється страхування. З початку страхували морські перевезення в Італії та Нідерландах в XIV столітті, а потім й інші його види в різних країнах.

У XVII столітті з початком промислової революції розвиваються експериментальні науки. Статистичні дані в цих науках поєднуються з вимірюванням тих або інших величин. Задачі про оцінку випадкових помилок, що з'являються під час спостережень, становлять першорядне значення.

Потреби практики відкрили перед теорією ймовірностей широке поле діяльності, постановкою цілого ряду задач зумовили її розвиток, вдихнули в неї життя, перетворили її на науку.

Якщо б сфера застосування теорії ймовірностей виявилася обмеженою азартними іграми, то вона була б математичною забавою і не більше.

Але доля її склалася інакше.

Десятки наук зобов'язані теорії ймовірностей своїми важливими досягненнями. Серед цих наук фізика, геодезія, теорія вимірів, астрономія, генетика, наука про Землю, теорія стрільби, радіолокація, теорія автоматичного регулювання та керування, теорія масового обслуговування, інформатика, медицина, будь-які економічні науки, космонавтика, воєнна наука і т. ін.

Видатні математики брали участь у розробці теорії ймовірностей. Перш за все це Паскаль, Ферма, Гюйгенс, Яков Бернуллі, Муавр, Лаплас, Гаусс, Пуассон. Великий внесок зробили і російські математики ─ Чебишов, Марков, Ляпунов, Бернштейн, Хінчин, Колмогоров та багато інших.

Ми не змогли б дати відповідь на запитання: «Яку кількість телефонних ліній треба прокласти до обласного центру?», якщо б ми не володіли теорією ймовірностей. Заздалегідь неможна уявити кількість викликів та в який час вони надійдуть в обласний центр. Якщо телефонних ліній прокласти дуже мало, то не можна додзвонитися, якщо дуже багато, то частина телефонної мережі буде простоювати, тобто затрати на організацію зв'язку будуть завищеними.

З аналогічними проблемами ми стикаємося і у розв'язанні транспортних задач. Як організувати роботу порту? Скільки треба вантажно-розвантажувального обладнання? Адже судна, що виконують дальні рейси не можуть витримувати точний розклад руху (погодні умови, зіпсування і т. ін), тому прихід їх у порт теж належить до категорії випадкових подій. І планування обладнання порту повинно будуватися відповідно до висновків теорії ймовірностей, для того щоб не було простою ні суден, ні обладнання.

Велика кількість ймовірнісних задач з'являється при постановці експерименту та в плануванні. Скільки експериментів треба зробити, щоб висновки з них були достовірні? Якщо їх надто мало, то виникає сумнів, що результати правдиві. Звичайно, чим більше експериментів, тим більш надійні зроблені з них висновки. Але скільки треба зробити експериментів для отримання надійних висновків? Адже кожен експеримент − це витрачені гроші та час, і тут не повинно бути перевитрачання. На допомогу знову приходить теорія ймовірності, даючи рекомендації, що зумовлюють необхідну кількість експериментів для отримання надійних результатів.

Розділ 1. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

1.1. Простір елементарних подій

Множини. Початковим поняттям теорії ймовірностей є поняття ймовірнісного простору або математичної моделі явища, яке вивчається.

Оскільки під час опису явищ будемо використовувати теоретико-множинну термінологію, зупинимося на елементарних відомостях з теорії множин.

Множиною називається будь-яка сукупність різних об'єктів довільної природи, кожен з яких називається **елементом множини**.

Множини бувають **скінченні** та **нескінченні**.

Якщо всі елементи множини можна розташувати в який-небудь послідовності, тобто перенумеровати, то вона буде **зліченною**, інакше — **незліченною**. Якщо елемент a належить множині A, то пишуть $a \in A$.

Дві множини A та B **рівні**, якщо вони складаються з одних і тих же елементів. Множина B буде підмножиною A, якщо усі елементи B містяться також і в A ($B \subseteq A$).

Наприклад. Натуральні числа від 1 до 100 утворюють скінченну, зліченну множину $M = \{1, 2, ..., 100\} = \{i - ціле, 1 \le i \le 100\}$. Натуральні числа утворюють нескінченну, незліченну множину $N = \{1, 2, ..., n, ...\}$. Усі елементи множини M одночасно є елементами множини N, тому M − підмножина N і пишуть $M \subset N$.

Порожньою множиною називається та, яка не містить жодного елемента. Вона позначається символом $\varnothing$.

Об'єднанням множин A та B називається множина $C = A \cup B$, яка складається з усіх елементів множин A та B.

Перетином множин A та B називається множина $D = A \cap B$, кожен елемент якої є як елементом A, так і елементом B.

Класифікація подій. Кожне явище в природі, виробництві, громадському житті відбувається при певних умовах.

Відтворювана сукупність умов, при яких спостерігається те чи інше явище, фіксується той чи інший результат, називається **експериментом, випробуванням**, **дослідом**.

Наслідок експерименту називається **подією**.

Наприклад, експеримент – підкидання монети; подія – випадіння «герба».

Експеримент називається **випадковим**, якщо його результат неможна передбачити до його здійснення.

Будь-яке випробування з випадковим результатом називається **випадковою подією**.

Наприклад, випробування – кидання гральної кості. Випадкова подія – випадіння цифри «5».

Якщо поява певного результату експерименту виключає появу іншого результату, то кажуть про **взаємовиключні події**.

Наприклад, з колоди карт виймають одну карту. Подією такого експерименту може бути поява туза або шестірки, або дами – все це взаємовиключні події.

Розрізняють елементарні події та складені.

Нерозкладні, взаємовиключні результати випадкового експерименту називають **елементарними подіями**.

Усі інші називають **складеними**.

Наприклад, подія, яка полягає в тому, що сума цифр, які випали під час кидання двох гральних костей, дорівнює шести буде складеною. Вона складається з п'яти можливих елементарних подій – випадіння на гранях костей таких пар цифр: (1;5), (2;4), (3;3), (4;2), (5;1).

У математичній моделі всі можливі елементарні події в умовах даного експерименту подаються елементами ω_i деякої непустої множини Ω. Цю множину називають **простором елементарних подій**.

При такій інтерпретації подія – це певна множина A, яка має бути підмножиною множини Ω ($A \subseteq \Omega$) та складається з елементарних подій ω_i. Кажуть, що подія A відбулася, якщо результат експерименту ω_i належить множині A ($\omega_i \in A$).

Події в реальному світі поділяються на **достовірні**, **неможливі** та **випадкові**.

Достовірна подія − це кожен факт, який наступає в результаті будь-якого випробування, вона формально ототожнюється з усім простором Ω, **неможлива** подія трактується як порожня множина, яка не містить жодного ω_i та позначається символом $\varnothing$.

Випадкова подія це будь-який факт, який у випробуванні з випадковим результатом може здійснитися або не здійснитися.

Події будемо позначати великими буквами: A, B, C. …

Наприклад, під час кидання двох гральних костей простором елементарних подій Ω буде множина з 36 пар цифр: (1;1), (1;2), …, (2;1), …, (6;5), (6;6). Елементарною подією ω_i цього простору буде будь-яка пара цифр. Підмножина $A = \{(1;5),(2;4),(3;3),(4;2),(5;1)\}$ цього простору – складена подія, яка полягає в випадінні в сумі шести очок на двох костях. Отже, подія A відбулася, якщо при киданні двох костей сума цифр, які випали дорівнює 6.

Приклад 1. Експеримент полягає в киданні кості один раз. Нехай ω_i – кількість очок, що випали на грані, яка знаходиться зверху. Описати простір елементарних подій Ω та вказати склад підмножин, що відповідають подіям: $A = \{\omega_i$ буде кратним $3\}$; $B = \{\omega_i -$ непарне$\}$; $C = \{\omega_i -$ дробове$\}$.

Розв'язання: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$; $A = \{3,6\}$; $B = \{1,3,5\}$; $C = \{\varnothing\}$.

Події називаються **несумісними**, якщо поява одного з них вилучає появу інших подій в умовах одного і того ж випробування.

Наприклад, з урни, в якій знаходяться 10 білих, 7 синіх, 5 червоних кульок виймають одну кульку. Тоді поява синьої кульки, поява червоної кульки, поява білої – несумісні події.

Подія $\overline{A}$, яка обов'язково відбудеться, якщо не відбудеться подія A, називається **протилежною** до події A.

Наприклад, $A = \{$виграш у лотереї$\}$ та $\overline{A} = \{$програш у лотереї$\}$ – події протилежні.

Декілька подій в умовах даного експерименту утворюють **повну групу подій**, якщо в результаті випробування обов'язково відбудеться хоча б одна з них.

Наприклад, по мішені два рази стріляють, в результаті можуть відбутися події: $A = \{$два влучення$\}$; $B = \{$два промаху$\}$; $C = \{$одне влучення, один промах$\}$, які утворюють повну групу подій. Інший приклад, в урні дві білі та три чорні кульки. Подія $A = \{$поява **хоч би** однієї білої$\}$ та $B = \{$поява **хоч би** однієї чорної кульки$\}$ під час виймання двох кульок з урни також утворюють повну групу подій.

Поява слів «**хоч би**» в події B вказує на те, що з'явиться одна чорна або дві чорні кульки.

Якщо різні результати випробування будуть об'єктивно однаково можливими, то кажуть, що випробування має **симетрію**.

Рівноможливими подіями називаються декілька подій, якщо за умови симетрії є можливість вважати, що ні одна з них не буде об'єктивно більш можлива.

Наприклад, випадіння «герба», випадіння «решітки» при підкиданні симетричної «правильної» монети; випадіння картки з буквою «А», «Ф», «Ш» при вийманні однієї з ретельно перемішаних карток дитячої азбуки.

Зауважимо, що рівноможливість подій у кожному з цих випробувань забезпечується спеціальними заходами (симетричне виготовлення монети, кості, ретельне перемішування кульок, карток і т. ін.).

Алгебра подій. В математичній моделі події – це множини, тому над подіями можливо виконувати дії, що відповідають діям над множинами.

Для наочності виконання дій над подіями зручно використати діаграму Венна, у якій Ω зображується частиною площини; ω_k – точками цієї площини, що лежать всередині Ω (рис. 1.1, а); A – певні сукупності точок ω_k зображають у вигляді деяких фігур (рис. 1.1, б).

Різні співвідношення між подіями зображено у вигляді фігур, що лежать усередині прямокутника Ω, який умовно зображає простір елементарних подій.

Сумою подій $A + B$ (об'єднанням множин $A \cup B$) називається подія C, яка полягає в появі принаймні однієї з подій A або B (рис. 1.1, в).

Наприклад, нехай $A = \{$випадіння непарного числа при киданні кості$\}$, $B = \{$випадіння числа кратного числу три$\}$, тоді $A = \{1;3;5\}, B = \{3;\ 6\}$. Отже, $A \bigcup B = \{1;3;5;6\}$.

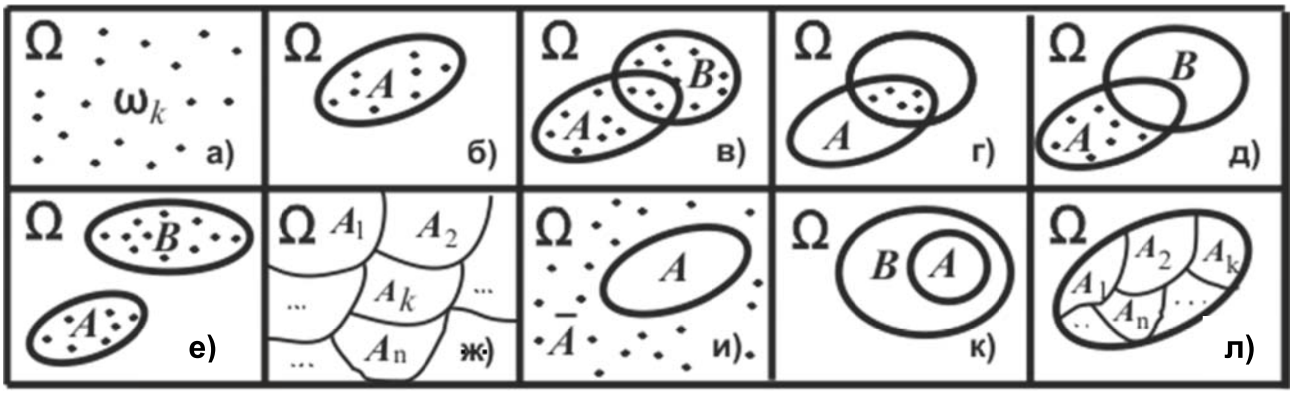


Рис. 1.1

Добутком подій AB (перетином множин $A \bigcap B$) називається подія C, яка полягає в одночасній появі подій A та B (рис. 1.1, г).

Наприклад, за умовою попереднього прикладу маємо $A \bigcap B = \{3\}$.

Різницею подій $A \setminus B$ (різницею множин $A \setminus B$) називається подія C, яка полягає в появі події A та не появі події B (рис. 1.1, д).

Наприклад, за умови попереднього прикладу маємо $A \setminus B = \{1;5\}$.

Події A та B називаються **несумісними**, якщо $AB = \varnothing$. Таким подіям відповідають множини, що не перетинаються (рис. 1.1, е).

Наприклад, з колоди карт виймають дві карти. Нехай подія $A = \{$витягли два тузи$\}$, $B = \{$витягли валета і даму$\}$. Ці події не можуть відбутися одночасно – вони несумісні.

Події $A_1, A_2, ..., A_n$ утворюють **повну групу** подій, якщо $A_i A_j = \varnothing$, $(i \neq j)$ та $A_1 + A_2 + ... + A_n = \Omega$ (рис. 1.1, ж).

Наприклад, студент під час іспиту може отримати одну з оцінок $A_1 = \{2\}$, $A_2 = \{3\}$, $A_3 = \{4\}$, $A_4 = \{5\}$. Ці події утворюють повну групу подій, тому що вони попарно несумісні ($A_i A_j = \varnothing$, $(i \neq j)$), та більше ніяких подій не може відбутися, тобто $A_1 + A_2 + ... + A_n = \Omega$.

Подія $\overline{A}$ називається **протилежною** події A, якщо $A\overline{A} = \varnothing$ та $A + \overline{A} = \Omega$ (рис. 1.1, и).

Наприклад, під час замикання вимикача $A = \{$лампочка загорілася$\}$, $\overline{A} = \{$лампочка не загорілася$\}$ – ці події протилежні, тому що вони несумісні ($A\overline{A} = \varnothing$) та утворюють повну групу подій $A + \overline{A} = \Omega$.

Якщо кожна поява події A супроводжується появою події B або A є окремим випадком B, або B – це наслідок події A, то пишуть $A \subset B$ та кажуть, що A тягне за собою B. Якщо $A \subset B$, то кожна елементарна подія, яка входить до A, входить і в подію B (рис. 1.1, к).

Наприклад, виконується стрільба по мішені: нехай подія $B = \{$стрілець влучив у мішень$\}$, $A = \{$стрілець влучив у десятку$\}$. Очевидно, що поява події A тягне за собою появу події B.

Якщо A розпадається на декілька множин, що не перетинаються, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то ці підмножини називають **варіантами** події A (рис.1.1, л).

Наприклад, при масовому виготовленні деяких деталей на токарному верстаті може відбутися подія: $A = \{$деталь виявилася з браком$\}$. Позначимо через A_1 ={брак за провиною робітника}, через A_2={брак унаслідок зіпсування верстака}, A_3={брак із-за неякісного матеріалу}. Тоді $A_1 A_2 = \varnothing$, $A_1 A_3 = \varnothing$, $A_2 A_3 = \varnothing$ $A_1 + A_2 + A_n = A$, тобто A_1, A_2, A_3 – варіанти події A.

Введені дії підкоряються таким правилам: **1.** $A \bigcup A = A$; **2.** $A \bigcap A = A$; **3.** $A \bigcup B = B \bigcup A$; **4.** $A \bigcap B = B \bigcap A$; **5.** $A \bigcup \Omega = \Omega$; **6.** $A \bigcup \varnothing = A$; **7.** $A \bigcap \Omega = A$; **8.** $A \bigcap \varnothing = \varnothing$; **9.** $\overline{\overline{A}} = A$; **10.** $\overline{\Omega} = \varnothing$, $\overline{\varnothing} = \Omega$; **11.** $A \bigcup \overline{A} = \Omega$; **12.** $A \bigcap \overline{A} = \varnothing$; **13.** $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$; **14.** $\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$; **15.** $A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C$; **16.** $A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C$; **17.** $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$; **18**. $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$.

Приклад 2. Довести рівність $(A + B)C = AC + BC$.

Розв'язання. Нехай довільна елементарна подія ω належить події $(A + B)C$. Це означає, що $\omega \in C$ та належить принаймні одній з подій A або B. Але тоді ω належить хоча б одній з подій AC або BC, тому $\omega \in AC + BC$.

Навпаки, нехай $\omega \in AC + BC$, це означає, що $\omega \in AC$ або $\omega \in BC$, з чого випливає, що $\omega \in C$ та належить щонайменше одній з подій A чи B, тобто $\omega \in (A + B)C$.

Таким чином, тотожність правої та лівої частин даної рівності доведено.

Приклад 3. Довести, що події A, $\overline{A}B$, $\overline{A \bigcup B}$ утворюють повну групу подій.

Розв'язання. Дані події будуть утворювати повну групу, коли їх сума буде дорівнювати Ω, а попарні перерізи подій − $\varnothing$. Якщо врахувати, що $\overline{A \bigcup B} = \overline{A}\,\overline{B}$ (правило де Моргана), то дістанемо:

$$A + \overline{A}B + \overline{A \bigcup B} = A + \overline{A}B + \overline{A}\,\overline{B} = A + \overline{A}(B + \overline{B}) = A + \overline{A}\Omega = A + \overline{A} = \Omega;$$

$$A(\overline{A}B) = (A\overline{A})B = \varnothing B = \varnothing; \qquad A \bigcap \overline{A \bigcup B} = A(\overline{A}\,\overline{B}) = (A\overline{A})\overline{B} = \varnothing\overline{B} = \varnothing;$$

$$(\overline{A}B) \bigcap \overline{A \bigcup B} = (\overline{A}B) \bigcap \overline{A}\,\overline{B} = (\overline{A}\,\overline{A}) \bigcap (B\overline{B}) = \overline{A}\varnothing = \varnothing.$$

Приклад 4. Електричне коло складено за схемою, наведеною на рис. 1.2. Подія $A_k = \{$елемент з номером k зіпсувався$\}$, $k = \overline{1,4}$. Подія $B = \{$розрив кола$\}$. Записати подію B в алгебрі подій A_1, A_2, A_3, A_4.

Розв'язання. Коло розірвано, якщо зіпсується перший або четвертий елемент, або другий та третій сумісно. Для того, щоб зіпсувалися сумісно другий та третій елементи повинна відбутися подія $A_2 \bigcap A_3$. Отже, подія B трапиться, якщо виконається хоч би одна з умов A_1, $A_2 \bigcap A_3, A_4$. Остаточно, $B = A_1 + (A_2 \bigcap \bigcap A_3) + A_4$.

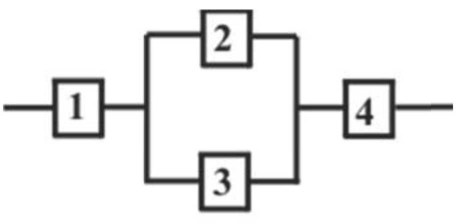


Рис.1.2

Приклад 5. Зроблено три постріли з гармати по мішені. Подія $A_k = \{$попадання при k-му пострілі$\}$, $k = 1,2,3$. Описати простір елементарних подій. Записати в алгебрі подій такі події: $A = \{$рівно одне попадання$\}$; $B = \{$хоч би одне попадання$\}$; $C = \{$хоч би один промах$\}$; $D = \{$не менше двох влучень$\}$; $F = \{$влучення не раніше, ніж при третьому пострілі$\}$.

Розв'язання:

$$\Omega = \{\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3},\ A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3},\ \overline{A_1}A_2\overline{A_3},\ \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3,\ A_1A_2\overline{A_3},\ A_1\overline{A_2}A_3,\ \overline{A_1}A_2A_3,\ A_1A_2A_3\};$$

$$A = \{A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\}; \qquad B = \{A_1 + A_2 + A_3\} = \overline{\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}};$$

$$C = \{\overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3}\} = \overline{A_1A_2A_3}; \qquad D = \{A_1A_2\overline{A_3}, + A_1\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}A_2A_3 + A_1A_2A_3\};$$

$$F = \{\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\}.$$

Приклад 6. Експеримент полягає в радіолокаційному виявленні повітряної цілі. Спостережуваний результат – положеня світлої плями на екрані індикатора цілі, що має форму кола радіусом 10 см, в декартовій системі координат, початок якої збігається с центром екрана. Описати простір елементарних подій та підмножини, що відповідають подіям: $A = \{$ціль знаходиться у першому квадранті$\}$; $B = \{$ціль знаходиться у колі радіусом 5 см, центр якого збігається з центром екрана$\}$.

Розв'язання. Зручною формою математичного опису елементарної події в даному випадку будуть координати випадкової точки на площині, яка відповідає центру плями. Таким чином, множина Ω неперервна та може бути записана у вигляді $\Omega = \{x, y \mid x^2 + y^2 \le 100\}$. Підмножини, рівнозначні зазначеним подіям, мають вигляд:

$$A = \{x, y \mid x^2 + y^2 \le 100,\ x > 0,\ y > 0\}; \qquad B = \{x, y \mid x^2 + y^2 < 25\}.$$

Приклад 7. Експеримент – прибуття потягу до визначеної станції у зазначений у розкладі час прибуття t_0. Фактично потяг може запізнитися. Подія A полягає в тому, що потяг запізниться не більше ніж на τ хвилин. Описати Ω та A.

Розв'язання. Зобразимо умови задачі схематично (рис. 1.3) та, виходячи з цього, дістанемо $\Omega = \{t_0 \le t \le \infty\}$, $A = \{t_0 \le t \le t_0 + \tau\}$, $A \subseteq \Omega$.

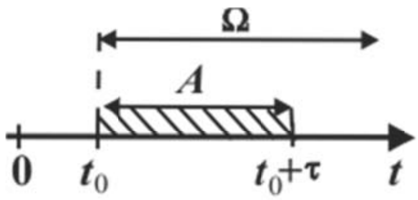


Рис. 1.3

Завдання для самостійної роботи

У задачах 1 − 3 побудувати простір елементарних подій Ω за описом експерименту та скласти підмножини, які відповідають зазначеним подіям.

1. Монету підкинемо три рази підряд, результат, що спостерігається − «герб» або «решітка», які випадають у перший, другий та третій раз. Подія A полягає в тому, що випало не менше двох «гербів».

2. В урні 3 білих та 4 чорних кульки. Наугад витягають одну кульку. Подія A полягає в тому, що кулька, яку витягли має білий колір.

3. Відбувається матч з футболу між командами «Шахтар» та «Дніпро». Події, що цікавлять: $A=\{$перемогла команда «Дніпро»$\}$; $B=\{$перемогла одна з команд$\}$; $C=\{$перемогла команда «Шахтар» з рахунком 3:1$\}$; $D=\{$під час гри забито не менше трьох голів$\}$.

4. Довести правильність таких рівностей: а) $\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}$;
б) $\overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$; в) $A\setminus B=A\bigcap\overline{B}$.

5. Використовуючи властивості операцій над множинами, спростити вираз $(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup\overline{B})\bigcap(\overline{A}\bigcup B)$.

6. Чи складають повну групу події: $A\bigcap\overline{B}$, $\overline{A}\bigcap B$, $A\bigcap B$, $\overline{A}\bigcap\overline{B}$?

7. Подія B виявляється окремим випадком події A. Вказати їх суму та добуток.

8. Нехай на площину наугад кидається точка і нехай події полягають у тому, що ця точка потрапляє відповідно в коло A; в коло B. Який сенс мають події: $\overline{A}$; $\overline{B}$; $A\bigcup B$; $\overline{A\bigcup B}$; $\overline{A\bigcap B}$?

9. Нехай A, B, C – три події, що спостерігаються в експерименті. Записати такі події в алгебрі подій: а) відбулася принаймні одна з подій A, B, C; б) відбулося рівно дві події з трьох; в) відбулося не менше двох подій; г) жодної події не відбулося; д) відбулося не більше двох подій; е) відбулися події A та B, але C не відбулася.

10. Електричне коло складено за схемою, наведеною на рис. 1.4. Подія $A_k=\{$елемент з номером k зіпсувався$\}$, $k=\overline{1,5}$. Подія $B=\{$розрив кола$\}$. Записати подію B в алгебрі подій A_1, A_2, A_3, A_4, A_5.

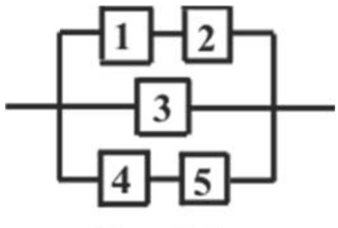


Рис.1.4

11. Нехай $A,B,C-$випадкові події. З'ясувати сенс рівностей: а) $ABC=A$; б) $A\bigcup B\bigcup C=A$.

12. Мішень складається з концентричних кіл радіусами r_i $(i=\overline{1,10})$, до того ж $r_1<r_2<\ldots<r_{10}$. Подія $A_i=\{$влучення в коло радіусом $r_i\}$. Що означають події а) $B=\sum_{i=1}^{6}A_i$; б) $C=\bigcap_{i=5}^{10}A_i$; в) $D=\overline{A_1}A_2$?

13. Ураження бойового літака може наступити в результаті влучення в обидва двигуна (події D_1 та D_2) або в кабіну пілота (подія K). Нехай $A=\{$ураження літака$\}$. Описати Ω. Записати в алгебрі подій подію A як за допомогою подій D_1, D_2, K, так і через елементарні події. Отримати з другого запису перший за допомогою припустимих алгебраїчних перетворювань.

Відповіді:

1. $\Omega=\{ГГГ, ГГР, ГРГ, РГГ, ГРР, РГР, РРГ, РРР\}$;
$A=\{ГГГ, ГГР, ГРГ, РГГ\}$.

2. $\Omega=\{Б1, Б2, Б3, Ч1, Ч2, Ч3, Ч4\}$, $A=\{Б1, Б2, Б3\}$.

3. Нехай x, y – відповідно кількість голів, забитих командами «Дніпро» та «Шахтар»; Z_0 – множина додатних чисел. Тоді $\Omega = \{(x, y) \mid x \in Z_0, y \in Z_0\}$, $A = \{(x, y) \mid x \in Z_0,\, y \in Z_0,\, x > y\}$, $C = \{(x, y) \mid x = 1, y = 3\}$, $D = \{(x, y) \mid x \in Z_0,$ $y \in Z_0,\, x + y \geq 3\}$, $B = \{(x, y) \mid x \in Z_0,\, y \in Z_0,\, x \neq y\}$. **5.** $A \bigcap B$. **6.** Так. **7.** $A \bigcup B = A$, $A \bigcap B = B$. **8.** $\overline{A}$={потрапляння в область, що лежить за колом A}; $\overline{B}$= {потрапляння в область, що лежить за колом B}; $A \bigcup B$= = {потрапляння в коло A або в коло B}; $\overline{A \bigcup B}$={потрапляння в область, що лежить поза обома колами}; $A \bigcap B$={потрапляння у спільну частину кіл}; $\overline{A \bigcap B}$ = {потрапляння в область, що лежить поза загальну частину кіл A та B}. **9. а)** ABC, $AB\overline{C}$, $A\overline{B}\,\overline{C}$, $\overline{A}B\overline{C}$, $\overline{A}BC$, $A\overline{B}C$, $\overline{A}\,\overline{B}C$; **б)** $AB\overline{C}$, $A\overline{B}C$, $\overline{A}BC$; **в)** ABC, $\overline{A}BC$, $A\overline{B}C$, $AB\overline{C}$; **г)** $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$; **д)** $\overline{A}BC$, $A\overline{B}C$, $AB\overline{C}$, $A\overline{B}\,\overline{C}$, $\overline{A}\,\overline{B}C$, $\overline{A}B\overline{C}$, $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$; **е)** $AB\overline{C}$. **10.** $B = (A_1 \cup A_2) \bigcap A_3 \bigcap (A_4 \cup A_5)$. **11. а)** $A \subseteq BC$; **б)** $B \subset A$ та $C \subset A$. **12. а)** влучення в коло радіусом r_6; **б)** влучення в коло радіусом r_5; **в)** влучення в кільце між колами з радіусами r_1 та r_2.

13. $\Omega = \{D_1D_2K, D_1D_2\overline{K}, D_1\overline{D_2}K, \overline{D_1}D_2K, \overline{D_1}\,\overline{D_2}K, \overline{D_1}D_2\overline{K},$ $D_1\overline{D_2}\,\overline{K}, \overline{D_1}\,\overline{D_2}\,\overline{K}\}$; $A = \{D_1D_2 + K\}$; $A = \{D_1D_2\overline{K}, D_1\overline{D_2}K, \overline{D_1}D_2K, D_1D_2K,$ $\overline{D_1}\,\overline{D_2}K\}$; враховуючи, що $D_1D_2K = \{D_1D_2K + D_1D_2K\}$, маємо $D_1D_2\overline{K} +$ $+ D_1\overline{D_2}K, + \overline{D_1}D_2K + D_1D_2K + \overline{D_1}\,\overline{D_2}K = D_1D_2\overline{K} + D_1\overline{D_2}K + \overline{D_1}D_2K + D_1D_2K +$ $+ D_1D_2K + \overline{D_1}\,\overline{D_2}K = D_1D_2(K + \overline{K}) + K(D_1\overline{D_2} + \overline{D_1}D_2 + D_1D_2 + \overline{D_1}\,\overline{D_2}) =$ $= D_1D_2\Omega + K(D_1(\overline{D_2} + D_2) + \overline{D_1}(D_2 + \overline{D_2})) = D_1D_2 + KD_1\Omega + K\overline{D_1}\Omega = D_1D_2 +$ $+ KD_1 + K\overline{D_1} = D_1D_2 + K(D_1 + \overline{D_1}) = D_1D_2 + K\Omega = D_1D_2 + K$.

1.2. Елементи комбінаторики

У теорії ймовірностей одна з найважливіших – це задача про обчислення кількості способів, за допомогою яких може здійснюватися деяка подія. У ймовірнісному просторі використовують комбінаторні методи обчислення кількості підмножин деякої множини.

Нехай треба з n елементів вихідної множини $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ скласти m-елементні підмножини. Для обчислення кількості підмножин важливо знати, яким способом утворюється вибір елементів для цих підмножин та що розуміється під різними підмножинами. Існує дві схеми: перша – вибір без повернення; друга – з поверненням. Після здійснення вибору, відібрані елементи (або їх номери) можуть бути упорядковані або ні. Отже, маємо такі випадки, обчислення кількості способів появи деякої події.

1. Якщо в експерименті вибираються m елементів без повернення та без упорядкування, то m-елементні підмножини множини E будуть мати **різний склад**. Комбінації елементів, які при цьому отримано (елементарні події)

називають **сполученням з n елементів по m**, а їх загальна кількість $N(\Omega)$ визначається за формулою:

$$N(\Omega) = C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad (1.1)$$

Слушні такі формули:

$$C_n^m = C_n^{n-m}; \quad C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}; \quad C_n^0 = 1; \quad C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Приклад 1. Кількома способами можна вибрати 5 ламп з 15?

Розв'язання. Маємо множину $E = \{Л_1, Л_2, \ldots, Л_{15}\}$, з елементів якої складаємо 5-елементні підмножини, що мають різний склад. За формулою (1.1) маємо $N(\Omega) = C_{15}^5 = \dfrac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 3003$.

2. Якщо в експерименті вибирають m елементів <u>без повернення</u>, але <u>з упорядкуванням</u>, то m-елементні підмножини множини E будуть мати **різний склад, або різний порядок розташування елементів**. Комбінації, які при цьому утворюються називаються **розміщеннями з n елементів по m**, а їх загальне число визначається за формулою

$$N(\Omega) = A_n^m = C_n^m m! = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (1.2)$$

Приклад 2. Скількома способами можна розподілити першу, другу та третю премії на конкурсі, у якому бере участь 20 конкурсантів?

Розв'язання. По-перше, треба обчислити, скількома способами можна вибрати три особи з 20 (C_{20}^3), а потім ще дізнатися, скількома способами розподілити між ними премії $(3!)$. Тоді згідно з формулою (1.2) маємо $N(\Omega) = A_{20}^3 = C_{20}^3 \cdot 3! = \dfrac{20!}{17!} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$.

3. Якщо в експерименті вибирається n елементів <u>без повернення</u>, але з <u>упорядкуванням</u>, то n-елементні підмножини множини E будуть мати тільки **різний порядок розташування елементів**. Отримані при цьому комбінації називаються **перестановками з n елементів**, а їх загальне число $N(\Omega)$ визначається за формулою

$$N(\Omega) = A_n^n = P_n = n! \qquad (1.3)$$

Приклад 3. Кількома способами 6 осіб можна розставити в ряд?

Розв'язання. Множина E містить 6 елементів та комбінації, що складено з цих елементів, теж містять по 6 елементів. Таким чином, маємо комбінації, які відрізняються тільки порядком розташування елементів. Отже, це перестановки. За формулою (1.3) маємо $N(\Omega) = P_6 = 6! = 720$.

Приклад 4. Кількома способами 6 осіб можна розсадити за круглим столом?

Розв'язання. У даному разі треба зафіксувати одну особу, а інших міняти місцями. Отже, перестановки будуть тільки серед 5 осіб, тому, враховуючи (1.3), маємо $N(\Omega) = P_5 = 5! = 120$.

4. Якщо в експерименті вибирають m елементів з поверненням, але без упорядкування, то m-елементні підмножини множини E будуть мати **різний склад, але всередині підмножин елементи можуть повторюватися**. Число таких підмножин можна обчислити за формулою

$$N(\Omega) = C_{n+m-1}^{m}. \tag{1.4}$$

Приклад 5. В урні лежать кульки семи кольорів. Кількома способами з урни можна дістати 4 кульки?

Розв'язання. Серед вибраних чотирьох різних кульок можуть бути і кульки одного кольору, тому за формулою (1.4), дістанемо $N(\Omega) = C_{7+4-1}^{4} = C_{10}^{4} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$.

5. Якщо в експерименті вибирають m елементів з поверненням та з упорядкуванням, то m-елементні підмножини множини E будуть мати **різний склад або різний порядок розташування**. При цьому всередині підмножин елементи можуть повторюватися. Число таких підмножин визначають за формулою

$$N(\Omega) = n^{m}. \tag{1.5}$$

Приклад 6. Кількома способами можна розмістити сім кульок у чотирьох урнах? (В одну урну можна покласти будь-яку кількість кульок).

Розв'язання. З множини E, елементами якої є чотири урни, формуються 7-елементні комбінації (кожна з семи кульок може потрапити в будь-яку урну). Схема з поверненням та з упорядкуванням, згідно з формулою (1.5) дістанемо $N(\Omega) = 4^7 = 16384$.

Нехай дано n множин $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$, які взагалі містять різну кількість елементів. Множина $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n \,|\, \omega_1 \in \Omega_1,\ \omega_2 \in \Omega_2, \ldots, \omega_n \in \Omega_n\}$ називається **прямим добутком множин** $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ та позначається $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n$. Число елементів прямого добутку множин обчислюється за формулою

$$N(\Omega) = N(\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n) = N(\Omega_1) \times N(\Omega_2) \times \ldots \times N(\Omega_n). \tag{1.6}$$

Приклад 7. У склад студентської ради факультету входять три першокурсника, п'ять другокурсників і сім третьокурсників. Кількома способами можна вибрати для участі в конференції одного першокурсника, двох другокурсників та двох третьокурсників?

Розв'язання. Маємо три множини, які складаються з елементів: $\Omega_1 = \{1П, 2П, 3П\}$, $\Omega_2 = \{1\ddot{A}, 2\ddot{A}, 3\ddot{A}, 4\ddot{A}, 5\ddot{A}\}$, $\Omega_3 = \{1T, 2T, 3T, 4T, 5T, 6T, 7T\}$. Тоді множиною $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3 \,|\, \omega_1 \in \Omega_1,\ \omega_2 \in \Omega_2, \omega_3 \in \Omega_3\}$ описується склад учасників конференції, а число всіляких складів учасників конференції за формулою (1.6) буде $N(\Omega) = N(\Omega_1) \times N(\Omega_2) \times N(\Omega_3) = C_3^1 C_5^2 C_7^2 = 630$.

1.3. Класична модель

Для кількісного опису міри об'єктивної можливості появи тієї чи іншої події введемо спеціальну числову функцію $P(A)$, яку називають **імовірністю події** A.

Поняття ймовірності події пов'язано з частістю її появи. Чим частіше з'являється подія, тим вища її ймовірність. Проте треба встановити одиницю виміру ймовірності.

За таку одиницю беруть ймовірність достовірної події $P(\Omega)$, наприклад, ймовірність події $\Omega = \{$випало не більше 6 очок при киданні гральної кості$\}$ дорівнює одиниці $(P(\Omega)=1)$.

Неможливій події $\varnothing = \{$випало 12 очок, при киданні однієї кості$\}$ приписують нульову ймовірність $(P(\Omega)=0)$.

Тоді всі інші події можливі, але недостовірні будуть характеризуватися ймовірностями, які лежать між нулем та одиницею. Якщо подія A має місце, її ймовірність $P(A)$ задовольняє умову

$$\boxed{0 \le P(A) \le 1}. \qquad (1.7)$$

Існує клас експериментів, для яких імовірності їх можливих результатів можна обчислити безпосередньо виходячи із самих умов випробування. Для цього треба, щоб результати були симетричними і тому вони були б об'єктивно однаково можливими. Ймовірність таких подій обчислюється за **формулою класичної ймовірності**:

$$\boxed{P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}} \quad \text{або} \quad \boxed{P(A) = \frac{m_a}{n}}, \qquad (1.8)$$

де $N(\Omega)$ або n – загальне число випадків;

$N(A)$ або m_a – число випадків, сприятливих події A.

Випадок називається **сприятливим події** A, якщо поява цього випадку тягне за собою появу даної події.

Приклад 1. В урні 10 занумерованих кульок. Витягуємо дві кульки. Знайти ймовірність того, що кульки, які витягнули, будуть мати номери 5 та 7?

Розв'язання. Маємо схему без повернення та без упорядкування, тоді $N(\Omega) = C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$ і $P(A) = \frac{1}{45}$ (вказаній події сприяє один результат).

Приклад 2. В урні знаходяться 10 білих та 5 чорних кульок. Знайти ймовірність того, що а) з витягнутих трьох кульок хоч би одна була чорною; б) з витягнутих п'яти кульок дві будуть чорними.

Розв'язання: $E = \{Á1, Á2, \ldots, Á10, \times 1, \times 2, \ldots, \times 5\} = E_1 + E_2 = \{Á1, Á2, \ldots, Á10\} + \{\times 1, \times 2, \ldots, \times 5\}$.

а) Згідно з описом експерименту проводиться вибір без повернення та без упорядкування трьох елементів з множини E, тому $N(\Omega) = C_{15}^3 = 455$. Для знаходження числа сприятливих випадків події $A = \{$з витягнутих трьох кульок хоч би одна була чорна$\}$ вигідно перейти до протилежної події $\overline{A} = \{$усі кульки білі$\}$. Тоді $N(\overline{A}) = C_{10}^3 = 120$ та $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{120}{455} = \frac{67}{91}$.

Перехід до протилежної події здійснюється тоді, коли вона розпадається на менше число варіантів, ніж подія, яка нас цікавить. На такий перехід в умовах задачі вказують слова «**хоч би**».

б) $N(\Omega) = C_{15}^3$. Події $B = \{$з витягнутих п'яти кульок дві будуть чорними$\}$ сприяють тільки такі результати, при яких два елементи належать множині E_2, а інші три − множині E_1. За формулою прямого добутку множин дістанемо, що число всіх таких результатів буде $N(B) = C_5^2 C_{10}^3$. Тому

$$P(B) = \frac{C_5^2 C_{10}^3}{C_{15}^5} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11} = \frac{400}{1001}.$$

Приклад 3. В урні 10 занумерованих кульок. Знайти ймовірність того, що кульки витягнули у зростаючому порядку.

Розв'язання. Виймаємо 10 кульок з 10, при цьому розміщуємо їх у визначеному порядку (вибір без повернення, але з упорядкуванням). Експеримент фактично полягає в довільному упорядкуванні множини E, тобто зводиться до випадкового переставлення елементів цієї множини. Таким чином, число різноманітних результатів буде $N(\Omega) = P_{10} = 10!$, а число сприятливих результатів дорівнює одиниці. Тоді $P(A) = \frac{1}{10!}$.

Приклад 4. В урні 9 занумерованих кульок. Подія A полягає в тому, що виймаємо чотири кульки та в порядку появи цифр складаємо число. Знайти ймовірність того, що наугад складене число буде закінчуватися одиницею.

Розв'язання. Кульки в урні утворюють множину $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Експеримент проводиться за схемою без повернення, але з упорядкуванням. Кількість всіляких комбінацій $N(\Omega)$ дорівнює числу 4-елементних упорядкованих підмножин з 9-елементної множини E, тобто $N(\Omega) = A_9^4$.

У кожного елемента множини A, яка відповідає події, що нас цікавить, стоїть на останньому місці одиниця, а на трьох місцях, що залишилися, по одній цифрі з 8. Отже, кількість елементів множини A дорівнює числу способів розміщення з восьми елементів по три. Таким чином, $N(A) = A_8^3$ та

$$P(A) = \frac{A_8^3}{A_9^4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{1}{9}.$$

Приклад 5. В урні лежать кульки семи кольорів. Витягнули чотири кульки. Знайти ймовірність того, що $A = \{$кульки одного кольору$\}$; $B = \{$кульки різних кольорів$\}$.

Розв'язання. Експеримент полягає у виборі з поверненням чотирьох елементів з множини $E = \{Ч; О; Ж; З; Б; С; Ф\}$, але без упорядкування. Отже, простір елементарних подій містить комбінації з чотирьох елементів, які відрізняються складом, але елементи в них можуть повторюватися. Число всіляких комбінацій буде $N(\Omega) = C_{7+4-1}^{4} = C_{10}^{4} = 210$, а число сприятливих комбінацій події A (схема без повернення та без упорядкування) буде $N(A) = C_7^1 = 7$, тому $P(A) = \frac{7}{210} = \frac{1}{30}$. Число сприятливих результатів події B (схема без повернення та без упорядкування): $N(B) = C_7^4 = 35$ та $P(B) = \frac{35}{210} = \frac{1}{6}$.

Приклад 6. Сім футболістів випадково розподіляються між чотирма футбольними командами (в одну команду може потрапити будь-яка кількість футболістів). Яка ймовірність того, що в першу команду не потрапить жоден футболіст?

Розв'язання. Чотири команди утворюють множину $E = \{К1; К2; К3; К4\}$, з елементів якої формуються 7-елементні комбінації (кожен футболіст може потрапити в будь-яку команду). Схема з поверненням та з упорядкуванням, тоді $N(\Omega) = 4^7$. Події, яка полягає в тому, що в першу команду не потрапить жоден футболіст, відповідають 7-елементні комбінації з множини $E_1 = \{К2; К3; К4\}$, тому $N(A) = 3^7$ та $P(A) = (\frac{3}{4})^7 \approx 0{,}133$.

Геометрична ймовірність. Для обчислення ймовірності появи події A у випадку, коли результат експерименту визначається випадковим положенням точок у деякій області, використовують поняття геометричної імовірності. Будь-яке положення точки в цій області вважається рівноймовірним.

Назвемо мірою області її довжину, площу, об'єм в одно-, дво- та тривимірних випадках відповідно. Позначимо міру області S, а міру частини цієї області − як s. Нехай подія A полягає в потраплянні точки у вказану область. Тоді шукана ймовірність (геометрична ймовірність) визначається формулою

$$\boxed{P(A) = \frac{s}{S}}.$$

Приклад 7. На відрізку одиничної довжини випадково з'являється точка. Знайти ймовірність того, що відстань від цієї точки до кінцевих точок відрізка більше ніж $0{,}125$.

Розв'язання. Події A задовольняють точки, що з'являються на інтервалі $(a; b)$, довжина якого $s = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$ (рис. 1.5), а довжина всього відрізка $S = 1$, отже, шукана ймовірність буде $P(A) = \frac{s}{S} = \frac{3}{4}$.

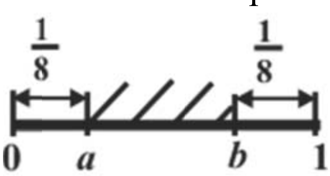


Рис. 1.5

Приклад 8. Два студенти домовилися зустрітися в деякий проміжок часу $[0;T]$, при цьому кожен з них приходить випадково на місце зустрічі та жде іншого не більш ніж τ хвилин. Знайти ймовірність зустрічі студентів.

Розв'язання. Нехай x, y − моменти прибуття студентів до місця зустрічі. Областю рівноймовірних значень x та y є площа $S = T^2$. Зустріч відбудеться, якщо $|x - y| \le \tau$. Цю нерівність задовольняють точки $(x; y)$ області, що обмежена прямими $y - x = \tau$ та $y - x = -\tau$ (рис. 1.6). Площа цієї області $s = T^2 - (T - \tau)^2$. Тому $P(A) = \frac{s}{S} = \frac{T^2 - (T-\tau)^2}{T^2}$.

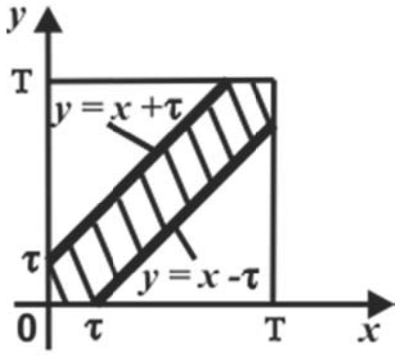


Рис. 1.6

Властивості ймовірності

1. Для будь-якої події A справедлива нерівність $0 \le P(A) \le 1$.

2. Ймовірність неможливої події $\varnothing$ дорівнює нулю, а ймовірність достовірної події A дорівнює одиниці.

3. Для будь-яких подій A та B, пов'язаних умовою $A \subset B$, виконується нерівність $P(A) \le P(B)$.

4. Якщо події A та B несумісні $A \cap B = \varnothing$, то справедлива рівність $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

5. Для довільних подій A та B виконується рівність $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

6. Для ймовірності протилежної події $\overline{A}$ справедлива рівність $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

7. Якщо $A \subset B$, то $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

8. Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_k$ − довільні події. Тоді справедлива рівність $P(\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i) = 1 - P(\bigcap\limits_{i=1}^{k} \overline{A}_i)$.

Приклад 9. В урні 20 кульок: 10 червоних, 7 синіх, 3 білих. Знайти ймовірність того, що витягнута наугад кулька буде не білою.

Розв'язання: $N(\Omega) = C_{20}^1 = 20$. Нехай $A = \{$витягнули червону кульку$\}$, $B = \{$витягнули синю кульку$\}$, $C = \{$витягнули червону або синю кульку$\}$. Отже, $N(A) = C_{10}^1 = 10$, $N(B) = C_7^1 = 7$ та $P(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{7}{20}$. Враховуючи, що $C = A + B$ та $A \cap B = 0$, та згідно з четвертою властивістю ймовірності маємо $P(C) = 0{,}5 + 0{,}35 = 0{,}85$.

Приклад 10. Ймовірність того, що піде сніг (подія A) дорівнює $0{,}6$, а того, що буде дощ (подія B) − $0{,}35$. Визначити ймовірність випадіння опадів, якщо ймовірність того, що піде дощ зі снігом (подія $A \cap B$) буде $0{,}15$.

Розв'язання. Події A та B сумісні, а випадіння опадів − це подія $A+B$, тоді згідно із шостою властивістю ймовірності маємо

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)=0{,}6+0{,}35-0{,}15=0{,}8\,.$$

Приклад 11. У скрині лежать n деталей, серед яких m стандартних. Знайти ймовірність того, що серед k наугад витягнутих деталей, хоч би одна буде стандартна.

Розв'язання. $A=\{$серед витягнутих деталей хоч би одна стандартна$\}$. Тоді $\overline{A}=\{$серед витягнутих деталей жодної стандартної$\}$. Очевидно, що $N(\Omega)=C_n^k$, $N(\overline{A})=C_{n-m}^k$, тому $P(\overline{A})=\dfrac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$ і $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\dfrac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$.

Приклад 12. Яка подія більш імовірна: $A=\{$при 4-х киданнях гральної кості хоч би раз випаде 6 очок$\}$ або $B=\{$при 24-х киданнях двох кісток хоч би раз на обох випаде по 6 очок$\}$?

Розв'язання. Всіляких результатів у першому варіанті буде $n_A=6^4$ (4 групи по 6 елементів у кожній). Перейдемо до протилежної події $\overline{A}=\{$жодного разу не випадає 6 очок$\}$ і $m_{\overline{A}}=5^4$ (4 групи по 5 елементів). Отже, $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\dfrac{m_{\overline{A}}}{n_A}=1-\dfrac{5^4}{6^4}\approx 0{,}5177$.

Кількість всіляких результатів у другому варіанті $n_B=36^{24}$ (24 групи по 6·6=36 елементів у кожній). Кількість сприятливих результатів для протилежної події буде $m_{\overline{B}}=35^{24}$ (24 групи по 36-1=35 елементів у кожній). Остаточно, $P(B)=1-P(\overline{B})=1-\dfrac{m_{\overline{B}}}{n_B}=1-\dfrac{35^{24}}{36^{24}}\approx 0{,}4914$.

Приклад 13. П'ять радіостанцій мають дозвіл під час навчань працювати на шести радіохвилях. Кожна станція вибирає хвилю наугад. Знайти ймовірність подій: $A=\{$при одночасній роботі всіх п'яти радіостанцій хоч би дві з них обрали різні хвилі$\}$; $B=\{$всі радіостанції використовують різні радіохвилі$\}$.

Розв'язання. Множину всіляких подій Ω можна зобразити як прямий добуток множин $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2\times\ldots\times\Omega_5$, де Ω_i, $i=\overline{1,5}$ − множина радіохвиль, з яких обирала радіохвилю i-та радіостанція. Кожна множна Ω_i містить 6 елементів, тому $N(\Omega)=6^5$. Розглянемо подію $\overline{A}=\{$усі радіостанції вибрали одну і ту ж радіохвилю$\}$. Враховуючи, що $N(\overline{A})=6$, маємо $P(\overline{A})=\dfrac{1}{6^4}$ та $P(A)=1-\dfrac{1}{6^4}$. Множину сприятливих результатів для події B зобразимо так: $B=B_1\times B_2\times B_3\times B_4\times B_5$, де $B_1=\{$перша станція працює на одній з шести радіохвиль$\}$; $B_2 = \{$друга станція працює на одній з п'яти хвиль$\}$; $B_3 = \{$третя станція працює на одній з чотирьох хвиль$\}$; $B_4 = \{$четверта станція працює на одній з трьох хвиль$\}$; $B_5 = \{$п'ята станція працює на одній з двох хвиль$\}$. Тоді

$$N(B) = N(B_1) \times N(B_2) \times N(B_3) \times N(B_4) \times N(B_5) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \quad \text{і} \quad P(B) = \frac{5!}{6^4}.$$

Умовна ймовірність. У наведеній далі задачі бачимо, що обчислена у класичній моделі ймовірність події може суттєво залежати від того, чи здійснилися або ні деякі умови.

Приклад 14. В родині дві дитини. Яка ймовірність того, що $A = \{$обидві дитини хлопці$\}$; $B = \{$обидві дитини хлопці, якщо відомо, що один з дітей хлопець$\}$; $C = \{$ обидві дитини хлопці, якщо відомо, що старший хлопець$\}$.

Розв'язання. Кількість сприятливих результатів у всіх випадках однакова та дорівнює одиниці $A = \{ММ\}$. Але простір елементарних подій, що відповідає питанням задачі, описується по-різному: $\Omega_1 = \{ММ, МД, ДМ, ДД\}$, $\Omega_2 = \{ММ, МД, ДМ\}$, $\Omega_3 = \{ММ, МД\}$. Тому ймовірності різні: у першому випадку ймовірність буде $P(A) = \frac{1}{4}$, у другому – $P(A) = \frac{1}{3}$, а в останньому – $P(A) = 0{,}5$.

Ймовірність події A за умови, що подія B відбулася, називається **умовною ймовірністю** події A, позначається $P(A/B)$ та обчислюється як

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}} \tag{1.10}$$

за умови, що $P(B) > 0$.

Виходячи з формули (1.10), дістанемо **формулу множення ймовірностей двох подій**

$$\boxed{P(A \cap B) = P(B)P(A/B) = P(A)P(B/A)}. \tag{1.11}$$

Якщо гіпотеза про здійснення однієї з двох подій не впливає на ймовірність другої події, то кажуть, що ці події **незалежні**.

Дві події A та B називаються **незалежними**, якщо для ймовірностей виконується рівність

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}. \tag{1.12}$$

Для довільних подій A_1, A_2, …, A_n справедлива формула

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n/A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Поняття взаємної незалежності довільного числа n подій $A_i \ (i = \overline{1,n})$ узагальнює означення незалежності двох подій. А саме, події $A_i \ (i = \overline{1,n})$ називаються **незалежними**, якщо виконується рівність

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_n), \tag{1.13}$$

яка являє собою **теорему множення ймовірностей незалежних подій**.

Приклад 15. У коробці 3 червоних та 7 синіх кульок. Наугад витягли одну кульку, потім другу. Знайти ймовірність того, що перша кулька червона, а друга синя.

Розв'язання. Нехай $A = \{$витягнули першою червону кульку$\}$, тоді $P(A) = 0{,}3$. $B = \{$витягнули другою синю кульку$\}$, можна знайти ймовірність $P(B/A) = \dfrac{7}{9}$. $C = \{$витягнули червону кульку, а потім синю$\}$. Враховуючи, що $C = A \bigcap B$, за формулою (1.11) маємо $P(C) = P(AB) = P(A)P(B/A) = \dfrac{3}{10} \cdot \dfrac{7}{9} = \dfrac{7}{30}$.

Приклад 16. Кодова комбінація складається з 10 імпульсів трьох форм A, B, C. При цьому в кожній кодовій комбінації три імпульси мають форму A, два імпульси − форму B та п'ять імпульсів − форму C. Знайти ймовірність прибуття перших трьох імпульсів в послідовності ABC.

Розв'язання. Нехай $A = \{$першим прийшов імпульс форми $A\}$, $B = \{$другим − імпульс форми $B\}$, $C = \{$третім − імпульс форми $C\}$. Ймовірність події A буде $P(A) = 0{,}3$. Тому що імпульс A вже прийшов і залишилося 9 можливостей для двох імпульсів B, то $P(B/A) = \dfrac{2}{9}$. Далі для п'яти імпульсів форми C залишилося 8 варіантів, тому $P(C/A \bigcap B) = 0{,}625$. Остаточно маємо $P(A \bigcap B \bigcap C) = P(A)P(B/A)P(C/A \bigcap B) = \dfrac{1}{24}$.

Завдання для самостійної роботи

1. В урні 12 кульок, з яких 3 червоних та 9 синіх. Наугад витягують одну кульку. Яка ймовірність подій: $A = \{$витягнута кулька червоного кольору$\}$; $B = \{$витягнута кулька синя$\}$?

2. Гральна кість кидається один раз. Які ймовірності подій: $A = \{$випало число два$\}$; $B = \{$випало непарне число$\}$; $C = \{$випало число не менше трьох$\}$?

3. З 20 моніторів для перевірки довільно вибрали три. Партія містить п'ять несправних моніторів. Яка ймовірність того, що серед вибраних моніторів будуть: $A = \{$тільки якісні$\}$; $B = \{$тільки несправні$\}$; $C = \{$два несправних$\}$?

4. Під час гри у преферанс 32 гральні карти розподіляються (здаються по дві карти) між трьома гравцями (кожен з них отримує по 10 карт) та «прикупом» (куди кладуть дві карти). Яка ймовірність того, що в «прикупі» з'являться два тузи?

5. У картці спорлото наугад помітили 6 з 49 номерів. Знайти ймовірність того, що правильно вгадано три з шести номерів, які будуть опубліковані в списку виграшних.

6. У лотереї 100 білетів, з яких 40 виграшних. Учасник лотереї купляє 15 білетів. Яка ймовірність таких подій: $A = \{$з 15 білетів хоч би один виграшний$\}$; $B = \{$з 15 білетів рівно один виграшний$\}$; $C = \{$з 15 білетів рівно 5 виграшних$\}$.

7. Під час набору номера телефону абонент забув останні три цифри і пам'ятав тільки, що ці цифри різні та набрав їх наугад. Знайти ймовірність того, що набрані цифри правильні?

8. З п'яти карток з буквами А, Б, В, Г, Д наугад одну за другою вибирають три та розташовують їх у ряд по черзі появи. Яка ймовірність того, що отримаємо слово «ДВА»?

9. Дитина грає з буквами Е, І, Р, О, Т, Я. Яка ймовірність того, что при випадковому розташуванні букв у ряд він отримає слово «ТЕОРІЯ»?

10. Чотиритомний твір розташовано на полиці у довільному порядку. Знайти ймовірність того, що томи стоятимуть з першого по четвертий.

11. У коробці п'ять однакових занумерованих кубиків. Наугад по одному дістають усі кубики. Яка ймовірність того, що номери кубиків з'являться у порядку зростання?

12. З урни, що містить 12 перенумерованих куль, наугад витягають одну за одною всі кулі, але після діставання кожної вона вкладається в урну назад та перемішується з іншими, а її номер записується. Знайти ймовірність того, що буде записана природна послідовність номерів.

13. Кидають чотири гральні кості. Знайти ймовірність того, що на них випаде по однаковому числу очок.

14. Знайти ймовірність того, що дні народження 12 осіб відбуваються в різні місяці.

15. Гральну кість кидають 6 разів. Обчислити ймовірність події, яка полягає в тому, що випадуть усі шість граней.

16. Група студентів з 20 осіб сідає у потяг з 8 вагонів. Кожен студент обирає вагон зовсім випадково та з однаковою вірогідністю може потрапити до будь-якого вагону. Яка ймовірність того, що всі студенти попадуть у різні вагони?

17. У крамниці продають 8 видів тістечок. Дівчина купила 4 тістечка. Яка ймовірність того, що тістечки: $A = \{$одного виду$\}$; $B = \{$різних видів$\}$; $C = \{$по два однакового виду$\}$?

18. На полиці стоять 15 підручників, при цьому п'ять з них у твердій оправі. Студент бере 3 підручники. Знайти ймовірність того, що серед обраних опиниться хоч би один підручник у твердій оправі.

19. З повного набору доміно (28 штук) наугад вибирають 7 кісток. Яка ймовірність того, що серед них з'явиться хоч би одна кість з 6 очками?

20. Студент з 30 екзаменаційних білетів вивчив 24. Яка ймовірність (у відсотках) його успішній відповіді на іспиті: $A = \{$якщо білет вибирався один раз$\}$; $B = \{$білет вибирався два рази$\}$? Витягнутий білет не повертався.

21. Цікавимося днями народження у шести студентів, обраних наугад. Яка ймовірність того, що хоч би у двох студентів дні народження збігаються?

22. На шахову дошку з 64 клітинок ставимо наугад дві тури білого та чорного кольору. З якою ймовірністю вони не будуть «бити» одна одну?

23. Хвилинна стрілка годинника рухається стрибком у кінці кожної хвилини. Знайти ймовірність того, що в дану мить годинник покаже час, який відрізняється від істинного не більше ніж на 20 секунд.

24. У квадрат зі стороною a та з вписаним у нього колом випадково падає матеріальна точка. Яка ймовірність того, що ця точка попаде в коло?

25. Кожний з 8 обчислювальних приладів обслуговується одним оператором. У штатному складі обчислювального центру існує 6 операторів. Призначення оператора на кожний обчислювальний прилад виконується наугад. Знайти ймовірність того, що перші шість обчислювальних приладів будуть обслуговуватися.

26. У читальному залі існують 9 підручників з математики, три з яких у твердій палітурці. Бібліотекар наугад узяв два підручники. Знайти ймовірність того, що обидва підручника знаходяться в твердій палітурці.

27. Скільки існує п’ятизначних натуральних чисел, десятинний запис яких містить цифру один?

28. Скільки різних п’ятизначних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, щоб парні цифри не стояли поряд. При цьому кожна цифра входить у число один раз.

Відповіді:

1. $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{3}{4}$. **2.** $P(A)=\frac{1}{6}$, $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{2}{3}$. **3.** $P(A)=\frac{C_{15}^3}{C_{20}^3}$, $P(B)=\frac{C_5^3}{C_{20}^3}$, $P(C)=\frac{C_5^2C_{15}^1}{C_{20}^3}$. **4.** $\frac{C_4^2}{C_{32}^2}$. **5.** $\frac{C_6^3C_{43}^3}{C_{49}^6}$. **6.** $P(A)=1-\frac{C_{100-40}^{15}}{C_{100}^{15}}$, $P(B)=\frac{C_{40}^1C_{100-40}^{15-1}}{C_{100}^{15}}$, $P(C)=\frac{C_{40}^5C_{100-40}^{15-5}}{C_{100}^{15}}$ **7.** $\frac{1}{A_{10}^3}=\frac{1}{720}$. **8.** $\frac{1}{A_5^3}$. **9.** $\frac{1}{P_6}=\frac{1}{6!}$. **10.** $\frac{1}{P_4}$. **11.** $\frac{1}{P_5}$. **12.** $\frac{1}{12^{12}}$. **13**. $\frac{6}{6^4}$. **14.** $\frac{12!}{12^{12}}$. **15.** $\frac{6!}{6^6}$. **16.** $\frac{A_{20}^8}{20^8}$. **17.** $P(A)=\frac{C_8^1}{C_{8+4-1}^4}$, $P(B)=\frac{C_8^4}{C_{8+4-1}^4}$, $P(C)=\frac{C_8^2}{C_{8+4-1}^4}$. **18.** $P(A)=1-\frac{C_{10}^3}{C_{15}^3}$. **19.** $1-\frac{C_{21}^7}{C_{28}^7}$. **20.** $P(A)=\frac{4}{5}$ або 80%, $P(B)=1-\frac{A_6^2}{A_{30}^2}$ або 97%. **21.** $1-\frac{A_{12}^6}{12^6}$. **22.** $1-\frac{14}{63}$. **23.** $\frac{2}{3}$. **24.** $\frac{\pi}{4}$. **25.** $\frac{1}{28}$. **26.** $\frac{1}{12}$. **27.** $9\cdot10^4-8\cdot9^4$. **28.** 72.

1.4. Формула повної ймовірності

Наслідком обох основних правил теорії ймовірності (правила додавання та правила множення) є формула повної ймовірності. Припустімо, що маємо намір провести експеримент, про умови якого можна зробити n пропозицій (гіпотез), які виключають одна одну:

$$H_1, H_2, \ldots, H_n \quad (H_i H_j = \varnothing \text{, при } i \neq j). \tag{1.14}$$

Події $H_1, H_2, \ldots, H_n$ називаються **гіпотезами**, якщо вони попарно незалежні та утворюють повну групу подій, тобто $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$.

Нехай кожна гіпотеза здійснюється випадково та являє собою деяку подію. Ймовірності гіпотез відомі та дорівнюють $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$.

Розглянемо деяку подію A, яка може з'явитися тільки разом з однією з гіпотез (1.14). Дано умовні ймовірності події A при кожній з гіпотез: $P(A/H_1)$, $P(A/H_2), \ldots, P(A/H_n)$.

Для того, щоб знайти ймовірність події A, подамо її як суму n несумісних варіантів: $A = \sum_{i=1}^{n} H_i A$. За правилом додавання ймовірностей маємо $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i A)$, а за правилом множення – $P(H_i A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i)$.

Отже,

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i)}. \tag{1.15}$$

Формула (1.15) називається **формулою повної ймовірності**. Вона використовується в усіх випадках, коли експеримент з випадковим результатом розпадається на два етапи: у першому як би «розігруються» умови експерименту, у другому зазначається його результат.

Приклад 1. У першій з трьох однакових урн знаходяться дві білі кулі та три чорні, у другій – чотири білі та одна чорна, у третій – три білі кулі. Наугад з однієї урни витягують одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля буде білою: $A = \{$витягнули білу кулю$\}$.

Розв'язання. Висуваємо три гіпотези: $H_1 = \{$вибрана перша урна$\}$; $H_2 = \{$вибрана друга урна$\}$; $H_3 = \{$вибрана третя урна$\}$. $P(H_1) = P(H_2) = = P(H_3) = 1/3$. $P(A/H_1) = 2/5$; $P(A/H_2) = 4/5$; $P(A/H_3) = 1$. За формулою (1.15) маємо $P(A) = P(H_1)\, P(A/H_1) + P(H_2)\, P(A/H_2) + P(H_3)\, P(A/H_3) = \frac{11}{15}$.

Приклад 2. Маємо дві урни. Перша містить дві білі та три чорні кулі, а друга – чотири білі та дві чорні. З кожної урни витягуємо по одній кулі. Знайти ймовірність того, що кулі будуть одного кольору.

Розв'язання. Подію $A = \{$обидві кулі одного кольору$\}$ можна подати у вигляді суми двох варіантів: $A_1 = \{$обидві білі$\}$, $A_2 = \{$обитві чорні$\}$. Тоді

$A = A_1 + A_2$. Кожен з варіантів − це добуток двох подій $A_1 = H_1 H_2$ та $A_2 = H_3 H_4$, де $H_1 = \{$з першої урни витягли білу кулю$\}$, $H_2 = \{$з другої урни витягли білу кулю$\}$, $H_3 = \{$з першої урни витягли чорну кулю$\}$, $H_4 = \{$з другої урни витягли чорну кулю$\}$. Події H_1 та H_2, а також H_3 та H_4 незалежні між собою, тому $P(A_1) = P(H_1)P(H_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{15}$, $P(A_2) = P(H_3)P(H_4) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{5}$.

Остаточно $P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{7}{15}$.

Приклад 3. З колоди карт (32 штуки) витягуємо наугад чотири карти. Знайти ймовірність того, що серед них буде хоч би один туз.

Розв'язання. Переходимо до обчислення ймовірності події $\overline{A} = \{$жодного туза$\} = A_1 A_2 A_3 A_4$, де $A_1 = \{$перша карта не туз$\}$, $A_2 = \{$друга карта не туз$\}$, $A_3 = \{$третя не туз$\}$, $A_3 = \{$четверта не туз$\}$. Події A_1, A_2, A_3, A_4 − залежні, тому за правилом множення маємо

$$P(\overline{A}) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1 A_2)P(A_4 / A_1 A_2 A_3) = \frac{28}{32} \cdot \frac{27}{31} \cdot \frac{26}{30} \cdot \frac{25}{29} \approx 0{,}568.$$

Отже, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) \approx 0{,}432$.

1.5. Формула Байєса

Формула Байєса дає можливість визначити умовні апостеріорні (після експерименту) ймовірності $P(H_i / A)$, $(i = \overline{1,n})$, якщо відомі апріорні (до експерименту) ймовірності $P(H_i)$ гіпотез H_i, що утворюють повну групу подій. Ця формула має вигляд

$$\boxed{P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A / H_i)}}, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (1.16)$$

Щоб отримати цю формулу достатньо у формулі умовної ймовірності (1.10) записати чисельник за формулою множення ймовірностей (1.11), а знаменник – за формулою повної ймовірності (1.15).

Формулу (1.16) можна записати у вигляді

$$\boxed{P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{P(A)}}. \qquad (1.17)$$

Отже, формула Байєса дозволяє «переоцінити» ймовірність кожної з гіпотез після отримання нової «інформації» відносно появи тих чи інших подій.

Приклад 1. У канцелярії працюють чотири секретарі, які відправляють 40, 10, 30 та 20 % вихідних бумаг. Ймовірності неправильної адресації бумаг секретарями дорівнюють 0,01; 0,04; 0,06; 0,1 відповідно. Знайти ймовірність того, що документ з неправильною адресою, відправлен третім секретарем.

Розв'язання. Введемо гіпотези $H_i = \{$документ відправив i-й секретар$\}$, $(i=\overline{1,4})$. За умовами задачі $P(H_1)=0{,}4$; $P(H_2)=0{,}1$, $P(H_3)=0{,}3$, $P(H_4)=0{,}2$. Позначимо через A подію, яка полягая в тому, що документ має неправильну адресу. Тоді за умовами задачі $P(A/H_1)=0{,}01$; $P(A/H_2)=0{,}04$; $P(A/H_3)=0{,}06$; $P(A/H_4)=0{,}1$ і шукана ймовірність буде

$$P(H_3/A)=\frac{P(H_3)P(A/H_3)}{\sum\limits_{i=1}^{4}P(H_i)P(A/H_i)}=\frac{0{,}3\cdot 0{,}06}{0{,}4\cdot 0{,}01+0{,}1\cdot 0{,}04+0{,}3\cdot 0{,}06+0{,}2\cdot 0{,}1}\approx 0{,}39.$$

Приклад 2. Три особи роблять по одному пострілу в одну і ту ж мішень. Ймовірності влучення у мішень при одному пострілі для кожного з стріляючих відповідно дорівнюють p_1, p_2, p_3. Яка ймовірність того, що другий стрілець промахнувся, якщо після пострілу в мишені виявилося дві пробоїни?

Розв'язання. Позначимо події через $A_1 = \{$влучив у мішень перший стрілець$\}$, $A_2 = \{$влучив у мішень другий стрілець$\}$, $A_3 = \{$влучив у мішень третій стрілець$\}$, тоді подія $A = \{$у мішені виявилося дві пробоїни$\}$ може бути подана як $A = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$. Згідно з шостою вастивістю ймовірності маємо $P(\overline{A}_1)=1-p_1$, $P(\overline{A}_2)=1-p_2$, $P(\overline{A}_3)=1-p_3$. За четвертою властивістю ймовірності (правило додавання) та формулою (1.11) (правило множення ймовірностей), дістанемо $P(A)=p_1p_2(1-p_3)+p_1(1-p_2)p_3+(1-p_1)p_2p_3$. Введемо три гіпотези: $H_1 = \{$не влучив перший стрілець$\}$; $H_2 = \{$не влучив другий стрілець$\}$; $H_3 = \{$не влучив третій стрілець$\}$, ймовірності яких будуть $P(H_1)=1-p_1$, $P(H_2)=1-p_2$, $P(H_3)=1-p_3$. Враховуючи те, що $P(A/H_2)=P(A_1A_3)=p_1p_3$, та формулу (1.17), дістанемо

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{(1-p_2)p_1p_3}{p_1p_2(1-p_3)+p_1(1-p_2)p_3+(1-p_1)p_2p_3}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. У піраміді п'ять гвинтівок, три з яких мають оптичний приціл. Ймовірність того, що стрілець влучить у мішень під час пострілу з гвинтівки, яка має оптичний приціл, дорівнює 0,95; для гвинтівки без оптичного прицілу ця ймовірність дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що буде влучення в мішень, якщо стрілець виконає один постріл з наугад узятої гвинтівки.

2. Прилади з одним найменуванням виготовляються двома заводами. Перший поставляє $\frac{2}{3}$ усіх виробів; другий – $\frac{1}{3}$. Ймовірність безперебійної роботи (надійність) прилада, виготовленого першим заводом, дорівнює 0,6; другого – 0,72. Визначити надійність прилада, який поставлено на підприємство.

3. З чисел 1, 2, …, n одне за одним вибирають наугад два числа. Яка ймовірність того, що різниця між першим та другим вибраними числами буде не менше $m\,(m > 0)$.

4. В урні лежить куля невідомого кольору. З однаковою ймовірністю це може бути біла або чорна куля. В урну кладуть одну білу кулю та після перемішування наугад витягують одну кулю. Вона виявилася білою. Яка ймовірність того, що в урні залишилася біла куля.

5. У 10 ящиках складено деталі двох сортів. У перших трьох – по три деталі першого та по 7 деталей другого сорту. В четвертому – 9 деталей першого та одна деталь другого сорту. В інших шести ящиках лежать по одній деталі першого та по 9 деталей другого сорту. З будь-якого ящика виймають деталь. Визначити ймовірність того, що ця деталь другого сорту.

6. Партія транзисторів, серед яких 10 % дефектних, надійшла на перевірку. Схема перевірки така, що з ймовірністю 0,95 виявляється дефект (якщо він існує), та існує не нульова ймовірність 0,03 того, що справний транзистор буде визнано дефектним. Яка ймовірність того, що випадково вибраний з партії транзистор буде визнано дефектним?

7. У магазин на продаж надходить продукція трьох фабрик, відносні частки яких: першої – 50 %; другої – 30 %; третьої – 20 %. Для продукції фабрик брак відповідно складає: першої – 2 %; другої – 3 %; третьої – 5 %. Яка ймовірність того, що виріб цієї продукції, випадково куплений у магазині, буде доброякісний (подія A)?

8. Виконується випробування приладу, складеного з двох вузлів: 1 та 2. Ймовірності безперебійної роботи (надійності) за проміжок часу τ вузлів 1 та 2 будуть $p_1 = 0{,}8$, $p_2 = 0{,}9$. Вузли виявляються незалежними один від одного. Після деякого часу з'ясували, що цей прилад несправний. Знайти з урахуванням цього ймовірності гіпотез: $H_1 = \{$несправний тільки перший вузел$\}$; $H_2 = \{$несправний другий вузел$\}$; $H_3 = \{$несправні обидва вузли$\}$.

9. Три стрільці виконали залп, при цьому дві пулі влучили в мішень. Знайти ймовірність того, що третій срілець улучив у мішень, якщо ймовірність улучення в мішень першим, другим та третім стрільцями відповідно дорівнюють 0,6, 0,5 та 0,4.

10. Маємо три партії деталей по 20 у кожній. Кількість стандартах деталей у першій, другій та третій партіях відповідно дорівнює 20, 15, 10. З вибраної партії витягнули деталь, вона виявилася стандартною. Деталь повертають у партію та повторно з тієї ж партії витягують деталь, яка теж виявилася стандартною. Знайти ймовірність того, що деталі витягнули з третьої партії.

11. Ймовірність улучення в літак під час одного пострілу для першої ракетної обслуги дорівнює 0,2, а для другої – 0,1. Кожна з гармат виконує по одному пострілу, при цьому зареєстровано одне влучення в літак. Яка ймовірність того, що вдалий постріл належить першій обслузі?

12. Три стрільці виконують по одному пострілу в одну й ту ж мішень. Ймовірності влучення в мішень при одному пострілі дорівнюють p_1, p_2, p_3 відповідно. Яка ймовірність того, що другий стрілець не влучив у ціль, якщо після пострілів у мішені виявилося дві пробоїни?

Відповіді:

1. 0,85. **2.** 0,64. **3.** $\dfrac{(n-m)(n-m+1)}{2n(n-1)}$. **4.** $\dfrac{2}{3}$. **5.** $\dfrac{19}{25}$. **6.** 0,122.

7. 0,971. **8.** $\approx 0{,}643$, $\approx 0{,}286$, $\approx 0{,}071$. **9.** $\dfrac{10}{19}$. **10.** $\dfrac{4}{29}$. **11.** $\approx 0{,}7$.

12. $\dfrac{p_1(1-p_2)p_3}{p_1(1-p_2)p_3+(1-p_1)p_2p_3+p_1p_2(1-p_3)}$.

1.6. Схема Бернуллі

Однією з важливих задач теорії ймовірностей є дослідження послідовностей різного роду експериментів з випадковими результатами. Розглянемо одну з такого роду схему. Схема Бернуллі (1654–1705) − це послідовність взаємно незалежних експериментів, у кожному з яких можна здійснити деяку подію з постійною, незалежною від номера експерименту ймовірністю $p = P(A)$. Як альтернативний результат у кожному експерименті виступає протилежна подія $\overline{A}$ з імовірністю $q = P(\overline{A}) = 1 - p$.

Якщо здійснюються n незалежних експериментів в однакових умовах, при цьому в кожному з імовірністю p з'являється подія A, то ймовірність $P_n(m)$ того, що подія A відбудеться у цих n експериментах рівно m раз, обчислюється за формулою

$$\boxed{P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}}, \text{ де } m = (\overline{1,n}). \quad (1.18)$$

Формула (1.18) називається **формулою Бернуллі**.

Ймовірність хоч би однієї появи події A при n незалежних експериментах у однакових умовах буде

$$P_n(1) = 1 - q^n. \quad (1.19)$$

Ймовірність того, що подія A при n незалежних експериментах в однакових умовах експерименту з'явиться: а) менше ніж m раз; б) більше ніж m раз; в) не менше m раз; г) не більше m раз, обчислюють відповідно за формулами: а) $P_n(m) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} P_n(k)$, б) $P_n(m) = \sum\limits_{k=m+1}^{n} P_n(k)$,

$$\text{в) } P_n(m) = \sum_{k=m}^{n} P_n(k), \qquad \text{г) } P_n(m) = \sum_{k=0}^{m} P_n(k). \quad (1.20)$$

Приклад 1. Два рівносильних шахіста грають у шахи. Ймовірність якої події більша: виграти дві партії з чотирьох або три партії з шести (нічия не береться до уваги)?

Розв'язання. Грають рівносильні шахісти, тому ймовірність виграшу $p = 0{,}5$. У всіх партіях імовірність виграшу стала, при цьому немає значення, у якій послідовності будуть виграшні партії. Отже, можна застосовувати формулу Бернуллі.

Знайдемо ймовірність того, що дві партії з чотирьох будуть виграшні:
$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot (\frac{1}{2})^2 \cdot (\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{8}$.

Знайдемо ймовірність того, що три партії з шести будуть виграшні:

$$P_6(3) = C_6^3 p^3 q^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot (\frac{1}{2})^3 \cdot (\frac{1}{2})^3 = \frac{5}{16}.$$

Оскільки $P_4(2) > P_6(3)$, то більш імовірно виграти дві партії з чотирьох.

Приклад 2. Пристрій складається з 10 вузлів. Надійність (ймовірність безперебійної роботи в проміжку часу t) для кожного вузла дорівнює p. Вузли ламаються незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що за проміжок часу t: а) зламається хоч би один вузол; б) зламається рівно один вузол; в) зламаються рівно два вузли; г) зламаються не менше двох вузлів.

Розв'язання: а) за формулою (1.19) маємо $P_{10}(1) = 1 - q^{10} = 1 - (1-p)^{10}$; б) за формулою (1.18) знайдемо $P_{10}(1) = C_{10}^1 p^1 q^9 = 10p(1-p)^9$; в) $P_{10}(2) = $ $= C_{10}^2 p^2 q^8 = 45p^2(1-p)^8$; г) $P_{10}(2) = \sum_{m=2}^{10} P_{10}(m) = 1 - P_{10}(0) + P_{10}(1) = 1 - q^{10} -$ $-10pq^9 = 1 - q^9(q + 10p)$, тут враховано, що $P_{10}(0) = C_{10}^0 p^0 q^{10}$, $P_{10}(1) = C_{10}^1 p^1 q^9$.

Якщо здійснюються n незалежних експериментів при різних умовах та ймовірність події A в i-му експерименті буде p_i, $i = (\overline{1,n})$, тоді ймовірність $P_n(m)$ того, що подія A з'явиться в цих експериментах рівно m раз, дорівнює коефіцієнту при z^m в розкладанні за степенями z **твірної функції**: $\varphi_n(z) = \prod_{i=1}^{n} (q_i + p_i z)$, де $q_i = 1 - p_i$.

Приклад 3. Пристрій складається з трьох елементів, які працюють незалежно один від одного. Ймовірності безперебійної роботи елементів (за проміжок часу t) відповідно будуть $p_1 = 0{,}7$; $p_2 = 0{,}8$; $p_3 = 0{,}9$. Знайти ймовірність того, що за проміжок часу t будуть працювати безперебійно: а) усі елементи; б) два елементи; в) один елемент; г) не буде працювати жоден з елементів.

Розв'язання. Якщо ймовірності безперебійної роботи елементів відповідно становитимуть $p_1 = 0{,}7$; $p_2 = 0{,}8$; $p_3 = 0{,}9$, то ймовірності того, що елементи зламаються, будуть, $q_1 = 0{,}3$; $q_2 = 0{,}2$; $q_3 = 0{,}1$. Складемо твірну функцію $\varphi_3(z) = (p_1 z + q_1)(p_2 z + q_2)(p_3 z + q_3) = (0{,}7z + 0{,}3)(0{,}8z + 0{,}2)(0{,}9z + 0{,}1) =$ $= 0{,}504z^3 + 0{,}398z^2 + 0{,}092z + 0{,}006$ та отримуємо такі ймовірності:

а) ймовірність того, що три елементи будуть працювати безперебійно, дорівнює коефіцієнту при z^3: $P_3(3) = 0{,}504$;

б) ймовірність того, що два елементи будуть працювати безперебійно, дорівнює коефіцієнту при z^2: $P_3(2) = 0{,}398$;

в) ймовірність того, що один елемент буде працювати безперебійно, дорівнює коефіцієнту при z: $P_3(1) = 0{,}092$;

г) ймовірність того, що жоден з елементів не буде працювати безперебійно, дорівнює вільному члену: $P_3(0) = 0{,}006$.

Ймовірність $P_n(m)$, як функція цілочислового аргументу m, досягає свого найбільшого значення. Число m_0 називається **найбільш імовірним** або **найімовірнішим числом** появи події A в серії n експериментів. Це число задовольняє нерівність

$$np - q \le m_0 \le np + p\,. \tag{1.21}$$

Приклад 4. Відомо, що $1/45$ частина продукції, яку виготовляє завод, не задовольняє вимоги стандарту. Завод виготовив 4500 одиниць продукції. Знайти найімовірніше число виробів заводу, що задовольняють вимоги стандарту.

Розв'язання. Якщо ймовірність виготовлення бракованого виробу $q = 1/45$, то ймовірність появи виробу, що задовольняє стандарт, буде $p = 44/45$. За формулою (1.21) маємо $4500 \cdot 44/45 - 1/45 \le m_0 \le 4500 \cdot 44/45 + 44/45$, тобто $4400 - 1/45 \le m_0 \le 4400 + 44/45$. Отже, шукане найбільш імовірне число виробів, яке задовольняє вимоги стандарту, дорівнює 4400.

Незважаючи на компактність формули (1.18), використання її при великих значеннях n призводить до громіздких обчислень. Тому в таких випадках використовують наближені формули.

Теорема Пуассона. Якщо проводяться експерименти за схемою Бернуллі при $n \to \infty$ та $p \to 0$, але $np = a$, то ймовірність появи m раз події A, з імовірністю p в окремому експерименті прямує до $\frac{a^m}{m!}e^{-a}$, тобто

$$\lim_{n \to \infty} P_n(m) = \frac{a^m}{m!}e^{-a} \Rightarrow P_n(m) \approx \frac{a^m}{m!}e^{-a}\,. \tag{1.22}$$

Вираз (1.21) називається **асимптотичною формулою Пуассона.**

Приклад 5. Телефонна станція обслуговує 1000 абонентів. За визначений проміжок часу абонент може зробити виклик незалежно від інших з імовірністю 0,005. Знайти ймовірність того, що відбулося не більше 7 викликів.

$A_0 = \{$жоден виклик не здійснився$\}$; $A_1 = \{$здійснився один виклик$\}$ і т. ін.; $A_7 = \{$здійснилося 7 викликів$\}$. Тоді $A = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7$ та

$P(A)=P_{1000}(A_0)+P_{1000}(A_1)+\ldots+P_{1000}(A_7)$. Для обчислення кожної ймовірності використаємо теорему Пуассона. Дістанемо

$$p=0{,}005; \quad n=1000; \quad a=np=5, \quad P_{1000}(A_k)=\frac{a^k}{i!}e^{-a}=e^{-5}\frac{5^k}{k!}, \quad k=(\overline{0,7}).$$

Отже, $P(A)=e^{-5}(\frac{5^0}{0!}+\frac{5}{1!}+\ldots+\frac{5^7}{7!})\approx 0{,}875$.

До недоліків теореми Пуассона треба віднести умову $p\to 0$, оскільки вона не в кожному випадку виконується. У зв'язку з цим розглянемо випадки, коли $p\neq 0$ та $p\neq 1$. В такому разі для обчислення $P_n(m)$ використовують локальну теорему Лапласа.

Локальна теорема Лапласа. Ймовірність того, що в n незалежних експериментах, у кожному з яких імовірність появи події дорівнює p $(0<p<1)$, подія настане рівно m разів (байдуже, у якій послідовності), наближено дорівнює (чим більше n, тим точніше)

$$\boxed{P_n(m)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)}, \tag{1.23}$$

де $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\quad x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$.

Таблиця значень функції $\varphi(x)$ для додатних значень x наведена нижче. Для від'ємних значень x користуються тією ж таблицею, тому що функція $\varphi(x)$ парна ($\varphi(-x)=\varphi(x)$).

Приклад 6. За даними відділку технічного контролю заводу, 0,8 об'єму деталей, які завод випускає, не мають дефектів. Знайти ймовірність того, що серед вибраних наугад 400 деталей дефекти будуть мати 80.

Розв'язання. За умовами $n=400$, $m=80$, $p=0{,}2$, $q=0{,}8$. Тоді $x=\frac{80-400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}=0$. З табл. 1.1 знаходимо, що $\varphi(0)=0{,}3989$. За формулою (1.23) шукана ймовірність $P_{400}(80)=0{,}125\cdot\varphi(0)=0{,}125\cdot 0{,}3989=0{,}04986$.

Відзначимо, що теорема Лапласа дає можливість оцінити окремі ймовірності та їх поводження як функцію m при великих n.

При великій кількості експериментів n та не дуже маленькій ймовірності p важливо оцінити ймовірність того, що подія A з'явиться не менше m_1 та не більше m_2 разів: $P_n(m_1,m_2)$. Для обчислення $P_n(m_1,m_2)$ використовують інтегральну теорему Лапласа.

Інтегральна теорема Лапласа. Нехай m − число появи події A в серії з n незалежних експериментів, $0<p<1$. Тоді ймовірність $P_n(m_1,m_2)$ того, що в цих експериментах подія A з'явиться не менше m_1 та не більше m_2 разів, задовольняє співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m_1,m_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{z^2/2}\, dz ,$$

де $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $\quad x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Іншими словами, при великих значеннях n має місце наближена формула

$$\boxed{P_n(m_1,m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)}, \tag{1.24}$$

де

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz . \tag{1.25}$$

Функція (1.25) називається **інтегралом помилок.** Вона непарна ($\Phi(-x) = -\Phi(x)$). Її значення при $x \ge 0$ наведено в табл. 1.2.

Оцінка похибки при використанні формули (1.24) показує, що ця формула забезпечує добру точність вже при значеннях $npq \ge 10$.

Приклад 7. Знайти ймовірність того, що при 10000 підкиданнях монети цифра випадає: а) не менше 4000 та не більше 6000 разів; б) не більше 4000 разів; в) не менше 6000 разів.

Розв'язання. а) Ймовірність того, що випаде цифра $p = 0{,}5$, тоді $q = 0{,}5$.

Далі, для $n = 10000$, $m_1 = 4000$, $m_2 = 6000$ визначимо x_1 та x_2:

$$x_1 = \frac{4000 - 10000 \cdot 0{,}5}{\sqrt{2500}} = -20; \qquad x_2 = \frac{6000 - 10000 \cdot 0{,}5}{\sqrt{2500}} = 20.$$

Отже, згідно з табл. 1.2 шукана ймовірність буде

$$P_{10000}(4000 \prec m \le 6000) = \Phi(20) - \Phi(-20) = 2\Phi(20) = 2 \cdot 0{,}5 = 1 .$$

б) Аналогічно з урахуванням табл. 1.2 маємо

$$P_{10000}(0 \le m \le 4000) = \Phi(\frac{4000-5000}{50}) - \Phi(\frac{0-5000}{50}) = \Phi(-20) - \Phi(-100) =$$

$$= \Phi(100) - \Phi(20) = 0{,}5 - 0{,}5 = 0 .$$

в) Аналогічно

$$P_{10000}(6000 \prec m \le 10000) = \Phi(\frac{10000-5000}{50}) - \Phi(\frac{6000-5000}{50}) = \Phi(100) - \Phi(20) = 0 .$$

Таблиця 1.1

Значення функції $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	5951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3580	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2580	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	9748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблиця 1.2

Значення функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,41	0,1591	0,82	0,2939	1,23	0,3907
0,01	0,0040	0,42	0,1628	0,83	0,2967	1,24	0,3925
0,02	0,0080	0,43	0,1664	0,84	0,2995	1,25	0,3944
0,03	0,0120	0,44	0,1700	0,85	0,3023	1,26	0,3962
0,04	0,0160	0,45	0,1736	0,86	0,3051	1,27	0,3980
0,05	0,0199	0,46	0,1772	0,87	0,3078	1,28	0,3997
0,06	0,0239	0,47	0,1808	0,88	0,3106	1,29	0,4015
0,07	0,0279	0,48	0,1844	0,89	0,3133	1,30	0,4032
0,08	0,0319	0,49	9,1879	0,90	0,3159	1,31	0,4049
0,09	0,0359	0,50	0,1915	0,91	0,3186	1,32	0,4066
0,10	0,0398	0,51	0,1950	0,92	0,3212	1,33	0,4082
0,11	0,0438	0,52	0,1985	0,93	0,3238	1,34	0,4099
0,12	0,0478	0,53	0,2019	0,94	0,3264	1,35	0,4115
0,13	0,0517	0,54	0,2054	0,95	0,3289	1,36	0,4131
0,14	0,0557	0,55	0,2088	0,96	0,3315	1,37	0,4147
0,15	0,0596	0,56	0,2123	0,97	0,3340	1,38	0,4162
0,16	0,0636	0,57	0,2157	0,98	0,3365	1,39	0,4177
0,17	0,0675	0,58	0,2190	0,99	0,3389	1,40	0,4192
0,18	0,0714	0,59	0,2224	1,00	0,3413	1,41	0,4207
0,19	0,0753	0,60	0,2257	1,01	0,3438	1,42	0,4222
0,20	0,0793	0,61	0,2291	1,02	0,3461	1,43	0,4236
0,21	0,0832	0,62	0,2324	1,03	0,3485	1,44	0,4251
0,22	0,0871	0,63	0,2357	1,04	0,3508	1,45	0,4265
0,23	0,0910	0,64	0,2389	1,05	0,3531	1,46	0,4279
0,24	0,0948	0,65	0,2422	1,06	0,3554	1,47	0,4292
0,25	0,0987	0,66	0,2454	1,07	0,3577	1,48	0,4306
0,26	0,1026	0,67	0,2486	1,08	0,3599	1,49	0,4319
0,27	0,1064	0,68	0,2517	1,09	0,3621	1,50	0,4332
0,28	0,1103	0,69	0,2549	1,10	0,3643	1,51	0,4345
0,29	0,1141	0,70	0,2580	1,11	0,3665	1,52	0,4357
0,30	0,1179	0,71	0,2611	1,12	0,3686	1,53	0,4370
0,31	0,1217	0,72	0,2642	1,13	0,3708	1,54	0,4382
0,32	0,1255	0,73	0,2673	1,14	0,3729	1,55	0,4394
0,33	0,1293	0,74	0,2703	1,15	0,3749	1,56	0,4406
0,34	0,1331	0,75	0,2734	1,16	0,3770	1,57	0,4418
0,35	0,1368	0,76	0,2764	1,17	0,3790	1,58	0,4429
0,36	0,1406	0,77	0,2794	1,18	0,3810	1,59	0,4441
0,37	0,1443	0,78	0,2823	1,19	0,3830	1,60	0,4452
0,38	0,1480	0,79	0,2852	1,20	0,3849	1,61	0,4463
0,39	0,1517	0,80	0,2881	1,21	0,3869	1,62	0,4474
0,40	0,1554	0,81	0,2910	1,22	0,3883	1,63	0,4484

Продовження табл. 1.2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,64	0,4495	1,88	0,4699	2,24	0,4875	2,72	0,4967
1,65	0,4505	1,89	0,4706	2,26	0,4881	2,74	0,4969
1,66	0,4515	1,90	0,4713	2,28	0,4887	2,76	0,4971
1,67	0,4525	1,91	0,4719	2,30	0,4893	2,78	0,4973
1,68	0,4535	1,92	0,4726	2,32	0,4898	2,80	0,4974
1,69	0,4545	1,93	0,4732	2,34	0,4904	2,82	0,4976
1,70	0,4554	1,94	0,4738	2,36	0,4909	2,84	0,4977
1,71	0,4564	1,95	0,4744	2,38	0,4913	2,86	0,4979
1,72	0,4573	1,96	0,4750	2,40	0,4918	2,88	0,4980
1,73	0,4582	1,97	0,4756	2,42	0,4922	2,90	0,4981
1,74	0,4591	1,98	0,4761	2,44	0,4927	2,92	0,4982
1,75	0,4599	1,99	0,4767	2,46	0,4931	2,94	0,4984
1,76	0,4608	2,00	0,4772	2,48	0,4934	2,96	0,4985
1,77	0,4616	2,02	0,4783	2,50	0,4938	2,98	0,4986
1,78	0,4625	2,04	0,4793	2,52	0,4941	3,00	0,49865
1,79	0,4633	2,06	0,4803	2,54	0,4945	3,20	0,49931
1,80	0,4641	2,08	0,4812	2,56	0,4948	3,40	0,49966
1,81	0,4649	2,10	0,4821	2,58	0,4951	3,60	0,499841
1,82	0,4656	2,12	0,4830	2,60	0,4953	3,80	0,499928
1,83	0,4664	2,14	0,4838	2,62	0,4956	4,00	0,499968
1,84	0,4671	2,16	0,4846	2,64	0,4959	4,50	0,499997
1,85	0,4678	2,18	0,4854	2,66	0,4961	5,00	0,499997
1,86	0,4686	2,20	0,4861	2,68	0,4963		
1,87	0,4693	2,22	0,4868	2,70	0,4965		

Приклад 8. Відділ технічного контролю заводу встановив, що в середньому 98 % виробів відповідає встановленим вимогам, а 2 % потребують переробки. Приймальник перевіряє 300 виробів. Якщо серед них виявиться 11 або більше тих, що потребують переробки, уся партія повертається на доопрацювання. Знайти ймовірність того, що партія буде прийнята.

Розв'язання. У даному випадку n достатньо велике і ймовірність того, що $m \le 10$, можна оцінити за формулою (1.24). Враховуючи, що $m_1 = 0$; $m_2 = 10$; $n = 300$; $p = 0{,}02$; $q = 0{,}98$, знайдемо $x_1 = \dfrac{-6}{\sqrt{5{,}88}} \approx -2{,}47$, $x_2 = \dfrac{10-6}{\sqrt{5{,}88}} \approx 1{,}65$. Тоді $P(m \le 10) \approx \Phi(1{,}65) - \Phi(-2{,}47) = \Phi(1{,}65) + \Phi(2{,}47)$.

За табл. 1.2 знаходимо $\Phi(1{,}65) = 0{,}4505$, $\Phi(+2{,}47) = 0{,}4932$ і, очевидно, $P(m \le 10) = 0{,}9433$.

Нехай n − число експериментів, p − ймовірність появи події A у кожному експерименті, $\dfrac{m}{n}$ − відносна частість появи події A. Тоді ймовірність $P\left(\left|\dfrac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right)$ того, що відхилення відносної частості $\dfrac{m}{n}$ від імовірності p по абсолютній величині не перевищує задане число ε, можна обчислити за формулою

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)-\Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (1.26)$$

Приклад 9. Ймовірність того, що деталь нестандартна, дорівнює 0,1. Скільки деталей треба одібрати, щоб з імовірністю 0,9544 можна було би стверджувати, що відносна частість появи нестандартних деталей відхиляється від сталої ймовірності $p=0{,}1$ по абсолютній величині не більше ніж на 0,03.

Розв'язання. За умовами задачі $p=0{,}1$, $q=0{,}9$, $\varepsilon=0{,}03$, $P\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}1\right|\le 0{,}03\right)=0{,}9544$. Шукане число n дістанемо за формулою (1.26):

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}1\right|\le 0{,}03\right)=0{,}9544=2\Phi\left(0{,}03\sqrt{\frac{n}{0{,}1\cdot 0{,}9}}\right) \text{ або } \Phi(0{,}1\sqrt{n})=0{,}4772.$$

За табл. 1.2 знаходимо $0{,}4772=\Phi(2)\Rightarrow 2=0{,}1\sqrt{n}\Rightarrow n=400$.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти ймовірність того, що з десяти підкидань монети герб випаде рівно п'ять разів.

2. Знайти ймовірність того, що з десяти кидань кості шестірка випаде рівно п'ять разів.

3. Ймовірність ураження цілі під час одного пострілу буде $p=0{,}2$. Яка ймовірність того, що при 100 пострілах ціль буде уражена рівно 20 разів?

4. У родині п'ятеро дітей. Знайти ймовірність того, що серед цих дітей: а) два хлопчики; б) не більше двох хлопчиків; в) більше двох хлопчиків; г) не менше двох та не більше трьох хлопчиків. Вважати, що ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,51.

5. Знайти ймовірність того, що подія A з'явиться рівно 70 разів у 243 експериментах, якщо ймовірність появи цієї події в кожному експерименті дорівнює 0,25.

6. Знайти ймовірність того, що подія A з'явиться 1400 разів у 2400 експериментах, якщо ймовірність появи цієї події у кожному експерименті дорівнює 0,6.

7. Ймовірність ураження мішені при одному пострілі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах мішень уражена рівно 75 раз.

8. Підприємство випускає 1 % бракованих виробів. Яка ймовірність того, що з узятих на дослідження 1100 виробів бракованих буде не більше 17?

9. Проростання насіння даної рослини дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що з 900 штук посіяного насіння число пророслих буде знаходитися у проміжку між 790 та 830.

10. Ймовірність появи успіху в кожному з 625 незалежних експериментів дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що частість появи успіху відхилиться по абсолютній величині від його ймовірності не більше ніж на 0,04.

11. Скільки треба провести експериментів з підкиданням монети, щоб з імовірністю 0,92 можна було очікувати відхилення частості випадіння «герба» від теоретичної ймовірності 0,5 на абсолютну величину, меншу ніж 0,01?

12. Ймовірність появи успіху в кожному з 400 незалежних експериментів дорівнює 0,8. Знайти таке додатне число ε, що з ймовірністю 0,9876 абсолютна величина відхилення частості появи успіху від його ймовірності 0,8 не перевищує ε.

13. По каналу зв'язку передається п'ять повідомлень. Кожне з повідомлень незалежно від інших з імовірністю 0,3 викривляється завадами. Знайти ймовірність подій: а) з п'яти повідомлень три викривлені; б) не менше чотирьох з п'яти повідомлень передано правильно; в) не більше двох переданих повідомлень викривлені; г) усі повідомлення прийнято без викривлень; д) не менше двох повідомлень викривлено.

Відповіді:

1. 0,25. **2.** 0,013. **3.** 0,1. **4**. **а)** 0,31, **б)** 0,49, **в)** 0,52, **г)** 0,62. **5.** 0,0231. **6.** 0,0041. **7.** 0,04565. **8.** 0,9653. **9.** 0,9737. **10.** 0,9876. **11.** 7656. **12.** 0,05. **13. а)** 0,1323, **б)** 0,5282, **в)** 0,8369, **г)** 0,1681, **д)** 0,3143.

Розділ 2. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

2.1. Поняття випадкової величини

Випадковою величиною називається величина, яка в результаті експерименту може набувати різних значень, заздалегідь невідомо яких саме.

Позначають випадкові величини великими буквами X, Y, Z, … , а їх можливі значення відповідно маленькими x_i, y_i, z_i, … Наприклад, позначимо через X число очок, яке випало на верхній грані гральної кості, X – випадкова величина, можливі значення якої 1, 2, 3, 4, 5, 6 вона набуває залежно від результату експерименту – підкидання гральної кості. Нехай α позначає кут між великою стрілкою годинника, який зупинився, та горизонтальним напрямом. Тоді $X = tg\alpha$ буде випадковою величиною, яка спроможна набувати всіх значень від $-\infty$ до $+\infty$.

Існують два типи випадкових величин: **дискретні** та **неперервні.**

Дискретною випадковою величиною X називається випадкова величина, кожне з можливих значень якої x має окіл, який не містить жодного з інших значень тієї ж величини. Усі значения x такої випадкової величини X можуть бути перенумеровані, тобто x_1, x_2, …, x_n, … .

Неперервною випадковою величиною X називається випадкова величина, значення якої повністю заповнюють проміжок $(a;b)$ числової осі, який може бути скінченним або нескінченним.

Найважливіша характеристика випадкової величини − це розподіл імовірностей цієї величини. Справа в тому, що випадкова величина набуває тих чи інших значень, взагалі кажучи, з різними ймовірностями.

Розподіл імовірності випадкової величини задається сукупністю її значень або, можливо, множин цих значень та ймовірностей, з якими беруться ці значення.

2.2. Закон розподілу випадкових величин

Відповідність між усіма можливими значеннями випадкової величини та їх імовірностями називається **законом розподілу випадкової величини**. Закон розподілу можна задавати таблицею, графіком, аналітично.

Ряд розподілу. Найпростішу форму закону розподілу має дискретна випадкова величина. Щоб задати такий закон, достатньо перелічити можливі значення випадкової величини X: x_1, x_2, …, x_n, … та відповідні їм імовірності p_1, p_2, …, p_n, … . **Рядом розподілу** дискретної випадкової величини називається таблиця, у верхньому рядку якої перелічені у порядку зростання всі можливі значення випадкової величини, а у нижньому подані ймовірності цих значень. Запишемо ряд розподілу випадкової величини X: x_1, x_2, …, x_n, … з відповідними ймовірностями p_1, p_2, …, p_n, …

X	x_1	x_2	...	x_n	...
p	p_1	p_2	...	p_n	...

З того, що події $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$, ... несумісні та утворюють повну групу, випливає таке: сума всіх імовірностей, які стоять у нижньому рядку, дорівнює одинці, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \tag{2.1}$$

Ця одиниця якимось чином розподілена між значеннями випадкової величини (звідси і термін «розподіл»).

Приклад 1. Розглядається робота трьох незалежно працюючих технічних пристроїв (ТП). Ймовірність нормальної роботи першого ТП дорівнює 0,2; другого – 0,4; третього – 0,5. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X, яка являє собою число працюючих ТП.

Розв'язання. Введемо позначення $A = \{$нормально працює перший ТП$\}$; $B = \{$нормально працює другий ТП$\}$; $C = \{$нормально працює третій ТП$\}$. Знайдемо ймовірність події $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$, тобто ймовірність того, що всі ТП не працюють. Це означає, що випадкова величина набуває значення $X = 0$: $p_1 = P\{X = 0\} = P\{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\} = 0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}24$.

Аналогічно знаходимо решту ймовірностей:

$p_2 = P\{X = 1\} = P\{A\overline{B}\,\overline{C}\} + P\{\overline{A}B\overline{C}\} + P\{\overline{A}\,\overline{B}C\} = 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}8 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 + 0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}46$; $p_3 = P\{X = 2\} = P\{AB\overline{C}\} + P\{\overline{A}BC\} + P\{A\overline{B}C\} = 0{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 + 0{,}8 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}26$; $p_4 = P\{X = 3\} + P\{ABC\} = 0{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}04$.

Будуємо ряд розподілу:

X	0	1	2	3
p	0,24	0,46	0,26	0,04

Графічне зображення ряду розподілу називається **багатокутником розподілу**. Будується він так: на осі абсцис відкладають усі можливі значення випадкової величини та з кожної отриманої точки проводять перпендикуляри до осі абсцис, на яких відкладають ймовірність даного значення випадкової величини. Отримані точки для наочності (і тільки для наочності) з'єднують відрізками прямих. Для випадкової величини, яка розглядалася у прикладі 1, багатокутник розподілу показано на рис. 2.1.

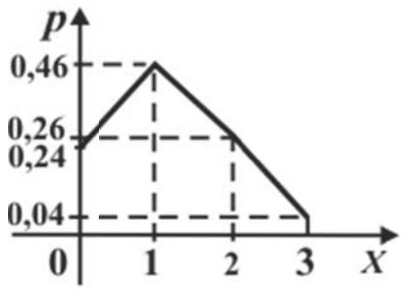


Рис. 2.1

Окрім геометричної інтерпретації розподілу дискретної випадкової величини, часто буває корисною її механічна інтерпретація: розподіл випадкової величини – це ряд матеріальних точок на осі абсцис, які мають абсциси x_1, x_2, ..., x_n, ... та відповідно маси p_1, p_2, ..., p_n, ..., які в сумі дають одиницю.

Функція розподілу. Ряд розподілу та відповідно багатокутник розподілу можуть бути побудовані тільки для дискретної випадкової величини. Найбільш загальною формою закону розподілу, яка годиться для будь-яких випадкових величин, є функція розподілу.

Функцією розподілу випадкової величини X називається ймовірність того, що вона набуде значення менше, ніж задане x:

$$\boxed{F(x) = P\{X < x\}}. \qquad (2.2)$$

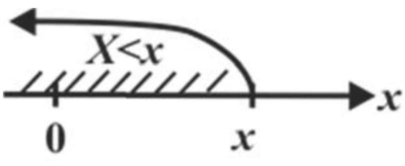


Рис. 2.2

Геометрично функція розподілу інтерпретується як імовірність того, що випадкова величина X опиниться ліворуч від заданої точки x. На рис. 2.2 відповідна частина осі абсцис, тобто множина точок, яка зображує подію $\{X < x\}$, позначена штриховкою.

Властивості функції розподілу. Нехай подія A полягає в тому, що випадкова величина X опинилася ліворуч точки x_1 ($A = \{X < x_1\}$); подія B – величина X опинилася між точками x_1 та x_2 ($B = \{x_1 \le X < x_2\}$); подія C – величина X опинилася ліворуч точки x_2 ($C = \{X < x_2\}$) (рис. 2.3). З цього рисунка бачимо, що $C = A + B$ і, крім того, події A та B несумісні, тому $P(C) = P(A) + P(B)$ або $P\{X < x_2\} = P\{X < x_1\} + P\{x_1 \le X < x_2\}$.

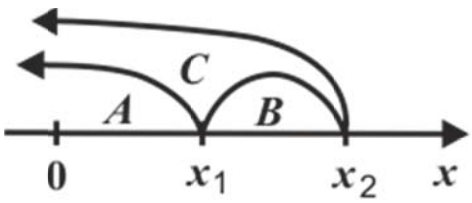


Рис. 2.3

Враховуючи, що $P\{x_1 \le X < x_2\} > 0$, отримаємо нерівність $P\{X < x_2\} > P\{X < x_1\} \Rightarrow F(x_1) < F(x_2)$ при $x_1 < x_2$. Таким чином: 1) функція розподілу будь-якої випадкової величини − це неспадна функція свого аргументу; 2) $F(-\infty) = 0$; 3) $F(+\infty) = 1$.

В окремих точках ця функція може мати стрибки (розриви першого роду), на деяких проміжках може бути сталою, на інших − монотонно зростати.

Якщо відома функція розподілу $F(x)$ величини X, можна обчислити ймовірність будь-яких подій з нею пов'язаних. Так, ймовірність того, що випадкова величина X у результаті експерименту попаде на проміжок $[\alpha;\beta)$, дорівнює приросту функції розподілу на цьому проміжку, тобто:

$$\boxed{P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)}. \qquad (2.3)$$

Для знаходження ймовірності окремого значення випадкової величини через функцію розподілу, наприклад $P\{X = \alpha\}$, візьмемо проміжок $[\alpha, \beta)$, який прилягає до цієї точки. Ймовірність того, що значення випадкової величини попаде саме в цей проміжок, знайдемо за формулою (2.3), а потім перейдемо до границі, коли $\beta \to \alpha$, та дістанемо: $P\{X = \alpha\} = \lim\limits_{\beta \to \alpha} (F(\beta) - F(\alpha))$.

Значення цієї границі залежить від неперервності функції $F(x)$ у точці α.

Якщо функція $F(x)$ у цій точці неперервна, то границя дорівнює нулю. Якщо функція $F(x)$ у точці α має стрибок, то границя дорівнює величині цього стрибка.

У будь-якому випадку ймовірність події $\{X = \alpha\}$ дорівнює *величині стрибка функції розподілу випадкової величини X у точці α (дорівнює цей стрибок нулю чи ні).*

Зокрема, якщо функція $F(x)$ усюди неперервна, то ймовірність кожного окремого значення випадкової величини X дорівнює нулю.

Побудуємо функцію розподілу випадкової величини з приклада 1. Будемо давати різні значення x та знаходити для них $F(x) = P\{X < x\}$.

1. Нехай $x \le 0$; оскільки число потраплянь від'ємним не може бути, то для будь-якого $x \le 0$ (включно 0) $F(x) = 0$.

2. Нехай $0 < x \le 1$ (наприклад, $x = 1/2$); $F(x) = P\{X = 0\} = 0{,}24$.

3. Нехай $1 < x \le 2$ (наприклад, $x = 1{,}75$); $F(x) = P\{X < x\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = 0{,}24 + 0{,}46 = 0{,}7$.

4. Нехай $2 < x \le 3$; $F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = 0{,}24 + 0{,}46 + 0{,}26 = 0{,}96$.

5. Нехай $x > 3$; $F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = 0{,}24 + 0{,}46 + 0{,}26 + 0{,}04 = 1$.

Зобразимо функцію розподілу на графіку (рис. 2.4). Функція розподілу має чотири стрибки; ці стрибки відбуваються у точках, які відповідають чотирьом можливим значенням випадкової величини та їх величина дорівнює цим значенням. Між стрибками функція $F(x)$ зберігає стале значення. Ці особливості характерні для функції розподілу будь-якої дискретної випадкової величини. Отже, *функція розподілу будь-якої дискретної випадкової величини − це розривна східчаста функція, стрибки якої відбуваються в точках, що відповідають можливим значенням випадкової величини, та дорівнюють імовірностям цих значень. Сума всіх стрибків функції $F(x)$ дорівнює одиниці.*

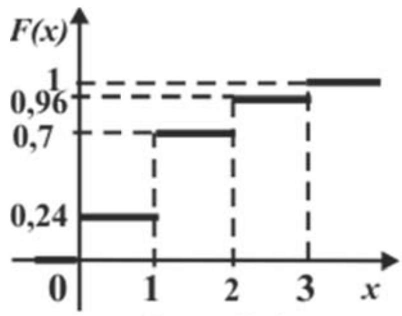


Рис. 2.4

Приклад 2. Знайти закон розподілу випадкової величини $X = \sin\frac{\pi}{3}\xi$, де ξ − число очок, що з'являється при киданні симетричної гральної кості.

Розв'язання. Величина ξ може набувати значень 1, 2, 3, 4 ,5, 6, а це означає, що випадкова величина набуває значень $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_3 = 0$, $x_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, x_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, x_6 = 0$, тоді

X	$-\sqrt{3}/2$	0	$\sqrt{3}/2$
p	$1/3$	$1/3$	$1/3$

.

Приклад 3. У грошовій лотереї випустили 200 білетів. Розігрується один виграш у 50 грн, два виграші по 25 грн та 10 − по 1 грн. Знайти ряд розподілу випадкової величини X, яка являє собою величину виграшу, якщо куплено один білет, та побудувати багатокутник розподілу.

Розв'язання. Випадкова величина X набуває значень 50, 25, 1, 0. У зв'язку з цим ряд та багатокутник розподілу мають вигляд, наведений на рис. 2.5, 2.6.

X	0	1	25	50
p	0,935	0,05	0,01	0,005

Рис. 2.5

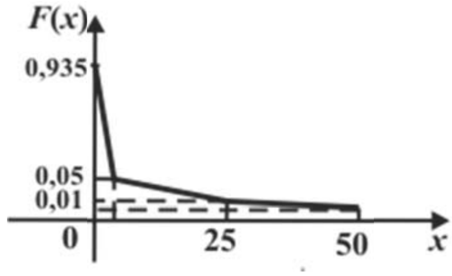


Рис. 2.6

Приклад 4. Випадкова величина X дана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le -1, \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} & при \; -1 < x \le \frac{1}{3}, \\ 1 & при \quad x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті експерименту величина X набуває значень, які розташовуються у проміжку $(0;\frac{1}{3})$.

Розв'язання. Згідно з формулою (2.3) маємо

$$P(0 < X < \frac{1}{3}) = F(\frac{1}{3}) - F(0) = \left[\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}\right]_{x=\frac{1}{3}} - \left[\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}\right]_{x=0} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Приклад 5. Випадкова величина X задана на всій осі Ox функцією розподілу $F(X) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg\frac{x}{2}$. Знайти можливе значення x_1, яке задовольняє умову: з імовірністю $\frac{1}{4}$ випадкова величина X у результаті експерименту набуде значення більше за x_1.

Розв'язання. Оскільки події $X \le x_1$ та $X > x_1$ − протилежні, то $P(X \le x_1) + P(X > x_1) = 1$ та $P(X \le x_1) = 1 - P(X > x_1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Враховуючи, що $P(X = x_1) = 0$, маємо $P(X \le x_1) = P(X = x_1) + P(X < x_1) = P(X < x_1) = \frac{3}{4}$. За означенням функції розподілу (2.2): $P(X < x_1) = F(x_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg \frac{x_1}{2}$.

Отже, $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg \frac{x_1}{2} = \frac{3}{4}$ або $arctg \frac{x_1}{2} = \frac{\pi}{4}$. Остаточно $\frac{x_1}{2} = 1$, або $x_1 = 2$.

Приклад 6. Дискретна випадкова величина X дана рядом розподілу**:**

X	2	4	7
p	0,5	0,2	0,3

Знайти функцію розподілу $F(X)$ та побудувати її графік.

Розв'язання. Значень, менших за число 2, величина X не набуває. Отже, коли $x \le 2$, функція $F(X) = P(X < x) = 0$. Коли $2 < x \le 4$, величина X може набувати значення 2 з імовірністю 0,5 і $F(X) = P(2 < x \le 4) = 0{,}5$. Коли $4 < x \le 7$, випадкова величина X може набути значення 2 з ймовірністю 0,5 та значення 4 з імовірністю 0,2. Отже, одне з цих значень, байдуже яке, X може набути (за теоремою суми ймовірностей несумісних подій) з імовірністю 0,5+0,2=0,7. Таким чином, $F(X) = P(4 < x \le 7) = 0{,}7$. Подія $x > 7$ достовірна, тому її імовірність дорівнює одиниці, тобто $F(X) = 1$. Отже, шукана функція розподілу має вигляд:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 2, \\ 0{,}5 & при \ 2 < x \le 4, \\ 0{,}7 & при \ 4 < x \le 7, \\ 1 & при \quad 7 < x. \end{cases}$$

Графік цієї функції наведено на рис. 2.7.

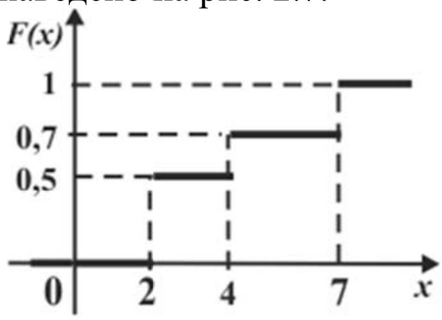


Рис. 2.7

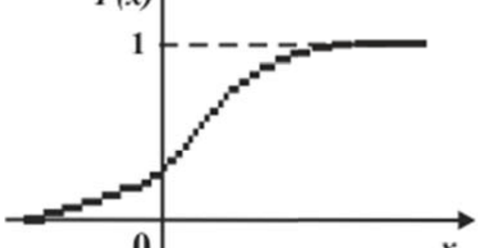


Рис. 2.8

Щільність розподілу. Якщо розглядати дискретну випадкову величину, яка має дуже багато можливих значень, які розташовано надто близько один до одного на числовій осі, то графіком функції $F(x)$ буде східчаста лінія, яка наближається до плавної неперервної (в ідеалі) лінії (рис. 2.8). Природною ідеалізацією такого положення буде випадок, коли функція $F(x)$

неперервна. Випадкова величина X називається неперервною, якщо її функція розподілу не тільки неперервна в будь-якій точці, але і диференційовна всюди, крім, може бути, окремих точок, де вона має злам. Оскільки $F(x)$ не має стрибків, то $P(X=a)=0$ для будь-якого a. Тому для неперервної випадкової величини нема сенсу казати про розподіл імовірності між її значеннями. У ролі *закону розподілу, що має сенс тільки для неперервної випадкової величини, розглянемо щільність розподілу або щільність імовірності*.

Щільністю розподілу (або **диференційовною функцією розподілу)** неперервної випадкової величини X у точці x називається границя $f(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{P(x\le X<x+\Delta x)}{\Delta x}$, якщо вона існує.

Нехай $F(x)$ – функція розподілу неперервної випадкової величини, тоді

$$P(x\le X<x+\Delta x)=F(x+\Delta x)-F(x),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x\le X<x+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \text{ та } f(x)=F'(x).$$

Отже, **щільністю розподілу** (**щільністю ймовірності**) неперервної випадкової величини X у точці x називається похідна її функції розподілу в цій !

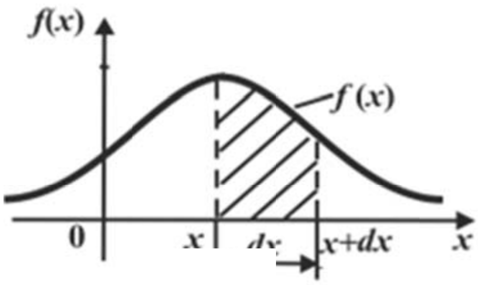


Рис. 2.9

Графік щільності розподілу $f(x)$ називається **кривою розподілу** (рис. 2.9).

Розглянемо неперервну випадкову величину X зі щільністю $f(x)$ (рис. 2.9). Нехай x – довільна точка; dx – проміжок, що прилягає до неї. Ймовірність потрапляння випадкової величини на цей проміжок (з точністю до нескінченно малих вищих порядків) дорівнює $f(x)dx$. Ця величина називається **елементом імовірності**. Геометрично елемент імовірності приблизно дорівнює площі елементарного прямокутника, який спирається на dx.

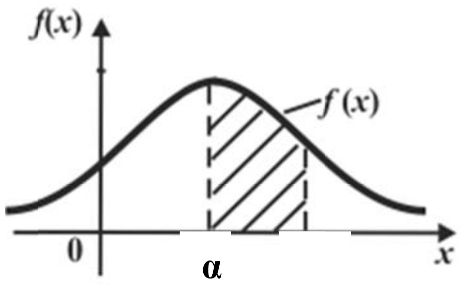


Рис. 2.10

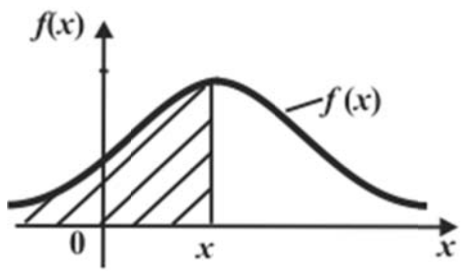


Рис. 2.11

Знайдемо вираз для ймовірності потрапляння випадкової величини X у проміжок $[\alpha,\beta)$. Очевидно, що ця ймовірність дорівнює сумі елементів імовірності на всьому цьому проміжку, тобто являє собою інтеграл:

$$\boxed{P\{\alpha \le X < \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.} \tag{2.4}$$

У геометричній інтерпретації ця ймовірність дорівнює площі, обмеженій зверху кривою розподілу, яка спирається на проміжок $[\alpha, \beta)$ (заштрихована на рис. 2.10).

Формула (2.4) дає можливість подати функцію розподілу $F(x)$ через щільність розподілу $f(x)$. Дійсно,

$$\boxed{F(x) = P\{X < x\} = P\{-\infty < X < x\} = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx}. \tag{2.5}$$

У геометричній інтерпретації функція розподілу дорівнює площі, що лежить ліворуч точки x.

Основні властивості щільності розподілу

1. Щільність розподілу − невід'ємна функція ($f(x) \ge 0$).

2. Інтеграл з нескінченними межами від щільності розподілу дорівнює одиниці, тобто $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Геометрично основні властивості можна уявити собі так: крива розподілу лежить не нижче осі абсцис; площа, обмежена кривою розподілу та віссю абсцис, дорівнює одиниці.

Приклад 7. Випадкова величина X має щільність розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x \le 0, \\ 0{,}5\sin x & \textit{при} \quad 0 < x \le \pi, \\ 0 & \textit{при} \quad x > \pi. \end{cases}$$

а) Побудувати функцію розподілу $F(x)$; б) знайти ймовірність того, що в результаті експерименту величина X набуде значень з проміжку $(0; \pi/4)$.

Розв'язання. а) З означення щільності ймовірності маємо $f(x) = F'(x)$ або $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$, це означає, що при $x \le 0$ дістанемо $F(x) = 0$; при $0 < x \le \pi$ отримаємо $F(x) = \int_{0}^{x} 0{,}5\sin x dx = -0{,}5\cos x\Big|_{0}^{x} = 0{,}5(1 - \cos x)$; при $x > \pi$ отримаємо $F(x) = \int_{0}^{\pi} 0{,}5\sin x dx = 1$. Таким чином, $F(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x \le 0, \\ 0{,}5(1 - \cos x) & \textit{при} \quad 0 < x \le \pi, \\ 1 & \textit{при} \quad x > \pi. \end{cases}$

б) $P(0 < x < \pi/4) = F(\frac{\pi}{4}) - F(0) = 0{,}5(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \approx 0{,}15$.

Приклад 8. Щільність розподілу випадкової величини X задається формулою $f(x) = Ax^2 e^{-3x}$, $(0 \le x < \infty)$. а) Знайти коефіцієнт A; б) побудувати функцію розподілу $F(x)$; в) обчислити ймовірність того, що випадкова величина X потрапить у проміжок $(0;\frac{1}{3})$.

Розв'язання. а) З одного боку, площа фігури, що лежить під кривою щільності ймовірності, дорівнює одиниці, а з іншого – інтегралу від функції, яка задає щільність імовірності:

$$A\int_0^\infty x^2 e^{-3x}dx = 1 \text{ або } -A\frac{9x^2+6x+2}{27}e^{-3x}\Big|_0^\infty = 1 \Rightarrow A = \frac{27}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{27}{2}x^2 e^{-3x}.$$

б) За формулою (2.5): $F(x) = \frac{27}{2}\int_{-\infty}^{x} x^2 e^{-3x}dx = 1 - \frac{9x^2+6x+2}{2}e^{-3x}$.

в) За формулою (2.4): $P\{0 < X < \frac{1}{3}\} = \frac{27}{2}\int_0^{1/3} x^2 e^{-3x}dx = 1 - \frac{5}{2e}$.

2.3. Числові характеристики положення випадкових величин

Кожен закон розподілу являє собою деяку функцію, зазначення якої в повній мірі описує випадкову величину з імовірнісної точки зору.

Але в багатьох випадках немає необхідності в такому повному опису, частіше достатньо знати тільки окремі числові параметри, що характеризують важливі риси розподілу. Ці числа, що в стислій формі описують найбільш важливі риси розподілу, називаються **числовими характеристиками** випадкової величини.

Серед числових характеристик розрізняють характеристики положення (математичне сподівання, мода, медіана) та характеристики розсіювання (дисперсія, середнє квадратичне відхилення, різні моменти розподілу вищих порядків).

Математичним сподіванням називається дійсне число, що визначається за формулою

$$\boxed{M(X) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i, & \textit{якщо випадкова величина дискретна} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, & \textit{якщо випадкова величина неперервна} \end{cases}} \qquad (2.6)$$

Математичне сподівання існує, якщо ряд (інтеграл) у правій частині формули (2.6) збігається абсолютно.

Властивості математичного сподівання

1. Математичне сподівання сталої величини $C = const$ дорівнює C:

$$M(C) = C. \tag{2.7}$$

2. Математичне сподівання добутку сталої величини $C = const$ на випадкову величину X дорівнює добутку сталої величини C на математичне сподівання випадкової величини X:

$$M(CX) = CM(X). \tag{2.8}$$

3. Математичне сподівання суми двох випадкових величин X_1 та X_2 дорівнює сумі їх математичних сподівань:

$$M(X_1 + X_2) = M(X_1) + M(X_2). \tag{2.9}$$

4. Математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань:

$$M(X_1 X_2) = M(X_1) \cdot M(X_2). \tag{2.10}$$

Модою неперервної випадкової величини X називається дійсне число x_m, яке визначається як точка максимуму щільності розподілу $f(x)$ (рис. 2.12).

Модою дискретної випадкової величини X називається її найбільш імовірне значення x_m, тобто це значення, яке в даній серії експериментів з'являлося найчастіше, для якого $P\{X = x_m\} = \max_k \{X = x_k\}$ (рис. 2.13).

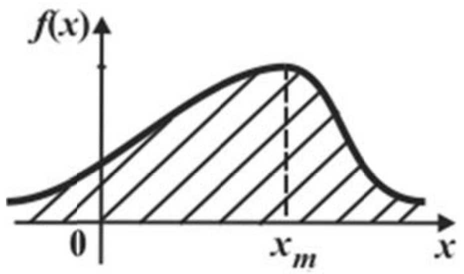


Рис. 2.12

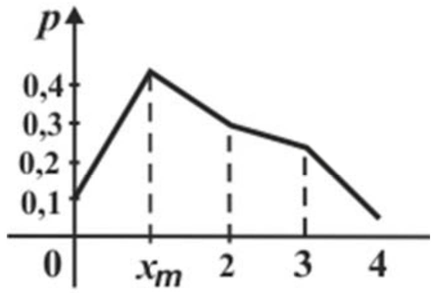


Рис. 2.13

Мода може не існувати, мати тільки одне значення (унімодальний розподіл) або мати багато значень (мультимодальний розподіл).

Медіаною неперервної випадкової величини називається дійсне число h_x, яке задовольняє умову $P(X < h_x) = P(X \geq h_x)$, тобто виявляється коренем рівняння $F(x) = 0{,}5$.

Оскільки рівняння $F(x) = 0{,}5$ може мати декілька коренів, то медіана визначається неоднозначно.

Геометрично медіана − це абсциса тієї точки на осі Ox, для якої площі, що лежать між віссю Ox та кривою розподілу ліворуч та праворуч від цієї точки, рівні між собою.

У випадку симетричного розподілу (що має моду) математичне сподівання, якщо воно існує, мода та медіана збігаються.

Приклад 9. Знайти математичне сподівання та моду для випадкової величини X , яка дана рядом розподілу:

X	0	1		3
p	0,01	0,3	5	

.

Розв'язання. За формулою (2.6) маємо:

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}01 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}1 = 1{,}6 .$$

Найбільш імовірне значення даної випадкової величини дорівнює 2 , отже, це і буде мода.

Приклад 10. Неперервна випадкова величина X має щільність розподілу $f(x) = \dfrac{\sin x}{2}$, коли. Знайти математичне сподівання, моду та медіану цієї випадкової величини.

Розв'язання. Даний розподіл симетричний (рис. 2.14), а для симетричного розподілу математичне сподівання, мода та медіана рівні, тому $M(X) = x_m = h_m = \dfrac{\pi}{2}$.

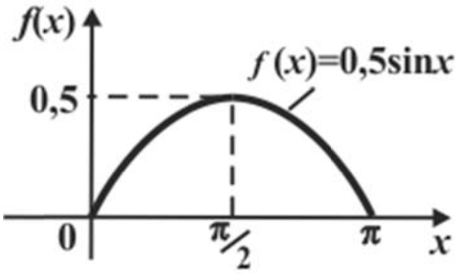


Рис. 2.14

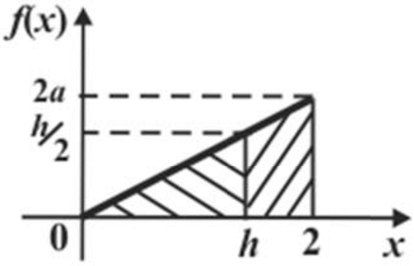


Рис. 2.15

Приклад 11. Неперервна випадкова величини X розподілена на проміжку $(0;2)$ за законом прямокутного трикутника: $f(x) = ax$ (рис. 2. 15). Знайти число a; математичне сподівання; моду та медіану розподілу.

Розв'язання. Як відомо площа, що лежить між кривою розподілу та віссю Ox дорівнює одиниці: $S_\Delta = 1$; з іншого боку, площа зображеного трикутника буде $S_\Delta = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2a.$ Отже, $2a = 1 \;\Rightarrow\; a = \dfrac{1}{2}$ та $f(x) = \dfrac{x}{2}$. За формулою (2.6) обчислюємо математичне сподівання: $M(X) = \int\limits_a^b xf(x)dx = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^2 x^2 dx = \left.\dfrac{x^3}{6}\right|_0^2 = \dfrac{4}{3}.$

Мода x_m – точка, де $f(x)$ досягає найбільшого значення, тому $x_m = 2$. Медіану знаходимо з рівняння $F(X) = 0{,}5$. Якщо відома щільність розподілу $f(x)$, то можна знайти функцію розподілу $F(X) = \int f(x)dx = \int \dfrac{x}{2}dx = \dfrac{x^2}{4}.$

Отже, $0{,}25x^2 = 0{,}5 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{2}$.

Остаточно, площі трикутника, що лежать ліворуч точки $x = \sqrt{2}$ та праворуч цієї точки рівні між собою, тобто медіана буде $h_m = \sqrt{2}$.

Крім зазначених характеристик положення, використовується ще ряд числових характеристик різного призначення. Серед них є моменти – початкові та центральні.

2.4. Моменти. Дисперсія. Середнє квадратичне відхилення

Початковим моментом s-го порядку випадкової величини X називається математичне сподівання s-го степеня цієї випадкової величини $\alpha_s(X) = M(X^s)$.

Для дискретної випадкової величини X маємо $\alpha_s(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^s p_i$.

Для неперервної випадкової величини X маємо $\alpha_s(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x)dx$.

Математичне сподівання випадкової величини, введене раніше, є не що інше як її перший початковий момент: $M(X) = \alpha_1(X)$.

Перед тим, як дати означення центральних моментів, введемо поняття «центрованої» випадкової величини X.

Центрованою випадковою величиною називається відхилення випадкової величини від її математичного сподівання $\overset{\bullet}{X} = X - M(X)$.

Неважко переконатися, що математичне сподівання центрованої випадкової величини дорівнює нулю.

Центральним моментом порядку s випадкової величини називається математичне сподівання s-го степеня центрованої випадкової величини

$$\mu_s(X) = M[(\overset{\bullet}{X})^s] = M[(X - M(X))^s].$$

Для дискретної випадкової величини $\mu_s = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^s p_i$.

Для неперервної випадкової величини $\mu_s = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^s f(x)dx$.

Очевидно, що для будь-якої випадкової величини X центральний момент першого порядку дорівнює нулю, тобто $\mu_1 = M(\overset{\bullet}{X}) = M(X - M(X)) = 0.$

Між центральними та початковими моментами існує зв'язок. Покажемо цей зв'язок на прикладі моментів другого порядку для дискретної випадкової величини: $\mu_2 = M[(\overset{\bullet}{X})^2] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - 2\sum_{i=1}^{n} x_i M(X) p_i +$

$$+\sum_{i=1}^{n}[M(X)]^2 p_i = \alpha_2 - 2M(X)\sum_{i=1}^{n} x_i p_i + [M(X)]^2 \sum_{i=1}^{n} p_i = \alpha_2 - 2[M(X)]^2 +$$

$$+[M(X)]^2 \quad \Rightarrow \quad \mu_2 = \alpha_2 - [M(X)]^2.$$

Аналогічно можна знайти зв'язок між моментами будь-якого порядку. Наприклад, для моментів третього порядку маємо:

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2 M(X) + 2[M(X)]^3.$$

Особливе значення для практики має другий центральний момент μ_2. Він називається **дисперсією випадкової величини** та має спеціальне позначення: $D(X)$.

Таким чином, **дисперсія випадкової величини** – це математичне сподівання квадрата відповідної центрованої величини. Отже:

$$\boxed{D(X) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(x_i - M(X))^2 p_i, & \textit{випадкова величина дискретна} \\ \int_{-\infty}^{\infty}(x - M(X))^2 f(x)dx, & \textit{випадкова величина неперервна} \end{cases}} \qquad (2.11)$$

На практиці часто буває простіше обчислити другий початковий момент ніж дисперсію, тоді використовують формули:

$$D(X) = \alpha_2 - [M(X)]^2 \quad \text{або} \quad D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2. \qquad (2.12)$$

Отже, **дисперсія випадкової величини дорівнює математичному сподіванню її квадрата мінус квадрат математичного сподівання цієї випадкової величини.**

Дисперсія − це характеристика розсіювання випадкової величини навколо її математичного сподівання.

Властивості дисперсії випадкової величини

1. Дисперсія сталої величини $C = const$ дорівнює нулю:

$$D(C) = 0. \qquad (2.13)$$

2. Дисперсія суми сталої величини $C = const$ та випадкової величини X дорівнює дисперсії випадкової величини X:

$$D(X + C) = D(X). \qquad (2.14)$$

3. Дисперсія добутку сталої величини $C = const$ на випадкову величину X дорівнює добутку квадрата сталої величини C на дисперсію випадкової величини X:

$$D(CX) = C^2 D(X). \qquad (2.15)$$

Математичне сподівання та дисперсія характеризують найважливіші риси розподілу: його положення та міру розсіювання.

Дисперсія має вимірність квадрата випадкової величини, що не завжди зручно, зручніше користуватися величиною, яка має ту ж вимірність, що і випадкова величина. Такою величиною буде середнє квадратичне відхилення:

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{D(X)}}. \tag{2.16}$$

У формулі (2.16) беремо додатне значення кореня.

Властивості середнього квадратичного відхилення

1. $\sigma(X) = 0$ тоді й тільки тоді, коли X − стала.
2. $\sigma(CX) = |C|\sigma(X)$.
3. Якщо X та Y – незалежні випадкові величини, то

$$\sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)}.$$

4. Середнє квадратичне відхилення середнього арифметичного n незалежних випадкових величин з однаковою дисперсією дорівнює $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Для невід'ємних випадкових величин X як характеристику «степеня ймовірності» іноді використовують коефіцієнт варіації, який показує, яку частку математичного сподівання складає середнє квадратичне відхилення:

$$\boxed{V = \frac{\sigma}{M(X)}}. \tag{2.17}$$

Коли $V < 1$ випадкова величина «менш випадкова», коли $V > 1$ − «більш випадкова».

Якщо відомо математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, можна скласти наближене зображення про діапазон її можливих значень, а саме: **значення випадкової величини X тільки зрідка виходять за межі проміжку $m \pm 3\sigma$ (правило трьох сигм).**

Для більш докладного опису розподілу існують моменти вищих порядків.

Третій центральний момент μ_3 характеризує асиметрію розподілу.

Якщо розподіл симетричний, то всі центральні моменти непарного порядку дорівнюють нулю, і тому природно за характеристику асиметрії вибрати непарний центральний момент (простіше за все μ_3). Він має вимірність кубу і для того, щоб отримати безрозмірну величину, його ділять на $\sigma^3(X)$ і отримують **коефіцієнт асиметрії** Sk (від англійського skew − «косий»):

$$\boxed{Sk = \frac{\mu_3}{\sigma^3}}. \tag{2.18}$$

На рис. 2.16 зображено дві асиметричні криві розподілу $f_1(x)$ та $f_2(x)$; перша крива має додатну асиметрію ($Sk > 0$), друга – від'ємну ($Sk < 0$).

Четвертий центральний момент μ_4 характеризує так звану «крутість» кривої розподілу, тобто показує, яка крива: гостроверха або плосковерха (використовується в основному для неперервних випадкових величин). Ця властивість характеризується за допомогою ексцесу:

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3}. \qquad (2.19)$$

Криві, для яких $\varepsilon_x > 0$, більш гостроверхі, криві з $\varepsilon_x < 0$ менше гостроверхі, ніж крива Гаусса, для якої $\varepsilon_x = 0$ (рис. 2.17).

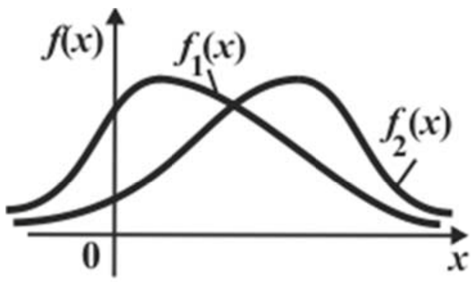


Рис. 2.16

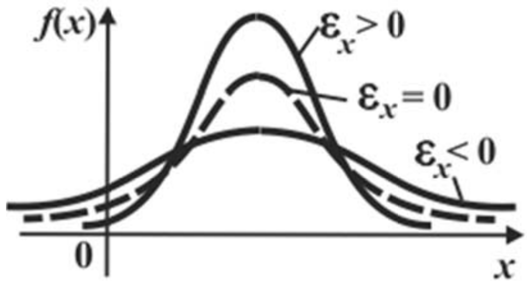


Рис. 2.17

Характеристикою ε_x користуються головним чином для симетричних розподілів.

2.5. Кореляційна залежність

Часто результат експерименту описується не однією випадковою величиною X, а декількома: $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Ці випадкові величини утворюють систему.

Систему двох випадкових величин (X, Y) можна зобразити випадковою точкою на площині.

Подія, яка полягає у потраплянні випадкової точки (X, Y) до області D, прийнято позначати $(X, Y) \subset D$.

Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин може бути заданим за допомогою таблиці:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nn}

де $x_x < x_2 < \ldots < x_m$, $y_x < y_2 < \ldots < y_n$, p_{ij} – ймовірності події, які полягають в одночасному виконанні рівностей $X = x_i$, $Y = y_j$. При цьому $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$.

Таблиця може мати нескінченну множину рядків та стовпців.

Закон розподілу системи неперервних випадкових величин (X,Y) будемо задавати за допомогою функції щільності розподілу $f(x,y)$. Ймовірність потрапляння випадкової точки (X,Y) до області D визначається рівністю

$$P\{(X,Y)\subset D\}=\iint\limits_{D} f(x.y)dxdy.$$

Функція щільності ймовірності має такі властивості:

$$1)\ f(x,y)\geq 0, \qquad 2)\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1.$$

Якщо всі випадкові точки (X,Y) належать скінченній області D, то остання умова набуває вигляду $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=1$.

Математичні сподівання випадкових величин, що входять у систему, визначаються за формулами:

– для дискретних випадкових величин

$$m_x=M(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i p_{ij}, \qquad m_y=M(Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}y_i p_{ij};$$

– для неперервних величин

$$m_x=M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy, \qquad m_y=M(Y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy.$$

Точка (m_x,m_y) називається **центром розсіювання** системи випадкових величин (X,Y). Для визначення дисперсії випадкових величин X та Y маємо формули:

– для дискретних величин

$$D(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}(x_i-m_x)^2,\ D(Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}(y_j-m_y)^2;$$

– для неперервних випадкових величин

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2 f(x,y)dxdy, \qquad D(Y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(y-m_y)^2 f(x,y)dxdy.$$

Середнє квадратичне відхилення: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$, $\sigma(Y)=\sqrt{D(Y)}$.

Теорія ймовірності має важливі застосування до вивчення залежності величин одна від одної. Вище розглядалися лише функціональні залежності, тобто такі, при яких, задавши значення одних величин, отримували точно, в повному обсязі, значення інших. Але, розглядаючи такі величини, як довжина l та вага p рибини, можна очікувати, що зі зростанням l буде зростати і p, тобто деяка залежність тут має місце. Та ця залежність здійснюється тільки в середньому, тому що довжина рибини не визначає її ваги, довга рибина може бути такою худою, що її вага буде менше ваги короткої.

Така «м'яка» залежність між величинами, яка здійснюється тільки в середньому, називається **кореляційною,** на відміну від «жорсткої», функціональної.

Кореляційна залежність з'являється у випадку, коли виявляється вплив факторів, які чомусь не враховуються, наприклад, через складний характер цього впливу.

Проте така залежність може з'явитися і по необхідності, незалежно від складності цих факторів. Справа в тому, що коли дві величини функціонально залежать від одного параметру: $x = x(t)$, $y = y(t)$, то ці співвідношення визначають жорстку, функціональну залежність між x та y. Але коли таких параметрів два або більше $x = x(t_1, t_2, \dots, t_n)$, $y = y(t_1, t_2, \dots, t_n)$, то ці співвідношення у *принципі* вже не визначають функціональну залежність між x та y. І тільки коли враховувати частоту реалізацій різних комбінацій значень параметрів $t_1, t_2, \dots, t_n$, то можливо казати про залежність між x та y, яка буде лише кореляційною.

Розглянемо загальний випадок. Нехай маємо дві випадкові величини X та Y, як-небудь зв'язаних між собою. Якщо ці величини незалежні, то за формулою (2.10) маємо $M(XY) = M(X)M(Y)$ або $M(XY) - M(X)M(Y) = 0.$ Останню різницю можна прийняти як найгрубішу міру залежності між X та Y, яку називають **кореляційним моментом** σ_{xy}. Проте частіше переходять до безрозмірного **коефіцієнта кореляції**

$$\boxed{r_{xy} = \frac{M(XY) - M(X)M(Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}} \quad \text{або} \quad \boxed{r_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma(X)\sigma(Y)}}, \qquad (2.20)$$

де в знаменнику стоять середні квадратичні відхилення величин X та Y.

Основні властивості коефіцієнта кореляції

1. Якщо X та Y − незалежні випадкові величини, то $r_{xy} = 0$.

Таким чином, якщо X та Y − незалежні випадкові величини, то вони *некорельовані.* Зворотне твердження неправильне (з некорельованості випадкових величин не випливає їх незалежність).

2. $r_{xx} = 1$. 3. $r_{xy} = r_{yx}$. 4. $|r_{xy}| \le 1$.

5. $|r_{xy}| = 1$ Тоді й тільки тоді, коли $Y = aX + b$, де a та b − деякі сталі. Іншими словами, якщо $|r_{xy}| = 1$, то між випадковими величинами X та Y існує лінійна функціональна залежність.

Лінійна регресія. Нехай у результаті n експериментів отримано n точок (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\dots, (x_n, y_n)$ (серед яких можуть бути й однакові).

Треба обчислити коефіцієнт кореляції цієї системи випадкових величин. Беручи до уваги закон великих чисел, при достатньо великому n можемо у формулах для визначення $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$, σ_{xy} замінити математичні сподівання $M(X)$ та $M(Y)$ середнім арифметичним значенням відповідних випадкових величин. Отримаємо такі наближені рівності: $M(X) \approx \widetilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$,

$M(Y) \approx \widetilde{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$, $\sigma_x^2 \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \widetilde{x}^2$, $\sigma_y^2 \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \widetilde{y}^2$, $\sigma_{xy} \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \widetilde{x}\widetilde{y}$.

Звідси за формулою (2.20) знаходимо коефіцієнт кореляції.
Якщо $|r_{xy}|\sqrt{n-1} \ge 3$, то зв'язок між випадковими величинами X та Y достатньо ймовірний. Якщо зв'язок між X та Y встановлено, то лінійне наближення $\widetilde{y}_x$ від x задається формулою лінійної регресії

$$\widetilde{y}_x - \widetilde{y} = r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \widetilde{x}) \text{ або } \widetilde{y}_x = ax + b .$$

Лінійне наближення $\widetilde{x}_y$ від y задається формулою лінійної регресії

$$\widetilde{x}_y - \widetilde{x} = r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \widetilde{y}) \text{ або } \widetilde{x}_y = cy + d .$$

Треба мати на увазі, що $\widetilde{y}_x = ax + b$ та $\widetilde{x}_y = cy + d$ – різні прямі. Перша пряма отримана в результаті вирішення задачі мінімізації суми квадратів відхилень по вертикалі, друга − при розв’язанні задачі мінімізації суми квадратів відхилень по горизонталі.

Для побудови рівнянь лінійної регресії треба: 1) за вихідною таблицею значень (x, y) обчислити $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$, σ_x, σ_y, σ_{xy}, r_{xy} ; 2) перевірити гіпотезу існування зв’язку між X та Y; 3) скласти рівняння ліній регресії та зобразити графіки цих прямих.

Приклад 12. Математичне сподівання та дисперсія випадкової величини X дорівнюють відповідно 2 та 10. Знайти математичне сподівання та дисперсію величини $2X + 5$.

Розв’язання. За формулами (2.7), (2.8), (2.9) маємо

$$M(2X + 5) = M(2X) + M(5) = 2M(X) + 5 = 4 + 5 = 9;$$
$$D(2X + 5) = D(2X) = 4D(X) = 40 .$$

Приклад 13. Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини, яка задана законом розподілу

X	3	5	7	9
p	0,4	0,3	0,2	0,1

.

Розв’язання. За формулою (2.6):

$$M(X) = 3\cdot 0{,}4 + 5\cdot 0{,}3 + 7\cdot 0{,}2 + 9\cdot 0{,}1 = 5 \text{ та } M^2(X) = 25 .$$

Далі $M(X^2) = 9\cdot 0{,}4 + 25\cdot 0{,}3 + 49\cdot 0{,}2 + 81\cdot 0{,}1 = 29$ та за формулою (2.12): $D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 29 - 25 = 4$. Отже, $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 2$.

Приклад 14. Знайти математичне сподівання та дисперсію: а) числа очок, що випали при киданні однієї гральної кості; б) суми очок, що випадають при киданні n гральних кісток.

Розв'язання. а) Випадкова величина X набуває значень 1 2, 3, 4, 5, 6 з однаковою ймовірністю $1/6$. Тоді за формулою (2.6) дістанемо

$$M(X)=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{7}{2} \text{ та } M^2(X)=\frac{49}{4}.$$

Математичне сподівання випадкової величини X^2 буде

$$M(X^2)=\frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36)=\frac{91}{6}.$$

Отже, $D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\dfrac{35}{12}$.

б) Використовуючи властивості математичного сподівання та дисперсії, отримаємо $M(nX)=nM(X)=\dfrac{7n}{2}$; $D(nX)=n^2D(X)=\dfrac{35n^2}{12}$.

Приклад 15. Дискретна випадкова величина X може бути задана двома значеннями x_1 та x_2, $x_1<x_2$. Знайти закон розподілу випадкової величини X, якщо $P(X=x_1)=0{,}2$, $M(X)=3{,}8$, $D(X)=0{,}16$.

Розв'язання. З того, що $p=P(X=x_1)=0{,}2$, маємо $q=P(X=x_2)=0{,}8$. Залишається знайти значення x_1 та x_2. Враховуючи, що $M(X)=x_1p+x_2q$ та $D(X)=M(X^2)-M^2(X)=x_1^2p+x_2^2q-3{,}8^2$, запишемо систему рівнянь $\begin{cases}0{,}2x_1+0{,}8x_2=3{,}8\\0{,}2x_1^2+0{,}8x_2^2-3{,}8^2=0{,}16\end{cases}$. Розв'язок системи $x_1=3$, $x_2=4$ відповідає умові $x_1<x_2$. Отже, шуканий закон розподілу має вигляд

X	3	4
p	0,2	0,8

Приклад 16. Знайти дисперсію випадкової величини X, функція розподілу якої $F(X)=\begin{cases}0 & при \quad x<0,\\0{,}75x^2-0{,}25x^3 & при\ 0\le x\le 2,\\1 & при \quad x>2.\end{cases}$

Розв'язання. Знаходимо щільність розподілу

$$f(x)=F'(X)=\begin{cases}0 & при \quad x<0,\\1{,}5x-0{,}75x^2 & при\ 0\le x\le 2,\\0 & при \quad x>2.\end{cases}$$

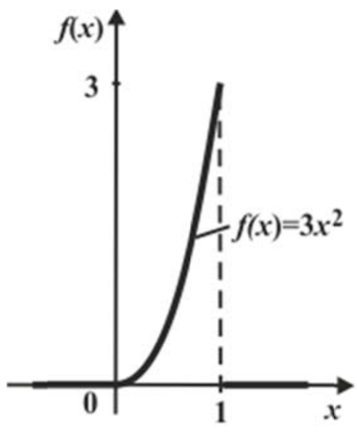


Рис. 2.18

Далі $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int\limits_{0}^{2}x(1{,}5x-0{,}75x^2)dx=1$;

$$M^2(X)=1;$$

$$M(X^2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int\limits_{0}^{2}x^2(1{,}5x-0{,}75x^2)dx=\frac{6}{5}\Rightarrow D(X)=\frac{6}{5}-\mathbf{1}=\frac{1}{5}.$$

Приклад 17. Знайти моду та медіану випадкової величини X, якщо її щільність розподілу $f(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x\le 1,\\ 0 & x\le 0,\quad x>1.\end{cases}$

Розв'язання. Графік $f(x)$ зображено на рис. 2.18. Оскільки $\max f(x)=3$, коли $x=1$, то $x_m=1$. Для знаходження медіани h_x розв'яжемо рівняння $F(X)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx=\frac{1}{2}$ або $\int\limits_{0}^{x}3x^2dx=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ x^3=\frac{1}{2}$. Тоді $x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Отже, $h_x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Приклад 18. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

X	1	2	4
p	0,1	0,3	0,6

.

Знайти центральні моменти першого, другого, третього та четвертого порядку.

Розв'язання. Для обчислення центральних моментів зручно використати формули, які визначають центральні моменти через початкові, тому спершу знайдемо початкові моменти:

$$\alpha_1=M(X)=1\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}3+4\cdot 0{,}6=3{,}1;$$

$$\alpha_2=M(X^2)=1\cdot 0{,}1+4\cdot 0{,}3+16\cdot 0{,}6=10{,}9;$$

$$\alpha_3=M(X^3)=1\cdot 0{,}1+8\cdot 0{,}3+64\cdot 0{,}6=40{,}9;$$

$$\alpha_4=M(X^4)=1\cdot 0{,}1+16\cdot 0{,}3+256\cdot 0{,}6=158{,}5.$$

Далі знайдемо центральні моменти: $\mu_2=\alpha_2-\alpha_1^2=10{,}9-3{,}1^2=1{,}29$;

$$\mu_3=\alpha_3-3\alpha_1\alpha_2+2\alpha_1^3=40{,}9-3\cdot 3{,}1\cdot 10{,}9+2\cdot 3{,}1^3=-0{,}888:$$

$$\mu_4=\alpha_4-4\alpha_1\alpha_3+6\alpha_2\alpha_1^2-3\alpha_1^4=158{,}5-4\cdot 40{,}9\cdot 3{,}1+6\cdot 3{,}1^2\cdot 10{,}9-3\cdot 3{,}1^4=2{,}7777.$$

Приклад 19. Закон розподілу випадкових величин X та Y має вигляд:

$X \backslash Y$	-1	0	1	p_x
-2	0,15	0,35	0,05	0,55
3	0,10	0,25	0,10	0,45
p_y	0,25	0,60	0,15	1

Знайти кореляційний момент σ_{xy} цих величин та коефіцієнт кореляції r_{xy}.

Розв'язання. Кореляційний момент знаходимо за формулою

$$\sigma_{xy}=M(XY)-M(X)M(Y).$$

Обчислюємо: $M(X)=-2\cdot 0{,}55+3\cdot 0{,}45=-1{,}1+1{,}35=0{,}25$;

$$M(Y)=-1\cdot 0{,}25+1\cdot 0{,}15=-0{,}25+0{,}15=-0{,}1;\quad M(X)M(Y)=-0{,}025;$$

$$M(XY)=-2\cdot(-1)\cdot 0{,}15+(-2)\cdot 0\cdot 0{,}35+(-2)\cdot 1\cdot 0{,}05+3\cdot(-1)\cdot 0{,}1+3\cdot 0\cdot 0{,}25+$$

$+3\cdot 1\cdot 0{,}1=0{,}2$. Остаточно $\sigma_{xy}=0{,}2+0{,}025=0{,}225$.

Щоб визначити коефіцієнт кореляції, обчислимо середні квадратичні відхилення $\sigma(X)$ та $\sigma(Y)$, для чого знайдемо: $M^2(X) = 0{,}0625$; $M^2(Y) = 0{,}01$;

$$M(X^2) = 4 \cdot 0{,}55 + 9 \cdot 0{,}45 = 2{,}2 + 4{,}05 = 6{,}25; \quad M(Y^2) = 1 \cdot 0{,}25 + 1 \cdot 0{,}15 = 0{,}4;$$

$$D(X) = 6{,}25 - 0{,}0625 = 6{,}1875; \quad D(Y) = 0{,}4 - 0{,}01 = 0{,}39.$$

Таким чином, $\sigma(X) = \sqrt{6{,}1875} = 2{,}4875$; $\sigma(Y) = \sqrt{0{,}39} = 0{,}6245$.
Коефіцієнт кореляції буде

$$r_{xy} = \frac{M(XY) - M(X)M(Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{0{,}225}{2{,}4875 \cdot 0{,}6245} = 0{,}1448.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу:

X	**1**	**3**	**6**	**8**
p	**0,2**	**0,1**	**0,4**	**0,3**

Побудувати багатокутник розподілу.

2. Пристрій складається з трьох незалежно працюючих елементів. Ймовірність відказу кожного елемента в одному експерименті дорівнює 0,1. Скласти ряд розподілу числа елементів, які відказали в одному експерименті.

3. X − сума випавших очок на двох кістках. Побудувати ряд та багатокутник розподілу.

4. Дискретна випадкова величина задана рядом розподілу:

X	**3**	**4**	**7**	**10**
p	**0,2**	**0,1**	**0,4**	

Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

5. Знайти функцію розподілу $F(X)$ для дискретної випадкової величини X − числа появи події A при чотирьох незалежних експериментах, якщо в кожному експерименті ймовірність появи цієї події $p = 1/3$.

6. На відрізку $[a;b]$ випадково з'являється точка. Знайти функцію розподілу випадкової величини X, яка виявляється координатою цієї точки. Побудувати $F(X)$.

7. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(X) = \begin{cases} 0 & при \quad x < 0, \\ x^2 & при \; 0 < x \le 1, \\ 1 & при \quad x > 1. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що за результатом чотирьох незалежних випробувань величина X рівно три рази набуде значення з проміжку $(0{,}25; 0{,}75)$.

8. Знайти щільність розподілу $f(x)$ неперервної випадкової величини X, якщо функція розподілу має вигляд:

$$F(X)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le 0, \\ \sin 2x & при\ 0<x\le 0{,}25\pi, \\ 1 & при \quad x>0{,}25\pi. \end{cases}$$

9. Щільність розпоілу неперервної випадкової величини X має вигляд

$$f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le 0, \\ x/a & при\ 0<x\le a, \\ 0 & при \quad x>a. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу ймовірності $F(X)$, потрапляння випадкової величини до проміжку $(1;2)$.

10. Щільність розподілу неперервної випадкової величини X задана на всій осі Ox рівністю $f(x)=\dfrac{4C}{e^{x}+e^{-x}}$. Знайти сталий параметр C.

11. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, яка дана рядом розподілу:

X	**-1**	**0**	**1**	**2**
p	**0,2**	**0,1**	**0,3**	**0,4**

12. Знайти $M(X)$ та $D(X)$, якщо випадкова величина X має щільність розподілу $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\cos^2 x & при\ |x|\le \pi/2, \\ 0 & при\ |x|>\pi/2. \end{cases}$.

13. Неперервна випадкова величина X розподілена на проміжку $(-1;1)$ зі щільністю розподілу $f(x)=\dfrac{3}{4}(1-x^2)$. Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

14. Неперервна випадкова величина X має щільність розподілу $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|}$. Знайти асиметрію та ексцес.

15. Знайти математичне сподівання випадкової величини X, яка задана функцією розподілу $F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le 0, \\ 0{,}25x & при\ 0<x\le 4, \\ 1 & при \quad x>4. \end{cases}$

16. Щільність розподілу випадкової величини X задана функцією $f(x)=2\cos 2x$ у проміжку $(0;\dfrac{\pi}{4})$; поза цього проміжку $f(x)=0$. Знайти моду та медіану величини X.

17. Щільність розподілу випадкової величини X задана функцією $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - 6$ у проміжку $(2;4)$, поза цим проміжком $f(x) = 0$. Знайти моду, математичне сподівання та медіану величини X.

18. Знайти дисперсію випадкової величини X, яка задана функцією розподілу $F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le -2, \\ 0{,}25x + 0{,}5 & при \; -2 < x \le 2, \\ 1 & при \quad x > 2. \end{cases}$

19. Випадкова величина X має щільність розподілу $f(x) = 0{,}5x$ у проміжку $(0;2)$; поза цим проміжком $f(x) = 0$. Знайти початкові та центральні моменти першого, другого, третього та четвертого порядків.

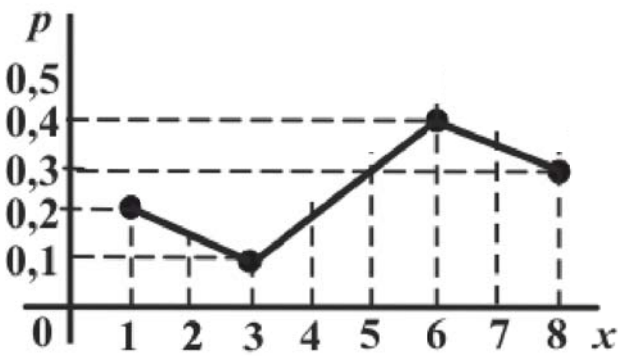
20. Сумісний розподіл випадкових величини X та Y визначається законом, поданим у вигляді таблиці:

$Y \backslash X$	-1	0	1	p_y
-2	$1/4$	$1/3$	$1/12$	$2/3$
3	$1/12$	$1/6$	$1/12$	$1/3$
p_x	$1/3$	$1/2$	$1/6$	1

Знайти кореляційний момент σ_{xy} та коефіцієнт кореляції r_{xy}.

Відповіді:

1.

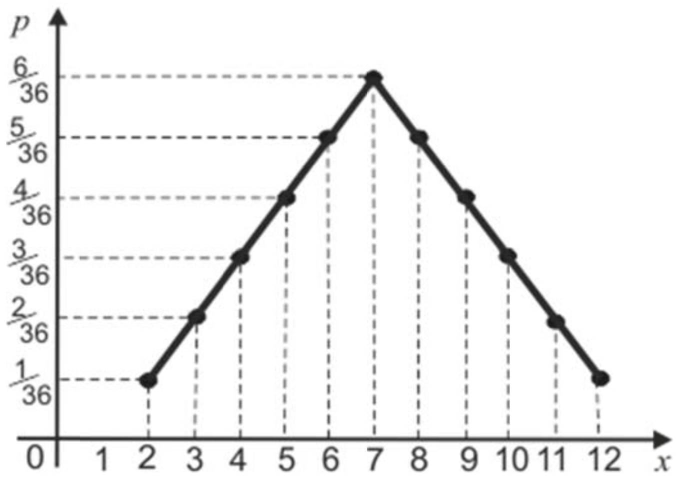


2.

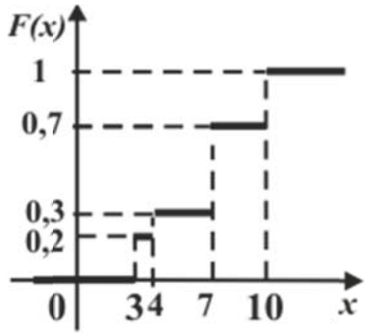
X	0	1	2	3
p	0,729	0,243	0,027	0,001

3.

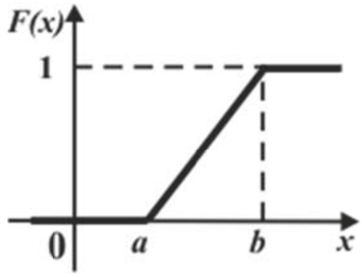
X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$



4. $$F(X)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le 3,\\ 0{,}2 & при \quad 3<x\le 4,\\ 0{,}3 & при \quad 4<x\le 7,\\ 0{,}7 & при \quad 7<x\le 10,\\ 1 & при \quad x>10.\end{cases}$$



5. $$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad -\infty<x\le 0,\\ 16/81 & при \quad 0<x\le 1,\\ 48/81 & при \quad 1<x\le 2,\\ 72/81 & при \quad 2<x\le 3,\\ 80/81 & при \quad 3<x\le 4,\\ 1 & при \quad 4<x<\infty.\end{cases}$$



6. $$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le a,\\ (x-a)/(b-a) & при \quad a<x\le b,\\ 1 & при \quad x>b.\end{cases}$$

7. $0\,0{,}25$.

8. $$f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le 0,\\ 2\cos 2x & при \quad 0<x\le 0{,}25\pi,\\ 0 & при \quad x>0{,}25\pi.\end{cases}$$

9. $a=2$; $F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le 0,\\ x^2/4 & при \quad 0<x\le 2,\\ 1 & при \quad x>2.\end{cases}$ $P(1<X<2)=\frac{3}{4}$.

10. $\frac{1}{2\pi}$.

11. $M(X)=0{,}9$, $D(X)=1{,}29$, $\sigma(X)=1{,}13$. **12.** $M(X)=0$, $D(X)=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}\approx 0{,}3225$.

13. $M(X)=0$, $D(X)=\frac{1}{5}$, $\sigma(X)=\frac{1}{\sqrt{5}}$. **14.** $Sk=0$, $\varepsilon_x=3$. **15.** 2.

16. m_x не існує; $h_x=\frac{\pi}{12}$. **17.** $m_x=M(X)=h_x=3$. **18.** $\frac{4}{3}$. **19.** $\alpha_1=\frac{4}{3}$, $\alpha_2=2$, $\alpha_3=3{,}2$, $\alpha_4=\frac{16}{3}$, $\mu_2=\frac{2}{9}$, $\mu_3=-\frac{8}{135}$, $\mu_4=\frac{16}{135}$. **20.** $\sigma_{xy}=0{,}2778$, $r_{xy}=0{,}1715$.

Розділ 3. ДЕЯКІ ВАЖЛИВІ РОЗПОДІЛИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

3.1. Біномний розподіл

Біномним називається закон розподілу дискретної випадкової величини $X-$ числа появи події в n незалежних експериментах, у кожному з яких імовірність появи події дорівнює p, а ймовірність можливого значення $X=m$ (числа появ події) обчислюється за формулою Бернуллі:

$$P_m = P(X=m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad (q = 1-p, \quad m = 0, 1, \ldots, n).$$

Для знаходження числових характеристик випадкової величини X, розподіленої за біномним законом, записують її твірну функцію:

$$\varphi(z) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} z^m = (q+pz)^n. \tag{3.1}$$

Саме так виглядає степінь бінома, звідси і термін «біномний розподіл». Диференціюючи (3.1) по z, маємо: $\varphi'(z) = n(q+pz)^{n-1}p$, тоді $M(X) = \varphi'(1) = np$. Для знаходження дисперсії, обчислюємо другу похідну твірної функції, другий центральний момент та остаточно визначаємо дисперсію:

$$\varphi''(z) = n(n-1)(q+pz)^{n-2}p^2 \Rightarrow \varphi''(1) = n(n-1)p^2;$$

$$\alpha_2 = \varphi''(1) + M(X) = n(n-1)p^2 + np;$$

$$D(X) = \alpha_2 - [M(X)]^2 = npq; \qquad \sigma(X) = \sqrt{npq}; \qquad Sk = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}; \qquad \varepsilon_x = \frac{1-6pq}{npq}.$$

3.2. Розподіл Пуассона

Дискретна випадкова величина X має **розподіл Пуассона**, якщо її можливі значення: $0, 1, 2, \ldots, m, \ldots$ утворюють нескінченну, але злічену множину і відповідні ймовірності подаються формулою

$$P_m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \; (m = 1, 2, \ldots). \tag{3.2}$$

Розподіл Пуассона залежить від одного параметра λ, який має такий сенс: він одночасно є математичним сподіванням та дисперсією випадкової величини X, яка розподілена за законом Пуассона.

Таким чином, $M(X) = D(X) = \lambda$, $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$, $Sk = 1/\sqrt{\lambda}$, $\varepsilon_x = 1/\lambda$.

Потоком подій називається послідовність подій, які з'являються у випадкові моменти часу.

Найпростішим (пуассонівським) називають потік подій, якому притаманні такі три властивості: стаціонарність, «відсутність післядії» та ординарність.

Стаціонарність потоку полягає в тому, що ймовірність появи m подій за проміжок часу t — це функція, яка залежить тільки від m та t. «Відсутність післядії» базується на тому, що попередня історія потоку не впливає на ймовірності появи подій у найближчому майбутньому.

Властивість ординарності полягає в тому, що ймовірність появи більше однієї події за малий проміжок часу мізерно мала порівняно з імовірністю появи тільки однієї події.

Інтенсивністю потоку λ^* називається середнє число подій, які з'являються в одиницю часу.

Якщо стала інтенсивність потоку відома, то ймовірність появи m подій найпростішого потоку за термін t визначається формулою Пуассона

$$P_t(m) = \frac{(\lambda^* t)^m}{m!} e^{-\lambda^* t}.$$

Приклад 1. Потік навантажених скипів, що прибувають на поверхню, можна вважати найпростішим з інтенсивністю $\lambda^* = 4$ (скип/год). Знайти ймовірність того, що за півгодини на поверхню прибуває: а) рівно один скип; б) хоч би один скип; в) не менше трьох скипів.

Розв'язання. Оскільки $t = 0{,}5$; $\lambda^* t = 4 \cdot 0{,}5 = 2$, то

а) $P_t(1) = 2 \cdot e^{-2} \approx 2 \cdot 0{,}135 = 0{,}270$;

б) $P_t(1) = P\{X \ge 1\} = 1 - P_t(0) \approx 1 - 0{,}135 = 0{,}865$;

в) $P_t(3) = 1 - (P_t(0) + P_t(1) + P_t(2)) \approx 1 - (1 + 2 + 2) \cdot 0{,}135 = 0{,}325$.

3.3. Геометричний розподіл

Дискретна випадкова величина має **геометричний розподіл**, якщо її можливі значення $0, 1, 2, \ldots, m, \ldots$, а ймовірності цих значень:

$$P_m = q^m p, \tag{3.3}$$

де $0 < p < 1$; $q = 1 - p$; $m = 0, 1, 2, \ldots$

Ймовірності P_m для послідовних значень m утворюють геометричну прогресію з першим членом p та знаменником q (звідси і назва «геометричний розподіл»).

На практиці геометричний розподіл з'являється за умови проведення ряду незалежних експериментів з метою отримання будь-якого результату A («успіху»). Під час кожного експерименту «успіх» досягається з імовірністю p. Тоді випадкова величина X – число «безуспішних» спроб (до першої спроби, у якій з'являється результат A) буде мати геометричний розподіл.

Використовуючи твірну функцію $\varphi(z) = p \sum_{m=0}^{\infty} (qz)^m$, можна знайти числові характеристики розподілу: $M(X) = q/p$; $D(X) = q/p^2$; $\sigma(X) = \sqrt{q}/p$.

Приклад 2. Під час кожного циклу огляду радіолокатора об'єкт (незалежно від інших циклів) виявляється з імовірністю $p = 0{,}2$. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення числа X циклів огляду, яке доведеться виконати без виявлення об’єкта.

Розв’язання. Випадкова величина X має геометричний розподіл з параметром $p = 0{,}2$. Тоді за вищенаведеними формулами маємо

$$M(X) = \frac{1-0{,}2}{0{,}2} = 4; \qquad D(X) = \frac{1-0{,}2}{0{,}2^2} = 20; \qquad \sigma(X) = \frac{\sqrt{1-0{,}2}}{0{,}2} = \sqrt{20} \approx 4{,}46.$$

3.4. Рівномірний розподіл

Неперервна випадкова величина має **рівномірний розподіл** на відрізку $[a; b]$, якщо щільність розподілу $f(x)$ на цьому відрізку має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{коли} \quad x \in (a;b), \\ 0, & \text{коли} \quad x \notin (a;b). \end{cases}$$

Далі для простоти будемо записувати вираз для щільності $f(x)$ тільки на тих відрізках, де ця величина відрізняється від нуля; при цьому на всіх інших відрізках вона дорівнює нулю.

Значення $f(x)$ у межових точках a та b відрізка $[a;b]$ не зазначається, оскільки ймовірність влучення в будь-яку з цих точок для неперервної випадкової величини дорівнює нулю.

Крива рівномірного розподілу (рис. 3.1) має вигляд прямокутника, який спирається на проміжок $(a;b)$.

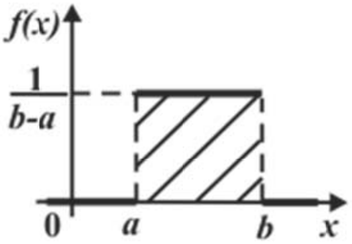


Рис. 3.1

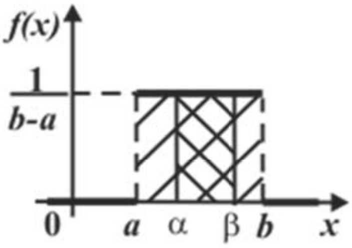


Рис. 3.2

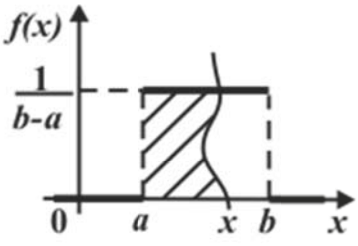


Рис. 3.3

Знайдемо числові характеристики розподілу.

$$M(X) = \int_a^b \frac{x\,dx}{b-a} = \frac{a+b}{2}. \qquad D(X) = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{dx}{b-a} = \frac{(b-a)^2}{12}. \qquad \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Рівномірний розподіл не має моди, його медіана, з міркувань симетрії, буде $m_x = \dfrac{a+b}{2}$. З таких же міркувань третій центральний момент випадкової величини X дорівнює нулю ($\mu_3 = 0$). Для визначення ексцесу знайдемо четвертий центральний момент

$$\mu_4 = \frac{1}{b-a}\int_x^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^4 dx = \frac{(b-a)^4}{80} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\mu_4}{\sigma^4(X)} - 3 = -1{,}2.$$

Ймовірність потрапляння випадкової величини X, що має рівномірний розподіл на проміжку $(a;b)$, до будь-якої частини проміжку $(\alpha;\beta)$ дорівнює площі, що два рази заштрихована на рис. 3.2: $P\{\alpha < x < \beta\} = \dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$.

Функція розподілу $F(X)$ випадкової величини X, яка розподілена рівномірно на проміжку $(a;b)$, являє собою площу, обмежену кривою розподілу ліворуч точки x (рис. 3.3). Графік функції розподілу зображено на рис. 3.4.

Наведемо декілька типів задач, де виникає рівномірний розподіл випадкової величини.

1. Здійснюється вимір деякої величини приладом з грубими поділками. Як наближене значення береться: а) найближче ціле; б) найближче менше ціле; в) найближче більше ціле. Розглядається випадкова величина $X-$ помилка вимірювання.

2. На осі маємо послідовність точок, які віддалені одна від одної на визначений проміжок, «кидається» випадкова точка. Випадкова величина X − це відстань до найближчої лівою або правою точок.

3. Вертикально встановлене симетричне колесо з фіксованим радіусом починають обертати, потім унаслідок тертя воно зупиняється. Випадкова величина $X-$ це кут, який після зупинки буде складати з горизонтальною лінією фіксований радіус.

Приклад 3. Довжина кімнати вимірюється за допомогою рулетки з грубими поділками, відокремленими відстанями по 10 см. Округлення здійснюється до найближчої поділки. Випадкова величина X − помилка вимірювання. Знайти щільність розподілу $f(x)$, функцію розподілу $F(X)$ та $M(X)$; $D(X)$; $\sigma(X)$.

Розв'язання. Кінець рулетки випадково потрапляє у проміжок $(-5;5)$, тоді випадкова величина X − відстань від випадкової точки до найближчої лівої точки, очевидно, має рівномірний розподіл на проміжку $(-5;5)$ (рис. 3.5) та $f(x)=\dfrac{1}{l}$, де $l=10$, тоді $f(x)=0{,}1$ та $F(x)=\dfrac{x}{l}=\dfrac{x}{10}$ (рис. 3.6).

$$M(X)=0{,}1\int_{-5}^{5}x\,dx=0, \qquad D(X)=0{,}1\int_{-5}^{5}(x-M(X))^2\,dx=\frac{25}{3}\approx 8{,}333,$$

$$\sigma(X)=\sqrt{8{,}333}=2{,}887.$$

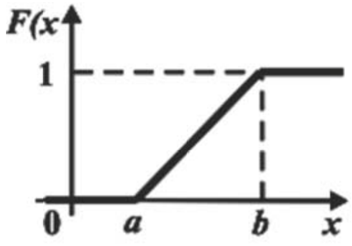


Рис. 3.4

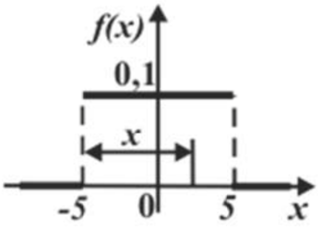


Рис. 3.5

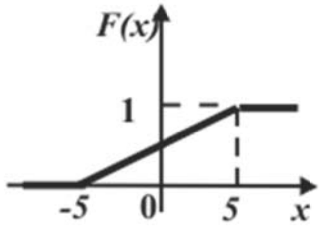


Рис. 3.6

Приклад 4. Потяги метрополітену ідуть регулярно з інтервалом у 2 хв. Пасажир виходить на платформу у випадковий момент часу, ніяк не зв'язаний з розкладом потягів. Знайти щільність розподілу $f(x)$ випадкової величини X − часу, протягом якого пасажиру доведеться очікувати потяг, а також $M(X)$; $D(X)$; $\sigma(X)$.

Розв'язання: $F(x)=\dfrac{x}{l}$, де $l=2$, тоді $F(x)=\dfrac{x}{2}$ $\Rightarrow$ $f(x)=\dfrac{1}{2}$;

$M(X)=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^2 xdx=1$; $D(X)=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^2 (x-M(X))^2dx=\dfrac{1}{3}$; $\sigma(X)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $P\{X<\dfrac{1}{2}\}=\dfrac{1}{4}$.

3.5. Експоненціальний розподіл

Неперервна випадкова величина має **експоненціальний розподіл**, якщо щільність розподілу $f(x)$ має вигляд

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & при\ \ x>0,\\ 0 & при\ \ x\le 0.\end{cases}$$

Додатна величина λ називається **параметром** експоненціального розподілу. Графік щільності експоненціального розподілу подано на рис. 3.7. Функція розподілу: $F(x)=\int\limits_0^x \lambda e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda x}$, $x>0$.

Графік функції експоненціального розподілу показано на рис. 3.8.

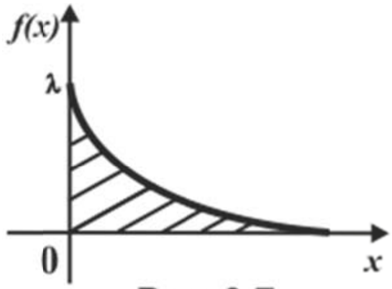


Рис. 3.7

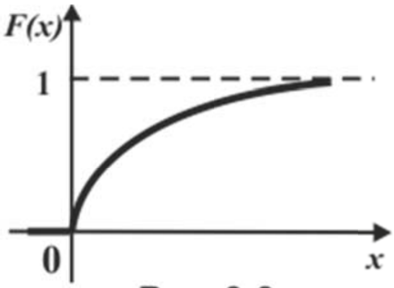


Рис. 3.8

Знайдемо числові характеристики розподілу.

$$M(X)=\int\limits_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx=\left\{\begin{matrix} u=x & du=dx\\ dy=e^{-\lambda x}dx & v=-\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\end{matrix}\right\}=\lambda\left[-\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty+\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda x}dx\right]=\frac{1}{\lambda}$$

$$D(X)=\alpha_2-[M(X)]^2=\int\limits_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2};\qquad \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

Коефіцієнт варіації експоненціального розподілу $V=\dfrac{\sigma(X)}{M(X)}=1$.

Щоб визначити асиметрію розподілу, знайдемо третій центральний момент: $\mu_3 = \lambda\int\limits_0^{\infty}(x-\frac{1}{\lambda})^3 e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda^3}$. Отже, коефіцієнт асиметрії $Sk = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 2$.

В основному експоненціальний розподіл використовують у теорії масового обслуговування та теорії надійності.

Приклад 5. Випадкова величина X розподілена за експоненціальним законом з параметром λ. Знайти щільність розподілу ймовірності випадкової величини $Y = X^2$.

Розв'язання. Щільність розподілу випадкової величини X за умовою задачі буде $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & при\ x > 0, \\ 0 & при\ x \le 0. \end{cases}$

Функція $y = \varphi(x) = x^2$ монотонно зростаюча всюди, тому для $f_Y(y)$ справедлива формула $f_Y(y) = F'_Y(y) = f_X(\varphi^{-1}(y))\left|\frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy}\right|$.

Обернена функція $\varphi^{-1}(y)$ та її похідна мають вигляд

$$\varphi^{-1}(y) = \sqrt{y}, \qquad \left|\frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy}\right| = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Отже, $f_Y(y) = \begin{cases} \lambda\frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\lambda\sqrt{y}} & при\ \ y > 0, \\ 0 & при\ \ y \le 0. \end{cases}$

3.6. Нормальний закон розподілу

Нормальний закон розподілу (інколи називають законом Гаусса) грає важливу роль у теорії ймовірностей та займає особливе положення.

Випадкова величинаа X має нормальний закон розподілу з параметрами a, σ, якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{3.6}$$

Крива нормального розподілу має симетричний, горбистий вигляд (рис. 3.9).

Максимальна ордината кривої дорівнює $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ і досягається при $x = a$, тобто $m_x = a$. З міркувань симетрії $M(X) = a$. Покажемо це:

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} = \left\{\begin{matrix} t = \frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} & dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}dx \\ x = \sigma t\sqrt{2}+a & dx = \sigma\sqrt{2}dt \end{matrix}\right\} =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma t\sqrt{2}+a)e^{-t^2}dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\int_{-\infty}^{\infty}t\,e^{-t^2}dt+\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=$$

$$=-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t(-2)e^{-t^2}dt+\frac{2a}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-t^2}dt=-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\frac{2a}{\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=a\,.$$

Тут враховано, що **інтеграл Пуассона**

$$\int_{0}^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Величина a називається **центром розсіювання**.

Знайдемо

$$D(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\sigma^2.$$

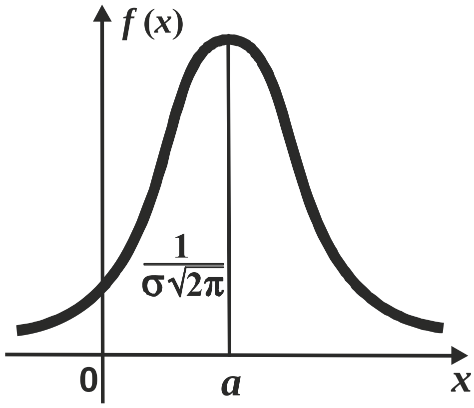


Рис. 3.9

Тоді $\sigma(X)=\sigma$. Отже, параметр σ – це середнє квадратичне відхилення.

Під час зміни параметрів a та σ крива Гаусса змінюється таким чином: при зміненні a крива $f(x)$ не змінює своєї форми, просто зміщується вздовж осі абсцис. Змінення σ рівнозначно зміненню масштабу кривої по осях. Наприклад, якщо подвоїти σ масштаб по осі Ox подвоїться, а по осі Oy зменшиться у два рази (рис. 3.10). Взагалі, коли будують криву Гаусса використовують функцію $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ – нормальна щільність при $a=0$, $\sigma=1$. Для цієї функції існує табл. 1.1.

Усі центральні моменти непарного порядку дорівнюють нулю (крива симетрична).

Для обчислення центральних моментів парних порядків існує рекурентне співвідношення $\mu_s=(s-1)\sigma^2\mu_{s-2}$, яке дає змогу обчислювати центральні моменти вищих порядків через центральні моменти більш нижчих порядків. Зокрема, враховуючи, що для будь-якої випадкової величини $\mu_0=1$, отримаємо $\mu_2=\sigma^2$; $\mu_4=3\sigma^4$; $\mu_6=3\cdot 5\sigma^6=15\sigma^6$ і т. д.

Враховуючи значення μ_4, отримаємо $\varepsilon_x=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3=\frac{3\sigma^4}{\sigma^4}-3=0$.

Обчислювати для нормальної випадкової величини X імовірність потрапляння на проміжок від α до β можна за допомогою функції $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, яка називається **функцією Лапласа** і яку визначають за табл. 1.2. Вона має такі властивості: 1) $\Phi(0)=0$; 2) $\Phi(-x)=-\Phi(x)$; 3) $\Phi(+\infty)=0{,}5$ (отже, $\Phi(-\infty)=-0{,}5$). За допомогою цієї функції маємо

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma}).$$

Ймовірність потрапляння нормально розподіленої випадкової величини X до проміжку довжиною $2l$ та симетричного відносно центру розсіювання буде:

$$P\{a-l < X < a+l\} = \Phi(\frac{l}{\sigma}) - \Phi(\frac{-l}{\sigma}) = 2\Phi(\frac{l}{\sigma}).$$

Функція розподілу нормально розподіленої випадкової величини X може бути записана за допомогою функції Лапласа таким чином:

$$F(X) = \frac{1}{2} + \Phi(\frac{x-a}{\sigma}).$$

Нормальне розподілення виникає у тих випадках, коли додаються багато незалежних (або слабко залежних) випадкових величин X_1, X_2, …, X_n ($X = \sum_{i=1}^{n} X_i$), при цьому ці величини порівнянні за порядком свого впливу на розсіювання суми. Тоді, які б не були закони розподілу випадкових величин, закон розподілу їх суми X буде близький до нормального (до того ж тим ближче, чим більше число доданків).

Приклад 6. Випадкова величина X розподілена нормально з параметрами a та σ. Знайти ймовірність того, що X відхиляється від свого математичного сподівання a більше, ніж на 3σ.

Розв'язання: $P\{|x-a| > 3\sigma\} = 1 - P\{|x-a| < 3\sigma\} = 1 - 2\Phi(\frac{3\sigma}{\sigma}) =$

$$= 1 - 2\Phi(3) \approx 1 - 2\cdot 0{,}49865 = 0{,}0027.$$

Приклад 7. Математичне сподівання нормально розподіленої випадкової величины X дорівнює $a=3$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma=2$. Записати щільність ймовірності величини X.

Розв'язання: $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$.

Приклад 8. Математичне сподівання, середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X відповідно дорівнюють 10 та 2. Знайти ймовірність того, що в результаті експерименту величина X набуде значення у проміжку (12; 14).

Розв'язання:

$$P\{12 < X < 14\} = \Phi(\frac{14-10}{2}) - \Phi(\frac{12-10}{2}) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0{,}4772 - 0{,}3413 = 0{,}1359.$$

Завдання для самостійної роботи

1. При кожному циклі огляду радіолокатора об'єкт (незалежно від інших циклів) виявляється з ймовірністю $p = 0{,}2$. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення числа X циклів огляду, яке доведеться провести аж до виявлення об'єкта (включаючи той, при якому об'єкт буде знайдено).

2. Визначити математичне сподівання випадкової величини X, значення якої лежать на відрізку $[a;b]$ зі сталою щільністю розподілу $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$.

3. Обчислити дисперсію та середнє квадратичне відхилення для випадкової величини X з рівномірним розподілом на проміжку $(2;8)$.

4. Усі значення рівномірно розподіленої випадкової величини лежать на відрізку $[2;8]$. Знайти ймовірність потрапляння випадкової величини до проміжку $(3;5)$.

5. Випадкова величина X розподілена за експоненціальним законом з параметром λ. Знайти щільність розподілу ймовірності випадкової величини $Y = \sqrt{X}$.

6. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням $M(X) = 40$ та дисперсією $D(X) = 200$. Обчислити ймовірність потрапляння випадкової величини до проміжку $(30;80)$.

7. Дана функція розподілу нормованого нормального розподілу $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dx$. Знайти щільність розподілу $f(x)$.

8. Знайти математичне сподівання експоненціального розподілу, який при $x \ge 0$ задається: а) щільністю $f(x) = 5e^{-5x}$; б) функцією розподілу $F(x) = 1 - e^{-0{,}1x}$.

Відповіді:

1. $M(X) = 5$; $D(X) = 20$; $\sigma(X) \approx 4{,}46$. **2.** $M(X) = \dfrac{a+b}{2}$. **3.** $D(X) = 3$; $\sigma(X) = \sqrt{3}$. **4.** $P(3 < x < 5) = \dfrac{1}{3}$. **5.** $f_Y(y) = \begin{cases} 0, & при\ y \le 0, \\ 2\lambda y e^{-\lambda y^2}, & при\ y > 0. \end{cases}$ **6.** 0,758.

7. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. **8 а)** $M(x) = 0{,}2$; **б)** $M(x) = 10$.

Розділ 4. ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

4.1. Закон великих чисел

Під час проведення серії однакових експериментів кількість появ випадкової події не підкоряється закономірності, яка відповідає об'єктивній можливості (при підкиданні монети п'ять разів може випасти «герб» усі п'ять раз, але ця ж подія не достовірна). Проте при зростанні кількості експериментів ця закономірність яскраво виявляється.

Таким чином, робити висновок про значення, які набуде випадкова величина, важко, усе залежить від сукупності випадкових обставин. Але коли таких випадкових обставин дуже багато, то з'ясовуються положення, які дають змогу передбачити хід експерименту. Положення, які дають змогу передбачити явище при великій кількості величин, називаються **законом великих чисел**.

Фізичний зміст цього закону може бути сформульований так: при дуже великій кількості випадкових явищ середній їх результат практично перестає бути випадковим та може бути передбаченим з великою мірою визначеності.

Можливість встановити кількісні оцінки ймовірності значень відхилень випадкової величини від середнього значення дають теореми Чебишова, Бернуллі, Маркова, які об'єднані загальною назвою закон великих чисел.

Нехай X_i $(i=\overline{1,n})$ – незалежні однаково розподілені випадкові величини, для яких $M(X_i)=a$, $D(X_i)=D$, $\sigma(X_i)=\sigma$.

Розглянемо випадкову величину $X=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\ldots+X_n)$. Її числові характеристики будуть: $M(X)=a$, $D(X)=\frac{D}{n}$, $\sigma(X)=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Як бачимо випадкова величина X має той же центр розсіювання, що і випадкові величини X_i, але з меншим розсіюванням ($D(X)=\frac{1}{n}D(X_i)$). Отже, X – надійна та стійка по відношенню до випадковостей величина. Тому під час експериментальних досліджень. виміри треба спочатку дублювати, а потім обчислювати їх середнє арифметичне. При цьому помилка зменшиться у $\sigma(X)=\frac{\sigma(X_i)}{\sqrt{n}}$ раз.

Але звідси не випливає, що помилку можна звести до нуля. Справа в тому, що крім випадкових помилок вимірів, існують систематичні помилки (назвемо їх помилками приладу $\sigma_{пр}$). Тоді число вимірів обмежиться відношенням $n\le\frac{\sigma^2}{\sigma_{пр}^2}$.

Кажуть, що випадкова величина X збігається за ймовірністю до a, якщо при достатньо великому n виконується нерівність

$$P\{|X_n - a| < \varepsilon\} > 1 - \delta,$$

де $\varepsilon > 0, \sigma > 0$ − довільно малі наперед задані числа.

Перша теорема Чебишова. Якщо випадкові величини X_1, X_2, …, X_n попарно незалежні та мають один і той же розподіл, тобто одне й те ж математичне сподівання $M(X)$ та одну й ту ж дисперсію $D(X)$, то середнє арифметичне значень випадкової величини, які спостерігаються в n незалежних експериментах, збігаються за ймовірністю до її математичного сподівання при $n \to \infty$, тобто

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - M(X)\right| < \varepsilon\right\} > 1 - \delta, \qquad \text{де} \qquad 0 < \delta < \frac{D(X)}{n\varepsilon^2}.$$

Друга теорема Чебишова. Якщо випадкові величини X_1, X_2, …, X_n попарно незалежні з різними взагалі математичними сподіваннями $M(X_i)$ та дисперсіями $D(X_i)$ $(i = \overline{1,n})$ і при цьому всі дисперсії обмежені зверху одним і тим же числом $D(X_i) < D$, то різниця між середнім арифметичним значень випадкової величини, які спостерігаються, та середнім арифметичним їх математичних сподівань збігаються за ймовірністю до нуля

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right\} > 1 - \delta.$$

Закон великих чисел може бути поширеним і на залежні випадкові величини.

Теорема Маркова (узагальнений закон великих чисел). Якщо випадкові величини X_1, X_2, …, X_n є залежними випадковими величинами з математичними сподіваннями $M(X_1)$, $M(X_2)$, …, $M(X_n)$ та дисперсіями $D(X_1)$, $D(X_2)$, …, $D(X_n)$, що задовольняють умову $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = 0$, то різниця між їх середнім арифметичним та середнім арифметичним їх математичних сподівань збігається за ймовірністю до нуля.

Приклад 1. Монета підкидається 1000 разів. Оцінити зверху ймовірність відхилення частості появи герба від імовірності появи герба менше ніж на 0,1.

Розв'язання. Тут $n = 1000$, $p = q = 0{,}5$, $\varepsilon = 0{,}1$. Використавши нерівність теореми Бернуллі, дістанемо

$$P\left(\left|\frac{m}{1000} - \frac{1}{2}\right| < 0{,}1\right) \ge 1 - \frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{1000 \cdot 0{,}01} = \frac{39}{40}.$$

З того, що нерівність $\left|\frac{m}{1000} - \frac{1}{2}\right| < 0{,}1$ рівносильна подвійній нерівності $400 < m < 600$, можна стверджувати, що ймовірність числа потрапляння герба до проміжку $(400, 600)$ більше за $\frac{39}{40}$.

Приклад 2. В урні 100 білих та 100 чорних кульок. Витягли з поверненням 50 кульок. Оцінити зверху ймовірність того, що кількість білих кульок з числа тих, що витягли, задовольняє подвійну нерівність $15 < m < 35$.

Розв'язання. Подвійну нерівність можна переписати у вигляді $-10 < m - 25 < 10$ або $-\frac{1}{2} < \frac{m}{50} - \frac{1}{2} < \frac{1}{5}$.

Отже, треба оцінити ймовірність нерівності $\left|\frac{m}{50} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{5}$; звідси маємо

$$\varepsilon = \frac{1}{5} \text{ та } P\left(\left|\frac{m}{50} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{5}\right) \geq 1 - \frac{1/2 \cdot 1/2}{50 \cdot 1/25} = \frac{7}{8}.$$

Приклад 3. У результаті 100 незалежних експериментів знайдено значення випадкової величини X: x_1, x_2, …, x_{100}. Задамо математичне сподівання $M(X) = 10$ та дисперсію $D(X) = 1$. Оцінити зверху ймовірність того, що абсолютна величина різниці між середнім арифметичним значень випадкової величини $\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} x_i$, які спостерігалися та математичним сподіванням буде менше за $0{,}5$.

Розв'язання. Використаємо нерівність

$$P\left(\left|\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} x_i - M(X)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(X)}{n\varepsilon^2}.$$

Враховуючи, що $n = 100$, $M(X) = 10$, $D(X) = 1$, $\varepsilon = 1/2$, дістанемо

$$P\left(\left|\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} x_i - 10\right| < \frac{1}{2}\right) \geq 1 - \frac{1}{100 \cdot 1/4} = \frac{24}{25}.$$

Таким чином, шукана ймовірність більше за 0,96.

4.2. Теореми Бернуллі та Ляпунова

Теорема Чебишова являє собою один із законів великих чисел, що лежать в основі всіх практичних застосувань теорії ймовірностей.

Другим та найпростішим (та раніше всіх установленим) законом великих чисел є теорема Я. Бернуллі.

Теорема Бернуллі встановлює, що при необмеженому збільшені числа експериментів частість випадкової події збігається за ймовірністю до ймовірності події, тобто $P\left(\left|\frac{m}{m} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \delta$ (причому можна взяти, що ($0 < \delta < \frac{pq}{n\varepsilon^2}$), якщо ймовірність події від експерименту до експерименту не змінюється та дорівнює p, а $q = 1 - p$.

Одне з найважливіших положень теорії ймовірностей ─ це **центральна гранична теорема**. Як і закон великих чисел, вона має ряд форм, у яких розглядаються умови виникнення нормального розподілу.

Центральна гранична теорема в різних її формах установлює умови, при яких з'являється нормальний розподіл та порушення яких веде до розподілу, відмінному від нормального.

Сформулюємо центральну теорему для однаково розподілених доданків.

Центральна гранична теорема (в спрощеному формулюванні **Ляпунова**). Якщо випадкові величини X_1, X_2, …, X_n незалежні, однаково розподілені, мають однакові математичні сподівання m та дисперсії σ^2, тоді закон розподілу нормованої випадкової величини:

$$X^n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - M(\sum_{i=1}^{n} X_i)}{\sqrt{D(\sum_{i=1}^{n} X_i}}$$

при $n \to \infty$ наближається до нормального закону з параметрами розподілу 0 та 1.

А.М. Ляпунов довів, що при $n \to \infty$ закон розподілу випадкової величини $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ необмежено наближається до нормального.

Приклад 4. У касі заводу знаходиться сума $d = 3500$ грн. У черзі стоять $n = 20$ осіб. Сума X, яку треба виплатити окремій особі ─ випадкова величина з математичним сподіванням $M(X) = 150$ та середнім квадратичним відхиленням $\sigma(X) = 60$. Знайти ймовірність того, що суми d достатньо для виплати всім людям, які стоять у черзі.

Розв'язання. За центральною теоремою для однаково розподілених доданків при великому n (а $n = 20$ практично можна вважати «великим»), випадкова величина $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, де X_i ─ сума, яку треба виплатити i-й особі, має наближено нормальний розподіл з параметрами: $M(Y_n) = nM(X)$; $D(Y_n) = nD(X)$; $\sigma(Y_n) = \sqrt{n}\,\sigma(X)$. Таким чином, $M(Y_n) = 20 \cdot 150 = 3000$; $\sigma(Y_n) = \sqrt{20} \cdot 60 \approx 268$; $P\{Y_n > 3500\} = 0{,}5 - \Phi(\frac{3500 - 3000}{268}) \approx 0{,}032$.

Отже, з ймовірністю 3 % суми, що є в касі, не достатньо для виплати всім особам, які стоять у черзі.

Приклад 5. Монета підкидається $n = 1000$ раз. Розглянемо випадкову величину X – число гербів, що випали. Визначити проміжок можливих значень випадкової величини X, симетричний відносно математичного сподівання цієї величини, до якого вона потрапляє з імовірністю $p = 0{,}0997$.

Розв'язання: $X = \sum_{i=1}^{1000} X_i$, де X_i – число гербів, що випали при i-му киданні: $X_i = \begin{cases} 0, & \textit{якщо випала цифра}, \\ 1, & \textit{якщо впав герб}. \end{cases}$ $M(X_i) = 0{,}5$; $D(X_i) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$; $M(X) = 0{,}5 \cdot 1000 = 500$; $D(X) = 0{,}25 \cdot 1000 = 250$; $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \approx 15{,}8$. На підставі центральної граничної теореми випадкова величина має нормальний розподіл, отже, $P(|X - M(X)| < \varepsilon) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma(X)}) = p = 0{,}997$; $\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma(X)}) = 0{,}4985$. За табл. 1.2 функції Лапласа знаходимо $\frac{\varepsilon}{\sigma(X)} \approx 2{,}97$; $\varepsilon \approx 15{,}8 \cdot 2{,}97 \approx 47{,}0$. Шуканий проміжок буде

$$(M(X) - \varepsilon; (M(X) + \varepsilon) = (500 - 470; 500 + 47) = (453; 547).$$

Завдання для самостійної роботи

1. Шестигранна кістка кидається 10000 раз. Оцінити ймовірність відхилення частості появи 6 очок від імовірності появи 6 очок менше ніж на 0,01.

2. В урні 1000 білих та 2000 чорних кульок. Витягли (з поверненням) 300 кульок. Оцінити зверху ймовірність того, що число m витягнутих при цьому білих кульок задовольняє подвійну нерівність $80 < m < 120$.

3. У результаті 200 незалежних експериментів знайдено значення випадкової величини X: x_1, x_2, …, x_{200}, причому $M(X) = D(X) = 2$. Оцінити зверху ймовірність того, що абсолютна величина різниці між середнім арифметичним значень випадкової величини $\frac{1}{200}\sum_{i=1}^{200} x_i$ та математичним сподіванням менше за $1/5$.

4. Завод випускає першосортні вироби з ймовірністю 0,9. Визначити мінімальну кількість виробів, які треба перевірити, для того щоб з імовірністю 0,95 відносна частість першосортних виробів відрізнялася від ймовірності 0,9 не більше ніж на 0,01.

5. Скільки разів треба вимірювати значення випадкової величини. щоб середнє значення цих вимірювань відрізнялося від математичного сподівання не більше ніж на подвоєне значення кореня з дисперсії з імовірністю не менше 0,98?

Відповіді :

1. $P\left(\left|\frac{m}{10000} - \frac{1}{6}\right| < 0{,}01\right) \geq \frac{31}{36}$. **2.** $P\left(\left|\frac{m}{300} - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{15}\right) \geq \frac{5}{6}$. **3.** $\frac{3}{4}$.

4. Не менше 3457. **5.** $n \geq 13$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Пак В.В. Вища математика : підручник / В.В. Пак, Ю.Л. Носенко – Донецьк : Сталкер, 2003. – 496 с.

2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие / В.Е. Гмурман. – 11-е изд., перераб. – Москва : Высшее образование, 2008. – 404 с.

3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и её инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – Москва : Наука, 1988. – 480 с.

4. Овчинников П.П. Вища математика : підручник: у 3-х ч. / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко ; під заг. ред. П.П. Овчинникова. – Київ : Техніка, 2000. – Ч. 3. – 552 с.

5. Скороход А.В. Елементи теорії ймовірностей та випадкових процесів / А.В. Скороход. – Київ : Вища школа, 1975. – 146 с.

6. Скороход А.В. Теорія ймовірностей : зб. задач / А.В. Скороход. – Київ : Вища школа, 1976. – 237 с.

7. Теория вероятностей : сб. задач / А.Я. Дороговцев, Д.С. Сильвестров, А.В. Скороход, М.И. Ядрепко. – Київ : Вища школа, 1980. – 306 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Н а в ч а л ь н е в и д а н н я

Фомичов Вадим Володимирович
Почепов Віктор Миколайович
Фомичова Людмила Яківна

Математика 2

Теорія ймовірностей

Навчальний посібник

Редактор Ю.В. Рачковська

Підписано до друку 13. 02. 2018. Формат 30х42/4.
Папір офсетний. Ризографія. Ум. друк. арк. 4,4.
Обл.-вид. арк. 4,4. Тираж 50 пр. Зам. №

Підготовлено до друку та видрукувано
у Національному технічному університеті
«Дніпровська політехніка».
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842
від 11.06.2004.
49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19