

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В МАССИВЕ ГОРНЫХ ПОРОД С УЧЕТОМ КОНТАКТНОГО ТРЕНИЯ

Л.М. Васильев, Д.Л. Васильев, Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова НАН Украины, Украина

Н.Г. Малич, Национальная металлургическая академия Украины, Украина

М.А. Журавков, Белорусский государственный университет, Белоруссия

Дан аналитический метод расчета горизонтальных напряжений в горной породе при учете контактного трения на основании известной теории прочности Кулона с использованием экспериментальных значений трех показателей свойств горных пород – предела сопротивляемости сдвигу, коэффициентов внутреннего и внешнего трения. Метод позволяет определить критерии превышения вертикальных напряжений над горизонтальными, гидростатического состояния и превышения горизонтальных напряжений над вертикальными.

Разработка научных методов и аналитическая оценка напряженно-деформированного состояния горных массивов с давних пор привлекали внимание ученых и инженеров горного производства.

Независимо от методологии оценка несущей способности горных массивов проводится по вертикальным и горизонтальным нормальным составляющим напряжений. Что касается определения вертикального напряжения, то ученые пришли к единому мнению о формировании его гравитационными силами. Сложнее обстоит дело с методологией расчета горизонтальных нормальных напряжений, не получивших еще глубокого теоретического объяснения, при высоких значениях которых довольно часто отмечаются динамические проявления горного давления. В ранние периоды исследований для расчета горизонтальных напряжений широко использовалась концепция А. Н. Динника. Но поворотным моментом в геомеханике стало экспериментально доведенное открытие о превышении в горных массивах в 3 и более раз горизонтальных напряжений над вертикальными [1]. В механике горных пород и грунтов, основанной на теории предельного равновесия, использовалась физическая формула горизонтальных напряжений, полученная с учетом паспорта прочности. Но и она не дает значений горизонтальных напряжений, превышающих вертикальные. “О механизме формирования повышенных тектонических напряжений в верхних горизонтах земной коры в геологической литературе высказан ряд гипотез, что подчеркивает неясность природы рассматриваемого феномена” [1].

Поэтому для управления напряженно-деформированным состоянием массива горных пород и для развития технологий их эффективного разрушения при дезинтеграции, необходимо определение горизонтальных напряжений, возникающих от приложенной вертикальной нагрузки и гравитационных сил. Это подтверждает актуальность разработки аналитического метода расчета горизонтальных напряжений в образцах горных пород при наличии контактного трения [2].

Рассмотрим взаимодействие нагрузочной плиты и образца для расчета горизонтальных напряжений. В основу метода расчета горизонтальных напряжений положен известный прием равновесия сил, действующих по граням элемента тела. Напряжения по граням принимаем равномерно распределенными для упрощения решения. Касательные напряжения от внешнего трения направим против деформации. Знак касательных напряжений примем с учетом правила знаков. Тогда можем принять, что в качестве граничных условий на одном из катетов равновесного прямоугольного треугольника (рис.1) и (рис. 2) приложена вертикальная нагрузка σ_y и контактные касательные напряжения, равные $f_k \sigma_y$.

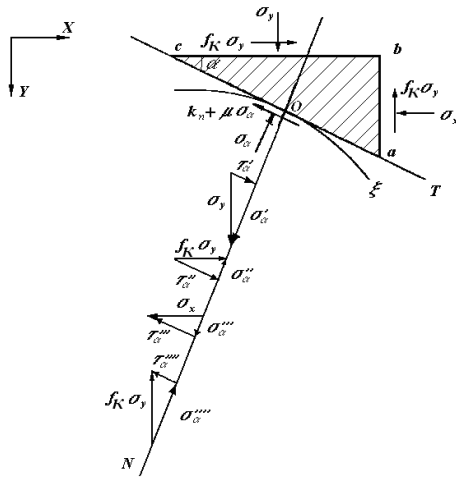


Рис.1. Левый треугольник в равновесном состоянии

На втором катете действуют горизонтальные напряжения σ_x и те же касательные напряжения $f_k \sigma_y$ (по закону парности касательных напряжений), а на наклонной площадке – активные касательные напряжения τ_α и нормальные напряжения σ_α . Тогда эффективные касательные напряжения согласно Кулону на экстремальной площадке определяется по формуле (1)

$$\tau_\alpha = |\tau_\alpha| - \mu \sigma_\alpha \leq \kappa_n \cdot \quad (1)$$

Теперь найдем математическую связь между нормальными и касательными напряжениями через угол α наклона касательной ac относительно оси абсцисс x для случая рис. 2. Для этого спроецируем силы, приложенные к треугольнику, на направление нормали к элементу траектории максимальных эффективных касательных напряжений (ТМЭКН) ξ в точке O . Обозначим площадь по катету ab элемента через S_1 и приравняем ее единице. Тогда площадь по катету bc будет равна $S_2 = S_1 \operatorname{ctg} \alpha$, а по гипотенузе ac $S_3 = S_1 / \sin \alpha$. На нормали ON произведем разложение напряжений, приложенных к треугольнику abc .

Перейдем к проецированию усилий на нормаль ON . От сжимающего напряжения σ_y будем иметь

$$\tau_\alpha' = \sigma_y \frac{S_2 \sin \alpha}{S_3} = \frac{1}{2} \sigma_y \sin 2\alpha \quad ; \quad \sigma_\alpha' = \sigma_y \frac{S_2 \cos \alpha}{S_3} = \sigma_y \cos^2 \alpha \cdot$$

От касательного напряжения $f_k \sigma_y$

$$\tau_\alpha'' = f_k \sigma_y \frac{S_2 \cos \alpha}{S_3} = f_k \sigma_y \cos^2 \alpha \quad ; \quad \sigma_\alpha'' = -f_k \sigma_y \frac{S_2 \sin \alpha}{S_3} = -\frac{1}{2} f_k \sigma_y \sin 2\alpha \cdot$$

От нормального напряжения σ_x

$$\tau_\alpha''' = -\sigma_x \frac{S_1 \cos \alpha}{S_3} = -\frac{1}{2} \sigma_x \sin 2\alpha \quad ; \quad \sigma_\alpha''' = \sigma_x \frac{S_1 \sin \alpha}{S_3} = \sigma_x \sin^2 \alpha \cdot$$

От касательного напряжения $f_k \sigma_y$, возникающего согласно закона парности касательных напряжений на площадке bc ,

$$\tau_\alpha'''' = -f_k \sigma_y \frac{S_1 \sin \alpha}{S_3} = -f_k \sigma_y \sin^2 \alpha \quad ; \quad \sigma_\alpha'''' = -f_k \sigma_y \frac{S_1 \cos \alpha}{S_3} = -\frac{1}{2} f_k \sigma_y \sin 2\alpha \cdot$$

Суммируя составляющие касательных и нормальных напряжений и производя

преобразования, имеем

$$\tau_{\alpha} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + f_k \sigma_y \cos 2\alpha, \quad (2)$$

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - f_k \sigma_y \sin 2\alpha. \quad (3)$$

Активные касательные напряжения τ_{α} на наклонной площадке уравниваются сопротивлением сдвигу материала и сопротивлением сдвигу от внутреннего трения $\mu \sigma_{\alpha}$. Тогда подставляя выражения (2) и (3) в уравнение (1), получаем

$$\tau_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + f_k \sigma_y \cos 2\alpha - \mu \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - f_k \sigma_y \sin 2\alpha \right). \quad (4)$$

Дифференцируя (4) и приравнявая производную нулю, получим

$$\frac{\partial \tau_s}{\partial \alpha} = -(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha_1 - 2f_k \sigma_y \sin 2\alpha_1 - \mu \left[(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha_1 - 2f_k \sigma_y \cos 2\alpha_1 \right] = 0.$$

Тогда

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(-\frac{(\sigma_x - \sigma_y) - 2\mu f_k \sigma_y}{\mu(\sigma_x - \sigma_y) + 2f_k \sigma_y} \right). \quad (5)$$

Угол наклона ТМЭКН ξ по известному правилу наклона углов принимается по условиям: если $\alpha_1 \geq 0$, то $\alpha_{\xi} = \alpha_1$; если $\alpha_1 < 0$, то $\alpha_{\xi} = \frac{\pi}{2} + \alpha_1$. Из чего следует

$$\alpha_{\xi} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - \mu \frac{2f_k \sigma_y}{\sigma_x - \sigma_y}}{\mu + \frac{2f_k \sigma_y}{\sigma_x - \sigma_y}} \right). \quad (6)$$

На основании выражения (6) получим тригонометрические функции

$$\sin 2\alpha_{\xi} = \frac{(\sigma_x - \sigma_y) - 2\mu \tau_k}{\sqrt{(1 + \mu^2) \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_k^2 \right]}}; \quad (7)$$

$$\cos 2\alpha_{\xi} = -\frac{\mu(\sigma_x - \sigma_y) + 2\tau_k}{\sqrt{(1 + \mu^2) \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_k^2 \right]}}. \quad (8)$$

После преобразований выражения (4) с использованием выражений (7) и (8), учитывая, что $\alpha_1 = (\alpha_{\xi} - \frac{\pi}{2})$, для левого угла имеем уравнение

$$\tau_s = \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \mu^2) \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4f_k^2 \sigma_y^2 \right]} - \frac{\mu(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \quad (9)$$

Теперь перейдем к рассмотрению равновесия правого треугольного элемента деформируемого материала при том же направлении сил трения (рис. 2).

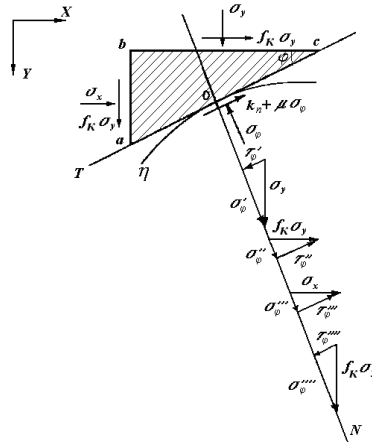


Рис.2. Правый треугольник в равновесном состоянии

Используя угол φ , проанализируем равновесие треугольного элемента abd . Осуществляем проецирование всех сил на нормаль $O'N'$. Просуммируем составляющие касательных и нормальных напряжений:

$$\tau_{\varphi} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi - f_k \sigma_y \cos 2\varphi. \quad (10)$$

$$\sigma_{\varphi} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + f_k \sigma_y \sin 2\varphi. \quad (11)$$

Тогда для правого треугольника эффективное касательное напряжение представляется в виде

$$\tau_3 = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi - f_k \sigma_y \cos 2\varphi - \mu \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + f_k \sigma_y \sin 2\varphi \right). \quad (12)$$

После исследования на максимум угол наклона площадки, на которой τ_3 имеет максимальное значение, будет

$$\operatorname{tg} 2\varphi_1 = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y) + 2\mu f_k \sigma_y}{\mu(\sigma_x - \sigma_y) - 2f_k \sigma_y}. \quad (13)$$

Используя выражение (13), на основании (12) получим выражение (9). На основании этого приходим к выводу, что эффективное касательное напряжение для правого и левого треугольников выражается одним и тем же уравнением (9), несмотря на то, что треугольники относятся к разным ТМЭКН ξ и η .

Теперь определим формулу для расчета поперечных (горизонтальных) нормальных напряжений на основании выражения (9). Представим это выражение в виде

$$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4f_k^2 \sigma_y^2} = 2\tau_3 \cos \rho + (\sigma_x + \sigma_y) \sin \rho. \quad (14)$$

После преобразований (14) находим

$$\sigma_x = \frac{[\sigma_y(1 + \sin^2 \rho) + 2\tau_3 \cos \rho \sin \rho] \pm 2(\sigma_y \mu + \tau_3) \sqrt{1 - b^2}}{\cos^2 \rho}, \quad (15)$$

где

$$b = \frac{f_k \sigma_y}{\tau_3 + \mu \sigma_y}. \quad (16)$$

Если принять в формуле (15) знак плюс перед радикалом, то имеем для случая отсутствия внутреннего трения $\sigma_x = 2\tau_3 \sqrt{1 - b^2} + \sigma_y$, где $b = \frac{\tau_k}{\sigma_y}$, т.е. $\sigma_x > \sigma_y$, что нереально для материалов,

не обладающих внутренним трением. К исключению знака плюс пришли и другие авторы (например, [3]). Эффективное касательное напряжение τ_s в формулах (15) и (16) обозначим через κ – текущее значение сопротивления материала сдвигу. Формулу (15) преобразуем к виду

$$\sigma_x = \frac{2(\kappa + \mu\sigma_y)}{\cos \rho} (\sin \rho - \sqrt{1-b^2}) + \sigma_y. \quad (17)$$

Параметр b , равный $\frac{f_k \sigma_y}{\kappa + \mu\sigma_y}$, определяет отношение контактного касательного напряжения от

трения между плитой и контактной плоскостью образца к касательному напряжению внутри материала с учетом сопротивления сдвигу и фрикционной составляющей от внутреннего трения. Подчеркиваем, что уравнение (17) является обязательным алгебраическим уравнением равновесия для всех точек тела при оценке его напряженного состояния совместно с известными дифференциальными уравнениями равновесия [3]. Уравнение (17) позволяет рассчитывать весь спектр горизонтальных сжимающих напряжений, включая гидростатические и превышающие вертикальные, их порождающие, при знании экспериментальных данных трех параметров: κ , μ и f_k [4-6]. Если представить, что отсутствует контактное трение, то формула (17) примет вид

$$\sigma_x = \frac{2(\kappa + \mu\sigma_y)}{\cos \rho} (\sin \rho - 1) + \sigma_y. \quad (18)$$

Напряжение σ_y для пород при отсутствии внешнего трения определяется по известной формуле [7]

$$\sigma_y = \frac{2\kappa \cos \rho}{1 - \sin \rho}.$$

После подстановки этого выражения в формулу (18) получим

$$\sigma_x = \frac{-2\kappa \cos^2 \rho + 2\mu \cos^2 \rho}{\cos \rho (1 - \sin \rho)}.$$

Следовательно, при отсутствии контактного трения напряжение $\sigma_x = 0$. Внутреннее трение самостоятельно не формирует напряжение σ_x . Приходим к известному в механике деформируемого тела постулату об отсутствии горизонтальных (поперечных) нормальных напряжений при вертикальном одноосном нагружении конечного тела при отсутствии контактных касательных напряжений. При отрицательном значении разности $(\sin \rho - \sqrt{1-b^2})$ в

формуле (17) $0 < \sigma_x < \sigma_y$, а при $\sin \rho = \sqrt{1-b^2}$ возникает гидростатическое состояние. При положительном значении этой разности горизонтальные напряжения превышают вертикальные, так как положительная разность складывается с положительной величиной вертикального напряжения σ_y . Попутно отметим, что среди отдельной части научных работников значения нормальных горизонтальных напряжений, превышающих вертикальные, полученные на основании теории деформирования тела, вызывают недоумение. Подчеркиваем, что основания для недоумений нет. Сошлемся на И.А. Биргера и Р.Р. Мавлютова [8], которые пишут, что условия равновесия предусматривают равновесие не напряжений (таких условий не существует), а действующих усилий по граням равновесного треугольника. Дело в том, что в зависимости от значения внешних нагрузок и коэффициентов внешнего и внутреннего трения материалов изменяются площади граней упомянутого треугольника в силу изменения его углов. Соответственно изменяются силы на гранях равновесного треугольника. Из анализа выражения (17) вытекает, что горизонтальные напряжения порождаются касательными напряжениями от контактного трения между слоями пород, в свою очередь, которые зависят от показателей физико-механических свойств (рис. 3).

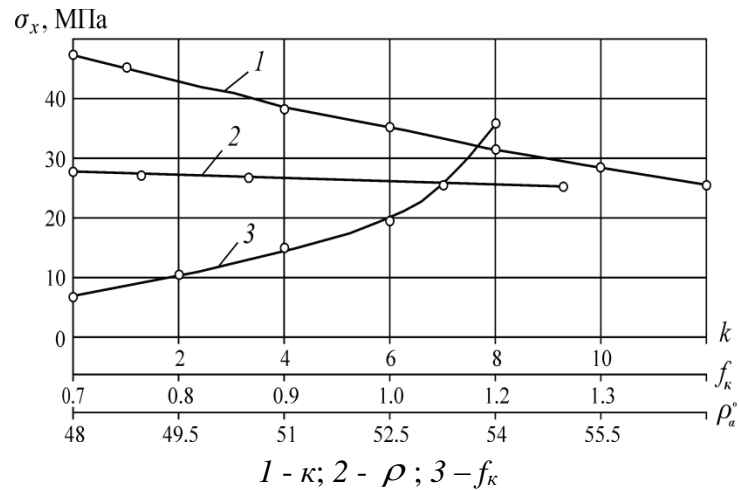


Рис.3. Зависимости горизонтальных напряжений от показателей физико-механических свойств пород

Из преобразования разности формулы (17) получены критерии превышения вертикальных напряжений над горизонтальными, гидростатического состояния и превышения горизонтальных над вертикальными. При значении

$$b_\kappa = \left| \frac{f_\kappa \sigma_y}{\kappa_n + \mu \sigma_y} \right| < \cos \rho \quad (19)$$

сжимающие горизонтальные напряжения меньше вертикальных;
при

$$b_\kappa = \left| \frac{f_\kappa \sigma_y}{\kappa_n + \mu \sigma_y} \right| = \cos \rho \quad (20)$$

возникает гидростатическое состояние;
при

$$b_\kappa = \left| \frac{f_\kappa \sigma_y}{\kappa_n + \mu \sigma_y} \right| > \cos \rho \quad (21)$$

сжимающие горизонтальные напряжения превышают вертикальные [4-6].

При $b = 1$ получено теоретически возможное максимальное значение контактного трения

$$f_\kappa = \frac{\kappa}{\sigma_y} + \mu.$$

Уравнение (17) позволяет обосновать возникновение значения горизонтальных сжимающих напряжений, меньших и превышающих значения горного давления, включая и гидростатические, вследствие деформирования слоев горных пород в верхней части земной коры при разработке месторождений полезных ископаемых. Величина горизонтальных напряжений зависит от сопротивляемости сдвигу пород между слоями: при слабых, например глинистых породах, возникают невысокие горизонтальные напряжения, при крепких, например кварцесодержащих, – горизонтальные напряжения превышают гравитационные.

Отметим, что из условия приведенного третьего критерия, на наш взгляд, представляется возможным раскрытие природы возникновения горных ударов, поскольку при этом условии на угол, равный $\pi/2$, поворачивается координатная система в силу того, что напряжение σ_x становится наибольшим. Формула (17) в дальнейшем широко будет нами использована при исследовании прочности образцов горных пород.

Выводы.

1. Разработан аналитический метод расчета горизонтальных напряжений в образцах горных пород при наличии контактного трения. Эта важная информационная характеристика, необходима для управления напряженно-деформированным состоянием массива горных пород, а также дает возможность развития новых технологий для повышения эффективности разрушения горной породы при дезинтеграции.

2. Метод расчета позволяет определять величину горизонтальных напряжений в образцах горных пород при наличии трех показателей их свойств (k_n – предела сопротивления материала сдвигу, f и μ – коэффициентов контактного и внутреннего трения), доступных для экспериментального определения в лабораториях производственных предприятий простыми техническими средствами.

3. Найденное уравнение позволяет обосновать возникновение значения горизонтальных сжимающих напряжений, меньших и превышающих значения горного давления, включая и гидростатические, вследствие деформирования слоев горных пород в верхней части земной коры при разработке месторождений полезных ископаемых.

4. Величина горизонтальных напряжений зависит от сопротивляемости сдвигу пород между слоями: при слабых породах, возникают невысокие горизонтальные напряжения, при крепких – горизонтальные напряжения могут превышать гравитационные.

Список литературы

1. Курленя М. В., Кулаков Г. И. Напряженное состояние породных массивов в верхних слоях земной коры // ФТПРПИ. — 1998. — № 2.
2. Васильев Л.М., Васильев Д.Л., Малич Н.Г., Ангеловский А.А. Механика образования форм разрушения образцов горных пород: Монография.- Днепро, ИМА-пресс.-2018-172с.
3. Сторожев М.В. Теория обработки металлов давлением / М.В. Сторожев, Е.А. Попов. – М.: Машиностроение, 1977. –423 с.
4. Васильев Л.М. Механизм формирования горизонтальных нормальных напряжений в массивах горных пород/ Л.М. Васильев//Горный информационно-аналитический бюллетень № 5 – М: Горная книга, 2008 – С. 190-195.
5. Васильев Л.М. Теоретическое обоснование формирования горизонтальных нормальных напряжений в массивах горных пород / Л.М. Васильев, Д.Л. Васильев / ФТПРПИ. — 2013. — № 2. – С. 81-90.
6. Vasil'ev L.M. Theoretical ground for origination of normal horizontal stresses in rock masses / L.M. Vasil'ev, D.L. Vasil'ev //Journal of Mining Science – 2013– Vol 49, №2 – pp 240-247.
7. Крупенников Г.А.. Распределение напряжений в породных массивах/ Г.А. Крупенников, Н.А. Филатов, Б.З. Амусин и др. – М.: Недра, 1972. – 144 с.
8. Биргер И.А. Сопротивление материалов / И.А. Биргер, Р.Р. Мавлютов. – М.: Наука, 1986. – 560 с.