МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Л.Я. Фомичова, В.М. Почепов, В.В. Фомичов

МАТЕМАТИКА 1

Навчальний посібник

Дніпро
НТУ «ДП»
2019

УДК 517
Ф 43

Затверджено вченою радою університету як навчальний посібник для студентів спеціальності 184 Гірництво (протокол № 8 від 30.05.2019).

Рецензенти:

Т.С. Кагадій − д-р фіз.-мат. наук, проф. Національного технічного університету «Дніпровська політехніка», проф. кафедри вищої математики;

О.М. Кузьменко − д-р техн. наук, проф. Національного технічного університету «Дніпровська політехніка», проф. кафедри ПРР.

Фомичова Л.Я.

Ф 43 Математика 1: навч. посіб. / Л.Я. Фомичова, В.М. Почепов, В.В. Фомичов ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро: НТУ «ДП», 2019. – 158 с.

ISBN 978-966-350-709-5

Розглянуто лінійну алгебру, векторну алгебру, аналітичну геометрію, теорію границь, диференціювання та дослідження функції однієї змінної, функції багатьох змінних. Викладено набір загальних теоретичних принципів, які супроводжуються розв'язанням типових прикладів і задач. Достатня кількість задач для самостійної роботи дозволяє використовувати посібник для всіх видів занять.

Призначений для студентів усіх форм навчання.

УДК 517

ISBN 978-966-350-709-5

ЗМІСТ

Присвячується 120-річчю
Національного технічного
університету
«Дніпровська політехніка»

ВСТУП

Мета цієї роботи – допомогти студентам оволодіти відповідним математичним апаратом, який має бути достатнім для опрацювання математичних моделей, повязаних з подальшою практичною діяльністю фахівців, розібратися у теоретичних питаннях та навчитися самостійно поглиблювати свої знання з дисципліни за допомогою розв’язування чисельних прикладів різної складності.

Завдання вивчення навчальної дисципліни:

· прищепити необхідні теоретичні знання та вміння застосовувати математичні поняття та методи;

· сформувати первинні навички математичного дослідження прикладних задач;

· виробити вміння при розв’язанні задач, самостійно розробляти та використовувати необхідні методи і засоби, а також спеціальну літературу;

· навчити застосовувати теоретичні знання на практиці;

· навчити самостійно поглиблювати свої знання, розвивати логічне та алгоритмічне мислення.

Важливим елементом засвоєння математики й оволодінням її методами є самостійна робота студентів − неперервна складова виконання поточних домашніх завдань і циклічної роботи з виконання індивідуальних модульних завдань. Це важливо в сучасному суспільстві, тому що кількість аудиторних часів постійно скорочується, а програма дисципліни тільки розширюється.

Призначенням цього посібника є саме підвищення ефективності самостійної роботи.

Навчальний посібник написано на основі лекцій, що викладалися студентам гірничого інституту Національного технічного університету «Дніпровська політехніка». Він містить теоретичний матеріал з дисципліни «Математика 1», який супроводжується достатньою кількістю розв’язаних прикладів та задач, а також вправ для самостійної роботи. Книга написана доступною по можливості строгою мовою, що, безумовно, полегшить студентам оволодіти основами лекційного матеріалу.

Посібник відповідає програмі курсу «Математика 1», впровадженому для студентів першого курсу спеціальності «Гірництво».

Робота складається з шести розділів за такими темами: елементи лінійної алгебри; векторна алгебра; елементи аналітичної геометрії; введення у математичний аналіз; диференціювання функції однієї змінної; функції багатьох змінних.

Посібник призначено для студентів як денної, так і заочної форм навчання.

Розділ 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

1.1. Матриці, дії над ними

Поняття матриці. Таблиця чисел, розташованих у m рядках та n стовпцях, називається ***матрицею*** і позначається

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

або скорочено $A=\left\| a_{ij} \right\|, \quad (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$.

Тут a_{ij} - ***елемент***, який стоїть на перетині i-го рядка та j-го стовпця. Добуток $m\times n$ кількості рядків та стовпців визначає ***розмір*** матриці A. Матриця називається ***прямокутною,*** якщо $m\neq n$, у протилежному випадку, тобто коли $m=n$, матриця - ***квадратна.***

Кількість рядків (стовпців) квадратної матриці називається її ***порядком.***

У квадратних матрицях елементи $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ становлять ***головну діагональ,*** а елементи $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \ldots, a_{n1}$ - ***сторонню діагональ***.

Зупинимося на спеціальних матрицях. Так, квадратна матриця $A=\left\| a_{ij} \right\|$ порядку n називається

- ***діагональною***, якщо $a_{ij}=0$ для всіх $i\neq j$;
- ***симетричною***, якщо $a_{ij}=a_{ji}$ для всіх $(i\neq j)$;
- ***одиничною***, якщо $a_{ij}=\begin{cases} 0, \text{ при } & i\neq j; \\ 1, \text{ при } & i=j. \end{cases}$

Одинична матриця позначається через E та має вигляд

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}. \qquad (1.2)$$

Матриця розміру $1\times n$ містить тільки один рядок і має назву ***матриці-рядка. Матриця-стовпець*** – це матриця, розмір якої $n\times 1$. Матриця, усі елементи якої дорівнюють нулю, називається ***нульовою*** та позначається θ. Матриці A та B називаються ***рівними*** $(A=B)$, якщо мають однаковий розмір та їх відповідні елементи дорівнюють один одному.

Лінійні операції над матрицями. *Сумою матриць* A та B однакового розміру називається матриця C такого ж розміру, елементи якої визначаються за формулою

$$\boxed{c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}}, \qquad (1.3)$$

тобто кожен елемент матриці C дорівнює сумі відповідних елементів матриць A та B.

Приклад 1. Знайти суму матриць $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Щоб знайти суму матриць, треба додати відповідні елементи, тобто скористатися формулою (1.3)

$$C=A+B=\begin{pmatrix} 2+2 & 3+1 & 3-5 \\ 0+3 & -1+2 & 2+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Добутком матриці A **на дійсне число** λ називається матриця $C=\lambda A$, елементи якої дорівнюють добутку елементів початкової матриці на це число, тобто

$$\boxed{c_{ij}=\lambda a_{ij}}. \qquad (1.4)$$

Приклад 2. Знайти λA, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$; $\lambda=-3$.

Розв'язання. За формулою (1.4) добутком матриці A на число (-3) буде матриця, елементи якої отримано множенням кожного елемента матриці A на дане число: $C=-3A=\begin{pmatrix} -3 & -6 & -9 & -15 \\ 0 & -12 & 6 & -21 \end{pmatrix}$.

Властивості лінійних операцій. Нехай $A,\ B,\ C$ - матриці однакового розміру, а α та β - деякі дійсні числа. Тоді справджуються рівності

1^0. $A+B=B+A$. $\quad 2^0$. $(A+B)+C=A+(B+C)$.

3^0. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$. $\quad 4^0$. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.

5^0. $(\alpha\beta)A=(\alpha A)\beta$. $\quad 6^0$. $\theta\cdot A=\theta$. $\quad 7^0$. $A+\theta=A$ (θ – ***нульова матриця***).

Приклад 3. Обчислити $2A-3B+E$, якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Враховуючи формули (1.2), (1.3), (1.4), дістанемо

$$2A=2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 12 & 0 \end{pmatrix};\quad 3B=3\cdot\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

Отже, $2A-3B+E=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Транспонування матриць. Матриця, яку отримано з даної за допомогою заміни кожного її рядка стовпцем з тим же номером, називається ***транспонованою матрицею*** до даної. Позначається A^T.

Так, якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, то $A^T=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, якщо $B=\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, то $B^T=\begin{pmatrix} 7 & 3 \end{pmatrix}$.

Перехід від A до матриці A^T - називається ***транспонуванням матриці*** A.

Властивості операції транспонування матриць

1^0. Двічі транспонована матриця дорівнює початковій матриці.

2^0. При транспонуванні квадратних матриць елементи головної діагоналі залишаються на своїх місцях.

3^0. Транспонування симетричних матриць не змінює їх вигляду.

Добуток матриць. ***Добутком матриць*** A та B відповідно з розмірами $m\times n$ та $n\times p$ буде третя матриця $C = AB$ розміром $m\times p$, елементи якої знаходяться за формулою

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}}, \quad \text{де} \quad (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,p}). \qquad (1.5)$$

З означення добутку матриць випливає, що добуток матриць A та B існує тільки тоді, коли кількість стовпців першої матриці A дорівнює кількості рядків другої матриці B (такі матриці називаються ***узгодженими***). Тоді для прямокутних матриць A і B відповідно з розмірами $m\times n$ та $n\times p$ існує добуток AB, проте добутку BA взагалі не існує. Схематично розміри співмножників та добутку можна записати у вигляді: $\boxed{m\times n} * \boxed{n\times p} = \boxed{m\times p}$.

Для квадратних матриць A та B існують добутки AB і BA, але взагалі $\boxed{AB \neq BA}$. Матриці, які задовольняють співвідношенню $AB = BA$ називаються ***переставними*** (комутативними). Наприклад, одинична матриця порядку n переставна з довільною квадратною матрицею того ж порядку $AE = EA = A$.

Властивості добутку матриць. Припустимо, що A, B, C - матриці, розміри яких дають змогу утворити добуток, а λ - дійсне число. Тоді:

1^0. $(AB)C = A(BC)$. $\qquad$ 3^0. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

2^0. $(A+B)C = AC + BC$. $\qquad$ 4^0. $AE = EA = A$.

Приклад 4. Знайти AB та BA, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Оскільки матриці A, B узгоджені (розмір першої 3×3, а другої 3×2), то існує добуток AB, результат якого − матриця розміру 3×2. За формулою (1.5) дістанемо: $AB = \begin{pmatrix} 2-2-2 & 2+0+3 \\ 0+3-4 & 0+0+6 \\ 4+1-8 & 4+0+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 6 \\ -3 & 16 \end{pmatrix}$.

Добуток BA не існує, тому що матриці B, A неузгоджені.

Приклад 5. Знайти добутки матриць AB та BA, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання: $AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+20 & 0+4 \\ 6+10 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 4 \\ 16 & 2 \end{pmatrix}$.

$$BA=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+0 & -8+0\\ 5-3 & 20+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -8\\ 2 & 22\end{pmatrix}.$$

Оскільки $AB \neq BA$, то ці матриці не комутативні (непереставні).

Цілим додатним степенем A^n квадратної матриці A є добуток n матриць, що дорівнюють A.

Приклад 6. Дано матрицю $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$. Знайти A^3.

Розв'язання. Для знаходження степеня матриці треба її помножити саму на себе відповідне число разів:

$$A^3=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 0 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 26\\ 0 & 27\end{pmatrix}.$$

Приклад 7. Дано $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 0 & 6\\ 0 & 4 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -3 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ -5\end{pmatrix}$. Знайти суму елементів 1-го стовпця цієї матриці.

Розв'язання: $\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 0 & 6\\ 0 & 4 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -3 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+3 & 6-2+1\\ 3 & 9+6\\ -12 & 8+2\\ 1+6 & 3-4+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 3 & 15\\ -12 & 10\\ 7 & 0\end{pmatrix}$. Тому

$B=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 3 & 15\\ -12 & 10\\ 7 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15-25\\ 9-75\\ -36-50\\ 21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\ -66\\ -86\\ 21\end{pmatrix}$ і шукана сума буде (-141).

Приклад 8. Знайти $(AB)^T+C^2$, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 5 & 1 & 0\\ -1 & 3 & -2\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -3\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -7 & -1\\ 9 & 15 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \ (AB)^T=\begin{pmatrix}4 & 9 & 2\\ -7 & 15 & 3\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

$$C^2=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 5 & 1 & 0\\ -1 & 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 5 & 1 & 0\\ -1 & 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 20 & -4 & 10\\ 14 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

Отже, $(AB)^T + C^2 = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ -7 & 15 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 20 & -4 & 10 \\ 14 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 4 \\ 13 & 11 & 13 \\ 13 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Приклад 9. Знайти $f(A)$, якщо $f(x) = 2x^2 + x - 3$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Якщо в многочленні $f_n(x)$ аргумент x покладають рівним квадратній матриці A, то вільний член a цього многочленна замінюють на матрицю aE, де E − одинична матриця того самого порядку, що й A.

$$f(A) = 2A^2 + A - 3E = 2\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 2\cdot\begin{pmatrix} 9+0 & -3-1 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18+3-3 & -8-1-0 \\ 0+0-0 & 2+1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 10. Знайти невідомі елементи матриць, для яких виконується рівність $\begin{pmatrix} 2 & x & -1 \\ 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 11 & y \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Помножимо матриці, що стоять у лівій частині рівності, дістанемо $\begin{pmatrix} 0 & -7-x \\ 11 & 1 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 11 & y \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$. Виходячи з означення, матриці однакового розміру рівні тоді й тільки тоді, коли рівні їх елементи, що стоять на відповідних місцях. В даному випадку всі відповідні елементи, що не містять невідомих x та y рівні, тому можна прирівняти й елементи матриць, які містять невідомі: $y = 1$; $-7 - x = 1 \Rightarrow x = -8$.

Завдання для самоконтролю

1. Що називається матрицею?
2. Для якої матриці існує порядок та що це таке?
3. Що показують індекси i та j у виразі a_{ij}?
4. Які матриці можна додавати та за якою формулою це можна зробити?
5. Як помножити матрицю на число?
6. Які матриці можна множити та за якою формулою?
7. Як дістати транспоновану матрицю?
8. Обчислити лінійні комбінації матриць:

а) $3A + 2B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $3(A-B)$, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 4 & -2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 5 & -1 & 5\\ -8 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$.

Відповідь: а) $\begin{pmatrix}2 & 5 & -6\\ 6 & 5 & 7\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}3 & -6 & 6 & -9\\ 24 & 6 & -15 & 3\end{pmatrix}$.

9. Транспонувати матриці: а) $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 1\\ 3 & 1 & -7\end{pmatrix}$; б) $B=\begin{pmatrix}8 & 0\\ -1 & 5\\ 3 & 7\end{pmatrix}$.

Відповідь: а) $A^T=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 3\\ 2 & 5 & 1\\ 3 & 1 & -7\end{pmatrix}$; б) $B^T=\begin{pmatrix}8 & -1 & 3\\ 0 & 5 & 7\end{pmatrix}$.

10. Обчислити добутки матриць:

а) $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7 & 1\\ 5 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 3\\ -3 & 9\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 2\\ 4 & 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix}3 & 0 & 5 & 2\\ 2 & 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 4\\ 1\\ 6\end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 5 & 3\\ 6 & 8 & 2\\ 1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix}5 & 0 & 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 3\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$.

Відповідь: а) $\begin{pmatrix}4 & -1\\ 6 & -5\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-48 & -45\\ 33 & -120\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}10\\ 20\\ 20\\ 30\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}11\\ 11\\ 22\end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix}28 & 27 & 8\\ 15 & 14 & 13\end{pmatrix}$; е) (20).

11. Обчислити A^2, якщо $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 4\end{pmatrix}$. **Відповідь.** $A^2=\begin{pmatrix}1 & 6\\ -18 & 13\end{pmatrix}$.

12. Обчислити AB^T, якщо $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}5 & 4 & 3\\ 1 & 6 & 2\end{pmatrix}$.

Відповідь. $\begin{pmatrix}6 & -4\\ 6 & -5\end{pmatrix}$.

13. Обчислити $A^T B$, якщо $A=\begin{pmatrix}4\\ -5\\ 6\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$. **Відповідь.** (1).

14. Обчислити $A^T B^T - (BA)^T + 2EB - 3A$, якщо

$A=\begin{pmatrix}5 & 7\\ -1 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 5 & -4\end{pmatrix}$. **Відповідь.** $\begin{pmatrix}-15 & -11\\ 13 & 1\end{pmatrix}$.

15. Знайти добутки AB та BA, якщо вони існують:

а) $A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$.

Відповідь: а) $AB=\begin{pmatrix}-5 & -10\\ 5 & 10\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$; б) AB – не існує, $BA=\begin{pmatrix}22 & 28\\ 44 & 56\\ 66 & 84\end{pmatrix}$.

16. Знайти невідомі елементи матриць, для яких справджуються рівності:

а) $\begin{pmatrix}1 & x & 3\\ y & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 3 & -2\end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix}x & 0 & 2 & 3\\ 4 & -3 & y & 0\\ 2 & 5 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 7 & 1 & 3\\ 0 & 2 & z & 1\\ 5 & 4 & -2 & 3\\ 6 & 0 & 7 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30 & 15 & 18 & 3\\ 13 & 26 & 11 & 12\\ 25 & 36 & -12 & 18\end{pmatrix}$.

Відповідь: а) така рівність неможлива; б) $x=1,\ y=1,\ z=-3$.

17. Знайти $(AB)^T - C^2$, якщо $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\\ 0 & 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}$.

Відповідь. $\begin{pmatrix}9 & -13\\ 22 & 9\end{pmatrix}$.

18. Знайти значення многочлена $f(A)$ від матриці A:

а) $f(x)=3x^2-4$, $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$; б) $f(x)=x^2-3x+1$, $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.

Відповідь: а) $\begin{pmatrix}8 & 15\\ 0 & 23\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$.

19. Знайти суму елементів 3-го рядка матриці $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & 5 & 1\\ 3 & 1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 5 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

Відповідь. $a_{31}+a_{32}+a_{33}=-1+9+15=23$.

1.2. Визначники

Поняття визначника. ***Визначником*** **(детермінантом) к**вадратної матриці A порядку n $(n>1)$ називається число, що знаходиться за однією з формул:

$$\boxed{\Delta=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}},\quad (i=\overline{1,n}) \tag{1.6}$$

або

$$\boxed{\Delta=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}},\quad (j=\overline{1,n}), \tag{1.7}$$

де M_{ij} - мінор до елемента a_{ij} визначника Δ.

Формули (1.6) та (1.7) відповідно мають назву ***розкладання визначника за елементами рядка або стовпця*.**

Визначник − це числова характеристика, яка притаманна тільки квадратним матрицям та для матриці A n-го порядку позначається

$$\Delta \text{ або } |A|, \text{ або } \det A, \text{ або } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Мінор та алгебраїчне доповнення. Під ***мінором*** M_{ij} до елемента a_{ij} визначника n-го порядку розуміють визначник $(n-1)$-го порядку, який утворюється з даного визначника викресленням i-го рядка та j-го стовпця.

Якщо $\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$, то $M_{32}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$, $M_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$.

Величина $\boxed{A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}}$ має назву ***алгебраїчного доповнення*** до елемента a_{ij}, тобто алгебраїчне доповнення збігається з мінором, коли сума номерів рядка та стовпця, на перетині яких стоїть елемент, парна та відрізняється на знак, коли ця сума – непарна. Наприклад, у попередньому прикладі $A_{32}=-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$, $A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$.

Користуючись означенням алгебраїчного доповнення, можна обчислити визначник за однією з формул $\boxed{\Delta=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}}$ або $\boxed{\Delta=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}}$.

Якщо у будь-якому рядку (стовпцю) тільки один елемент a_{ij} відрізняється від нуля, тоді формула стає ще простішою

$$\boxed{\Delta = a_{ij}A_{ij}}. \qquad (1.8)$$

Обчислення визначників другого порядку. Розглянемо ***визначник другого порядку*** $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Він містить чотири мінори першого порядку: $M_{11} = a_{22};\ M_{12} = a_{21};\ M_{21} = a_{12};\ M_{22} = a_{11}$.

Розкладемо визначник за елементами першого рядка (1.6):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}M_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}M_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

тобто визначник другого порядку можна знайти за формулою

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \qquad (1.9)$$

Приклад 1. Обчислити визначники: а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Для знаходження визначників користуємося формулою (1.9).

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\times 1 - (-2\times 3) = 2 + 6 = 8$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3\times 7 - 5\times 1 = 21 - 5 = 16$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\begin{vmatrix} x & 1 \\ -5 & x+6 \end{vmatrix} = 0$.

Розв'язання: $\begin{vmatrix} x & 1 \\ -5 & x+6 \end{vmatrix} = x(x+6) - 1\times(-5) = x^2 + 6x + 5$. Дане рівняння набуває вигляду $x^2 + 6x + 5 = 0$, розв'язуючи його, дістанемо $x_1 = -1;\ x_2 = -5$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність $\begin{vmatrix} x-1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} < 0$.

Розв'язання. Розкриємо визначник, отримаємо нерівність $x - 1 - 8 < 0$. Звідси $x < 9$, тобто $x \in (-\infty, 9)$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\begin{vmatrix} x+1 & 2x \\ -3 & x \end{vmatrix} \le \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & x \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Розкриємо обидва визначники за формулою (1.9), дістанемо $x^2 + x + 6x \le 2x - 6 \ \Rightarrow\ x^2 + 7x \le 2x - 6 \ \Rightarrow\ x^2 + 5x + 6 \le 0$.

Знайдемо корені рівняння $x^2 + 5x + 6 = 0 \ \Rightarrow\ x_1 - 3,\ x_2 - 2$.

Отже, нерівність виконується на проміжку $x \in [-3; -2]$.

Розглянемо ***визначник третього порядку*** і розкладемо його за елементами першого рядка (1.6):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} M_{13} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} -$$

$$- a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) +$$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Отриманий результат можна запам'ятати, як правило Сарруса: добуток елементів, розміщених уздовж головної діагоналі та два добутки елементів, що стоять у вершинах двох рівнобічних трикутників із основами, паралельними до головної діагоналі, та з вершинами в протилежному куті, беруться зі знаком плюс. Три добутки, що складені за тим самим правилом, але відносно сторонньої діагоналі, беруться зі знаком мінус.

Властивості визначника

1^0. Величина визначника не зміниться при його транспонуванні.

2^0. Якщо два рядки (стовпці) визначника, які стоять поруч, переставити місцями, то його величина змінить знак на протилежний.

Н а с л і д о к. Якщо визначник має два однакових рядки (стовпці), він дорівнює нулю.

3^0. Якщо помножити всі елементи будь-якого рядка (стовпця) на одне і те ж число, то величина визначника помножиться на це число.

Н а с л і д о к 1. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника.

Н а с л і д о к 2. Визначник, у якому елементи двох рядків (стовпців) відповідно пропорційні, дорівнює нулю.

4^0. Якщо кожен елемент k-го рядка (стовпця) - сума двох доданків, визначник складається з двох визначників, у k-му рядку (стовпці) яких розташовується один з доданків, а решта елементів збігаються з елементами початкового визначника, тобто $\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Н а с л і д о к. Величина визначника не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка (стовпця) додати відповідні елементи паралельного рядка (стовпця), помножені на одне й те ж число.

5^0. Величина визначника дорівнює нулю, якщо визначник має рядок (стовпець), усі елементи якого дорівнюють нулю.

За допомогою властивостей визначник можна звести до вигляду, коли в одному з рядків (стовпців) на місцях усіх елементів, крім одного, стоятимуть нулі. Тоді зручно скористатися формулою (1.8), яка дає змогу зменшити порядок визначника на одиницю. Продовжуючи аналогічні дії, можна отримати визначник другого порядку.

Приклад 5. Обчислити визначники третього порядку:

$$\text{а) } D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } D_2 = \begin{vmatrix} 8442 & 5226 & 39730 \\ 2814 & 1741 & 13243 \\ 5628 & 3487 & 26488 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Обчислювати визначник третього порядку можна декількома способами, наведемо деякі з них.

Для визначника а) скористаємося означенням детермінанта, тобто формулою (1.6) та розкладемо його за елементами першого рядка:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-12+2) - 4(8+10) + (2+15) = -30 - 72 + 17 = -85.$$

Для обчислення визначника б) будемо користуватися властивостями визначника, що суттєво полегшить його обчислення. Так, зважаючи на наслідок 1 з властивості 3^0, винесемо з першого стовпця визначника б) загальний множник

$$D_2 = \begin{vmatrix} 8442 & 5226 & 39730 \\ 2814 & 1741 & 13243 \\ 5628 & 3487 & 26488 \end{vmatrix} = 2814 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5226 & 39730 \\ 1 & 1741 & 13243 \\ 2 & 3487 & 26488 \end{vmatrix}.$$

З метою отримання у першому стовпці нульових елементів на місцях a_{11} та a_{31}, треба помножити елементи другого рядка на (-3) та додати до відповідних елементів першого рядка, а потім помножити елементи другого рядка на (-2) та додати їх до відповідних елементів третього рядка, дістанемо:

$$D_2 = 2814 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1741 & 13243 \\ 2 & 3487 & 26488 \end{vmatrix} = 2814 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1741 & 13243 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

За формулою (1.8) отримаємо кінцевий результат:

$$D_2 = 2814 \cdot 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -2814.$$

Визначники четвертого та вищих порядків. Обчислювати визначники, порядок яких більший ніж три, доцільно тільки за формулою (1.8), при цьому якомога ширше треба використовувати властивості визначника.

Приклад 6. Обчислити визначники четвертого порядку:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad D_2 = \begin{vmatrix} \sqrt{7} & \sqrt{5} & \sqrt{3} & \sqrt{5} \\ 7 & \sqrt{35} & 2\sqrt{21} & -2\sqrt{5} \\ \sqrt{21} & 2\sqrt{15} & 3 & \sqrt{10} \\ \sqrt{14} & 2\sqrt{10} & \sqrt{6} & \sqrt{15} \end{vmatrix}.$$

Розв'язання: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 6 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 0 & 15 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$

$$= (-1)^{2+3}(-1)\times\begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ -1 & 5 & 15 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 12 \\ 0 & 6 & 21 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 6 & 21 \end{vmatrix} = 3\times 3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 9(7-8) = -9.$$

Результат отримано завдяки проведеним діям:

1) кожен елемент другого рядка помножити на 2 та додати до відповідних елементів третього рядка; елементи другого рядка додати до відповідних елементів першого, а потім четвертого рядків, після чого у третьому стовпці з'являться нулі;

2) за формулою (1.8) перейдемо до визначника третього порядку;

3) додати елементи третього рядка до відповідних елементів першого та другого рядків, дістанемо нульові елементи у першому стовпці й перейдемо до визначника другого порядку;

4) винесемо за визначник загальні множники з першого та другого стовпців та обчислимо визначник другого порядку.

Розглянемо визначник Δ_2. Елементи першого, другого, третього та четвертого стовпців мають спільні множники, винесемо їх за визначник:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \sqrt{7} & \sqrt{5} & \sqrt{3} & \sqrt{5} \\ 7 & \sqrt{35} & 2\sqrt{21} & -2\sqrt{5} \\ \sqrt{21} & 2\sqrt{15} & 3 & \sqrt{10} \\ \sqrt{14} & 2\sqrt{10} & \sqrt{6} & \sqrt{15} \end{vmatrix} = \sqrt{7}\times\sqrt{5}\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{7} & \sqrt{7} & 2\sqrt{7} & -2 \\ \sqrt{3} & 2\sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{vmatrix}.$$

Подальші дії виконуватимемо у такій послідовності: 1) елементи першого стовпця віднімемо від відповідних елементів другого та третього стовпців; 2) скористаємося формулою (1.8) та перейдемо до визначника третього порядку; 3) елементи другого стовпця віднімемо від елементів першого стовпця; 4) за формулою (1.8) перейдемо до визначника другого порядку та обчислимо його за формулою (1.9). Дістанемо

$$\Delta_2 = 5\sqrt{21}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{7} & 0 & \sqrt{7} & -2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = -5\sqrt{21}\times\sqrt{7}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{vmatrix} = -35\sqrt{3}\begin{vmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{vmatrix} =$$

$$= -35\sqrt{3}(3-2) = -35\sqrt{3}.$$

Приклад 7. Обчислити визначник $D=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & 3 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 1 & 0 & -4 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Виберемо елемент, який дорівнює одиниці $(a_{33}=1)$, та за допомогою властивостей визначника дістанемо визначни, що дорівнює даному, але такий, у якому елементи третього рядка всі дорівнюватимуть нулю, крім a_{33}. Для цього елементи третього стовпця треба додати до відповідних елементів першого та четвертого стовпців, потім елементи цього ж стовпця помножити на 2 і додати до відповідних елементів п'ятого стовпця, а далі елементи третього стовпця помножити на (-4) та додати до елементів другого стовпця. Розкрити отриманий визначник за елементами третього рядка. Дістанемо визначник 4-го порядку. У здобутому визначнику елементи другого рядка додати до відповідних елементів четвертого рядка, помножити елементи другого рядка на 4 та додати їх до відповідних елементів першого рядка. Цей визначник розкрити за елементами третього стовпця. Дістанемо визначник третього порядку. Елементи третього рядка помножити на (-1) та додати до відповідних елементів другого та першого рядків. Далі помножити елементи першого рядка на 7 та додати їх до відповідних елементів третього рядка, розкрити визначник за елементами першого стовпця. Таким чином перейшли до визначника другого порядку та без громіздких обчислень дістали результат.

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 9 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -10 & 3 & 0 & 7 \\ 6 & -6 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=(-1)^{3+3}\times 1\times\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 3 \\ 1 & 9 & -1 & -2 \\ 7 & -10 & 0 & 7 \\ 6 & -6 & 1 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6 & 33 & 0 & -5 \\ 1 & 9 & -1 & -2 \\ 7 & -10 & 0 & 7 \\ 7 & 3 & 0 & -4 \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{2+3}\times(-1)\times\begin{vmatrix} 6 & 33 & -5 \\ 7 & -10 & 7 \\ 7 & 3 & -4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 30 & -1 \\ 0 & -13 & 11 \\ 7 & 3 & -4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 30 & -1 \\ 0 & -13 & 11 \\ 0 & 213 & -11 \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)\times\begin{vmatrix} -13 & 11 \\ 213 & -11 \end{vmatrix}=-11\begin{vmatrix} -13 & 1 \\ 213 & -1 \end{vmatrix}=-11\times(13-213)=2200.$$

Треба підкреслити різницю між матрицею та визначником. ***Визначник - це число, що дорівнює результату зумовлених дій над величинами, з яких він складається, тоді як матриця - таблиця чисел, що являє собою одне ціле, але не зводиться до одного числа.*** Рівність визначників двох матриць не доводить рівності останніх - вони можуть бути навіть різних порядків. Звичайно, якщо матриці рівні, то і їх визначники рівні.

Квадратні матриці, визначники яких відрізняються від нуля, називаються ***невиродженими***, коли визначники дорівнюють нулю − ***виродженими.***

1.3. Обернена матриця

Матриця A^{-1} має назву ***оберненої*** до матриці A, якщо виконується рівність $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$. Обернена матриця існує тільки для невироджених квадратних матриць.

Щоб знайти A^{-1}, слід здійснити такі дії: а) обчислити визначник $|A|$ матриці A; б) замінити кожен елемент A його алгебраїчним доповненням; в) транспонувати отриману матрицю; г) поділити кожне алгебраїчне доповнення на знайдений вище визначник.

Зі сказаного випливає формула для обчислення оберненої матриці до невиродженої квадратної матриці A порядку n:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \ldots & \frac{A_{n1}}{\Delta}\\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \ldots & \frac{A_{n2}}{\Delta}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \ldots & \frac{A_{nn}}{\Delta}\end{pmatrix}, \qquad (1.10)$$

де Δ − визначник матриці A;
A_{ij} − алгебраїчні доповнення до елементів a_{ij} матриці A.

Приклад. Знайти обернену матрицю до матриці $A=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 2\end{pmatrix}$.

Розв'язання. Виконаємо всі зазначені вище дії: $|A|=\begin{vmatrix}3 & -4\\ -2 & 2\end{vmatrix}=6-8=$ $=-2\neq 0$; $A_{11}=|2|=2$; $A_{12}=-|-2|=2$; $A_{21}=-|-4|=4$; $A_{22}=|3|=3$.

Використавши формулу (1.10), дістанемо $A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -1 & -1{,}5\end{pmatrix}$.

Для перевірки результату обчислимо добутки AA^{-1} та $A^{-1}A$. Якщо $AA^{-1}=A^{-1}A=E$, то результат правильний:

$$A^{-1}A=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 2\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$AA^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Властивості оберненої матриці

1^0. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. $\quad 2^0$. $\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^T\right)^{-1}$. $\quad 3^0$. $\det A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}$.

Можна довести, що обернена матриця від симетричної має бути симетричною, а від діагональної - діагональною. Це спрощує знаходження оберненої матриці від цих спеціальних матриць.

1.4. Ранг матриці

Базисний мінор та ранг матриці. ***Мінор порядку k матриці A*** - це визначник квадратної матриці, утвореної з елементів, які містяться на перетині будь-яких фіксованих k рядків та k стовпців даної матриці (причому, якщо $m \times n$ розмір матриці A, то $k \le \min\{m,n\}$).

Базисним мінором матриці називається мінор порядку r, відмінний від нуля, якщо всі мінори вищих порядків дорівнюють нулю або їх взагалі не існує.

Порядок базисного мінору - це ***ранг*** матриці (RgA).

Якщо A - квадратна матриця порядку n, то найбільше значення рангу буде n. Якщо A - прямокутна матриця розміру $m \times n$, то найбільше значення рангу - $\min\{m,n\}$, тобто $0 \le RgA \le \min\{m,n\}$. Якщо матриця A має розмір $m \times n$, а $RgA = r$, то різниця між $\min\{m,n\}$ та r називається ***дефектом*** матриці. Ранг нульової матриці вважається таким, що дорівнює нулю. Рядки (стовпці) базисного мінору лінійно незалежні та мають назву ***базисних.***

Теорема (про базисний мінор). Рядок (стовпець) матриці, який не належить до базисного мінору, є лінійною комбінацією її базисних рядків (стовпців).

Щоб знайти ранг матриці, використовують метод обвідних мінорів або метод елементарних перетворень.

Метод елементарних перетворень базується на можливості робити із стовпцями та рядками матриці такі елементарні операції: а) множити всі елементи будь-якого рядка (стовпця) на постійне число $\lambda \ne 0$; б) додавати до елементів будь-якого рядка (стовпця) числа, пропорційні елементам паралельного рядка (стовпця); в) міняти місцями два рядки (стовпці); г) викреслювати рядок (стовпець), усі елементи якого дорівнюють нулю; д) транспонувати матрицю.

Застосовуючи елементарні перетворення до матриці A кінцеву кількість разів, дістанемо матрицю B, яка називається ***еквівалентною до матриці A***. Еквівалентність матриць позначається знаком **~**. Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці, тобто ранги еквівалентних матриць однакові. Використавши ці перетворення, матрицю можна довести до вигляду, коли всі елементи, крім $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr}$, де $r \le \min\{m,n\}$, дорівнюють нулю. Така матриця, безперечно, має ранг, який дорівнює r.

З а у в а ж е н н я. ***Якщо всі елементи рядка (стовпця) за винятком одного дорівнюють нулю, то всі елементи перпендикулярного стовпця (рядка), крім цього елемента, завжди можна перетворити на нулі, при цьому інші елементи матриці залишаться незмінними***.

Приклад. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ 7 & 4 & -4 & -1 & 7 \\ 5 & 4 & 0 & -11 & 9 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Фіксуємо одиницю, яка стоїть на місці елемента a_{21} та за її допомогою утворимо нулі у другому рядку. Елементи першого стовпця помножимо на 2 і додамо до відповідних елементів третього стовпця, потім елементи першого стовпця помножимо на (-5) та додамо до відповідних елементів четвертого стовпця, далі додамо елементи першого до елементів п'ятого стовпців. Згідно із зазначеним вище зауваженням запишемо нулі у першому стопці. В отриманій матриці елементи першого рядка помножимо на (-2) та додамо до відповідних елементів третього та четвертого рядків. Зважаючи на зауваження, записуємо нулі в першому рядку та викреслюємо рядки та стовпці, всі елементи яких дорівнюють нулю.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ 7 & 4 & -4 & -1 & 7 \\ 5 & 4 & 0 & -11 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & -18 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 10 & -36 & 14 \\ 5 & 4 & 10 & -36 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & -18 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 10 & -36 & 14 \\ 0 & 4 & 10 & -36 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & -18 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Визначник останньої матриці відрізняється від нуля, тому це базисний мінор. Порядок цього мінору дорівнює рангу даної матриці: $RgA = 2$.

Завдання для самоконтролю

1. Дати означення визначника.
2. Як знайти мінор до елемента a_{32} визначника 4-го порядку?
3. Що називається алгебраїчним доповненням до елемента визначника?
4. Записати формулу для обчислення визначника 2-го порядку.
5. Сформулювати властивості визначника.
6. Які матриці мають обернені?
7. Що називається оберненою матрицею?
8. Що називається базисним мінором матриці?
9. Що називається рангом матриці?
10. Знайти алгебраїчні доповнення A_{11}, A_{21}, A_{12} та мінори M_{11}, M_{21}, M_{12} до елементів таких визначників: а) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}$.

Відповідь: а) $A_{11} = 6$, $A_{21} = 5$, $A_{12} = -4$, $M_{11} = 6$, $M_{21} = -5$, $M_{12} = 4$;
б) $A_{11} = 7$, $A_{21} = 5$, $A_{12} = 1$, $M_{11} = 7$, $M_{21} = -5$, $M_{12} = -1$.

11. Обчислити визначники другого порядку: а) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -7 & -5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$.

Відповідь: а) 5; б) -29.

12. Обчислити визначники третього порядку:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Відповідь: а) 40; б) -46.

13. Розв’язати рівняння $3x^2 - \begin{vmatrix} 3x & 4 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = 0$.

Відповідь: 2, -4.

14. Розв’язати нерівність $\begin{vmatrix} x^2 + 7 & 2 \\ 3x & 1 \end{vmatrix} > \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & -7 \end{vmatrix}$.

Відповідь. $(-\infty;2) \cup (4;+\infty)$.

15. Обчислити визначники четвертого порядку:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & 7 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \\ 5 & 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Відповідь: а) -19; б) 900.

16. Обчислити обернені матриці для даних матриць:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: а) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{32} \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

17. Обчислити ранги матриць та записати їх будь-які базисні мінори:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: а) 2; б) 2.

1.5. Системи лінійних рівнянь

Системою лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називають систему виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1.11)$$

де a_{ij} - коефіцієнти; b_i - вільні члени; x_j - невідомі, $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$.

Сукупність чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ називається ***розв'язком системи*** (1.11), якщо заміна x_j на α_j перетворює кожне рівняння на тотожність.

Коефіцієнти системи утворюють матрицю A, яку називають ***основною*** матрицею системи. Якщо до матриці A дописати стовпець вільних членів, здобудемо ***розширену*** матрицю A^*, вільні члени утворюють матрицю-стовпець B вільних членів, а невідомі - матрицю-стовпець X:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix};\ A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right);\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix};\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Тоді систему (1.11) можна записати так:

$$\boxed{AX = B}. \qquad (1.12)$$

Ця форма запису системи називається ***матричною.***

Система, яка має розв'яок, називається ***сумісною,*** а коли не має його, - ***несумісною.*** Система з одним розв'язком - ***визначена*** система. Система з нескінченною кількістю розв'язків - це система ***невизначена.***

Система лінійних рівнянь називається ***однорідною***, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю. В протилежному випадку – система ***неоднорідна***.

Спосіб розв'язування системи залежить від того, до якої з наведених категорій вона належить. Таким чином, **спочатку треба провести дослідження системи**, перевіряючи наведені далі умови.

Теорема (Кронекера-Капеллі або необхідна і достатня умова сумісності системи). Для того щоб система лінійних алгебраїчних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо, аби ранг основної матриці дорівнював рангу розширеної матриці, тобто $RgA = RgA^*$.

Система, для якої виконується теорема Кронекера-Капеллі, залежно від величини рангу матриці може бути визначеною або невизначеною. Коли

$RgA = n$, де n - число невідомих системи, тоді система визначена, коли ж $RgA < n$, - система невизначена.

Приклад 1. Дослідити систему рівнянь на сумісність $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$

Розв'язання. Визначимо ранги основної та розширеної матриць за допомогою елементарних перетворень:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad RgA = 2;$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 10 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad RgA^* = 3.$$

Як бачимо, $RgA \neq RgA^*$. За теоремою Кронекера-Капеллі дана система несумісна, отже, вона не має розв'язку.

Під час розв'язання попереднього прикладу спочатку шукали ранг основної матриці, а потім − розширеної. Зручніше ці дві дії поєднати. Шукаючи базисний мінор розширеної матриці, дістанемо один з результатів: 1) усі елементи стовпця, складеного з вільних членів, перетворилися на нулі − ранги матриць A та A^* збігаються, система сумісна; 2) усі елементи будь-якого рядка основної матриці дорівнюють нулю, а вільний член цього рядка не дорівнює нулю − ранги матриць A та A^* мають різні значення, система несумісна

Приклад 2. Дослідити на сумісність систему $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3, \\ -4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 11. \end{cases}$

Розв'язання : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & 3 \\ -4 & 5 & -5 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 9 & 3 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$

Перетворення всіх елементів стовпця вільних членів на нулі вказує на те, що $RgA = RgA^*$ − система сумісна. Згідно величини порядку базисного мінору ($RgA = RgA^* = 2 < n = 3$) дана система невизначена та має безліч розв'язків.

Розв'язання визначеної системи. Розглянемо систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1.13)$$

Нехай система (1.13) сумісна та визначена. Для такої системи обов'язково $RgA = RgA^* = n$, тобто визначник основної матриці відрізняється від нуля, отже, основна матриця системи невироджена, тому має обернену. Система має єдиний розв'язок, знаходження якого еквівалентне розв'язку матричного рівняння (1.12).

Помножимо ліворуч обидві частини матричного рівняння $AX = B$ на матрицю A^{-1}: $A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B$. Отже,

$$\boxed{X = A^{-1}B} \qquad (1.14)$$

Цей ***матричний метод*** розв'язання системи не простіше інших, але відзначається зручною компактною формою запису.

Приклад 3. Розв'язати матричним методом систему лінійних алгебраїчних рівнянь $\begin{cases} -2x + y + 2z = 3, \\ 4x - z = 5, \\ 3y + 2z = 9. \end{cases}$

Розв'язання. Досліджуючи систему, дістанемо

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow RgA = RgA^* = 3 = n = 3 \Rightarrow$ система сумісна та визначена. Обчислимо визначник основної матриці $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2(4-9) = 10$.

Відшукаємо алгебраїчні доповнення до елементів матриці A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3; \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4; \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -8; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 12; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4.$$

За формулою (1.10) запишемо обернену матрицю $A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}3 & 4 & -1\\ -8 & -4 & 6\\ 12 & 6 & -4\end{pmatrix}$.

За формулою (1.14) маємо $X=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}3 & 4 & -1\\ -8 & -4 & 6\\ 12 & 6 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 5\\ 9\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}20\\ 10\\ 30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$.

Отже, розв'язок системи: $x=2$; $y=1$; $z=3$.

Формули Крамера. З рівності (1.12), враховуючи вигляд оберненої матриці, отримаємо ***формули Крамера,*** за якими теж можна розв'язати систему (1.11)

$$\boxed{x_j=\frac{\Delta_j}{\Delta}},\quad (j=\overline{1,n}),\qquad (1.15)$$

де $\Delta\neq 0$ - визначник основної матриці системи;
Δ_j - визначник, отриманий з визначника Δ заміною j-го стовпця на стовпець вільних членів.

Приклад 4. Розв'язати систему $\begin{cases}3x+2y+z=-2,\\ x+y+3z=5,\\ 2x-y+2z=-1\end{cases}$ за формулами Крамера.

Розв'язання. Обчислимо визначник основної матриці системи, розклавши його за елементами першого рядка:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=3\cdot 5+2\cdot 4-3=20.$$

Визначник основної матриці відрізняється від нуля, з чого випливає $RgA=3$. Розширена матриця не може мати ранг більший за три (мінори четвертого порядку не існують) або менший за три (матриця містить мінор третього порядку, який відрізняється від нуля). Отже, $RgA^*=3$ і система сумісна. Ранг дорівнює кількості невідомих − система визначена.

Визначник Δ_1 дістанемо, замінивши перший стовпець у Δ на стовпець вільних члені $\Delta_1=\begin{vmatrix}-2 & 2 & 1\\ 5 & 1 & 3\\ -1 & -1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4 & 0 & 5\\ 4 & 0 & 5\\ -1 & -1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4 & 5\\ 4 & 5\end{vmatrix}=4\cdot 5\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-40$.

Тут використано властивості визначника.

Визначник Δ_2 (Δ_3) отримано заміною другого (третього) стовпця у визначнику Δ на стовпець вільних членів:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 39 - 8 - 11 = 20; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 12 + 22 + 6 = 40.$$

За формулами (1.15) маємо $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-40}{20} = -2$; $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{20}{20} = 1$; $z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{40}{20} = 2$.

Метод Гаусса. Для розв’язання системи (1.11) можна скористатися також ***методом Гаусса.*** Це метод послідовного виключення невідомих. Процес розв’язку за методом Гаусса складається з двох етапів. На першому етапі (прямий хід) система (1.11) зводиться до вигляду.

Система називається **трапецієподібною,** якщо вона має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad a_{ii} \neq 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

На другому етапі (зворотний хід) послідовно визначаються невідомі з трикутної системи. Перший етап можна виконати над розширеною матрицею системи за допомогою таких елементарних перетворень: додавання до елементів одного рядка відповідних елементів другого рядка, помножених на деяке число $\lambda \neq 0$; переставляння рядків (стовпців) у матриці. Другий етап виконується таким чином: виходячи з нового вигляду розширеної матриці, записуємо систему еквівалентну даній; з останнього рівняння знаходимо x_n, потім за величиною x_n з $(n-1)$-го рівняння знаходимо x_{n-1} і так далі. Послідовне визначення невідомих триватиме, поки не буде знайдено x_1 з першого рівняння.

Приклад 5. Розв’язати систему $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$ методом Гаусса.

Розв’язання. Виконуючи елементарні перетворення над рядками розширеної матриці даної системи, зведемо її до трикутного вигляду.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -1 & -6 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -1 & -6 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -19 & 0 & 19 \end{array}\right).$$

Отримана матриця еквівалентна системі:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_2 - x_3 = -6, \\ -19x_2 = 19. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} x_1 = 2 - 3x_2 - 2x_3, \\ x_3 = 4x_2 + 6, \\ x_2 = -1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 3(-1) - 2x_3, \\ x_3 = 4(-1) + 6 = 2, \\ x_2 = -1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 - 2\cdot 2 = 1, \\ x_3 = 2, \\ x_2 = -1. \end{cases}$

або в матричній формі $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Правило розв'язання довільної системи лінійних рівнянь

1. Знайти ранги основної та розширеної матриць системи. Якщо $RgA \ne RgA^*$, то система несумісна.

2. Якщо $RgA = RgA^*$, система сумісна. Знайти будь-який базисний мінор порядку r. Записати r рівнянь, з коефіцієнтів яких складається базисний мінор, інші рівняння відкинути. Невідомі, коефіцієнти при яких входять у базисний мінор, називаються ***базисними***, а інші $n - r$ невідомих називаються ***вільними*** і їх треба переносити до правих частин рівнянь.

3. Вільним невідомим надати значення довільних сталих.

4. Знайти базисні невідомі, розв'язуючи отриману систему.

Приклад 6. Розв'язати систему $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$

Розв'язання. Виконаємо дослідження системи:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -5 & -4 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & 5 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -5 & -4 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -5 & -4 & 5 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow RgA = RgA^* = 2.$$

Перепишемо систему відповідно до зазначених вище правил, поклавши $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$, та розв'яжемо отриману систему за методом Гаусса:

$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = -2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_2 = 1 - x_3 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 = -2 + C_1 + C_2 \\ x_1 + 2x_2 = 1 - C_1 + 2C_2 \end{cases}$. Тоді за методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -2 + C_1 + C_2 \\ 1 & 2 & 1 - C_1 + 2C_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -2 + C_1 + C_2 \\ -5 & 0 & 5 - 3C_1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 = -2 + C_1 + C_2, \\ -5x_1 = 5 - 3C_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = -0{,}8C_1 + C_2 + 1, \\ x_1 = 0{,}6C_1 - 1. \end{cases}$. Отже, $x_1 = \frac{3}{5}C_1 - 1$, $x_2 = -\frac{4}{5}C_1 + C_2 + 1$, $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$.

Приклад 7. Розв'язати систему методом Гаусса $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$

Розв'язання. При виконанні прямого ходу метода Гаусса застосуємо до розширеної матриці системи елементарні перетворення:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -5 & -4 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & 5 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Оцінивши результат, можна стверджувати, що система сумісна (немає такого рядка, у якому б елементи основної матриці перетворилися на нулі, а елемент стовпця вільних членів відрізнявся б від нуля). $RgA = RgA^* = 2 < n = 4$ і тому два з чотирьох (x_1, x_2, x_3, x_4) невідомих будуть вільними. Нехай це будуть $x_3 = C_1$ та $x_4 = C_2$. Еквівалентна система має вигляд:

$$\begin{cases} -5x_2 = 4C_1 - 5C_2 - 5, \\ x_1 + 2x_2 = -C_1 + 2C_2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -0{,}8C_1 + C_2 + 1, \\ x_1 + 2x_2 = -C_1 + 2C_2 + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = -0{,}8C_1 + C_2 + 1, \\ x_1 + 2\cdot(-0{,}8C_1 + C_2 + 1) = -C_1 + 2C_2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -0{,}8C_1 + C_2 + 1, \\ x_1 = 0{,}6C_1 - 1. \end{cases}$$

Отже, $x_1 = 0{,}6C_1 - 1$, $x_2 = -0{,}8C_1 + C_2 + 1$, $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$.

Однорідні системи. Очевидно, що однорідна система завжди сумісна (розширена матриця відрізняється від основної на стовпець нульових членів). Вона обов'язково має нульовий (тривіальний) розв'язок: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Виникає питання: за яких обставин однорідна система має, крім тривіального, ще й інші розв'язки (тобто буде «нетривіально сумісною»)?

Теорема (необхідна та достатня умова існування нетривіальних розв'язків однорідної системи). Для того, щоб однорідна система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (1.16)$$

мала нетривіальні розв'язки необхідно і достатньо, щоб ранг r основної матриці системи був менший за число n її стовпців ($r < n$).

З цієї теореми випливають два важливих наслідки.

1. Якщо кількість рівнянь однорідної системи менше за кількість її невідомих, то ця система має ненульовий розв'язок.

2. Якщо в однорідній системі кількість рівнянь збігається з кількістю невідомих, то вона має нетривіальні розв'язки тоді й тільки тоді, коли визначник основної матриці системи дорівнює нулю.

Властивості розв'язків однорідної системи

1^0. Якщо $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – розв'язок однорідної системи, то і $k\alpha_1, k\alpha_2, \ldots, k\alpha_n$ ($k = const$) теж буде розв'язком цієї системи.

2^0. Якщо $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ та $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ – розв'язки однорідної системи, то і сума $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n$ буде розв'язком цієї системи.

Приклад 8. Розв'язати систему $\begin{cases} x + y - 7z = 0, \\ x - 6y + z = 0, \\ 5x - y - z = 0. \end{cases}$

Розв'язання. Визначимо ранг основної матриці A даної системи:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 1 & -6 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & -6 & 34 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -26 \\ 0 & -6 & 34 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -190 \end{pmatrix} \Rightarrow RgA = 3.$$

Ранг основної матриці збігається з кількістю невідомих – дана система має тільки тривіальний розв'язок: $x = y = z = 0$.

Приклад 9. Розв'язати систему $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$

Розв'язання. Визначимо ранг основної матриці A даної системи:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 4 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & -8 & 7 \\ 0 & 7 & -8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow RgA = 2.$$

Ранг основної матриці менший за число невідомих, тому система має не тільки тривіальний розв'язок.

За правилами розв'язання довільної системи відкинемо третє рівняння, перенесемо вільні невідомі до правої частини рівнянь, надавши їм значення довільних сталих.

Нехай $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$, тоді система набуває вигляду

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3C_1 + 4C_2, \\ 2x_1 + 3x_2 = 2C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3C_1 + 4C_2, \\ 7x_2 = 8C_1 - 7C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{5}{7}C_1 + 2C_2, \\ x_2 = \dfrac{8}{7}C_1 - C_2. \end{cases}$$

Отже, розв'язок системи можна записати так:

$$x_1 = -\frac{5}{7}C_1 + 2C_2, \quad x_2 = \frac{8}{7}C_1 - C_2, \quad x_3 = C_1, \quad x_4 = C_2.$$

Завдання для самоконтролю

1. Яка система буде сумісною, несумісною, визначеною, невизначеною?
2. Що називається розв'язком системи?
3. Який вигляд має матричний запис системи?
4. Сформулювати необхідну та достатню умову сумісності системи.
5. Умови, за яких сумісна система визначена або невизначена.
6. Розв'язок системи матричним методом.
7. Формули Крамера.
8. Метод Гаусса.
9. Правило розв'язку довільної системи лінійних рівнянь.
10. За якої умови однорідна система має нетривіальний розв'язок?
11. Дослідити системи:

а) $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ -3x - 5y = -4, \\ -2x + 3y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3, \\ -4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 11; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 4, \\ -2x_1 + 4x_3 = -8, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = -3. \end{cases}$

Відповідь: а) несумісна; б) невизначена; в) визначена.

12. Розв'язати системи лінійних алгебраїчних рівнянь матричним методом:

а) $\begin{cases} 6x + 7y + 13 = 0, \\ 5x - 19y - 14 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 19, \\ 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 15, \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 15; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$

Відповідь: а) $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

13. Розв'язати системи лінійних алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y + 3z = -5, \\ 2x - 3y + z = 0, \\ 3x + 2y - z = 5. \end{cases}$

Відповідь: а) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

14. Розв'язати системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y + z = -2, \\ x - y + 2z = -7, \\ 2x + 3y - z = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = -10, \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 7. \end{cases}$

Відповідь: **а)** $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

15. Дослідити системи лінійний алгебраїчних рівнянь на сумісність та знайти загальний розв'язок (якщо він існує):

$$\text{а)} \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 9x_1 - 6x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 1; \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = 5; \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = -1; \end{cases} \qquad \text{г)} \begin{cases} x - y + 3z = 1, \\ 2x + 3y - z = 7, \\ x + 9y - 11z = 11. \end{cases}$$

Відповідь: а) $x_1 = \frac{7}{18} + \frac{2}{3}C_1 + \frac{1}{18}C_2$, $x_2 = C_1$, $x_3 = \frac{1}{6} - \frac{5}{6}C_2$, $x_4 = C_2$;

б) $x_1 = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}C_1 - \frac{1}{3}C_2$, $x_2 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}C_1 + \frac{2}{3}C_2$, $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$;

в) $x_1 = -1 + \frac{1}{2}C_1 - \frac{13}{2}C_2 - \frac{1}{2}C_3$, $x_2 = C_1$, $x_3 = 1 + 5C_2 - C_3$, $x_4 = C_2$, $x_5 = C_3$;

г) $x = 2 - \frac{8}{5}C$, $y = 1 + \frac{7}{5}C$, $z = C$.

16. Знайти загальний розв'язок систем лінійних однорідних рівнянь:

$$\text{а)} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} x + y - 7z = 0, \\ x - 6y + z = 0, \\ 5x - y - z = 0; \end{cases} \quad \text{в)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 5x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Відповідь: а) $x_1 = 2C$, $x_2 = 3C$, $x_3 = C$; б) $(0,0,0)$;

$$\text{в)}\ X = C_1 \begin{pmatrix} 5/3 \\ -4/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Розділ 2. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

2.1. Поняття вектора. Лінійні операції над векторами

Вектори. ***Вектором*** називається напрямлений відрізок $\overline{AB}$ із початковою точкою A та кінцевою точкою B, який можна переносити паралельно самому собі.

Позначається вектор двома буквами $\overline{AB}$ (A - початок, B - кінець) або однією буквою $\bar{a}$ з рискою (стрілкою) угорі.

Відстань між початковою та кінцевою точками називається ***довжиною*** (***модулем***) вектора та позначається $|\overline{AB}|$ або $|\bar{a}|$. Якщо $|\bar{a}| = 1$, то $\bar{a}$ - це так званий ***одиничний*** вектор. Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора $\bar{a}$, називається ***ортом*** вектора $\bar{a}$ та позначається $\overline{a^0}$. ***Нульовим*** називають вектор, довжина якого дорівнює нулю, тобто початкова точка збігається з кінцевою. Напрям для нульового вектора не має сенсу.

Вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ називають ***рівними,*** якщо вони мають однакові напрями та довжини.

Вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ називаються ***колінеарними***, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Три вектори у просторі називаються ***компланарними,*** якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах.

Лінійні дії над векторами. ***Сумою*** векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ називається вектор $\bar{c}$, який з’єднує початок вектора $\bar{a}$ з кінцем вектора $\bar{b}$ за умови, що кінець вектора $\bar{a}$ збігається з початком вектора $\bar{b}$ (рис. 2.1).

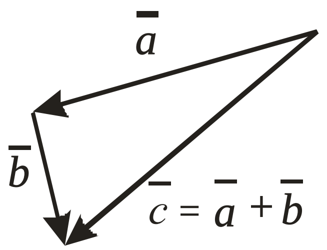


Рис. 2.1

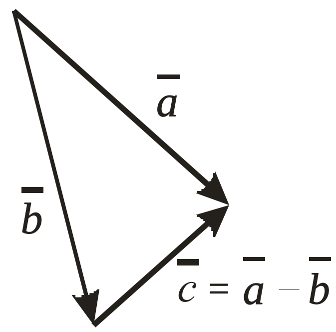


Рис. 2.2

Добутком вектора $\bar{a} \neq 0$ ***на число*** $\lambda \neq 0$ називається вектор $\bar{c} = \lambda \bar{a}$, який має довжину $|\bar{c}| = |\lambda| |\bar{a}|$ і напрям якого при $\lambda > 0$ збігається з напрямом вектора $\bar{a}$ або протилежний вектору $\bar{a}$ при $\lambda < 0$.

Добуток вектора $\bar{a}$ на число (-1) визначає вектор $(-\bar{a})$, який називається ***протилежним*** вектору $\bar{a}$. Наявність для кожного вектора протилежного дає можливість ввести дію віднімання векторів.

Різницею векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ є сума вектора $\bar{a}$ та вектора $(-\bar{b})$, тобто $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$ або $\bar{a} - \bar{b} = \bar{c}$, якщо $\bar{b} + \bar{c} = \bar{a}$ (рис. 2.2).

Властивості лінійних операцій над векторами

Нехай $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ - будь-які вектори; α, β - дійсні числа.

1^0. $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$. 2^0. $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$. 3^0. $\alpha(\beta\bar{a})=(\alpha\beta)\bar{a}$.

4^0. $(\alpha+\beta)\bar{a}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{a}$. 5^0. $\alpha(\bar{a}+\bar{b})=\alpha\bar{a}+\alpha\bar{b}$.

Розклад вектора за базисом. Нехай у тривимірному просторі задано систему трьох векторів $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$ та три будь-які числа λ_1, λ_2, λ_3. Вираз $\lambda_1\overline{a_1}+\lambda_2\overline{a_2}+\lambda_3\overline{a_3}$, який утворено за допомогою лінійних операцій над векторами, називається ***лінійною комбінацією векторів***. Якщо $\lambda_1\overline{a_1}+\lambda_2\overline{a_2}+$ $+\lambda_3\overline{a_3}=0$ тільки тоді, коли одночасно всі $\lambda_i=0$ $(i=\overline{1,3})$, то така система векторів називається ***лінійно незалежною***. У противному разі це лінійно залежна система.

Приклад 1. Довести, що вектори $\bar{a}=\{3;2;1\}$, $\bar{b}=\{1;1;3\}$, $\bar{c}=\{2;-1;2\}$ лінійно незалежні.

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння $\lambda_1\overline{a_1}+\lambda_2\overline{a_2}+\lambda_3\overline{a_3}=0$, тобто

$$\lambda_1\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{cases}3\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3=0,\\ 2\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0,\\ \lambda_1+3\lambda_2+2\lambda_3=0.\end{cases} \text{ Оскільки } \begin{vmatrix}3&1&2\\2&1&-1\\1&3&2\end{vmatrix}=20\neq 0,$$

то система має єдиний розв'язок $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=0$. Отже, дані вектори лінійно незалежні.

Сукупність упорядкованих лінійно незалежних одиничних векторів $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, які попарно перпендикулярні, називається ***ортонормованим базисом.***

Розклад довільного вектора $\bar{a}$ у цьому базисі має вигляд

$$\boxed{\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}}, \tag{2.1}$$

де коефіцієнти a_x, a_y, a_z називають ***координатами вектора*** у цьому базисі та пишуть $\bar{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$.

Таким чином, обраний базис дає змогу встановити взаємно однозначну відповідність між векторами та упорядкованими трійками чисел.

Приклад 2. Нехай $ABCD$ – паралелограм, M та N – середини його сторін (рис. 2.3). Розкласти вектор $\overline{DC}$ за векторами $\bar{a}=\overline{AM}$, $\bar{b}=\overline{AN}$.

Розв'язання. З трикутників AND і AMB маємо $\bar{b}=\overline{AD}+\frac{1}{2}\overline{DC}$, $\bar{a}=\overline{DC}+\frac{1}{2}\overline{AD}$. З першої рівності знайдемо вектор $\overline{AD}$ і підставимо його значення в другу, дістанемо

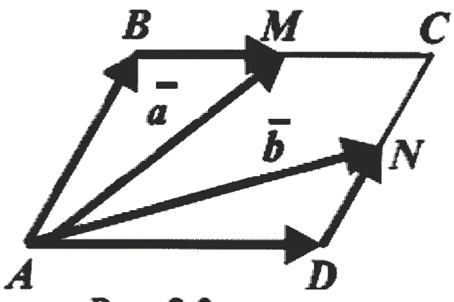


Рис. 2.3

$$\bar{a}=\overline{DC}+\frac{1}{2}(\bar{b}-\frac{1}{2}\overline{DC})=\frac{3}{4}\overline{DC}+\frac{1}{2}\bar{b} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overline{DC} = \frac{4}{3}\overline{a} - \frac{2}{3}\overline{b}$. Отже, якщо вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ - базисні, то координатами вектора в цьому базисі є числа $\frac{4}{3}$; $(-\frac{2}{3})$.

2.2. Проекція вектора на вісь

Нехай дана напрямлена пряма L та вектор $\overline{AB}$. З початкової та кінцевої точок цього вектора проведемо перпендикуляри до прямої L (рис. 2.4). Точки перетину перпендикулярів з цією прямою позначимо через A_1 та B_1. Ці точки є проекцією початкової A та кінцевої B точок вектора $\overline{AB}$ на пряму L. Вектор $\overline{A_1B_1}$ називають ***векторною проекцією*** вектора на напрямлену пряму.

Проекцією вектора $\overline{AB}$ на напрямлену пряму L називається додатне число $|\overline{A_1B_1}|$, якщо вектор $\overline{A_1B_1}$ та пряма L однаково напрямлені, та від'ємне число $-|\overline{A_1B_1}|$, якщо вектор $\overline{A_1B_1}$ та пряма L протилежно напрямлені.

Проекція вектора $\overline{AB}\,(\overline{a})$ на напрямлену пряму L позначається так: $np_L\overline{AB}$ $(np_L\overline{a})$ (рис. 2.4).

Кут між вектором $\overline{a}$ та напрямленою прямою L − це кут між вектором та додатним напрямом цієї прямої. Позначають $(\widehat{\overline{a}\,L}) = \varphi$.

Кутом між двома векторами $\overline{a}$ та $\overline{b}$ називається менший з кутів, на який потрібно повернути вектор $\overline{a}$, щоб його напрям збігався з напрямом вектора $\overline{b}$. Позначають $(\widehat{\overline{a}\,\overline{b}}) = \varphi$, при цьому $0 \le \varphi \le \pi$.

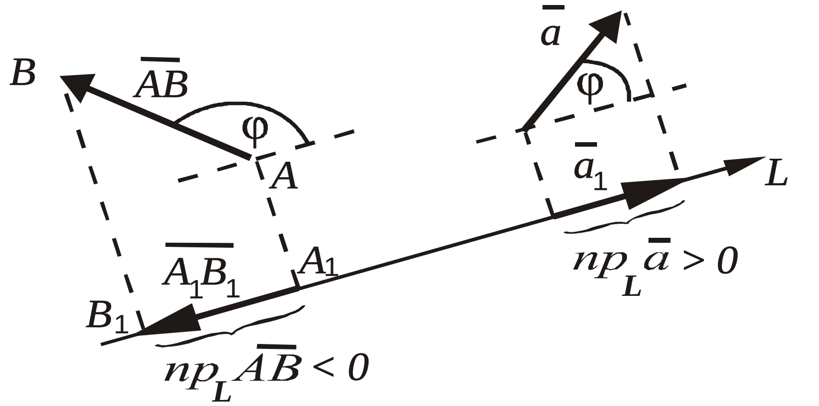


Рис. 2.4

Властивості проекцій

1^0. Проекція вектора $\overline{a}$ на напрямлену пряму L дорівнює добутку довжини вектора $|\overline{a}|$ на косинус кута φ між вектором та додатним напрямком прямої L (рис. 2.4), тобто

$$\boxed{np_L\overline{a} = |\overline{a}|\cos\varphi}, \quad (0 \le \varphi \le \pi). \qquad (2.2)$$

Якщо $\varphi < \frac{\pi}{2}$, то $\cos\varphi > 0$ і $np_L\bar{a} > 0$. Якщо $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, то $\cos\varphi < 0$ і $np_L\bar{a} < 0$.

2^0. Проекція суми кількох векторів на дану вісь дорівнює сумі їх проекцій на цю вісь, тобто $np_L(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) = np_L\bar{a} + np_L\bar{b} + np_L\bar{c}$.

3^0. При множенні вектора $\bar{a}$ на число λ його проекція також помножиться на це число: $np_L(\lambda\bar{a}) = \lambda\, np_L\bar{a}$.

Таким чином, лінійні операції над векторами приводять до відповідних лінійних операцій над проекціями цих векторів.

2.3. Вектори в системі координат

Для того щоб операції над векторами звести до операцій над числами, розглянемо вектори у системі координат, тобто перейдемо до аналітичного опису векторів та точок у R^3. Сукупність фіксованої точки 0 та ортонормованого базису $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ утворює ***декартову прямокутну систему координат*** (точка 0 - ***початок координат***; прямі, проведені вздовж базисних векторів, - ***координатні осі*** Ox, Oy, Oz; площини, які проходять через осі координат, називаються ***координатними площинами***). У такій координатній системі будь-яку точку M можна задати її ***радіусом-вектором*** $\bar{r} = \overline{OM}$, початок якого збігається з початком координат, а кінець – з точкою M. Під ***координати точки*** M розуміють проекції її радіуса-вектора на відповідні осі, тобто відрізки x, y, z (рис. 2.5).

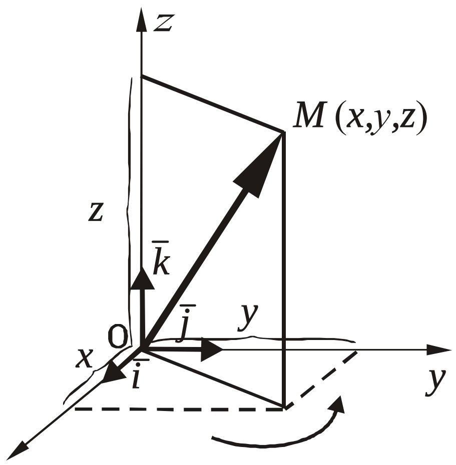


Рис. 2.5

Отже, координати точки – це коефіцієнти розкладу її радіуса-вектора за обраними базисними векторами, тобто

$$\boxed{\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}}. \qquad (2.3)$$

Зазначена система координат – ***права,*** тому що з кінця третього вектора $\bar{k}$ бачимо поворот від першого вектора $\bar{i}$ до другого вектора $\bar{j}$, який відбувається проти руху годинникової стрілки (рис. 2.5).

Проекції будь-якого вектора на вектори базису, які утворюють систему координат, називаються ***координатами вектора в цій системі координат.***

Якщо у прямокутній системі координат дано дві точки $A(x_1; y_1; z_1)$ та $B(x_2; y_2; z_2)$ (рис. 2.6), то координати вектора $\overline{AB} = \{a_x; a_y; a_z\}$ є проекціями вектора $\bar{a}$ на відповідні осі координат, тобто $a_x = np_{\bar{i}}\bar{a}$, $a_y = np_{\bar{j}}\bar{a}$, $a_z np_k\bar{a}$ і їх можна знайти за формулами:

$$\boxed{a_x = x_2 - x_1; \qquad a_y = y_2 - y_1; \qquad a_z = z_2 - z_1}. \qquad (2.4)$$

Приклад 3. Визначити координати вектора $\overline{AB}$, якщо $A(2;-1;0)$, $B(-3;1;-2)$.

Розв'язання. За формулами (2.4) маємо $a_x = -3-2 = -5$, $a_y = 1+1 = 2$, $a_z = -2-0 = -2$. Отже, $\overline{AB} = \{-5;2;-2\}$.

Вектори $\overline{A_1B_1}$ та $\overline{A_2B_2}$ являють собою проекції вектора $\overline{AB}$ на координатні площини xOy та xOz відповідно (рис. 2.6).

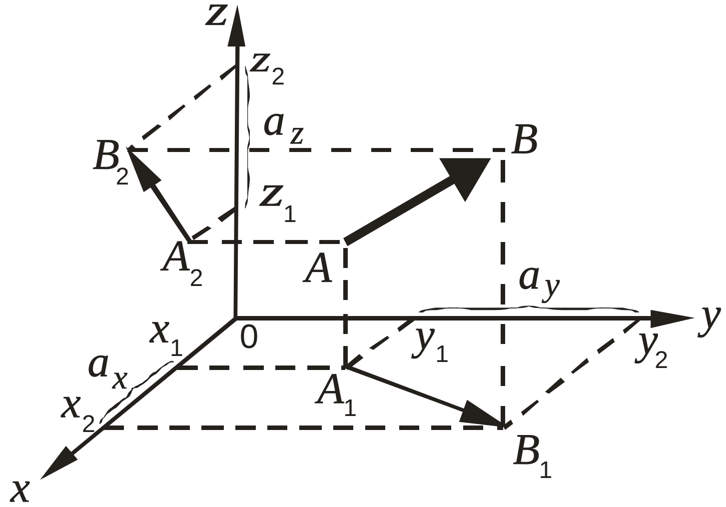


Рис. 2.6

З а у в а ж е н н я. Лінійні дії над векторами зводяться до лінійних дій над їх координатами, тобто для векторів $\overline{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\overline{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ та будь-якого числа λ маємо

$$\boxed{\overline{a} \pm \overline{b} = \{a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z\}}; \qquad \boxed{\lambda \cdot \overline{a} = \{\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z\}}. \qquad (2.5)$$

Приклад 4. Дано два вектори $\overline{a} = \{5;-1;4\}$ та $\overline{b} = \{-6;0;3\}$. Визначити координати векторів: а) $\overline{a} + \overline{b}$; б) $3\overline{a} - \frac{1}{3}\overline{b}$.

Розв'язання. Лінійні операції над векторами, заданими координатами, виконуються за формулами (2.5), тому

а) $\overline{a} + \overline{b} = \{5-6;\ -1+0;\ 4+3\} = \{-1;-1;7\}$;

б) $3\overline{a} - \frac{1}{3}\overline{b} = \{15+2;\ -3-0;\ 12-1\} = \{17;-3;11\}$.

Поділ відрізка в даному відношенні. Нехай задано відрізок AB точками $A(x_1; y_1; z_1)$ та $B(x_2; y_2; z_2)$. Знайдемо на відрізку таку точку $M(x;y;z)$, яка ділить цей відрізок у відношенні λ, тобто $|\overline{AM}| : |\overline{MB}| = \lambda \Rightarrow \overline{AM} = \lambda\,\overline{MB}$. Прирівнюючи проекції на осі координат обох частин цієї рівності, маємо

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y), \quad z - z_1 = \lambda(z_2 - z) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{2.6}$$

Зокрема, координати точки, яка ділить відрізок AB навпіл ($\lambda = 1$), знаходять за формулами

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}}. \tag{2.7}$$

Приклад 5. Знайти координати точки C, яка ділить відрізок між точками $A(1;-3;4)$ та $B(5;7;0)$ навпіл.

Розв'язання. За формулами (2.7) маємо

$$x_C = \frac{1+5}{2} = 3, \quad y_C = \frac{-3+7}{2} = 2, \quad z_C = \frac{4+0}{2} = 2.$$

Завдання для самоконтролю

1. Що називається вектором, ортом, нульовим вектором?
2. За якою формулою обчислюється проекція вектора на напрямлену вісь?
3. Який вираз називають лінійною комбінацією векторів?
4. Який вигляд має розклад вектора за векторами ортонормованого базису?
5. За якими формулами обчислюються координати вектора, якщо дано координати початкової та кінцевої точок?
6. За якими формулами виконуються лінійні операції над векторами, які дано своїми координатами?
7. Записати формули для координат точки, яка ділить відрізок у даному відношенні.
8. Чи будуть вектори $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j}$, $\bar{b} = \{1;-2;3\}$, $\bar{c} = \{1;-1;0\}$ лінійно незалежнми?

Відповідь. Так.

9. Дано три послідовні вершини паралелограма $A(1;-2;3)$, $B(3;2;1)$, $C(6;4;4)$. Знайти його четверту вершину D.

Відповідь. $D(4;0;6)$.

10. Визначити координати вектора $\overline{AB}$, якщо $A(4;-3;0)$, $B(-5;3;-1)$.

Відповідь. $\overline{AB} = \{-9;6;-1\}$.

11. Який із записів:

а) $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + 6\bar{k}$; б) $\bar{a} = 2\bar{p} - 3\bar{q} + 6\bar{d}$; в) $\bar{a} = (2p - 3q + 6)(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})$

називається розкладом вектора по векторам ортонормованого базису?

Відповідь: а), в).

12. Розкласти вектор $\bar{a} = \{4;-5;3\}$ за ортонормованим базисом $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Відповідь. $\bar{a} = 4\bar{i} - 5\bar{j} + 3\bar{k}$.

13. Знайти точку N, з якою збігається кінець вектора $\overline{a}=\{-5;1\}$, якщо його початок збігається з точкою $M(0;7)$.

Відповідь. $N(-5;8)$.

14. Знайти початок вектора $\overline{a}=\{3;-2;-1\}$, якщо його кінець збігається з точкою $(-1;1;4)$.

Відповідь. $(-4;3;5)$.

15. Дано два вектори $\overline{a}=\{3;0;-6\}$ та $\overline{b}=\{-1;2;1\}$. Знайти проекції на координатні осі векторів: а) $\overline{b}-\overline{a}$; б) $\overline{a}+3\overline{b}$; в) $3(-2\overline{a}+\overline{b})-2\overline{b}$; г) $\frac{1}{3}\overline{a}-\overline{b}$.

Відповідь: а) $\overline{b}-\overline{a}=\{-4;2;7\}$; б) $\overline{a}+3\overline{b}=\{0;6;-3\}$;

в) $3(-2\overline{a}+\overline{b})-2\overline{b}=\{-19;2;37\}$; г) $\frac{1}{3}\overline{a}-\overline{b}=\{2;-2;-3\}$.

16. Знайти координати точок C та D, які ділять відрізок між точками $A(2;-3)$ та $B(6;8)$ на три рівні частини.

Відповідь: $C(\frac{10}{3};\frac{2}{3})$, $D(\frac{14}{3};\frac{13}{3})$.

17. Визначити координати кінцевих точок відрізка AB, який точками $C(2;0;2)$ та $D(5;-2;0)$ ділиться на три рівні частини.

Відповідь: $A(-1;2;4)$, $B(8;-4;-2)$.

2.4. Скалярний добуток векторів

Означення та властивості скалярного добутку. ***Скалярним добутком двох векторів*** $\overline{a}$ та $\overline{b}$ називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними та яке позначають символом $\overline{a}\cdot\overline{b}$ або $\overline{a}\overline{b}$:

$$\boxed{\overline{a}\overline{b}=|\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi}. \tag{2.8}$$

Приклад 1. Дано $|\overline{a}|=4$, $|\overline{b}|=3$, $\varphi=(\widehat{\overline{a},\overline{b}})=\frac{2}{3}\pi$. Обчислити $\overline{a}\overline{b}$.

Розв'язання. Користуючись означенням скалярного добутку (2.8), маємо $\overline{a}\overline{b}=|\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi=4\cdot 3\cos\frac{2\pi}{3}=12\cdot(-\frac{1}{2})=-6$.

За формулою (2.2): $|\overline{b}|\cos\phi=пр_{\overline{a}}\overline{b}$, $|\overline{a}|\cos\phi=пр_{\overline{b}}\overline{a}$, тому можна записати, що $\overline{a}\overline{b}=|\overline{b}|\;пр_{\overline{b}}\overline{a}$ або $\overline{a}\overline{b}=|\overline{a}|\;пр_{\overline{a}}\overline{b}$. Отже,

$$\boxed{пр_{\overline{a}}\overline{b}=\frac{\overline{a}\overline{b}}{|\overline{a}|}}. \tag{2.9}$$

Властивості скалярного добутку

1^0. $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$.

2^0. $(\lambda\bar{a})\bar{b} = \lambda(\bar{a}\bar{b})$, де λ - будь-яке дійсне число.

3^0. $\bar{a}(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$.

4^0. $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$ (скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини).

5^0. $\bar{a}\bar{b} = 0$, якщо один з множників дорівнює нулю або вектори перпендикулярні.

Визначимо скалярний добуток векторів, що задаються своїми координатами $\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ та $\bar{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$:

$$\bar{a}\bar{b} = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k})(b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}) = a_x b_x \bar{i}^2 + a_x b_y \bar{i}\bar{j} + a_x b_z \bar{i}\bar{k} +$$
$$+ a_y b_x \bar{j}\bar{i} + a_y b_y \bar{j}^2 + a_y b_z \bar{j}\bar{k} + a_z b_x \bar{k}\bar{i} + a_z b_y \bar{k}\bar{j} + a_z b_z \bar{k}^2.$$

Вектори $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ − одиничні, тому $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$. Враховуючи властивість 4^0 маємо: $\bar{i}^2 = |\bar{i}|^2 = 1$; $\bar{j}^2 = |\bar{j}|^2 = 1$; $\bar{k}^2 = |\bar{k}|^2 = 1$. Вони також взаємно перпендикулярні, тому за властивістю 5^0: $\bar{i}\bar{j} = \bar{i}\bar{k} = \bar{j}\bar{k} = 0$. З цього випливає, що

$$\boxed{\bar{a}\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}. \qquad (2.10)$$

Приклад 2. Знайти скалярний добуток векторів $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$, якщо $A(-1;1;5)$, $B(2;3;-4)$, $C(-3;1;0)$.

Розв'язання. Визначимо координати векторів $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$ за формулою (2.4), дістанемо $\overline{AB} = \{3;2;-9\}$, $\overline{BC} = \{-5;-2;4\}$. Згідно з формулою для обчислення скалярного добутку векторів, заданих своїми координатами (2.10), маємо $\overline{AB}\cdot\overline{BC} = 3\cdot(-5) + 2\cdot(-2) - 9\cdot 4 = -55$.

Довжина вектора. Нехай дано вектор $\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$. За властивістю 4^0 (квадрат довжини вектора дорівнює його скалярному квадрату) та формулою (2.10) дістанемо $|\bar{a}|^2 = \bar{a}\cdot\bar{a} = a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$.

Таким чином,

$$\boxed{|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \qquad (2.11)$$

Приклад 3. Обчислити довжину вектора $\bar{a} = \{3; -6; 2\}$.

Розв'язання: $|\bar{a}| = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{49} = 7$.

Відстань між двома точками. За відстань d між точками $A(x_1; y_1; z_1)$ та $B(x_2; y_2; z_2)$ можна вважати довжину вектора $\overline{AB}$. Згідно з формулами (2.4) та (2.11) маємо

$$\boxed{d = \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}. \qquad (2.12)$$

Приклад 4. Знайти відстань між точками $A(-2;0;5)$ та $B(4;3;3)$.

Розв'язання: $d = \sqrt{(4+2)^2 + (3-0)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{36+9+4} = 7$.

Кут між векторами. Виходячи з означення скалярного добутку (2.8), кут між векторами $\overline{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\overline{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ знаходиться за формулою $\cos\varphi = \dfrac{\overline{a}\,\overline{b}}{|\overline{a}|\,|\overline{b}|}$ або у координатній формі

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}}. \qquad (2.13)$$

Якщо $\overline{a} \perp \overline{b}$, тобто $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, то $\cos\varphi = 0$, тоді чисельник формули (2.13) дорівнює нулю:

$$\boxed{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0}. \qquad (2.14)$$

Формула (2.14) втілює умову перпендикулярності двох векторів, яку можна сформулювати так: **для того щоб два вектори були перпендикулярні, необхідно і достатньо, щоб їх скалярний добуток дорівнював нулю.**

Приклад 5. Знайти кут між векторами $\overline{a} = \{3;0;4\}$ та $\overline{b} = \{7;0;1\}$.

Розв'язання: $\cos\varphi = \dfrac{21+0+4}{\sqrt{9+0+16}\sqrt{49+0+1}} = \dfrac{25}{25\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Приклад 6. Знайти проекцію вектора $\overline{a} = \{4;-3;7\}$ на напрям вектора $\overline{b} = \{3;0;4\}$.

Розв'язання. За формулою (2.9) маємо $пр_{\overline{b}}\overline{a} = \dfrac{\overline{a}\,\overline{b}}{|\overline{b}|} = \dfrac{12+28}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{40}{5} = 8$.

Напрямні косинуси. Косинуси кутів α, β, γ, які вектор $\overline{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ утворює з координатними осями (або базисними векторами $\overline{i} = \{1;0;0\}$, $\overline{j} = \{0;1;0\}$, $\overline{k} = \{0;0;1\}$), називаються ***напрямними косинусами***. За формулою (2.13) маємо:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}}. \qquad (2.15)$$

Приклад 7. Знайти напрямні косинуси вектора $\overline{a}=\{6;0;-8\}$.

Розв'язання: $\cos\alpha=\frac{6}{\sqrt{36+64}}=\frac{3}{5}$, $\quad\cos\beta=\frac{0}{10}=0$, $\quad\cos\gamma=\frac{-8}{10}=-\frac{4}{5}$.

Якщо ліві та праві частини рівностей (2.15) піднести до квадрата та скласти їх, то дістанемо формулу

$$\boxed{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1}. \tag{2.16}$$

Приклад 8. Чи може будь-який вектор утворювати з координатними осями кути $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $\beta=\frac{2\pi}{3}$, $\gamma=\frac{\pi}{6}$?

Розв'язання. Підставимо дані значення кутів у формулу (2.16). Якщо рівність перетвориться на тотожність, то такий вектор існує. Перевіримо це:

$$\cos^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{2\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{6}=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=\frac{3}{2}\neq 1.$$

Сума квадратів напрямних косинусів не дорівнює одиниці − це означає, що такий вектор не може існувати.

Кожен вектор $\overline{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$ характеризується своїм ***ортом*** **–** одиничним вектором, напрям якого збігається з напрямом зазначеного вектора. Орт вектора $\overline{a}$ позначається $\overline{a^0}$ та обчислюється за формулою

$$\overline{a^0}=\frac{\overline{a}}{|\overline{a}|} \text{ або } \boxed{\overline{a^0}=\{\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\}}. \tag{2.17}$$

Координатами орта $\overline{a^0}$ вектора $\overline{a}$ згідно з (2.15) мають бути напрямні косинуси, тобто

$$\boxed{\overline{a^0}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}}. \tag{2.18}$$

Приклад 9. Знайти координати орта $\overline{a^0}$, якщо $\overline{a}=\{6;7;-6\}$.

Розв'язання: $|\overline{a}|=\sqrt{36+49+36}=11 \Rightarrow \quad \overline{a_x^0}=\frac{6}{11}$; $\quad\overline{a_y^0}=\frac{7}{11}$; $\quad\overline{a_z^0}=-\frac{6}{11}$.

Завдання для самоконтролю

1. Що називається скалярним добутком двох векторів?
2. За якою формулою обчислюється проекція одного вектора на напрям іншого?
3. Сформулювати властивості скалярного добутку.
4. Сформулювати необхідну і достатню умову перпендикулярності двох векторів.
5. Записати формулу для обчислення довжини вектора, заданого своїми координатами.

6. Записати формулу для знаходження кута між векторами, заданими своїми координатами.

7. Що називається напрямними косинусами векторів? Як вони знаходяться?

8. Що таке орт вектора та як він знаходиться?

9. Яку умову задовольняють кути вектора, які він утворює з осями координат?

10. Дано $|\bar{a}|=4$, $|\bar{b}|=3$, $\varphi=(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=\frac{2}{3}\pi$. Обчислити $(2\bar{b}-\bar{a})(3\bar{a}+\bar{b})$.

Відповідь. -60.

11. Дано $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=5$. Визначити, при якому α вектори $\bar{c}=\bar{a}+\alpha\bar{b}$ та $\bar{d}=\bar{a}-\alpha\bar{b}$ будуть взаємно перпендикулярні.

Відповідь. $\pm\frac{3}{5}$.

12. Обчислити довжину вектора $\bar{p}=2\bar{a}-3\bar{b}$, якщо $|\bar{a}|=1$, $|\bar{b}|=4$, $(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=\frac{\pi}{3}$.

Відповідь. $2\sqrt{31}$.

13. Знайти скалярний добуток векторів $\bar{a}=\{-4;5;-3\}$ та $\bar{b}=\{3;-2;-1\}$.

Відповідь. -19.

14. Обчислити довжину вектора $\bar{a}=\{3;-6;2\}$.

Відповідь. 7.

15. Знайти проекцію вектора $\bar{a}=\{5;2;5\}$ на вісь вектора $\bar{b}=\{2;-1;2\}$.

Відповідь. 6.

16. Дано вершини трикутника $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$. Знайти внутрішній кут при вершині B.

Відповідь. 45^0.

17. При якому значенні α вектори $\bar{a}=\{2;\alpha;3\}$ і $\bar{b}=\{5;2;-\alpha\}$ взаємно перпендикулярні?

Відповідь. 10.

18. Знайти довжину та напрям вектора $\bar{a}=\{12;-15;16\}$.

Відповідь. $|\bar{a}|=25$, $\cos\alpha=\frac{12}{25}$, $\cos\beta=-\frac{3}{4}$, $\cos\gamma=\frac{16}{25}$.

19. Чи може вектор утворювати з осями координат кути $\alpha=\beta=60^0$, $\gamma=30^0$?

Відповідь. Ні.

2.5. Векторний добуток векторів

Трійка векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ називається ***правою***, якщо вектори орієнтовано так само, як і вектори $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ правої системи координат у протилежному випадку трійка – **ліва**. Орієнтація трійки втрачає сенс для компланарних векторів.

Означення і властивості векторного добутку. ***Векторним добутком векторів*** $\bar{a}$ та $\bar{b}$ називається вектор $\bar{c}$, який:

1) має довжину $|\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi$, де φ – кут між векторами $\bar{a}$ та $\bar{b}$;

2) перпендикулярний до кожного з векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$;

3) вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ утворюють праву трійку векторів.

Векторний добуток позначають одним із символів: $\bar{a} \times \bar{b}$; $[\bar{a}\bar{b}]$; $[\bar{a} \times \bar{b}]$.

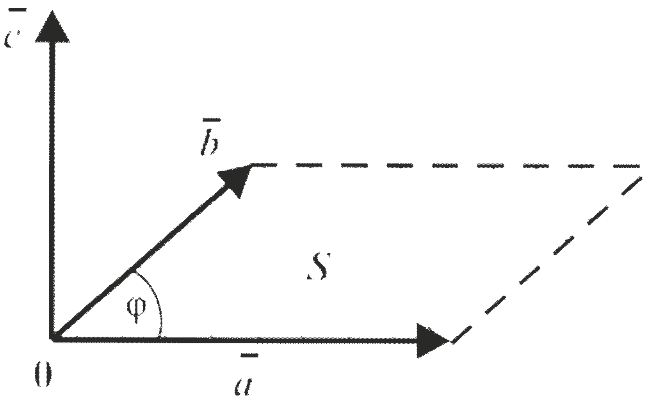


Рис. 2.7

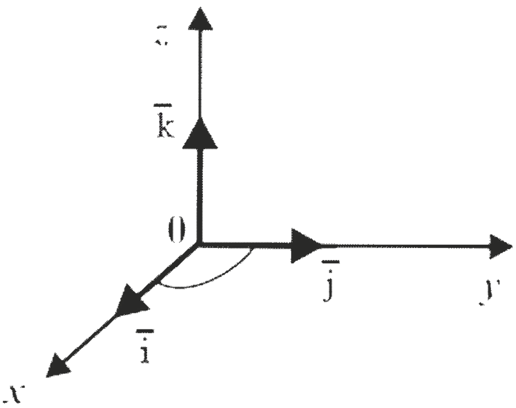


Рис. 2.8

Властивості векторного добутку

1^0. $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$.

2^0. $\lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times \lambda\bar{b}$, де λ - будь-яке дійсне число.

3^0. $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$.

4^0. Векторний добуток двох векторів дорівнює нулю, якщо один з множників дорівнює нулю або ці вектори колінеарні.

5^0. Модуль $|\bar{a} \times \bar{b}|$ векторного добутку неколінеарних векторів дорівнює площі паралелограма S, побудованого на векторах $\bar{a}$ та $\bar{b}$, віднесених до спільного початку, тобто $S = |\bar{a} \times \bar{b}|$ (рис. 2.7).

За властивістю 4^0 маємо: **для того щоб два вектори були колінеарні, необхідно і достатньо, щоб їх векторний добуток дорівнював нулю.**

Визначимо векторний добуток векторів, що задаються своїми координатами $\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ та $\bar{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$:

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}) \times (b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}) = a_xb_x\bar{i} \times \bar{i} + a_xb_y\bar{i} \times \bar{j} + a_xb_z\bar{i} \times \bar{k} +$$
$$+ a_yb_x\bar{j} \times \bar{i} + a_yb_y\bar{j} \times \bar{j} + a_yb_z\bar{j} \times \bar{k} + a_zb_x\bar{k} \times \bar{i} + a_zb_y\bar{k} \times \bar{j} + a_zb_z\bar{k} \times \bar{k}.$$

Вектори $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – одиничні, тому $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$. Враховуючи властивість 4^0: $\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = 0$. Вектори $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ взаємно перпендикулярні, отже, згідно з означенням векторного добутку, маємо $|\bar{i} \times \bar{j}| = |\bar{i}|\,|\bar{j}| \sin 90^0 = 1$. При цьому вектори $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ утворюють праву трійку. Очевидно, що $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$. За властивістю 1^0 маємо $\bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k}$. Аналогічно можна довести рівності: $\bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}, \bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i}$, $\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}, \bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}$. Враховуючи все перераховане, дістанемо, що векторний добуток векторів, які задаються своїми координатами $\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ та $\bar{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, обчислюється за формулою

$$\boxed{\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}}. \qquad (2.19)$$

Приклад 1. Дано $|\bar{a}| = 10$, $|\bar{b}| = 2$ та $\bar{a}\bar{b} = 12$. Обчислити $|[\bar{a}\bar{b}]|$.

Розв'язання. За означенням векторного добутку маємо $|[\bar{a}\bar{b}]| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi$, де φ – кут між даними векторами. Цей кут знайдемо з формули (2.8): $12 = 10 \cdot 2 \cdot \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{3}{5}$. Отже, $\sin\varphi = \sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5}$ і $|[\bar{a}\bar{b}]| = 10 \cdot 2 \cdot \frac{4}{5} = 16$.

Приклад 2. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\bar{a}$ та $\bar{b}$, якщо ці вектори утворюють кут 45^0 та $\bar{a}\bar{b} = 4$.

Розв'язання: $S_\Delta = \frac{1}{2}|\bar{a} \times \bar{b}|$. За означенням векторного добутку $|\bar{a} \times \bar{b}| =$
$= |\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi = |\bar{a}||\bar{b}|\sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}|\bar{a}||\bar{b}|$. З (2.8) маємо $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi \Rightarrow$
$\Rightarrow |\bar{a}||\bar{b}| = \frac{\bar{a}\bar{b}}{\cos 45^0} = \frac{4 \cdot 2}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$. Отже, $|\bar{a} \times \bar{b}| = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 4 \Rightarrow S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$.

Приклад 3. Яку умову мають задовольняти вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$, щоб вектори $\bar{a} + \bar{b}$ і $\bar{a} - \bar{b}$ були колінеарними?

Розв'язання. На підставі умови колінеарності вектори $\bar{a} + \bar{b}$ та $\bar{a} - \bar{b}$ будуть колінеарними тоді й тільки тоді, коли їх векторний добуток дорівнюватиме нульовому вектору: $(\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b}) = \bar{a} \times \bar{a} + \bar{b} \times \bar{a} - \bar{a} \times \bar{b} - \bar{b} \times \bar{b} =$
$= -2(\bar{a} \times \bar{b}) = 0$, тобто $\bar{a} \times \bar{b} = 0$. А це означає, що вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ мають бути колінеарними.

Приклад 4. Дано точки $A(2; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$, $C(3; 2; 1)$. Знайти координати векторного добутку $(\overline{BC} - 2\overline{CA}) \times \overline{CB}$.

Розв'язання. Оскільки $\overline{BC} = \{2; 0; 2\}$, $\overline{CA} = \{-1; -3; 1\}$, $\overline{CB} = \{-2; 0; -2\}$, $\overline{BC} - 2\overline{CA} = \{4; 6; 0\}$, то за формулою (2.18) векторний добуток дорівнюватиме

$$(\overline{BC}-2\overline{CA})\times\overline{CB}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 4 & 6 & 0\\ -2 & 0 & -2\end{vmatrix}=-12\bar{i}+8\bar{j}+12\bar{k}.$$

Приклад 5. Знайти орт вектора, перпендикулярного до векторів $\bar{a}=\{4;4;2\}$ та $\bar{b}=\{4;5;3\}$.

Розв'язання. Координати будь-якого вектора $\bar{d}$, перпендикулярного до двох заданих векторів, будуть пропорційні координатам векторного добутку цих векторів: $\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 4 & 4 & 2\\ 4 & 5 & 3\end{vmatrix}=2\bar{i}-4\bar{j}+4\bar{k}\Rightarrow\bar{d}=\{2k;-4k;4k\}$, де k – коефіцієнт пропорційності. Щоб відшукати орт вектора $\bar{d}$, тобто одиничний вектор $\overline{d^0}$, треба знайти довжину $|\bar{d}|=\sqrt{(2k)^2+(-4k)^2+(4k)^2}=\pm 6k$ та прирівняти її до одиниці: $\pm 6k=1\Rightarrow k=\pm\frac{1}{6}$. Остаточно, шуканий вектор буде мати вигляд $\overline{d^0}=\pm\frac{1}{3}(\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k})$.

Приклад 6. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}=8\bar{i}+4\bar{j}+\bar{k}$ та $\bar{b}=2\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k}$.

Розв'язання. Шукана площа визначається рівністю $S=|\bar{a}\times\bar{b}|$. Визначимо векторний добуток даних векторів та його довжину:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 8 & 4 & 1\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=6\bar{i}-6\bar{j}-24\bar{k}.\quad \text{Тому}\quad S=\sqrt{6^2+(-6)^2+(-24)^2}=18\sqrt{2}.$$

Приклад 7. У трикутнику з вершинами $A(3;1;4)$, $B(7;-4;4)$, $C(3;5;1)$ проведено висоту з вершини B. Знайти довжину цієї висоти.

Розв'язання. З одного боку, $S_\Delta=\frac{1}{2}ah$, де $a=|\overline{AC}|$ - довжина основи, h - висота, проведена до цієї основи, а з іншого, за допомогою векторного добутку $S_\Delta=\frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|$. Отже: $|\overline{AC}|\cdot h=|\overline{AB}\times\overline{AC}|\Rightarrow h=\frac{|\overline{AB}\times\overline{AC}|}{|\overline{AC}|}$. Оскільки $\overline{AB}=\{4;-5;0\}$, $\overline{AC}=\{0;4;-3\}$, маємо $\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 4 & -5 & 0\\ 0 & 4 & -3\end{vmatrix}=15\bar{i}+12\bar{j}+16\bar{k}$.

$|\overline{AC}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$, $|\overline{AB}\times\overline{AC}|=\sqrt{15^2+12^2+16^2}=25$ і $h=5$.

Завдання для самоконтролю

1. Що називається векторним добутком двох векторів?

2. Сформулювати властивості векторного добутку.

3. Сформулювати необхідну та достатню умови колінеарності векторів.

4. Записати формулу для обчислення векторного добутку двох векторів, заданих координатами в прямокутній системі координат.

5. Чому дорівнює площа паралелограма, побудованого на двох векторах, як на сторонах?

6. Як знайти будь-який вектор, перпендикулярний двом заданим?

7. Дано $|\bar{a}|=6$, $|\bar{b}|=5$, $(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=\dfrac{\pi}{6}$. Знайти $|[\bar{a}\bar{b}]|$.

Відповідь. 15.

8. Знайти площу трикутника, який побудовано на векторах $\bar{a}$ та $\bar{b}$, якщо $|\bar{a}|=10$, $|\bar{b}|=2$ і $\bar{a}\bar{b}=12$.

Відповідь. 8.

9. Вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ утворюють кут $\varphi=120^0$, $|\bar{a}|=1$, $|\bar{b}|=2$. Обчислити $((\bar{a}+3\bar{b})\times(3\bar{a}-\bar{b}))^2$.

Відповідь. 300.

10. Знайти векторний добуток векторів $\bar{a}=7\bar{i}+4\bar{j}-\bar{k}$ та $\bar{b}=-5\bar{j}+3\bar{k}$.

Відповідь. $7(\bar{i}-3\bar{j}-5\bar{k})$.

11. Дано вектори $\bar{a}=\{3;-1;-2\}$ та $\bar{b}=\{1;2;-1\}$. Знайти координати векторного добутку $(2\bar{a}-\bar{b})\times(\bar{a}+3\bar{b})$.

Відповідь. $\{35;7;49\}$.

12. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\bar{a}=2\bar{i}-4\bar{j}-4\bar{k}$ та $\bar{b}=2\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}$.

Відповідь. $\dfrac{\sqrt{65}}{9}$.

13. Знайти орт вектора, перпендикулярного до векторів $\bar{a}=\{3;-1;-2\}$ та $\bar{b}=\{1;2;-1\}$.

Відповідь. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\bar{i}+\dfrac{\sqrt{3}}{15}\bar{j}+\dfrac{7\sqrt{3}}{15}\bar{k}$.

14. Обчислити площу трикутника з вершинами $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$, $C(5;2;6)$.

Відповідь. 14.

15. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}=\{3;-5;-2\}$ та $\bar{b}=\{3;2;-10\}$.

Відповідь. $3\sqrt{437}$.

10. Дано вершини трикутника $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$. Обчислити довжину висоти, проведеної з вершини B на сторону AC.

Відповідь. 5.

2.6. Мішаний добуток векторів

Означення, обчислення та властивості мішаного добутку. ***Мішаним добутком векторів*** $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ називається скалярний добуток векторів $(\bar{a} \times \bar{b})$ та $\bar{c}$. З означення випливає, що мішаний добуток векторів – це **число**. Мішаний добуток позначають одним із символів: $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$; $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$; $(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$.

Властивості мішаного добутку

1^0. Якщо поміняти місцями два сусідніх множники, мішаний добуток змінює знак на протилежний, наприклад: $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{b}\bar{a}\bar{c}$.

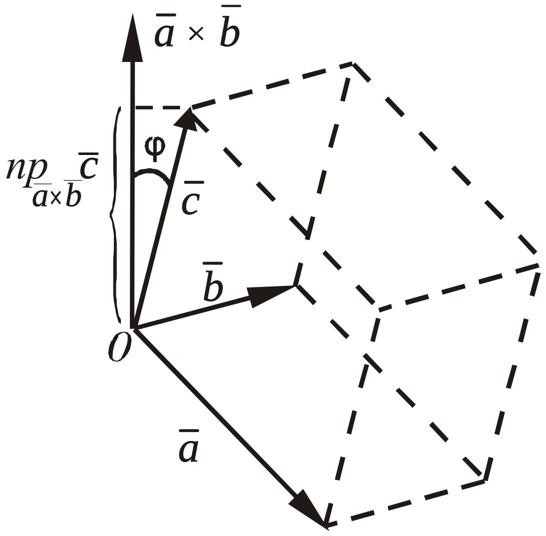


Рис. 2.9

2^0. При циклічному переставленні співмножників величина мішаного добутку не змінюється ($\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{c}\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{c}\bar{a}$).

3^0. У мішаному добутку знаки векторного і скалярного добутків можна міняти місцями: $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$.

4^0. Якщо мішаний добуток $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$ додатний, то вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ утворюють праву трійки, а якщо від'ємний, то ліву.

5^0. Модуль мішаного добутку $|\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}|$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, віднесених до спільного початку (рис. 2.9):

$$|\bar{a}\bar{b}\bar{c}| = |(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}| = |\bar{a} \times \bar{b}||\bar{c}||\cos\varphi| = |\bar{a} \times \bar{b}||np_{\bar{a}\times\bar{b}}\bar{c}| = S_{осн}h = V.$$

6^0. Мішаний добуток трьох векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ дорівнює нулю, коли один з множників нульовий або вектори компланарні.

Згідно з останньою властивістю можна стверджувати: **для того щоб три вектори були компланарні, необхідно і достатньо, щоб їх мішаний добуток дорівнював нулю.**

Мішаний добуток векторів, що задаються своїми координатами $\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\bar{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, $\bar{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$, можна обчислити за формулою

$$\boxed{\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}}. \qquad (2.20)$$

Умова компланарності векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ набуває вигляду

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0}. \qquad (2.21)$$

Чотири точки $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$, $D(x_4;y_4;z_4)$ тривимірного простору лежатимуть в одній площини, якщо вектори $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ – компланарні, тобто $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} = 0$.

Приклад 1. Дано вектори $\bar{a} = \bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{b} = -2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{c} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + 5\bar{k}$. Обчислити $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

Розв'язання. За формулою (2.20) дістанемо

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 12 - 3 - 18 + 2 - 10 = -7.$$

Приклад 2. Довести, що $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$, якщо $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$, $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$, $\bar{c} = c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k}$.

Розв'язання. З означення мішаного добутку маємо $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b})\bar{c}$.

За формулою (2.19): $\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\bar{k}$,

тоді згідно з формулою (2.10) для знаходження скалярного добутку векторів, заданих своїми координатами, та на підставі властивостей визначника третього порядку отримаємо

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Приклад 3. Вектор $\bar{c}$ перпендикулярний до векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$, кут φ між $\bar{a}$ та $\bar{b}$ дорівнює 30^0. Обчислити $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$, якщо $|\bar{a}| = 6$, $|\bar{b}| = 3$, $|\bar{c}| = 3$.

На підставі означення мішаного добутку маємо $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} =$ $= |\bar{a} \times \bar{b}|\,|\bar{c}|\cos\phi$, де ϕ – кут між векторами $(\bar{a} \times \bar{b})$ та $\bar{c}$. За означенням векторного добутку: $(\bar{a}\times\bar{b})\perp\bar{a}$, $(\bar{a}\times\bar{b})\perp\bar{b}$, тому $(\bar{a}\times\bar{b})\parallel\bar{c}$ і $\varphi=0$ або $\varphi=\pi$. Таким чином, $\cos\varphi=\pm1$. Враховуючи, що $|\bar{a}\times\bar{b}|=|\bar{a}||\bar{b}|\sin\phi$, дістанемо

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}==|\bar{a}||\bar{b}|\sin\phi\,|\bar{c}|\cos\varphi=6\cdot3\cdot\frac{1}{2}\cdot3\cdot(\pm1)=\pm27.$$

Знак плюс у тому випадку, коли трійка векторів $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ права, і мінус, коли ця трійка ліва.

Приклад 4. Перевірити компланарність векторів $\bar{a}=\{2;3;-1\}$, $\bar{b}=\{1;-1;3\}$, $\bar{c}=\{1;9;-11\}$.

Розв'язання. Оскільки $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=\begin{vmatrix}2&3&-1\\1&-1&3\\1&9&-11\end{vmatrix}=22-9+9-1-54+33=0$,

то за умовою компланарності вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ − компланарні.

Приклад 5. Довести, що точки $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$ лежать в одній площині.

Розв'язання. Точки A, B, C, D лежать в одній площині, якщо вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ − компланарні. Знаходимо вектори $\overline{AB}=\{-1;-1;6\}$, $\overline{AC}=\{-2;0;2\}$, $\overline{AD}=\{1;-1;4\}$ та перевіряємо умову компланарності

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}=\begin{vmatrix}-1&-1&6\\-2&0&2\\1&-1&4\end{vmatrix}=-2-10+12=0.$$

Оскільки мішаний добуток дорівнює нулю, то вектори компланарні. Це означає, що точки A, B, C, D лежать в одній площині.

Приклад 6. Яку трійку утворюють вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$, якщо $\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}$, $\bar{b}=-\bar{i}+2\bar{k}$, $\bar{c}=\bar{i}-2\bar{j}+5\bar{k}$.

Розв'язання. Оскільки мішаний добуток $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&0&2\\1&-2&5\end{vmatrix}=24>0$,

то за властивістю 4^0 дані вектори утворюють праву трійку.

Приклад 7. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, якщо $A(3;-2;5)$, $B(1;3;1)$, $C(-1;-1;3)$, $D(4;3;4)$.

Розв'язання. За властивістю мішаного добутку 5^0 об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ запишеться так: $V=|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}|$. Отже, знаходимо вектори $\overline{AB}=\{-2;5;-4\}$, $\overline{AC}=\{-4;1;-2\}$, $\overline{AD}=\{1;5;-1\}$ та їх мішаний добуток

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}=\begin{vmatrix}-2 & 5 & -4\\ -4 & 1 & -2\\ 1 & 5 & -1\end{vmatrix}=36. \quad \text{Остаточно, } V=36.$$

Приклад 8. Дано вершини піраміди $A(1;1;1)$, $B(2;0;2)$, $C(2;2;2)$, $D(3;4;-38)$. Знайти довжину висоти піраміди h, проведеної з вершини D.

Розв'язання. Як відомо, об'єм піраміди можна знайти за формулою $V=\frac{1}{3}S_{осн}h=\frac{1}{6}\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|h.$ Крім цього, об'єм піраміди, побудованої на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, дорівнює шостій частині об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, тобто $V=\frac{1}{6}\left|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right|.$ З двох наведених рівностей випливає формула $h=\dfrac{\left|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right|}{\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|}$. Знайдемо: $\overline{AB}=\{1;-1;1\}$, $\overline{AC}=\{1;1;1\}$, $\overline{AD}=\{2;3;-4\}$;

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -4\end{vmatrix}=-12 \quad \Rightarrow \quad V=\left|-12\right|=12;$$

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-2\overline{i}+2\overline{k}; \qquad \left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{(-2)^2+(2)^2}=2\sqrt{2};$$

$$h=\frac{12}{2\sqrt{2}}=3\sqrt{2}.$$

Завдання для самоконтролю

1. Що називається мішаним добутком трьох векторів?

2. Записати формулу, за якою обчислюється мішаний добуток трьох векторів, заданих своїми координатами в прямокутній системі координат.

3. Сформулюйте умову компланарності трьох векторів.

4. Як за допомогою мішаного добутку можна визначити орієнтацію трійки векторів?

5. Як знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на трьох векторах віднесених до спільного початку?

6. Сформулюйте умову, при якій чотири точки лежатимуть на одній площині.

7. Дано вектори $\overline{a}=2\overline{i}+3\overline{j}-3\overline{k}$, $\overline{b}=\overline{i}-2\overline{j}+4\overline{k}$, $\overline{c}=3\overline{i}+5\overline{j}-2\overline{k}$. Обчислити $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$.

Відповідь. -23.

8. Встановити, чи компланарні вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$, якщо:

а) $\overline{a}=\{3;1;-1\}$, $\overline{b}=\{1;2;-3\}$, $\overline{c}=\{3;-4;7\}$;

б) $\overline{a}=\{5;-1;3\}$, $\overline{b}=\{2;1;2\}$, $\overline{c}=\{3;-1;-2\}$.

Відповідь: а) так; б) ні.

9. Довести, що кінці радіусів-векторів $\overline{r_1}=\{4;-2;-2\}$, $\overline{r_2}=\{3;1;1\}$, $\overline{r_3}=\{4;2;0\}$, $\overline{r_4}=\{7;-1;-6\}$ лежать в одній площині.

10. Якою трійкою (правою чи лівою) є трійка $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$, якщо:

а) $\overline{a}=\{3;-2;-1\}$, $\overline{b}=\{2;-3;1\}$, $\overline{c}=\{1;-2;-3\}$;

б) $\overline{a}=\{1;4;3\}$, $\overline{b}=\{2;-5;1\}$, $\overline{c}=\{1;-3;2\}$.

Відповідь: а) правою; б) лівою.

11. Дано вершини піраміди $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$. Знайти довжину висоти піраміди h, проведеної з вершини D.

Відповідь. 11.

Розділ 3. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Рівняння геометричного об'єкту. Геометричний об'єкт можливо розглядати як геометричне місце точок, що задовольняють деяку умову.

Рівнянням геометричного об'єкту в прямокутній системі координат $Oxyz$ називається таке рівняння $F(x,y,z)=0$ з трьома змінними x, y, z якому задовольняють координати кожної точки, що лежать на цьому геометричному об'єкті. Змінні x, y, z називаються поточними координатами.

3.1. Площина

Рівняння площини, що проходить через дану точку, перпендикулярно до даного вектора. Нехай у просторі $Oxyz$ задано площину P точкою $M_0(x_0;y_0;z_0)$ та вектором $\bar{n}=\{A;B;C\}$, перпендикулярним до цієї площини. Візьмемо на цій площині довільну точку $M(x;y;z)$, з'єднаємо її з точкою $M_0(x_0;y_0;z_0)$ та знайдемо вектор $\overline{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0;z-z_0\}$ (рис. 3.1). При будь-якому положенні точки M на площині P вектори $\bar{n}$ та $\overline{M_0M}$ взаємно перпендикулярні, тому їхній скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

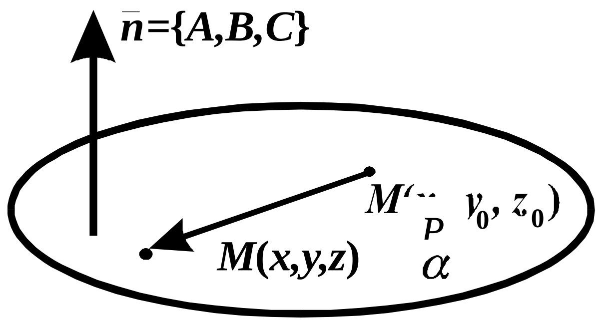


Рис. 3.1

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.} \qquad (3.1)$$

Координати будь-якої точки, що лежить на площині P, задовольняють рівняння (3.1). Координати точок, що не лежать на цій площині, не задовольняють рівняння (3.1).

Рівняння (3.1) називається ***рівнянням площини, яка проходить через фіксовану точку*** $M_0(x_0;y_0;z_0)$ ***перпендикулярно вектору*** $\bar{n}=\{A;B;C\}$. Воно першого степеня відносно поточних координат x, y, z. Вектор $\bar{n}=\{A;B;C\}$ називається ***нормальним вектором площини***.

Приклад 1. Записати рівняння площини, що проходить через точку $M_0(2;-3;-1)$ перпендикулярно до вектора $\bar{n}=\{5;4;-2\}$.

Розв'язання. Підставимо в рівняння (3.1) координати точки $M_0(2;-3;-1)$ та вектора $\bar{n}=\{5;4;-2\}$, дістанемо $5(x-2)+4(y+3)-2(z+1)=0$.

Загальне рівняння площини. Розкриємо дужки у рівнянні (3.1) та введемо позначку $-Ax_0-By_0-Cz_0=D$, отримаємо ***загальне рівняння площини***

$$\boxed{Ax+By+Cz+D=0}. \qquad (3.2)$$

Дослідження загального рівняння площини. Визначимо, яке положення відносно осей координат займатиме площина, якщо деякі коефіцієнти загального рівняння дорівнюватимуть нулю.

1. При $D=0$ площина $Ax+By+Cz=0$ проходить через початок координат.

2. При $A=0$ площина $By+Cz+D=0$ паралельна осі Ox; при $B=0$ площина $Ax+Cz+D=0$ паралельна осі Oy; при $C=0$ площина $Ax+By+D=0$ паралельна осі Oz.

3. При $A=B=0$ площина $Cz+D=0$ паралельна площині xOy; при $A=C=0$ площина $By+D=0$ паралельна площині xOz; при $B=C=0$ площина $Ax+D=0$ паралельна площині yOz.

Рівняння координатної площини xOy має вигляд $z=0$; $y=0$ - це рівняння площини xOz; $x=0$ - рівняння площини yOz.

Приклад 2. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно вектору $\overline{MN}$, якщо $M(2;-1;3)$, $N(0;4;-3)$.

Розв'язання. Площина проходить через початок координат, тому має рівняння $Ax+By+Cz=0$. Знаходимо нормальний вектор $\overline{MN}=\{-2;5;-6\}$. Таким чином, шукане рівняння буде $-2x+5y-6z=0$ або $2x-5y+6z=0$.

Рівняння площини, що проходить через три точки. Три точки, які не лежать на одній прямій однозначно визначають площину. Нехай на площині P задано три точки: $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$, які не лежать на одній прямій. Візьмемо на площині довільну точку $M(x;y;z)$ та знайдемо вектори $\overline{M_1M}=\{x-x_1;y-y_1;z-z_1\}$, $\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$, $\overline{M_1M_3}=\{x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1\}$. Ці вектори лежать на площині P, отже, вони компланарні. Використаємо умову компланарності векторів (їхній мішаний добуток дорівнює нулю), отримаємо $\overline{M_1M}\ \overline{M_1M_2}\ \overline{M_1M_3}=0$, тобто

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0}. \qquad (3.3)$$

Рівняння (3.3) називається ***рівнянням площини, яка проходить через три дані точки.***

Приклад 3. Написати загальне рівняння площини, що проходить через точки $M_1(2;3;-1)$, $M_2(1;4;-1)$, $M_3(-3;-2;5)$.

Розв'язання. Підставимо координати точок у рівняння (3.3), отримаємо $\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 6 \end{vmatrix}=0$. Розкладемо визначник за елементами першого рядка:

$$(x-2)6-(y-3)(-6)+(z+1)10=0 \text{ або } 3x+3y+5z-10=0.$$

Рівняння площини у відрізках на осях. Нехай площина відтинає на осях Ox, Oy, Oz відрізки a, b, c, тобто проходить через точки $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$. Підставляючи координати цих точок в рівняння (3.3) і розкриваючи визначник, дістанемо $\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \quad xbc-abc+yac+zab=0$ або

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}. \qquad (3.4)$$

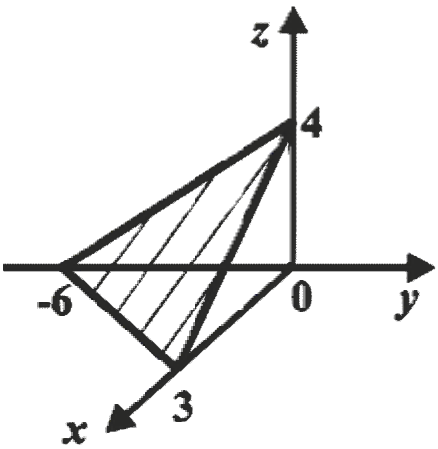


Рис. 3.2

Рівняння (3.4) називається ***рівнянням площини у відрізках на осях.***

Приклад 4. Побудувати площину $4x-2y+3z-12=0$.

Розв'язання. Запишемо задане рівняння у відрізках на осях. Для цього перенесемо у праву частину вільний член і поділимо на нього обидві частини рівняння: $\frac{x}{3}+\frac{y}{-6}+\frac{z}{4}=1$, звідки $a=3$, $b=-6$, $c=4$. Знаючи відрізки, які відтинає площина на осях координат, легко побудувати площину (рис. 3.2).

Кут між площинами. Нехай маємо дві площини $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ та $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. Кут між площинами − це один з двогранних кутів, утворених цими площинами. Він вимірюється лінійним кутом φ, який дорівнює куту між нормальними векторами $\overline{n_1}=\{A_1;B_1;C_1\}$, $\overline{n_2}=\{A_2;B_2;C_2\}$ цих площин. Отже, з формули (2.13) маємо

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}}{|\overline{n_1}||\overline{n_2}|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}}. \qquad (3.5)$$

Умова паралельності площин. Якщо площини паралельні, то їхні нормальні вектори колінеарні. З умови колінеарності векторів маємо ***умову паралельності площин***

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}}. \qquad (3.6)$$

Умова перпендикулярності площин. Якщо площини перпендикулярні, то перпендикулярні і їх нормальні вектори. З умови перпендикулярності нормальних векторів дістанемо ***умову перпендикулярності площин***

$$\boxed{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0}. \qquad (3.7)$$

Приклад 5. Знайти кут між площинами $2x + y + 3z - 1 = 0$ та $x + y - z + 5 = 0$.

Розв'язання. За формулою (3.5) маємо $\cos\varphi = \dfrac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1)}{\sqrt{4+1+9}\sqrt{1+1+1}} = 0.$ Отже, площини перпендикулярні.

Приклад 6. Записати рівняння площини, що проходить через точку $M_1(2;3;-1)$ паралельно до площини $5x + 2y - 3z - 7 = 0$.

Розв'язання. Нормальним вектором шуканої площини буде нормальний вектор даної площини: $\overline{n} = \{5;2;-3\}$. Тоді за формулою (3.1):

$$5(x-2) + 2(y-3) - 3(z+1) = 0 \text{ або } 5x + 2y - 3z - 19 = 0.$$

Приклад 7. Визначити, при якому значенні m площини $x + 3y + 2z + 5 = 0$ та $3x - 5y + mz - 3 = 0$ будуть перпендикулярні.

Розв'язання. Дані площини мають такі нормальні вектори: $\overline{n_1} = \{1;3;2\}$, $\overline{n_2} = \{3;-5;m\}$. За умовою (3.7) маємо $1 \cdot 3 + 3 \cdot (-5) + 2 \cdot m = 0 \;\Rightarrow\; m = 6.$

Відстань від точки до площини. Нехай дано площина $Ax + By + Cz + D = 0$ та точка $P(x_1;y_1;z_1)$, яка не лежить на цій площині. Відстань d від точки до площини дорівнює модулю проекції вектора $\overline{M_0P}$ ($M_0(x_0;y_0;z_0)$ – довільна точка даної площини) на напрям нормального вектора (рис. 3.3).

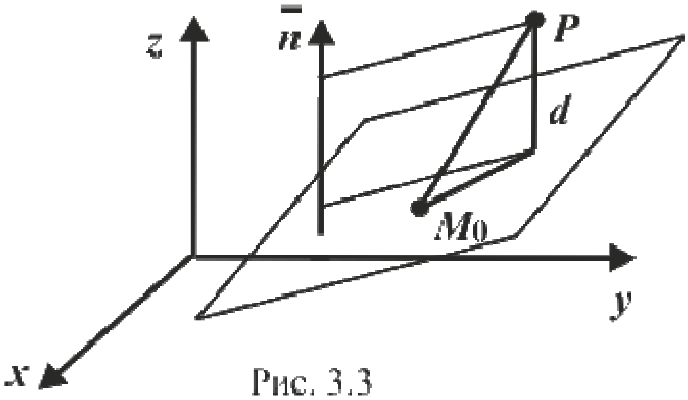


Рис. 3.3

Отже,

$$d = \left| np_{\overline{n}} \overline{M_0P} \right| = \left| \frac{\overline{M_0P}\,\overline{n}}{|\overline{n}|} \right| = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \text{тобто}$$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - Ax_0 - By_0 - Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Оскільки точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ лежить на площині, то $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ та $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$. Остаточно,

$$\boxed{d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}. \tag{3.8}$$

Приклад 8. Дві грані куба лежать на площинах $2x - 2y + z - 1 = 0$, $2x - 2y + z + 5 = 0$. Обчислити об'єм цього куба.

Розв'язання. Шукаємо об'єм куба за формулою $V=a^3$, де a − довжина ребра куба, тобто відстань між даними площинами. Щоб знайти відстань між паралельними площинами треба на одній площині взяти будь-яку точку та знайти відстань від цієї точки до другої площини. На площині $2x-2y+z-1=0$ лежить точка $M(0;0;1)$ (двом змінним дали довільні значення $x=0,\ y=0$, підставили в рівняння площини та обчислили значення третьої змінної $z=1$), отже, за формулою (3.8) маємо $a=\dfrac{|2\cdot 0-2\cdot 0+1\cdot 1+5|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=2\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ V=2^3=8.$

Завдання для самоконтролю

1. Записати та дослідити загальне рівняння площини.

2. Вивести рівняння площини, яка проходить через три точки.

3. Вивести рівняння площини у відрізках на осях.

4. Як обчислити кут між векторами? Які умови паралельності та перпендикулярності двох площин ?

5. Вивести формулу для обчислення відстані від точки до площини.

6. Знайти напрямні косинуси нормального вектора площини $2x+3y+6z-12=0$.

Відповідь: $\cos\alpha=\dfrac{2}{7},\cos\beta=\dfrac{3}{7},\cos\gamma=\dfrac{6}{7}$.

7. Записати рівняння площини, що проходить через точки $(4;2;5)$, $(0;7;2)$, $(0;2;7)$.

Відповідь. $x+2y+2z-18=0$.

8. Записати рівняння площини, що проходить через вісь Oz та точку $(3;-2;1)$.

Відповідь. $2x+3y=0$.

9. Записати рівняння площини, яка проходить через точку $(-1;2;-3)$ та відтинає на осях координат рівні відрізки.

Відповідь. $x+y+z+2=0$.

10. Знайти кут між площинами $x-2y+2z-8=0$ та $x+z-6=0$.

Відповідь. $\dfrac{\pi}{4}$.

11. Визначити, при яких значеннях m та n площини $2x+my+3z-5=0$, $nx-6y-6z+2=0$ будуть паралельні.

Відповідь: $m=3,\ n=-4$.

12. Обчислити висоту піраміди h_N з вершинами у точках $N(-5;-4;8)$, $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$.

Відповідь. 11.

13. Знайти відстань від точки $P(5;1;-1)$, до площини $x-2y-2z+4=0$.
Відповідь. 3.

3.2. Пряма у просторі

Загальні рівняння прямої у просторі. Пряму в просторі можна розглядати як лінію перетину двох площин (рис. 3.4) та задавати її двома рівняннями першого степеня виду (3.2). Ці два рівняння визначають пряму у просторі тільки тоді, коли відповідні площини непаралельні або не збігаються. Іншими словами, система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{3.9}$$

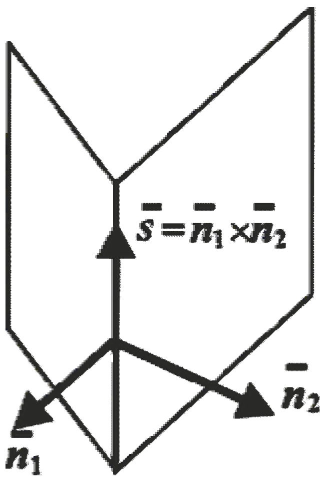


Рис. 3.4

визначатиме пряму, якщо умова (3.6) не виконується, тоді ці рівняння називаються ***загальними рівняннями прямої у просторі.***

Канонічні рівняння прямої у просторі. При розв'язанні задач частіше використовують інший вид рівняння прямої. Так, нехай пряма проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ паралельно вектору $\bar{s}=\{m;n;p\}$ (рис. 3.5), який називають ***напрямним вектором*** прямої. Візьмемо на прямій довільну точку $M(x;y;z)$, тоді можна визначити вектор $\overline{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0;z-z_0\}$, що лежить на прямій, а тому буде колінеарним з вектором $\bar{s}$. Використавши умови колінеарності векторів, ***канонічні рівняння прямої*** дістанемо у вигляді

$$\boxed{\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}}. \tag{3.10}$$

Щоб перейти від загальних рівнянь прямої (3.9) до канонічних (3.10), необхідно знайти будь-яку точку на прямій та визначити напрямний вектор.

Приклад 1. Знайти канонічні рівняння прямої, заданої загальними рівняннями $\begin{cases} x+2y+3z-8=0, \\ 2x+y-2z-2=0. \end{cases}$

Розв'язання. Спочатку знайдемо на прямій будь-яку точку M_0. Покладемо $x_0=1$, тоді з даних рівнянь отримаємо систему для обчислення y_0 та z_0: $\begin{cases} 2y_0+3z_0=7, \\ y_0-2z_0=0, \end{cases}$ звідки $y_0=2,\ z_0=1$.

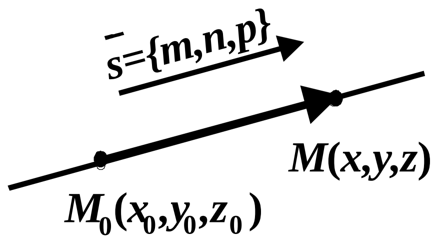


Рис. 3.5

Напрямний вектор $\bar{s}=\{m;n;p\}$ буде перпендикулярним до нормальних векторів заданих площин $\overline{n_1}=\{1;2;3\}$ та $\overline{n_2}=\{2;1;-2,\}$ тобто $\bar{s}\overline{n_1}=0$ та $\bar{s}\overline{n_2}=0$ або в координатній формі маємо $\begin{cases} m+2n+3p=0, \\ 2m+n-2p=0. \end{cases}$

Це - сумісна та невизначена система, розв’язуючи яку дістанемо загальний розв’язок $m=\frac{7}{3}C$, $n=-\frac{8}{3}C$, $p=C$. Покладемо $C=-3$, тоді $\bar{s}=\{-7;8;-3\}$ та канонічне рівняння прямої буде $\frac{x-1}{-7}=\frac{y-2}{8}=\frac{z-1}{-3}$.

Параметричні рівняння прямої у просторі. Нехай кожен дріб з (3.10) дорівнює величині, яка називається параметром прямої: $\frac{x-x_0}{m}=t$, $\frac{y-y_0}{n}=t$, $\frac{z-z_0}{p}=t$. Розв’язуючи кожне рівняння відносно x, y, z, дістанемо

$$\boxed{x=mt+x_0, \quad y=nt+y_0, \quad z=pt+z_0}. \tag{3.11}$$

Рівняння (3.11) називаються ***параметричними рівняннями прямої у просторі.***

Приклад 2. Записати параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(-1;3;0)$ паралельно вектору $\bar{s}=\{4;0;-3\}$.

Розв’язання. Підставляючи координати точки та напрямного вектора у рівняння (3.11) маємо $x=4t-1$, $y=3$, $z=-3t$.

Рівняння прямої у просторі, яка проходить через дві дані точки. Якщо пряма проходить через дві точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ та $M_2(x_2;y_2;z_2)$ то вектор $\overline{M_1M_2}\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$ можна вважати за напрямний вектор прямої.

Отже, підставивши координати напрямного вектора в рівняння (3.10), дістанемо

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}} \tag{3.12}$$

У рівняннях (3.10) – (3.12) одна або дві координати напрямного вектора можуть дорівнювати нулю (випадок, у якому всі три координати дорівнюють нулю неможливий, нульовий вектор не може бути напрямним). Якщо яка-небудь координата дорівнює нулю, то це означає, що пряма перпендикулярна до осі однойменною з цією координатою.

Приклад 3. Написати рівняння прямої, яка проходить через точки $A(-1;2;3)$ та $B(2;6;-2)$.

Розв’язання. Підставимо координати даних точок в рівняння (3.12):

$$\frac{x+1}{2+1}=\frac{y-2}{6-2}=\frac{z-3}{-2-3} \Rightarrow \frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-5}.$$

Кут між прямими. Кут між прямими у просторі дорівнює куту φ між їхніми напрямними векторами $\overline{s_1}=\{m_1;n_1;p_1\}$ та $\overline{s_2}=\{m_2;n_2;p_2\}$ тобто згідно (2.13) обчислюється за формулою

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}}. \qquad (3.13)$$

Приклад 4. Знайти кут між прямими $\begin{cases} x = 2t, \\ y = 2 - t, \\ z = 3t - 2 \end{cases}$ та $\begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0, \\ 2x - y + 3z + 5 = 0. \end{cases}$

Розв'язання. Знайдемо напрямні вектори прямих: $\overline{s_1} = \{2; -1; 3\}$,

$$\bar{s}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\bar{i} - 8\bar{j} - 4\bar{k}, \text{ тоді } \cos\varphi = \frac{2\cdot 2 - 8\cdot(-1) - 4\cdot 3}{\sqrt{4+64+16}\sqrt{4+1+9}} = 0 \text{ і } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Умова паралельності прямих. Дві прямі паралельні тоді й тільки тоді, коли їх напрямні вектори колінеарні. Тому умови паралельності прямих будуть такими

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}}. \qquad (3.14)$$

Умова перпендикулярності прямих. Перпендикулярні прямі мають і перпендикулярні напрямні вектори. Звідси умова перпендикулярності прямих буде

$$\boxed{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0}. \qquad (3.15)$$

Приклад 5. При яких значеннях m та n прямі $\frac{x}{m} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{4}$ та $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+5}{n} = \frac{z+3}{-2}$ паралельні?

Розв'язання. З умови (3.14) маємо $\frac{m}{-1} = \frac{2}{n} = \frac{4}{-2} \Rightarrow \frac{m}{-1} = \frac{4}{-2}, \ \frac{2}{n} = \frac{4}{-2}$. Звідки $m = 2, \ n = -1$.

Приклад 6. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-1; 2; 2)$ паралельно до прямої $\begin{cases} x - y = 2, \\ y = 2. \end{cases}$

Розв'язання. Якщо прямі паралельні, то напрямний вектор шуканої прямої збігається з напрямним вектором даної. Отже, $\bar{s} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \bar{k}$ і, використовуючи рівняння (3.10), дістанемо $\frac{x+1}{0} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{1}$.

Відстань від точки до прямої у просторі. Нехай дана точка $P(x_1;y_1;z_1)$ та пряма $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ (рис. 3.6).

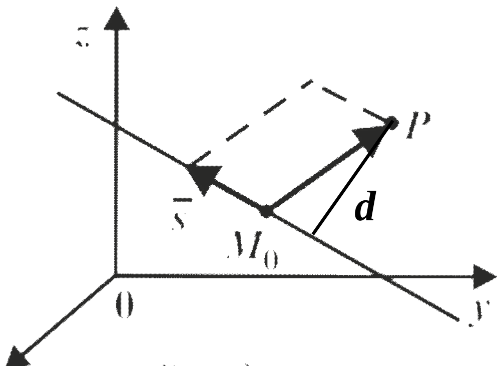


Рис. 3.6

На прямій маємо точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ та будуємо вектор $\overline{M_0P}\{x_1-x_0;y_1-y_0;z_1-z_0\}$ і напрямний вектор $\overline{s}=\{m;n;p\}$, тоді d – відстань від точки до прямої буде висотою паралелограма, побудованого на цих векторах як на сторонах. Площа цього паралелограма з одного боку буде $S=\left|\overline{M_0P}\times\overline{s}\right|$, а з другого – $S=ah$, де довжина основи $a=\left|\overline{s}\right|$ та $h=d$, тобто $\left|\overline{M_0P}\times\overline{s}\right|=d\left|\overline{s}\right|$. Звідки

$$\boxed{d=\frac{\left|\overline{M_0P}\times\overline{s}\right|}{\left|\overline{s}\right|}}. \qquad (3.16)$$

Приклад 7. Знайти відстань від точки $P(2;-1;3)$ до прямої $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-1}{5}$.

Розв'язання. Для використання формули (3.16), зафіксуємо напрямний вектор прямої $\overline{s}=\{3;4;5\}$ та точку, яка лежить на цій прямій $M_0(-1;-2;1)$. Тоді

$$\overline{M_0P}=\{3;1;2\},\qquad \left|\overline{s}\right|=\sqrt{9+16+25}=5\sqrt{2},\qquad \overline{M_0P}\times\overline{s}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 3 & 1 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{vmatrix}=-3\overline{i}-9\overline{j}+9\overline{k},$$

$\left|\overline{M_0P}\times\overline{s}\right|=\sqrt{9+81+81}=3\sqrt{19}$ і за формулою (3.16) маємо $d=\dfrac{3\sqrt{19}}{5\sqrt{2}}=0{,}3\sqrt{38}$.

Взаємне розміщення прямої і площини. Нехай пряма та площина у просторі задаються відповідно рівняннями

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$
$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Кут між прямою і площиною - це гострий кут φ між прямою та її проекцією на площину (рис. 3.7). Оскільки цей кут доповнює до $\dfrac{\pi}{2}$ кут між нормальним вектором площини $\overline{n}=\{A;B;C\}$ та

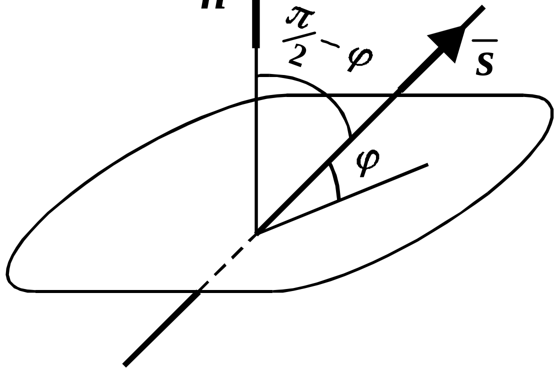


Рис. 3.7

напрямним вектором прямої $\bar{s}=\{m;n;p\}$, то $\sin\varphi=\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)$. Звідси отримаємо формулу для обчислення кута між площиною та прямою

$$\boxed{\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}}. \qquad (3.17)$$

Паралельність прямої та площини. Пряма паралельна площині тільки тоді, коли її напрямний вектор $\bar{s}=\{m;n;p\}$ та нормальний вектор площини $\bar{n}=\{A;B;C\}$ перпендикулярні. Тоді умова паралельності прямої і площини має вигляд

$$\boxed{Am+Bn+Cp=0}. \qquad (3.18)$$

Перпендикулярність прямої та площини. Якщо пряма перпендикулярна площині, то напрямний та нормальний вектори колінеарні, тобто

$$\boxed{\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}}. \qquad (3.19)$$

Приклад 8. Яке значення має величина m, якщо площина $mx-2y+z-3=0$ та пряма $\frac{x+3}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{m}$ паралельні?

Розв'язання. Якщо площина та пряма паралельні, то нормальний вектор площини повинен бути перпендикулярним до напрямного вектора прямої. За умови перпендикулярності векторів (2.14) маємо $2m-6+m=0 \Rightarrow m=2$.

Приклад 9. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2;-3;1)$ перпендикулярно до площини $5x-4y-z+5=0$.

Розв'язання. Якщо пряма перпендикулярна площині, тоді напрямним вектором прямої буде нормальний вектор площини. Отже, $\bar{s}=\bar{n}=\{5;-4;-1\}$ і згідно з (3.10) отримаємо $\frac{x-2}{5}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z-1}{-1}$.

Точка перетину прямої та площини. Щоб знайти координати точки перетину площини $Ax+By+Cz+D=0$ та прямої $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$, треба розв'язати систему, складену з цих рівнянь. Щоб полегшити цей процес, переходять до параметричних рівнянь прямої та розв'язують систему чотирьох рівнянь відносно чотирьох невідомих.

Приклад 10. Знайти точку перетину площини $x+y-z=0$ та прямої, яка проходить через точки $A(0;0;4)$ і $B(2;2;0)$.

Розв'язання. Напрямний вектор прямої буде $\overline{AB}=\{2;2;-4\}$, тоді рівняння прямої має вигляд $\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-4}{-4}$ або в параметричному вигляді $x=2t,\quad y=2t,\quad z=-4t+4.$ Підставимо $x,\ y,\ z$ у рівняння площини $2t+2t+4t-4=0 \Rightarrow t=\frac{1}{2}$. Отримане значення t підставимо у вирази для x,y,z, тобто $x=1,\quad y=1,\quad z=2.$

Завдання для самоконтролю

1. Написати загальні рівняння прямої.

2. Вивести канонічні та параметричні рівняння прямої у просторі та рівняння прямої, яка проходить через дві точки.

3. Як перейти від загальних рівнянь прямої до канонічних?

4. Як знайти кут між двома прямими в просторі? Написати умови паралельності та перпендикулярності прямих.

5. За якою формулою знаходять відстань від точки до прямої?

6. Як знайти кут між прямою та площиною? Які умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини?

7. Як знайти точку перетину прямої та площини?

8. Звести рівняння прямої $\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ 2x-y+3z+5=0 \end{cases}$ до канонічного вигляду.

Відповідь. $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z+2}{-3}$.

9. Написати параметричні рівняння прямої, яка проходить: а) через точку $A(-2;1;-1)$ паралельно вектору $\bar{s}=\{1;-2;3\}$; б) через точки $A(3;-1;4)$ та $B(1;1;2)$.

Відповідь: а) $x=t-2,\quad y=-2t+1,\quad z=3t-1$;

б) $x=-2t+3,\quad y=2t-1,\quad z=-2t+4$.

10. Знайти відстань від точки $P(3;0;4)$ до прямої $y=2x+1,\quad z=2x$.

Відповідь. $d=\sqrt{17}$.

11. Написати рівняння площини, яка проходить через точку $A(-1;2;-3)$ та перпендикулярна до прямої $x=2,\quad y-z=1$

Відповідь. $y+z+1=0$.

12. Знайти косинус кута, який утворює пряма $x=2z-1,\quad y=-2z+1$ з прямою, що проходить через початок координат та точку $(1;-1;-1)$.

Відповідь. $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

13. Знайти кут між прямою $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{6}=\frac{z-1}{-3}$ та площиною $2x+y+z-4=0.$

Відповідь. $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{6}}$.

14. Знайти точку перетину площини $y = z$ та прямої $x = -z + 1, \quad y = 2$ та кут між ними.

Відповідь. $(-1;2;2)$.

15. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $A(4;3;0)$ паралельно вектору $\bar{s} = \{-1;1;1\}$.

Відповідь. $\dfrac{x-4}{-1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{1}$.

16. Знайти проекцію точки $(3;1;-1)$ на площину $3x + y + z - 20 = 0$.

Відповідь. $(6;2;0)$.

3.3. Лінії другого порядку

Коло - це геометричне місце точок площини, віддалених на однакову відстань від фіксованої точки цієї ж площини, що називається центром.

За означенням, відстань будь-якої точки кола $M(x;y)$ до центра $M(x;y)$ - це постійна величина R (радіус кола) (рис. 3.8). З іншого боку, відстань між цими точками буде $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$. Тоді $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = R$ або дістанемо ***нормальне*** рівняння кола

$$\boxed{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2}. \qquad (3.20)$$

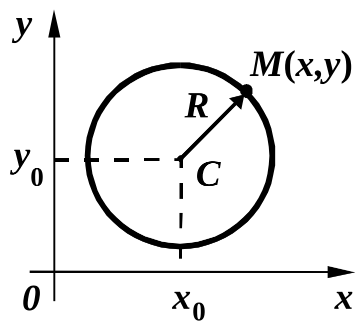


Рис. 3.8

Якщо розкрити дужки у (3.20) та ввести позначки $D = -2x_0; \quad E = -2y_0; \quad F = x_0^2 + y_0^2 - R^2$, то отримаємо ***загальне*** рівняння кола

$$\boxed{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}. \qquad (3.21)$$

Щоб перейти від загального рівняння (3.21) до нормального (3.20), треба виділити повні квадрати відносно змінних.

Приклад 1. Знайти центр та радіус кола $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$.

Розв'язання. Згрупуємо доданки з однаковими змінними та отримані вирази доповнимо до повних квадратів $(x^2 + 4x + 4) - 4 + (y^2 - 6y + 9) - 9 - 3 = 0$, отримаємо рівняння кола у нормальному вигляді $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$.

Отже, маємо коло з центром у точці $C(-2;3)$ та радіусом $R = 4$.

Приклад 2. Написати рівняння кола, якщо точки $A(-1;4)$ та $B(3;2)$ є кінцями його діаметра.

Розв'язання. Центр кола поділяє відрізок AB навпіл, тому за формулами (2.7) його координати будуть $x_0 = \dfrac{-1+3}{2} = 1, \; y_0 = \dfrac{4+2}{2} = 3.$

Діаметр кола – це довжина відрізка AB, тобто $|AB| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$. Таким чином, $R = \sqrt{5}$ і шукане рівняння буде $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$.

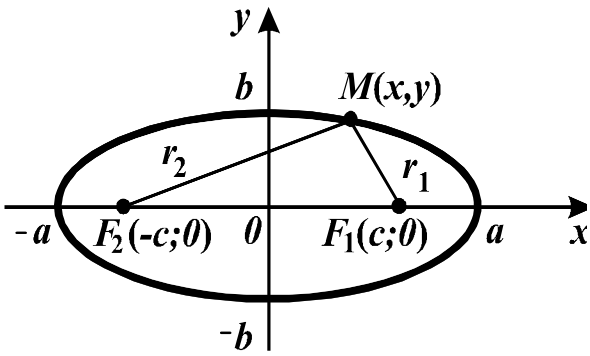


Рис. 3.9

Еліпс – геометричне місце точок площини, сума відстаней яких до двох точок F_1 і F_2 цієї площини, що називаються ***фокусами***, є величиною сталою.

Якщо систему координат вибрати так, щоб вісь Ox проходила через точки F_1 та F_2 (фокуси), початок координат поділив відрізок F_1F_2 навпіл (рис. 3.9) та згідно з означенням, врахувати, що $r_1 + r_2 = 2a$, де $a = const$, то дістанемо канонічне рівняння еліпса у вигляді

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}, \tag{3.22}$$

де a та b - півосі еліпса (відповідно велика та мала).

Виконується рівність $c^2 = a^2 - b^2$, де c - половина відстані між фокусами еліпса.

Властивості еліпса, заданого рівнянням (3.22): 1) симетричний відносно осей координат; 2) координати фокусів еліпса $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$; 3) величина $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$ - стала, не залежить від вибору координат і має назву ***ексцентриситета***; 4) ***фокальні радіуси-вектори*** (відстань від будь-якої точки еліпса до фокусів) обчислюються за формулами $r_1 = a - \varepsilon x$, $r_2 = a + \varepsilon x$.

В окремому випадку, коли $a = b$, то $c = 0$, і еліпс перетворюється на коло з центром у початку координат. Якщо фокуси еліпса розташовано на осі Oy, то $F_1(0;c)$, $F_2(0;-c)$ і велика вісь лежать на цій осі.

Приклад 3. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі ординат симетрично відносно початку координат, його велика вісь дорівнює 10, а відстань між фокусами – 8.

Розв'язання. Якщо фокуси лежать на осі Oy симетрично відносно точки $(0;0)$, то $F_1(0;4)$, $F_2(0;-4)$, $2b = 10 \Rightarrow c = 4$, $b = 5$. За формулою $c^2 = b^2 - a^2$ маємо $16 = 25 - a^2 \Rightarrow a^2 = 9$. Тоді шукане рівняння набуває вигляду $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ (рис. 3. 10).

Приклад 4. Скласти рівняння еліпса, ексцентриситет якого дорівнює 0,7 та відстань між фокусами, розміщеними симетрично початку координат на осі Ox, дорівнює 14.

Розв'язання. Оскільки $2c = 14$, то $c = 7$. З формули $\varepsilon = \frac{c}{a}$ дістаємо $\frac{7}{10} = \frac{7}{a} \Rightarrow a = 10$. З формули $b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b^2 = 100 - 49 = 51$. Отже, шукане рівняння має вигляд $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{51} = 1$.

Гіпербола – це геометричне місце точок площини, для яких абсолютна величина різниці відстаней до двох фіксованих точок F_1 і F_2 (фокусів) цієї площини є сталою величиною, меншою за $|F_1F_2|$.

Якщо систему координат вибрати так, щоб вісь Ox проходила через точки F_1 і F_2, а початок координат поділив відрізок F_1F_2 навпіл (рис. 3.11) та за означенням врахувати, що $|r_1 - r_2| = 2a$ $(a = const)$, то дістанемо канонічне рівняння гіперболи

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}, \qquad (3.23)$$

де a, b - відповідно дійсна та уявна півосі гіперболи.

Виконується рівність $b^2 = c^2 - a^2$, де c - половина відстані між фокусами гіперболи.

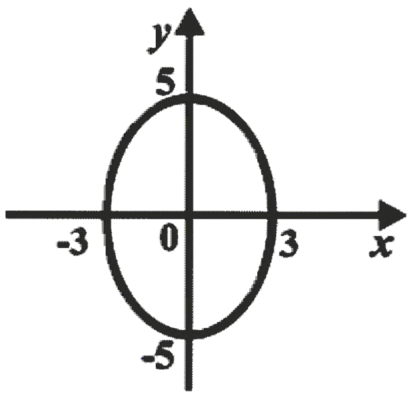


Рис. 3.10

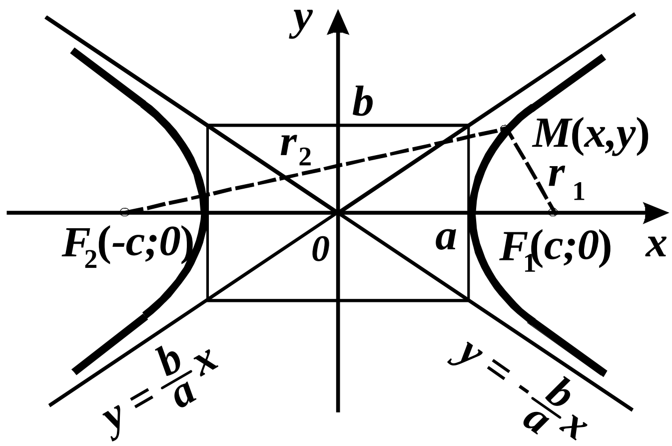


Рис. 3.11

Властивості гіперболи, заданої рівнянням (3.23): 1) симметрична відносно осей координат; 2) координати фокусів гіперболи $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$; 3) величина $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ - стала, не залежить від вибору координат і називається ***ексцентриситетом*** гіперболи; 4) ***фокальні радіуси-вектори*** (відстані від будь-якої точки гіперболи до фокусів) обчислюються за формулами $r_1 = |\varepsilon x - a|$, $r_2 = |\varepsilon x + a|$; 5) прямі $y = \pm\frac{b}{a}x$ називаються ***асимптотами*** гіперболи (якщо точка на гіперболі віддаляється від початку координат, то відстань від цієї точки до однієї з асимптот прямує до нуля); 6) гіпербола не перетинає вісь Oy.

Гіпербола може мати рівняння $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. У цьому разі вона не перетинає вісь Ox, а перетинає вісь Oy.

Приклад 5. Обчислити відстань між фокусами гіперболи $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{15}=1$.

Розв'язання: $a^2=49$, $b^2=15$ $\Rightarrow$ $c^2=a^2+b^2=49+15=64$. Отже, відстань між фокусами буде $2c=16$.

Приклад 6. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі Ox симетрично відносно початку координат і відстань між ними $2c=20$, а рівняння асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$.

Розв'язання. З рівняння асимптот гіперболи маємо $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$ $\Rightarrow$ $a=\frac{3b}{4}$.

З умови $2c=20$ $\Rightarrow$ $c=10$ і з формули $c^2=a^2+b^2$ дістанемо $100=\frac{9b^2}{16}+b^2$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $b^2=64$, тоді $a^2=36$ і остаточно шукане рівняння має вигляд $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$.

Парабола – це геометричне місце точок площини, рівновіддалених від фіксованої прямої (директриси), і фіксованої точки (фокуса), яка не належить цій прямій.

Якщо систему координат вибрати так, щоб вісь Ox пройшла через фокус перпендикулярно директрисі (напрям – від директриси до фокуса), а початок координат поділив відстань між фокусом і директрисою навпіл (рис. 3.12) та, врахувавши, що згідно з означенням точка лежить на параболі при $r_1=r_2$, отримаємо канонічне рівняння параболи

$$\boxed{y^2=2px},\qquad (3.24)$$

де p – ***параметр параболи*** (відстань від фокуса до директриси).

Парабола симетрична відносно осі Ox.

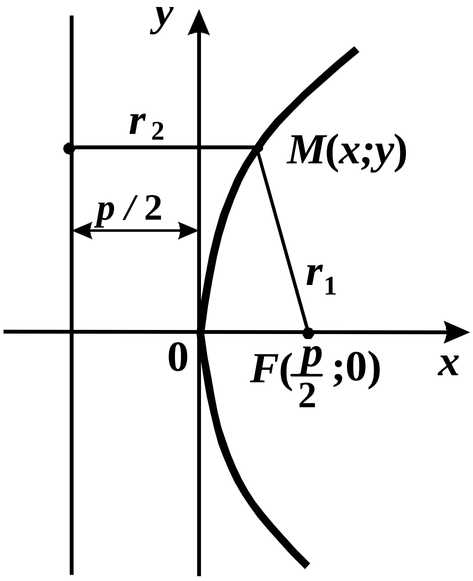


Рис. 3.12

Рівняння директриси має вигляд $x=-{}^{p}\!/_{2}$, координати фокуса $F({}^{p}\!/_{2};0)$. ***Фокальний радіус-вектор*** (відстань від будь-якої точки параболи до фокуса) обчислюється як $r=x+{}^{p}\!/_{2}$.

Приклад 7. Скласти рівняння параболи, якщо її фокус $F(-1;0)$, а рівняння директриси $x-1=0$.

Розв'язання. Відстань від фокуса до директриси, тобто параметр параболи

$p=\left|\dfrac{1\cdot(-1)+0\cdot 0-1}{\sqrt{1}}\right|=2$. Фокус лежить на осі $Ox\,(y=0)$ ліворуч від директриси, тобто гілки параболи напрямлені у від'ємному напрямку осі Ox. Вершина ділить відстань між фокусом та директрисою навпіл, тобто знаходиться у початку координат. Отже, шукане рівняння параболи згідно з (3.24) має вигляд $y^2=-4x$.

Приклад 8. Скласти рівняння параболи, яка симетрична відносно осі Oy, проходить через точку $C(4;-8)$ та її вершина розташована у початку координат.

Розв'язання. Якщо парабола симетрична відносно осі Oy, має вершину в точці $(0;0)$ та проходить через точку з від'ємним значенням $y=-8$, то її рівняння буде $x^2=-2py$. Щоб знайти p, підставимо у рівняння параболи координати точки $C(4;-8)$: $16=-2p(-8)\Rightarrow p=1$. Остаточно $x^2=-2y$.

Загальне рівняння лінії другого порядку. Розглянемо загальне алгебраїчне рівняння другого степеня

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0. \tag{3.25}$$

На питання які лінії описуються рівняння (3.25), відповідає теорема.

Теорема. Якщо лінія задається в системі координат xOy рівнянням (3.25), то існує інша система координат $x_1O_1y_1$, де рівнянням даної кривої буде одне з канонічних рівнянь:

1) $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$; 2) $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=0$; 3) $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=-1$;

4) $\dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$; 5) $\dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=0$; 6) $y_1^2=2px_1$;

7) $y_1^2=a^2$; 8) $y_1^2=0$; 9) $y_1^2=-a^2$.

Рівняння 2) задає єдину точку; рівняння 5) та 7) – це дві прямі; рівняння 8) – одна пряму; рівняння 3) та 9) – порожні множини.

Щоб з рівняння (3.25) отримати канонічне рівняння, треба зробити паралельне перенесення і повернути систему координат на деякий кут.

При параллельному перенесенні осей координати точки у системах xOy та $x_1O_1y_1$ зв'язані формулами $x=x_1+x_0$; $y=y_1+y_0$, де x_0, y_0 – координати нового центра O_1 у системі координат xOy.

При повороті осей координат на кут α формули, що зв'язують координати точки у різних системах координат, виглядають так:

$$\begin{aligned}x&=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha,\\ y&=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha\end{aligned} \quad \text{або} \quad \begin{aligned}x_1&=x\cos\alpha+y\sin\alpha,\\ y_1&=-x\sin\alpha+y\cos\alpha.\end{aligned}$$

Приклад 9. Скласти рівняння гіперболи, якщо відстань між її вершинами дорівнює 12, а фокуси – це точки $F_1(-10;2)$ та $F_2(6;2)$.

Розв'язання. Фокуси та вершини гіперболи лежать на прямій $y = 2$, відстань між фокусами $2c = 16 \Rightarrow c = 8$, отже, центр гіперболи лежить у точці $O_1(-2;2)$. Відстань між вершинами $2a = 12 \Rightarrow a = 6$, $a^2 = 36$ і вершини гіперболи лежать у точках $A_1(-8;2)$ та $A_2(4;2)$. Отже, $b^2 = c^2 - a^2 = 64 - 36 = 28$ і остаточно рівняння гіперболи має вигляд $\dfrac{(x+2)^2}{36} - \dfrac{(y-2)^2}{28} = 1$.

3.4. Поверхні другого порядку

Поверхні, що визначаються у прямокутній системі координат алгебраїчними рівняннями другого степеня, називаються ***поверхнями другого порядку***. Дослідження цих геометричних об'єктів виконується за їх рівняннями методом паралельних перетинів.

Рівняння сфери. Геометричне місце точок $M(x;y;z)$, відстань кожної з яких від точки $M(x_0;y_0;z_0)$, яка називається центром, дорівнює R, має назву ***сфери***. При цьому величина R – ***радіус сфери.***

Враховуючи, що точка $M(x;y;z)$ лежить на сфері тільки тоді, коли квадрат відстані між нею та точкою $M(x_0;y_0;z_0)$ дорівнює R^2 в декартовій прямокутній системі координат $Oxyz$, матимемо рівняння сфери радіуса $R > 0$ з центром у точці $M(x_0;y_0;z_0)$

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2}.$$

У випадку, коли центром сфери буде початок координат $M(0;0;0)$, рівняння сфери набуває простішого вигляду $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Еліпсоїд має канонічне рівняння $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1}$.

Перетинаючи еліпсоїд координатними площинами xOy, xOz, yOz, отримаємо еліпси з парами півосей a, b; a, c; b, c (рис. 3.13), рівняння яких мають вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

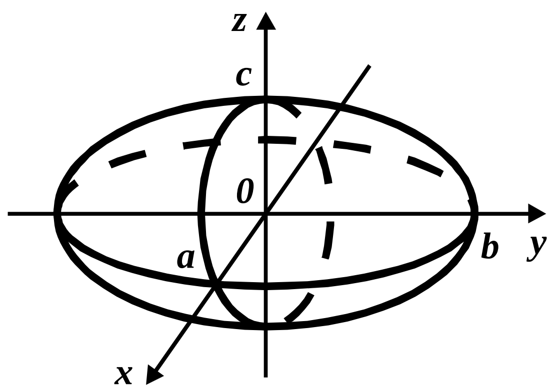


Рис. 3.13

Однопорожнинний гіперболоїд описується рівнянням

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1}.$$

Перетини однопорожнинного гіперболоїда координатними площинами xOz і yOz являють собою гіперболи (рис. 3.14), рівняння яких записуються як

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Якщо перетинати цю поверхню площинами $z = h$, отримаємо еліпси $\frac{x^2}{a^2(1+\frac{h^2}{c^2})} + \frac{y^2}{b^2(1+\frac{h^2}{c^2})} = 1$.

Двопорожнинний гіперболоїд задається рівнянням $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1}$.

У перетинах цієї поверхні координатними площинами xOz та yOz дістанемо гіперболи, рівняння яких відповідно виглядають так: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$; $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$. У перетині даної поверхні площинами $z = h$ утворюються еліпси $\frac{x^2}{(a')^2} + \frac{y^2}{(b')^2} = 1$, де $a' = a\sqrt{h^2/c^2 - 1}$; $b' = b\sqrt{h^2/c^2 - 1}$. Ці рівняння мають сенс лише за умови $|h| > c$ (рис. 3.15).

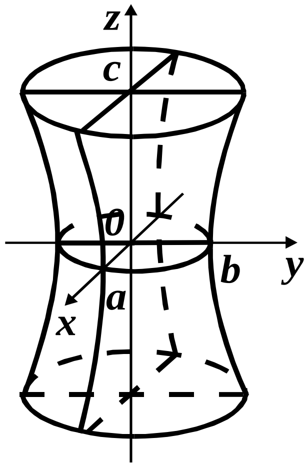


Рис. 3.14

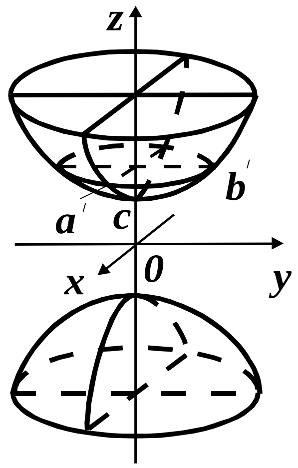


Рис. 3.15

Еліптичний параболоїд має канонічне рівняння виду

$$\boxed{\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z}, \quad \text{де} \quad p > 0; \quad q > 0.$$

У перетині даної поверхні координатними площинами xOz і yOz отримаємо параболи, симетричні відносно осі Oz відповідно з рівняннями $x^2 = 2pz$ і $y^2 = 2qz$ (рис. 3.16). Лінія перетину цієї поверхні площинами $z = h$ являє собою еліпси $\frac{x^2}{(a')^2} + \frac{y^2}{(b')^2} = 1$, де $a' = \sqrt{2ph}$; $b' = \sqrt{2qh}$. Точка $O(0;0;0)$ називається ***вершиною*** еліптичного параболоїда.

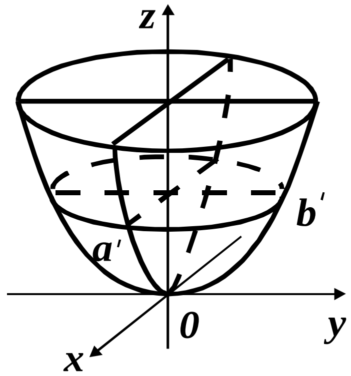


Рис. 3.16

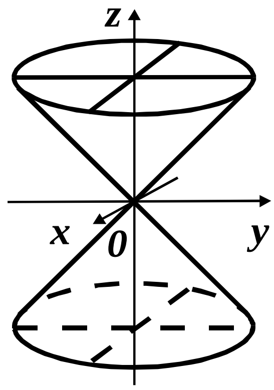


Рис. 3.17

Конус. Канонічне рівняння конуса другого порядку має вигляд

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0}.$$

Лініями перетину цієї поверхні з площинами $z = h$ будуть еліпси $\frac{x^2}{(a')^2} + \frac{y^2}{(b')^2} = 1$, де $a' = a|h|/c$, $b' = b|h|/c$.

При $h = 0$ лінія перетину конуса з площиною xOy вироджується на точку $O(0;0;0)$ (рис. 3.17).

Гіперболічний параболоїд має канонічне рівняння $\boxed{\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z}$.

Перетинаючи цю поверхню координатними площинами xOz та yOz, дістанемо параболи (рис. 3.18), що мають рівняння $x^2 = 2pz$ та $y^2 = 2qz$ відповідно. Перетин з площинами $z = h$ утворює гіперболи $\frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} = 1$.

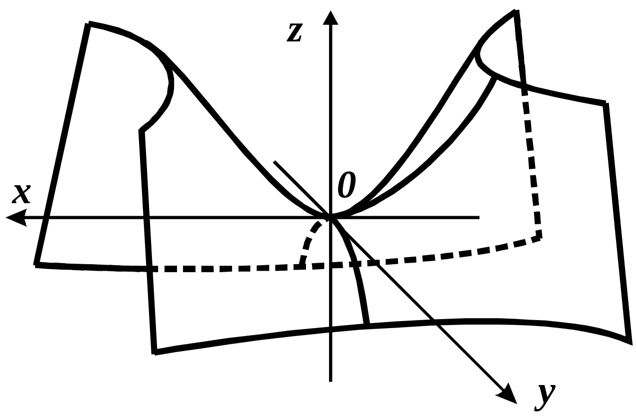


Рис. 3.18

Еліптичний (рис. 3.19, а), **гіперболічний** (рис. 3.19, б) **та параболічний** (рис. 3.19, в) **циліндри** описуються відповідно рівняннями:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1; \qquad y^2=2px.$$

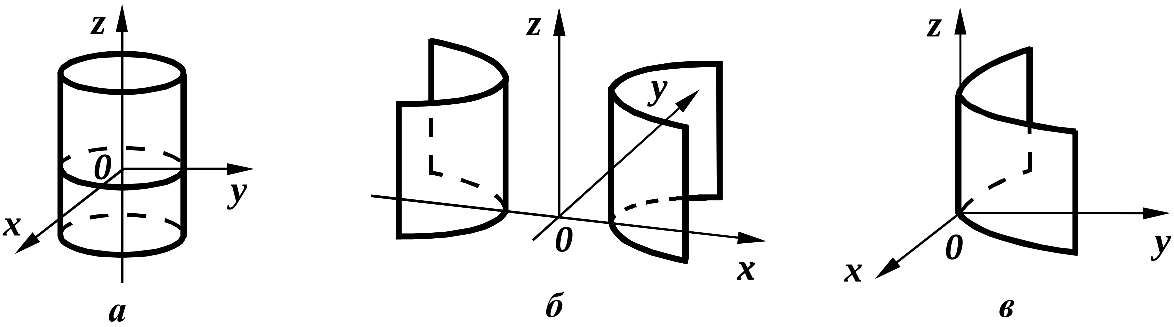


Рис. 3.19

Якщо в рівняннях тривісного еліпсоїда, однопорожнинного та двопорожнинного гіперболоїдів, конуса покласти $a=b$, а в рівнянні еліптичного параболоїда − $p=q$, то дістанемо рівняння поверхонь обертання, що утворюються обертанням еліпса, параболи, гіперболи або двох перетинних прямих навколо осі симетрії.

Нехай дано загальне рівняння поверхні другого порядку

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Kz+Q=0.$$

Виконуючи паралельні перенесення осей координат або поворот двох осей на деякий кут навколо третьої осі, можна звести загальне рівняння поверхні до одного з вищенаведених канонічних рівнянь.

Завдання для самоконтродю

1. Що називається лінією другого порядку?

2. Що називається колом? Вивести рівняння кола з центром у точці $M_0(x_0;y_0)$ та радіусом R.

3. Який вигляд має канонічне рівняння еліпса?

4. Який вигляд має канонічне рівняння гіперболи?

5. Який вигляд має канонічне рівняння параболи?

6. Записати канонічні рівняння тривісного еліпсоїда, однопорожнинного гіперболоїда, конуса, параболоїда, циліндра.

7. Скласти рівняння кола, центр якого збігається з точкою $C(2;-3)$ та радіусом $R=7$.

Відповідь. $(x-2)^2+(y+3)^3=49$.

8. Обчислити відстань між центрами кіл $x^2+y^2-10x+16y+80=0$ та $x^2+y^2+6x+4y-12=0$.

Відповідь. 10.

9. Знайти фокуси та ексцентриситет еліпса $x^2+4y^2=16$.

Відповідь: $F_1(2\sqrt{3};0),\ F_2(-2\sqrt{3};0),\ \text{e}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

10. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат, а його мала вісь дорівнює 10 і ексцентриситет $\text{e}=\dfrac{12}{13}$.

Відповідь. $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{25}=1.$

11. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі ординат симетрично відносно початку координат, відстань між вершинами дорівнює 48, а рівняння асимптот має вигляд $y=\pm\dfrac{12}{5}x.$

Відповідь. $-\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{576}=1.$

12. Скласти рівняння параболи, якщо дано її фокус $F(4;3)$ та директриса $y+1=0.$

Відповідь. $(x-4)^2=8(y-1).$

13. Скласти рівняння гіперболи, якщо дійсна піввісь лежить на осі абсцис та дорівнює 8, а $\text{e}=1{,}5.$

Відповідь. $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{80}=1.$

14. Скласти рівняння параболи, якщо її фокус $F(-2;2)$, а рівняння директриси $x-1=0$.

Відповідь. $(y-2)^2=-6(x+\dfrac{1}{2}).$

15. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої однаково віддалена від точки $A(2;6)$ та від прямої $y+2=0.$

Відповідь. $(x-2)^2=16(y-2)$.

10. Побудувати криві:

а) $x^2+y^2+4x-2y+5=0$; б) $x^2-2y-y^2+2x=0$;

в) $x^2+y^2-4x+6y-3=0$; г) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$;

д) $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$; е) $x^2+6x-12y+45=0.$

Відповідь: а) точка: $(-2;1)$; б) дві прямі: $x-y=0,\ x+y+2=0;$ в) коло: $(x-2)^2+(y+3)^2=16;$ г) еліпс: $\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{(y+1)^2}{5}=1;$

д) гіпербола: $\dfrac{(x+5)^2}{64}-\dfrac{(y-1)^2}{36}=1$; е) парабола: $(x+3)^2=12(y-3).$

Розділ 4. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

4.1. Множини

Поняття множини. Під **множиною** розуміють сукупність деяких розрізнених об’єктів, що розглядаються як єдине ціле. Позначають множини великими латинськими буквами, а їх елементи - малими. Якщо елемент x належить множині M, то записують $x \in M$, а якщо не належить, то пишуть $x \notin M$. Задають множину переліком її елементів ($M = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$) або визначають характерні властивості, притаманні всім елементам множини ($M = \{x \mid P(x)\}$, де $P(x)$ - будь-яка властивість елементів x). Наприклад, множина $M = \{x \mid x^2 = 1\}$ складається з двох елементів: коренів $+1$ та -1 рівняння $x^2 = 1$. Множину, що не містить жодного елемента, називають ***порожньою*** множиною і позначають $\varnothing$.

Множина B називається **підмножиною множини** A (позначається $B \subset A$ або $A \supset B$), якщо кожен елемент множини B є також елементом множини A. За умов $A \subset B$ і $B \subset A$ множини A і B називають **рівними** (записують $A = B$).

Найпростіші дії над множинами

1. **Об’єднанням** множин A і B називається множина C, яка містить усі елементи множин A і B та не містить ніяких інших елементів (позначають $C = A \cup B$).

2. **Перетином** множин A і B називається множина D, яка містить усі спільні елементи множин A і B та не містить ніяких інших елементів (позначають $D = A \cap B$).

3. **Різницею** множин A і B називається множина E, яка складається з тих і тільки тих елементів множини A, яких немає в множині B. Різницю множин позначають знаком $\backslash$ і записують $E = A \backslash B$.

Числові множини. Числова вісь. Множини, елементи яких дійсні числа, називаються **числовими**. Для деяких найважливіших числових множин прийняті стандартні позначення. Так, R – множина дійсних чисел; Q – множина раціональних чисел; I – множина ірраціональних чисел; Z – множина цілих чисел; N – множина натуральних чисел. Безперечно, $N \subset Z \subset Q \subset R$, $I \subset R$, $R = Q \cup I$.

Геометрично множину дійсних чисел R зображують за допомогою точок числової осі. **Числова вісь** - нескінченна пряма, на якій вибрано початкову точку O, додатний напрям і одиницю масштабу. Кожному дійсному числу ставиться у відповідність одна і тільки одна точка числової осі. Справедливе й обернене твердження: кожна точка числової осі зображає одне і тільки одне дійсне число.

Серед числових множин відзначимо такі **проміжки:**

- відрізок $[a, b]$ - множина X, для якої $a \le x \le b$;

- інтервал (a, b) - множина X, для якої $a < x < b$;
- півінтервал $(a, b]$ - множина X, для якої $a < x \le b$;
- півінтервал $[a, b)$ - множина X, для якої $a \le x < b$;

$\left.\begin{array}{l} (b, \infty) \text{ - } \textit{множина } X, \textit{ для якої } x > b; \\ [b, \infty) \text{ - } \textit{множина } X, \textit{ для якої } x \ge b; \\ (-\infty, a) \text{ - } \textit{множина } X, \textit{ для якої } x < a; \\ (-\infty, a] \text{ - } \textit{множина } X, \textit{ для якої } x \le a. \end{array}\right\}$ - нескінченні інтервали (промені).

Множина всіх дійсних чисел (уся числова вісь) позначається $(-\infty, +\infty)$.

Приклад. Множини A і B - підмножини множини R. Знайти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, якщо $A = (-3,\ 7]$, $B = [5,\ 8]$.

Розв'язання. Зобразимо множини A та B на числовій осі (рис. 4.1).

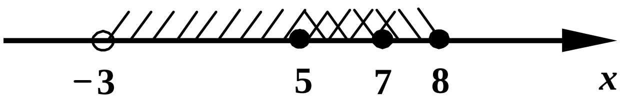


Рис. 4.1

Отже, $A \cup B = (-3,\ 8]$; $A \cap B = [5,\ 7]$; $A \backslash B = (-3,\ 5)$.

Абсолютна величина числа. Абсолютною величиною числа або **модулем** дійсного числа x (позначається $|x|$) називається невід'ємне число, для якого виконуються умови: $|x| = \begin{cases} x, & \textit{якщо } x \ge 0; \\ -x, & \textit{якщо } x < 0. \end{cases}$

Основні властивості абсолютних величин

1^0. $|x| \ge 0$. 2^0. $|x + y| \le |x| + |y|$. 3^0. $|x - y| \ge |x| - |y|$.

4^0. $|xy| = |x||y|$. 5^0. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, $y \ne 0$. 6^0. $|x^n| = |x|^n$.

Окіл точки. Геометрично модуль дорівнює відстані між точками x та x_0 числової осі. Тому розв'язок нерівності $|x - x_0| < \delta$ $(-\delta < x - x_0 < \delta,\ \delta > 0)$ можна інтерпретувати як множину точок інтервалу $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (рис. 4.2.).

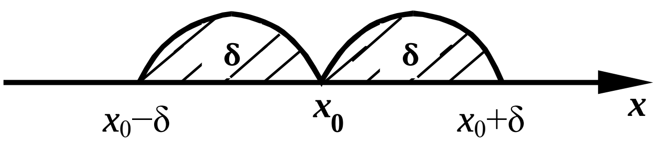


Рис. 4.2

Довільний інтервал вигляду $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, який містить точку x_0, називають **δ-околом точки** x_0 $(U_\delta(x_0))$, інакше: δ-окіл точки x_0 - множина точок x, для яких справджується нерівність $|x - x_0| < \delta$, де $\delta > 0$. **Окіл точки** x_0 - це довільна множина, що містить δ-окіл цієї точки.

4.2. Поняття функції

Поняття функціональної залежності. Змінною називається така величина, яка може набувати різних числових значень у розглядуваному процесі. Величина, числові значення якої в даному процесі не змінюються, називається **сталою.** Характер зміни величин - дуже різноманітний. Розрізняють **дискретні** змінні, які можуть набувати скінченної чи нескінченної множини ізольованих числових значень, та **неперервні** змінні, які, прийнявши два значення $x = a$ та $x = b$, набувають також (черговість неважлива) і всіх проміжних значень $a < x < b$.

Однак, змінні величини у природі та суспільних процесах існують не ізольовано, а у неперервному взаємозв'язку, тобто залежать одна від одної. Абстрагуючись від конкретних прикладів залежностей між величинами, у математиці запровадили поняття функції.

Якщо кожному елементу x множини X відповідає деякий елемент y множини Y, то кажуть, що на множині X визначена **функція** $y = f(x)$.

Змінну величину x називають **незалежною** або **аргументом** функції, а y - **залежною** змінною, буквою f позначено закон відповідності. Множина X називається **областю визначення функції** (позначається $D(f)$), а множина Y - **областю значень функції** (позначається $E(f)$).

Способи задання функції

1. **Табличний спосіб** зводиться до того, що функція задається таблицею, яка містить значення аргументу x та відповідні значення функції $f(x)$ (наприклад, таблиці тригонометричних функцій, бухгалтерської звітності).

2. **Графічний спосіб** – зображення графіка функції, тобто множини всіх точок площини, координати яких задовольняють рівняння функції $y = f(x)$.

3. **Аналітичний спосіб** полягає в тому, що функція задається аналітично, тобто за допомогою формули. Треба підкреслити, що функція може визначатися і набором формул: різним проміжкам області визначення функції відповідають різні формули.

Наведемо приклади аналітичного задання функції:

1) $y = x^3$ - кубічна парабола (рис. 4.3), задана на нескінченній прямій $-\infty < x < +\infty$, множина значень – теж нескінченна пряма $-\infty < y < +\infty$;

2) $y = \sqrt{1 - x^2}$ - половина кола, яка лежить у верхній півплощині (рис. 4.4), функція задана на відрізку $[-1; 1]$, множина її значень - відрізок $[0; 1]$;

3) $y = \begin{cases} x & при \; x \le 0; \\ \sqrt{x} & при \; x > 0. \end{cases}$ На $(-\infty; 0]$ - це пряма, а на $(0; +\infty)$ - парабола (рис. 4.5).

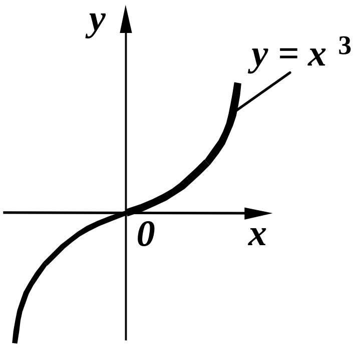


Рис. 4.3

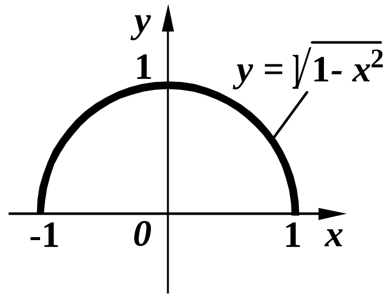


Рис. 4.4

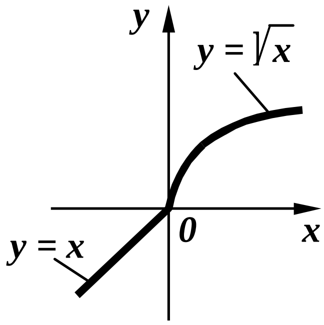


Рис. 4.5

Основні елементарні функції та їх класифікація. Основними елементарними функціями називають такі:

- степенева $y = x^m$, m - будь-яке дійсне число;
- показникова $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$;
- логарифмічна $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;
- тригонометричні $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$;
- обернені тригонометричні $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$.

Функції, які можна утворити з основних елементарних функцій за допомогою скінченної кількості операцій додавання, віднімання, множення чи ділення, називаються **елементарними** і класифікуються таким чином:

1. Функція виду $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$; $n \in N$, має назву **цілої раціональної функції** (**многочлена** або **полінома**). Тут коефіцієнти $a_0, a_1, \ldots, a_n$ - будь-які числа ($a_0 \neq 0$).

2. Функція називається **дробово-раціональною**, якщо становить відношення двох цілих раціональних функцій

$$y(x) = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}.$$

Сукупність цілих раціональних і дробово-раціональних функцій утворюють клас **раціональних** функцій.

3. Функція, отримана за допомогою арифметичних дій над степеневими функціями як з цілими, так і з дробовими показниками і яка не є раціональною, називається **ірраціональною**.

Сукупність раціональних та ірраціональних функцій утворює клас **алгебраїчних** функцій.

4. Будь-які неалгебраїчні функції (показникова, логарифмічна, тригонометричні, обернені тригонометричні) називаються **трансцендентними**.

Головні характеристики функції.

Парність. Якщо область визначення функції D симетрична відносно початку координат, то функція $y = f(x)$ називається **парною**, якщо для кожного x з області визначення виконується рівність $f(-x) = f(x)$, та

непарною, якщо $f(-x) = -f(x)$. У протилежному випадку функцію $y = f(x)$ називають функцією **загального виду**.

Наприклад, функції $y = x^2$, $y = x\sin x$, $y = |x|$ - парні; функції $y = x^3$, $y = \sin x$, $y = x \cdot |x|$ - непарні; функції $y = 2^x$, $y = x^2 + x^5$ - загального виду.

Зазначимо, що графік парної функції - це крива, для якої вісь Oy є віссю симетрії, графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

Обмеженість. Функція $y = f(x)$, визначена в області D, називається **обмеженою** в цій області, якщо існує таке число $M > 0$, що для будь-якого $x \in D$ виконується нерівність $|f(x)| \le M$. Наприклад, обмеженими на всій числовій прямій є функції $y = \sin x$ та $y = \cos x$, бо $|\sin x| \le 1$ і $|\cos x| \le 1$.

Графік обмеженої функції лежить між прямими $y = -M$ та $y = M$.

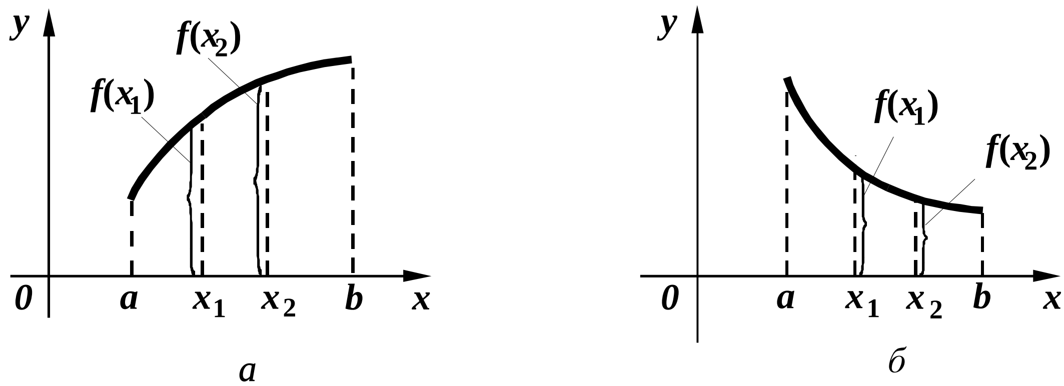


Рис. 4.6

Монотонність. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в області D.

Якщо для будь-яких $x_1, x_2 \in D$ з нерівності $x_1 < x_2$ випливає нерівність $f(x_1) < f(x_2)$, то функцію називають **зростаючою** (рис. 4.6, а), та **спадною** якщо при $x_1 < x_2$ виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$ (рис. 4.6, б).

Такі функції називаються **строго монотонними**.

Якщо для будь-яких $x_1, x_2 \in D$ з нерівності $x_1 < x_2$ випливає нерівність $f(x_1) \le f(x_2)$, то функцію називають **неспадною**, та називають **незростаючою** в області D, якщо при $x_1 < x_2$ виконується нерівність $f(x_1) \ge f(x_2)$.

Ці функції називають **монотонними.**

Інтервали, у яких функція монотонна називають **інтервалами монотонності.**

Періодичність. Якщо існує таке число $T > 0$, що для кожного x з області визначення функції $y = f(x)$ виконується рівність $f(x) = f(x+T)$, то функція $f(x)$ - **періодична**, а число T - її **період**. Наприклад, функції $y = \sin x$ та $y = \cos x$ - періодичні, а число 2π - їх найменший період.

Поняття оберненої функції. Нехай задана функція $y = f(x)$ з областю визначення D та з областю значень E. Якщо кожному значенню $y \in E$

відповідає єдине значення $x \in D$, то буде визначена функція $x = \varphi(y)$ з областю визначення E та областю значень D. Така функція називається **оберненою** до функції $f(x)$ і записується в такому вигляді: $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$.

Про функції $y = f(x)$ та $x = \varphi(y)$ кажуть, що вони **взаємно обернені**.

Для того щоб знайти $x = \varphi(y)$, обернену до $y = f(x)$, достатньо розв'язати рівняння $f(x) = y$ відносно x (якщо це можливо). Наприклад, для функції $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ функція $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ буде оберненою, а функції $y = a^x$ $(a > 0; a \neq 1)$ та $\log_a x$ - взаємно обернені, проте функція $y = x^2$, $x \in R$ не має оберненої, бо набуває кожного свого значення у двох різних точках (значення $y = 1$ вона набуває в точках $x = 1$ та $x = -1$).

Поняття складеної функції. Познайомимося з поняттям **суперпозиції** (**накладання**) функцій, яке полягає в тому, що замість аргументу даної функції підставляється інша функція (від іншого аргументу). Наприклад, суперпозиція функцій $y = \lg u$ та $u = \sin x$ дає функцію $y = \lg \sin x$.

Загалом припустимо, що функція $y = f(u)$ визначена на множині U, а функція $u = \varphi(x)$ - на множині X і значення функції $\varphi(x)$ належать множині U, то на множині X можна задати функцію $y = f[\varphi(x)]$, яка має назву **складеної функції** або **суперпозиції** функцій f та φ.

Неявно задана функція. Якщо функція задана рівнянням $y = f(x)$, розв'язаним відносно залежної змінної y, то кажуть, що функція задана в явній формі або є явною.

Якщо x та y зв'язані між собою рівнянням вигляду $F(x, y) = 0$, то вважають, що функція $y = f(x)$ **задана неявно.** Наприклад, рівняння $x^4 - y^2 - x^2 = 0$ неявно визначає функцію $y = \pm\sqrt{x^4 - x^2}$, проте не всяку неявно задану функцію можна подати в явному вигляді.

Параметрично задана функція. Якщо функціональна залежність між x та y задається за допомогою двох функцій $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \phi(t) \end{cases}$, то кажуть, що функція задана параметрично. Допоміжна змінна t, при цьому називається **параметром**.

Завдання для самоконтролю

1. Що називається функцією?
2. Що називається областю визначення та областю значень функції?
3. Які основні способи задання функції?
4. Які функції називаються основними елементарними функціями?
5. Яка функція називається складеною?
6. Яка функція називається елементарною?

7. Як класифікують елементарні функції?
8. Які функції називають монотонними?
9. Яка функція називається парною, непарною?
10. Яка функція називається періодичною?
11. Яка функція називається неявно заданою, параметрично заданою?

4.3. Числова послідовність

Поняття числової послідовності. Якщо за деяким законом кожному натуральному числу n поставлено у відповідність певне число x_n, то множина чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ називається **числовою послідовністю**. Ця відповідність є функцією, область визначення якої - множина N, а область значень може належати множині R.

Отже, **числова послідовність** – це **числова функція** натурального аргументу $x_n = f(n)$, $n \in N$.

Коротко послідовність позначають символом $\{x_n\}$.

Числа $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ - це члени (елементи) послідовності;

x_n - її загальний член (елемент);

n - номер члена.

Задати числову послідовність можна формулою її загального члена. Так, формула $x_n = \dfrac{1}{2^n}$ задає послідовність $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \ldots, \dfrac{1}{2^n}, \ldots$.

Рекурентний спосіб задання послідовності більш специфічний. За цим способом задають кілька початкових членів послідовності безпосередньо та формулу, за якою можна визначити її n-й член за передуючими членами.

Наприклад, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ при $n \geq 3$. Ці рекурентні співвідношення дають послідовність Фібоначчі: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,$\ldots$.

Геометрично послідовність зображують на координатній прямій у вигляді точок, координати яких дорівнюють відповідним членам послідовності. На числовій прямій (рис. 4.7) зображена послідовність $\{x_n\} = \{\dfrac{1}{n}\}$.

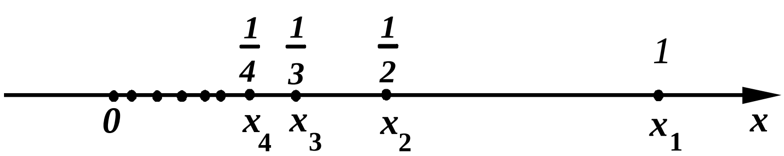


Рис. 4.7

Обмеженість послідовності. Послідовність $\{x_n\}$ називається **обмеженою**, якщо існує таке число $M > 0$, що для будь-якого $n \in N$ виконується нерівність $|x_n| \leq M$.

У противному випадку послідовність називають **необмеженою.**

Так, послідовність $\{\frac{9+(-1)^n}{2}\}$ - обмежена, тому що $\left|\frac{9+(-1)^n}{2}\right| \le 5$, а послідовності $\{n-1\}$, $\{n!\}$ - необмежені.

Монотонні послідовності. Послідовність $\{x_n\}$ називається **зростаючою** (**спадною**), якщо для довільного $n \in N$ виконується нерівність $x_{n+1} > x_n$ $(x_{n+1} < x_n)$. Ці послідовності називаються **строго монотонними.**

Послідовність $\{x_n\}$ називається **неспадною** (**незростаючою**), якщо для довільного $n \in N$ виконується нерівність $x_{n+1} \ge x_n$ $(x_{n+1} \le x_n)$.

Неспадні й незростаючі послідовності називаються **монотонними**.

Границя числової послідовності. Число a називають **границею послідовності** $\{x_n\}$, якщо для будь-якого додатного числа ε існує таке натуральне число N, що при $n > N$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$.

Така послідовність називається **збіжною**.

Якщо послідовність $\{x_n\}$ збіжна, то символічно це записують так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{або} \quad x_n \to a \quad \text{при} \quad n \to \infty .$$

Якщо послідовність не має границі, вона називається **розбіжною.**

Основні властивості збіжних послідовностей

1^0. У збіжної послідовності - лише одна границя.

2^0. Збіжна послідовність обмежена.

3^0. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то послідовності $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n y_n\}$ та $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ при $b \ne 0$ збігаються, при цьому виконуються рівності:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b, \qquad \lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

4^0. Якщо елементи збіжної послідовності $\{x_n\}$, починаючи з деякого номера, задовольняють нерівність $x_n \ge b$ $(x_n \le b)$, то і границя a цієї послідовності задовольняє нерівність $a \ge b$ $(a \le b)$.

5^0. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ та починаючи з деякого номера виконується нерівність $x_n \le z_n \le y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Достатня умова існування границі послідовності (Вейерштрасс). Будь-яка монотонна обмежена послідовність має скінченну границю.

Число e. Можна показати, що послідовність $x_n = (1 + 1/n)^n$ обмежена та монотонна, тобто має границю. Величина цієї границі дорівнює деякому ірраціональному числу $e \approx 2{,}71828\ldots$, яке не можна виразити яким-небудь скінченним дробом. Отже,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e} \qquad (4.1)$$

Число e відіграє надто важливу роль в математичному аналізі та його застосуваннях. Показникова функція $y = e^x$ (або $y = \exp x$) називається **експоненціальною.** Число e - основа системи натуральних логарифмів $\log_e x = \ln x$, які широко використовують у математиці та її застосуваннях.

4.4. Границя функції

Поняття граничного значення функції. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки a, крім, можливо, самої точки a.

> Число A називається **границею функції** $y = f(x)$ у точці a (або при $x \to a$), якщо для будь-якого малого додатного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх x, які задовольняють нерівність $|x - a| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Це записують так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ або $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Геометрична інтерпретація границі функції у точці. Оскільки з $|x - a| < \delta$ випливає $|f(x) - A| < \varepsilon$, то це означає, що для всіх точок x, віддалених від точки a не далі, ніж на δ, точки графіка $y = f(x)$ лежать усередині смуги завширшки 2ε, обмеженої прямими $y = A - \varepsilon$ та $y = A + \varepsilon$ (рис. 4.8).

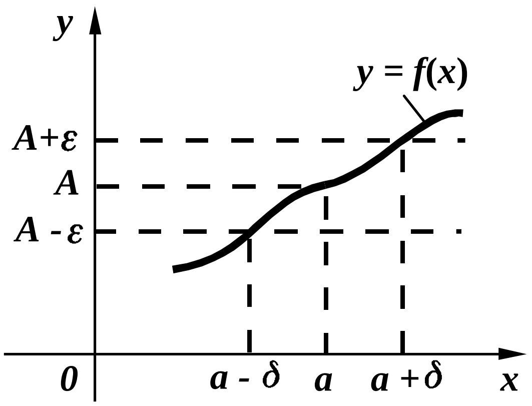


Рис. 4.8

Наведене означення границі функції збігається з таким означенням: функція $f(x)$ має границю A при $x \to a$, якщо довільній послідовності значень аргументу $\{x_n\}$, яка належить області визначення функції та має границю a, відповідає послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ з границею A.

<u>З а у в а ж е н н я 1.</u> Нехай x прямує до a, залишаючись при цьому менше за a. Якщо за такої умови функція $f(x)$ має границю A_1, то вона зветься **лівою границею функції** $f(x)$ **у точці** a. Це записують $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A_1$. Аналогічно, коли x прямує до a, будучи більше за a, і функція $f(x)$ має границю A_2, то це - **права границя функції у точці** a, що позначається як $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A_2$ (рис. 4.9). Ліву та праву границі називають **однобічними**.

Число A буде границею функції $f(x)$ при $x \to a$, якщо існують обидві однобічні границі й вони дорівнюють A.

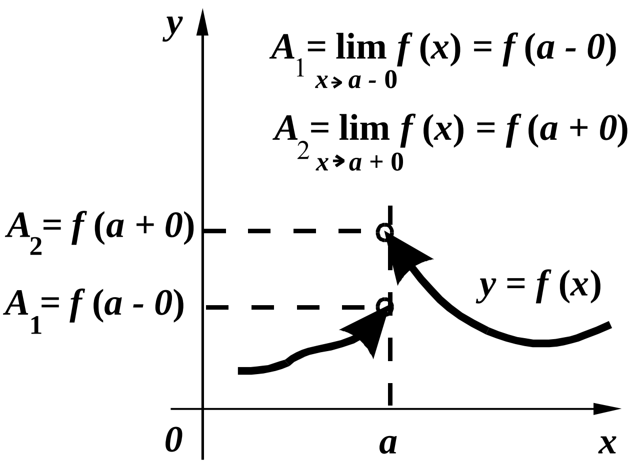


Рис. 4.9

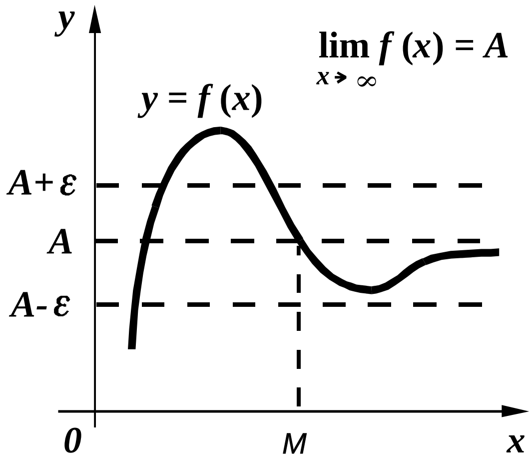


Рис. 4.10

<u>З а у в а ж е н н я 2.</u> Функція $f(x)$ має границею число A при $x \to \infty$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $M(\varepsilon) > 0$, що при $|x| > M$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ та пишуть $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A_2$ (рис. 4.10).

Якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $M(\varepsilon) > 0$, що при $x > M$ $(x < -M)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$, то число A буде границею функції $f(x)$ при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$).

Наприклад, $\lim\limits_{x \to +\infty} arctgx = \dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} arctgx = -\dfrac{\pi}{2}$.

4.5. Нескінченно малі функції

Функція $\alpha(x)$ називається **нескінченно малою** при $x \to a$, якщо її границя дорівнює нулю: $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$ (або $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$).

Наприклад, функції $y = e^{x-2} - 1$ та $y = \dfrac{1}{x}$ при $x \to 2$ та $x \to \infty$ відповідно будуть нескінченно малими, тому що $\lim\limits_{x \to 2}(e^{x-2} - 1) = 0$ та $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Зв'язок нескінченно малої функції з границею функції. Для того щоб функція $f(x)$ мала своєю границею у точці $x = a$ число A, необхідно і достатньо, щоб функція $\alpha(x) = f(x) - A$ була нескінченно малою при $x \to a$.

Властивості нескінченно малих функцій

1^0. Алгебраїчна сума скінченної кількості нескінченно малих функцій - нескінченно мала функція.

2^0. Добуток нескінченно малої функції на обмежену функцію (зокрема на константу) - нескінченно мала функція.

3^0. Добуток скінченної кількості нескінченно малих функцій - нескінченно мала функція.

4^0. Частка від ділення нескінченно малої функції на функцію, границя якої відрізняється від нуля, - нескінченно мала функція.

Наприклад, оскільки функція $f(x)=\cos x$ обмежена при $x\in R$, для функції $g(x)=x^2$ границя $\lim\limits_{x\to 5} x^2=25\neq 0$, а функції $\alpha_1(x)=\sqrt{x-1}-2$ та $\alpha_2(x)=\log_5 x-1$ - нескінченно малі при $x\to 5$, то нескінченно малими при $x\to 5$ будуть також функції:

1) $\alpha_1(x)+\alpha_2(x)=(\sqrt{x-1}-2)+(\log_5 x-1)$ за властивістю 1^0;

2) $\alpha_1(x)f(x)=(\sqrt{x-1}-2)\cos x$ за властивістю 2^0;

3) $\alpha_1(x)\cdot\alpha_2(x)=(\sqrt{x-1}-2)(\log_5 x-1)$ за властивістю 3^0;

4) $\dfrac{\alpha_1(x)}{g(x)}=\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x^2}$ за властивістю 4^0.

Класифікація нескінченно малих функцій. Границя відношення двох нескінченно малих $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ при $x\to a$ залежить від їх виду. Вона може бути невизначеною, дорівнювати нулю або числу $A\neq 0$ чи нескінченності. Це дає змогу навести таку класифікацію нескінченно малих функцій:

а) якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A$, де $A=const$, $A\neq 0$, то функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називають **нескінченно малими одного порядку мализни при** $x\to a$;

б) якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=A$, де $A=const$, $A\neq 0$, k - фіксоване додатне число, то $\alpha(x)$ **називають нескінченно малою функцією** k-го **порядку мализни відносно нескінченно малої** $\beta(x)$ **при** $x\to a$;

в) якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ **називають нескінченно малою функцією вищого порядку мализни, ніж** $\beta(x)$ **при** $x\to a$ та записують $\alpha=o(\beta)$;

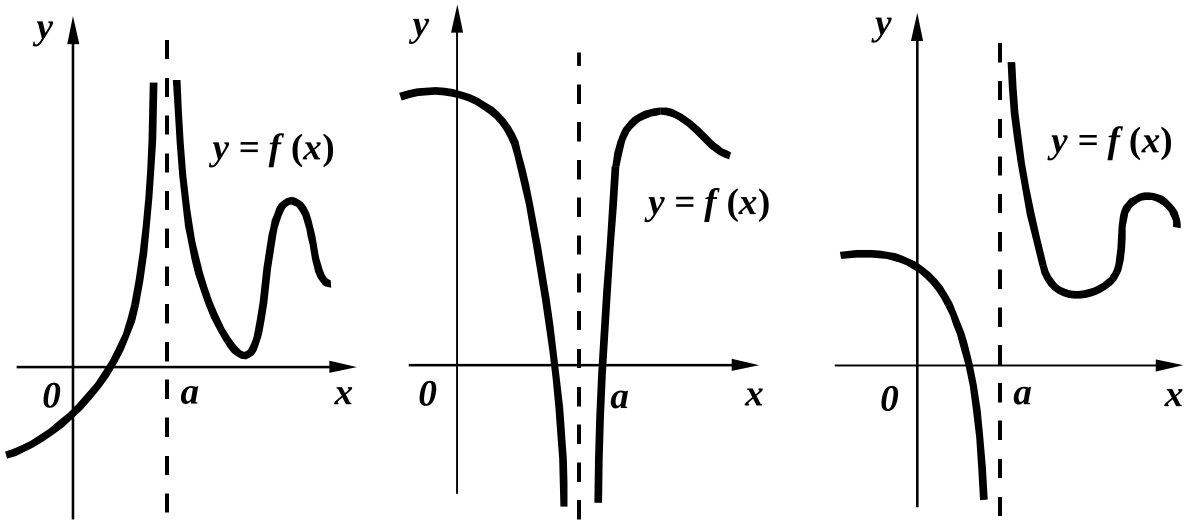
г) якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називають **еквівалентними нескінченно малими при** $x\to a$ та записують $\alpha\sim\beta$.

Певна річ, може статися, що відношення двох нескінченно малих функцій не має границі, тоді нескінченно малі вважають **непорівнянними**.

4.6. Нескінченно великі функції

Функція $f(x)$ називається **нескінченно великою** при $x \to a$, якщо, яким би великим не було додатне число M, існує таке число $\delta(M) > 0$, що для всіх значень x, які задовольняють умову $|x - a| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)| > M$. Те, що $f(x)$ - нескінченно велика функція, записують так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ або $f(x) \to \infty$ при $x \to a$.

На рис. 4.11 зображені графіки нескінченно великих функцій.



$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

Рис. 4.11

Аналогічно визначаються нескінченно великі функції при $x \to \infty$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$.

Нескінченно велика функція – це функція, яка нескінченно зростає. Отже, суть нескінченно великої зовсім не в її величині або розмірах, а в характері її зміни.

Властивості нескінченно великих функцій

1^0. Сума нескінченно великої та обмеженої – нескінченно велика.

2^0. Сума двох нескінченно великих одного знаку - нескінченно велика.

3^0. Добуток двох нескінченно великих - нескінченно велика.

<u>З а у в а ж е н н я.</u> Нескінченно велика функція є необмеженою при $x \to \infty$ (або при $x \to a$), проте необмежена функція - не завжди нескінченно велика.

Зв'язок нескінченно малих і нескінченно великих функцій. Якщо при $x \to a$ функція $\alpha(x)$ - нескінченно мала, а $f(x)$ - нескінченно велика, тоді функція $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ - нескінченно велика та $\dfrac{1}{f(x)}$ - нескінченно мала .

4.7. Основні теореми про границі

Обчислення границь за допомогою визначення − досить громіздка робота, тому наведемо теореми, які полегшують обчислення границь функції.

Формулювання теорем для випадків, коли $x \to a$ та $x \to \infty$, аналогічні.

Вважаємо, що у наведених теоремах існують границі

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ та } \lim_{x\to a} \varphi(x).$$

Теорема 1. Функція може мати в точці $x = a$ тільки одну границю.

Теорема 2. Границя сталої дорівнює цій величині: $\lim\limits_{x\to a} C = C$, $\quad C = const$.

Теорема 3. Постійний множник можна виносити за знак границі

$$\lim_{x\to a} k\, f(x) = k \lim_{x\to a} f(x), \quad k = const.$$

Теорема 4. Якщо точка a разом з деяким околом належить області визначення елементарної функції $f(x)$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Теорема 5. Границя суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) їх границь: $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$.

Теорема 6. Границя добутку двох функцій дорівнює добутку границь цих функцій: $\lim\limits_{x\to a} (f(x)\varphi(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$.

Теорема 7. Границя частки двох функцій дорівнює частці границь цих функцій, якщо границі діленого та дільника існують і границя дільника відмінна від нуля: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)}$, $\quad (\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) \neq 0)$.

Теорема 8. Границя степеня з натуральним показником дорівнює тому ж степеню границі: $\lim\limits_{x\to a} (f(x))^n = (\lim\limits_{x\to a} f(x))^n$. Зокрема, $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$, $n \in N$.

Теорема 9. Якщо для функцій $\varphi(x), f(x), \phi(x)$ справджується нерівність $\varphi(x) \le f(x) \le \phi(x)$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = A$ та $\lim\limits_{x\to a} \phi(x) = A$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Теорема 10. Якщо $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = u_0$, то границя складеної функції буде $\lim\limits_{x \to a} f(\varphi(x)) = A$.

Теорема 11. Монотонна функція неперервного аргументу має границю (скінченну чи нескінченну) при будь-якому значенні аргументу x (скінченному чи нескінченному); монотонна обмежена функція має <u>скінченну</u> границю при будь-якому значенні аргументу x.

4.8. Техніка обчислення границь. Розкриття деяких невизначеностей

Теореми про границі дають можливість обчислювати границі елементарних функцій, які являють собою результат алгебраїчних дій над змінною, граничне значення якої відомо та належить області визначення функції. У простих випадках достатньо підставити у вираз функції, границю якої шукають, замість аргументу x його граничне значення.

Приклад 1: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x-3}{3+7x} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 3}(2x-3)}{\lim\limits_{x \to 3}(3+7x)} = \dfrac{2\lim\limits_{x \to 3} x - \lim\limits_{x \to 3} 3}{\lim\limits_{x \to 3} 3 + 7\lim\limits_{x \to 3} x} = \dfrac{2 \cdot 3 - 3}{3 + 7 \cdot 3} = \dfrac{3}{24} = \dfrac{1}{8}$.

Функції, задані формулами, які після формальної підстановки в них граничного значення аргументу втрачають сенс, тобто перетворюються на вирази типу $\{\frac{0}{0}\}$, $\{\frac{\infty}{\infty}\}$, $\{0 \cdot \infty\}$, $\{\infty - \infty\}$, $\{1^{\infty}\}$, $\{0^{\infty}\}$, $\{\infty^{0}\}$, називаються **невизначеностями.** Без спеціального дослідження незрозуміло, чи мають такі функції границі, а якщо й мають, то які їх величини? Тому операцію знаходження границь у таких випадках називають **«розкриттям невизначеностей».** Щоб розкрити невизначеність, доводиться застосовувати різні технічні прийоми. Розглянемо деякі окремі випадки.

Приклад 2: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 - 2x + 7}{5x^3 - 2x^2 + 8x - 4} = \dfrac{\lim\limits_{x \to \infty}(x^3 - 2x + 7)}{\lim\limits_{x \to \infty}(5x^3 - 2x^2 + 8x - 4)} = \{\dfrac{\infty}{\infty}\}$.

Маємо відношення двох нескінченно великих функцій. Щоб розкрити невизначеність $\{\frac{\infty}{\infty}\}$, задану відношенням многочленів, треба у чисельнику та знаменнику винести за дужки найвищий степінь x у цих многочленах.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 2x + 7}{5x^3 - 2x^2 + 8x - 4} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{7}{x^3})}{x^3(5 - \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2} - \frac{4}{x^3})} = \lim_{x \to \infty} \frac{(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{7}{x^3})}{(5 - \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2} - \frac{4}{x^3})} = \frac{1}{5}.$$

Тут враховано, що $\frac{2}{x} \to 0$, $\frac{2}{x^2} \to 0$, $\frac{8}{x^2} \to 0$, $\frac{7}{x^3} \to 0$, $\frac{4}{x^3} \to 0$ при $x \to \infty$.

Приклад 3: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\lim\limits_{x\to\infty}x=\{\infty-\infty\}$.

Для розкриття невизначеності виду $\{\infty-\infty\}$ треба перейти до дробу. Якщо невизначеність задана ірраціональним виразом, необхідно позбавитися від ірраціональності. Ірраціональності можна уникнути, якщо помножити та поділити функцію на спряжений вираз:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0.$$

Приклад 4: $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2-4x+1}-\sqrt{4x^2+1})=\{\infty-\infty\}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{4x^2-4x+1}-\sqrt{4x^2+1})(\sqrt{4x^2-4x+1}+\sqrt{4x^2+1})}{\sqrt{4x^2-4x+1}+\sqrt{4x^2+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-4x+1-4x^2-1}{\sqrt{4x^2-4x+1}+\sqrt{4x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x}{\sqrt{4x^2-4x+1}+\sqrt{4x^2+1}}=\{\frac{\infty}{\infty}\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x}{x(\sqrt{4-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}})}=\{\frac{\infty}{\infty}\}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{\sqrt{4-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}=-1.$$

Приклад 5: $\lim\limits_{x\to2}\frac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}=\frac{\lim\limits_{x\to2}(3x^2-8x+4)}{\lim\limits_{x\to2}(5x^2-14x+8)}=\{\frac{0}{0}\}$.

Маємо невизначеність виду $\{\frac{0}{0}\}$, задану відношенням многочленів.

Якщо многочлен обертається на нуль при підстановці замість x деякого числа x_0, то цей многочлен ділиться на $x-x_0$ без остачі. Отже, для розкриття невизначеності $\{\frac{0}{0}\}$ треба в чисельнику та знаменнику виділити множник $x-x_0$, через який чисельник і знаменник прямують до нуля, та скоротити на нього дріб.

$$\lim_{x\to2}\frac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}=\{\frac{0}{0}\}=\lim_{x\to2}\frac{3(x-2)(x-\frac{2}{3})}{5(x-2)(x-\frac{4}{5})}=\lim_{x\to2}\frac{3x-2}{5x-4}=\frac{2}{3}.$$

Якщо розкладання на множники виявиться утрудненим, то треба розділити чисельник та знаменник на множник $x-x_0$ «у стовпчик».

Приклад 6: $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^3-21x^2+60x-25}{3x^2-14x-5}=\{\dfrac{0}{0}\}$.

Невизначеність задана відношенням двох многочленів, тому чисельник і знаменник поділимо на $x-5$. Маємо

$$
\begin{array}{r|l}
-\,2x^3-21x^2+60x-25 & x-5 \\
\underline{2x^3-10x^2\qquad\qquad\quad} & \overline{2x^2-11x+5} \\
-\,-11x^2+60x\qquad & \\
\underline{-11x^2+55x}\qquad & \\
-\,5x-25 & \\
\underline{5x-25} & \\
0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
-\,3x^2-14x-5 & x-5 \\
\underline{3x^2-15x\quad} & \overline{3x+1} \\
-\,x-5 & \\
\underline{x-5} & \\
0 &
\end{array}
$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{2x^3-21x^2+60x-25}{3x^2-14x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(2x^2-11x+5)}{(x-5)(3x+1)}=\lim_{x\to 5}\frac{(2x^2-11x+5)}{(3x+1)}=0.$$

Приклад 7: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}=\{\dfrac{0}{0}\}$.

Для розкриття невизначеності виду $\{\dfrac{0}{0}\}$, заданої ірраціональними виразами, треба позбавитися від ірраціональності.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}=\lim_{x\to 3}\frac{(x^2+x-12)(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x})}{x-2-4+x}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+4)(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x})}{2(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+4)(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x})}{2}=7.$$

Приклад 8: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\{\dfrac{0}{0}\}$.

Іноді від ірраціональності $\{\dfrac{0}{0}\}$ можна позбутися введенням нової змінної.

Введемо заміну $x=t^6$. Зважаючи на те, що при $x\to 1$ нова змінна теж прямує до одиниці $(t\to 1)$, маємо

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t^3-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)(t^2+t+1)}==\lim_{t\to 1}\frac{t+1}{t^2+t+1}=\frac{2}{3}.$$

Приклад 9: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{8x}=\{\dfrac{0}{0})$.

Невизначеність виду $\{\dfrac{0}{0}\}$, задана виразами, що містять тригонометричні функції, часто розкривається за допомогою формули

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$, яка називається **першою важливою границею**. Наприклад,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{8x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\sin 5x}{5x\cdot 8}=\frac{5}{8}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=\frac{5}{8}\cdot 1=\frac{5}{8}.$$

Приклад 10: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\{\frac{0}{0}\}$.

Використовуючи формулу $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$ та потім першу важливу границю, маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{1}{4}x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{2}.$$

Приклад 11: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\{\frac{0}{0}\}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x(\frac{1}{\cos x}-1)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x^2}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\cdot\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{2}.$$

При знаходженні границі відношення двох нескінченно малих функцій кожна з них може бути також замінена еквівалентною їй нескінченно малою. Причому доцільно мати на увазі такий «ланцюжок» еквівалентних нескінченно малих функцій при $x\to 0$: $x\sim\sin x\sim tgx\sim\arcsin x\sim arctgx\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$.

Приклад 12: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{4}{x})^{2x}=\{1^\infty\}$.

Для розкриття невизначеності $\{1^\infty\}$ використовують одну з формул: $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e}$ або $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$ – **друга важлива границя.**

Наприклад, $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{4}{x})^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1+\frac{4}{x})^{\frac{x}{4}}\right]^{\frac{4\cdot 2x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x}{x}}=e^8$.

Приклад 13: $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1-4\alpha)^{\frac{3}{\alpha}}=\{1^\infty\}=\lim\limits_{\alpha\to 0}[(1-4\alpha)^{-\frac{1}{4\alpha}}]^{(-4\alpha)\frac{3}{\alpha}}=$

$$=\lim_{\alpha\to 0}[(1-4\alpha)^{-\frac{1}{4\alpha}}]^{-12}=e^{-12}.$$

Приклад 14: $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x+1}{2x-5})^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{6}{2x-5})^{x+1}=\{1^{\infty}\}$.

Діленням чисельника на знаменник виділимо цілу частину й отримаємо невизначеність $\{1^{\infty}\}$, далі скористаємося другою важливою границею:

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{2x+1}{2x-5})^{x+1}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{6}{2x-5})^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left[(1+\frac{6}{2x-5})^{\frac{2x-5}{6}}\right]^{\frac{6(x+1)}{2x-5}}=e^{3}.$$

Приклад 15: $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{x^2}}=\{1^{\infty}\}$.

Основа степенево-показникової функції прямує до 1, а показник – до нескінченності (бо $x^{-2}\to\infty$ при $x\to 0$), а тому маємо невизначеність $\{1^{\infty}\}$.

Застосувавши тотожність $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}$ та врахувавши неперервність експоненти, дістанемо

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\{1^{\infty}\}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{x^2}}.$$

Скориставшись еквівалентністю $\ln(1+\cos x-1)\sim\cos x-1$ при $x\to 0$, отримаємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

Добуток нескінченно малої функції на нескінченно велику – невизначеність виду $\{0\cdot\infty\}$; якщо $\alpha_1(x)\to 0$ та $\alpha_2(x)\to 0$ при $x\to x_0$, то вираз $\alpha_1^{\alpha_2}$ – невизначеність виду $\{0^0\}$; якщо $\alpha(x)\to 0$ та $\beta(x)\to\infty$ при $x\to x_0$, то вираз β^{α} – невизначеність виду $\{\infty^0\}$. Для розкриття цих невизначеностей треба перейти до дробу.

Приклад 16: $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\{\infty\cdot 0\}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\{\frac{0}{0}\}=1$.

Невизначеність виду $\{\frac{0}{0}\}$, задана виразами, що містять логарифмічну або показникову функцію, часто розкриваються за допомогою другої важливої границі.

Приклад 17: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{x}=\{\frac{0}{0}\}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+4x)=\lim_{x\to 0}\ln(1+4x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\ln\lim_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{4x}\cdot 4}=\ln e^{4}=4.$$

Приклад 18: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-1}{x}=\{\frac{0}{0}\}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\left\{\begin{matrix} t=a^{x}-1 & x\log_a a=\log_a(t+1) \\ a^{x}=t+1 & x=\log_a(t+1)\end{matrix}\right\}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(t+1)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1}{t}\log_a(t+1)}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{\log_a\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a.$$

4.9. Неперервність функції

Означення. Функція $y=f(x)$ називається **неперервною в точці** x_0, якщо точка x_0 належить до області визначення функції, границя $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ існує і дорівнює значенню функції в означеній точці

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)}. \qquad (4.2)$$

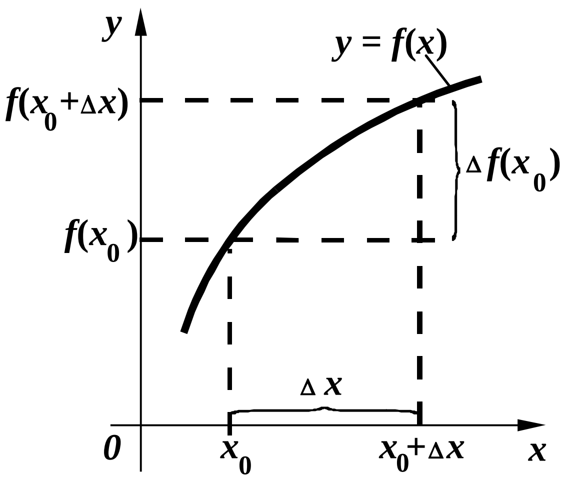


Рис. 4.12

Визначення неперервності функції можна дати за допомогою поняття приросту. **Приростом аргументу** x ***в точці*** x_0 називається різниця $\Delta x=x-x_0$ (рис. 4.12). **Приростом функції** $y=f(x)$ **в точці** x_0 називається різниця

$$\boxed{\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}. \qquad (4.3)$$

Прирости аргументу та функції за знаком можуть бути як додатними, так і від'ємними.

Означення. Функцію $f(x)$, визначену в точці x_0 та її деякому околі, називають **неперервною в точці** x_0 за умови

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0, \qquad (4.4)$$

тобто функція $f(x)$ буде неперервною в точці, якщо нескінченно малому приросту аргументу відповідатиме нескінченно малий приріст функції.

Приклад 1. Для будь-якого x довести неперервність функції $f(x) = x^2 - 3x$.

Розв'язання. Нехай x_0 - довільна точка числової осі. Знайдемо

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (x^2 - 3x) = x_0^2 - 3x_0.$$

Далі обчислюємо значення функції в точці x_0:

$$f(x_0) = x_0^2 - 3x_0.$$

Порівнявши отримані результати, бачимо, що $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Отже, функція $f(x)$ - неперервна в точці x_0 за визначенням неперервності. Оскільки точка x_0 - довільна точка числової осі, то функція неперервна для всіх значень x.

Класифікація точок розриву. Наведені означення неперервності функції в точці еквівалентні таким умовам:

1) функція $f(x)$ має бути визначеною в точці x_0;
2) існують обидві однобічні границі функції $f(x)$ в точці x_0

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \quad \text{та} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x);$$

3) ці однобічні границі дорівнюють одна одній

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x);$$

4) однобічні границі дорівнюють значенню функції в точці x_0.

Якщо в деякій точці не виконана хоча б одна з наведених умов, то вважається, що функція в цій точці має розрив. Наведемо **класифікацію точок розриву**:

- якщо в точці x_0 не виконується перша чи четверта умова, то x_0 - точка **усувного** розриву;
- якщо в точці x_0 не виконується третя умова ($f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$), то x_0 - точка розриву **першого роду**. Абсолютну величину різниці правої та лівої границь функції $f(x)$ у точці x_0 називають **стрибком** функції в цій точці;
- якщо в точці x_0 не виконується друга умова (не існує або дорівнює ∞ хоча б одна з однобічних границь), то x_0 – точка розриву ***другого роду***.

Основні властивості неперервної в точці функції

1^0. Будь-яка елементарна функція неперервна в усіх точках області визначення.

2^0. Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ неперервні в точці x_0, то в цій точці неперервні функції: $f(x) \pm g(x)$; $f(x) \cdot g(x)$; $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (остання - при $g(x_0) \neq 0$).

3^0. Якщо функція $u=\varphi(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $f(u)$ неперервна в точці $u_0=\varphi(x_0)$, то в деякому околі точки x_0 визначена складена функція $f(u(x))$, неперервна в точці x_0.

Приклад 2. Дослідити на неперервність функцію $y=2^{\frac{1}{x-4}}$.

Розв'язання. Дана елементарна функція, отже, вона неперервна в усій області визначення $(-\infty, 4)\cup(4,\infty)$ тобто для всіх $x\in R$, крім $x=4$. Отже, $x=4$ - точка розриву цієї функції. Оскільки

$$\lim_{x\to 4+0} 2^{\frac{1}{x-4}}=2^{\frac{1}{+0}}=2^{\infty}=\infty; \qquad \lim_{x\to 4-0} 2^{\frac{1}{x-4}}=2^{\frac{1}{-0}}=2^{-\infty}=\frac{1}{2^{\infty}}=0,$$

то $x=4$ - точка розриву другого роду. Графік цієї функції наведено на рис. 4.13, а.

Приклад 3. Дослідити на неперервність функцію $y=arctg\dfrac{1}{x+2}$.

Розв'язання. Дана функція - неперервна в усіх точках, окрім точки $x=-2$, де

$$\lim_{x\to -2+0} arctg\frac{1}{x+2}=arctg(\frac{1}{+0})=arctg(+\infty)=\frac{\pi}{2};$$
$$\lim_{x\to -2-0} arctg\frac{1}{x+2}=actg\,(\frac{1}{-0})=arctg(-\infty)=-\frac{\pi}{2};$$

$\lim\limits_{x\to -2-0} y \neq \lim\limits_{x\to -2+0} y \;\Rightarrow\; x_0=-2$ - точка розриву першого роду. Стрибок функції у точці розриву $f(-2+0)-f(-2-0)=\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})=\pi$. Графік функції зображено на рис. 4.13, б.

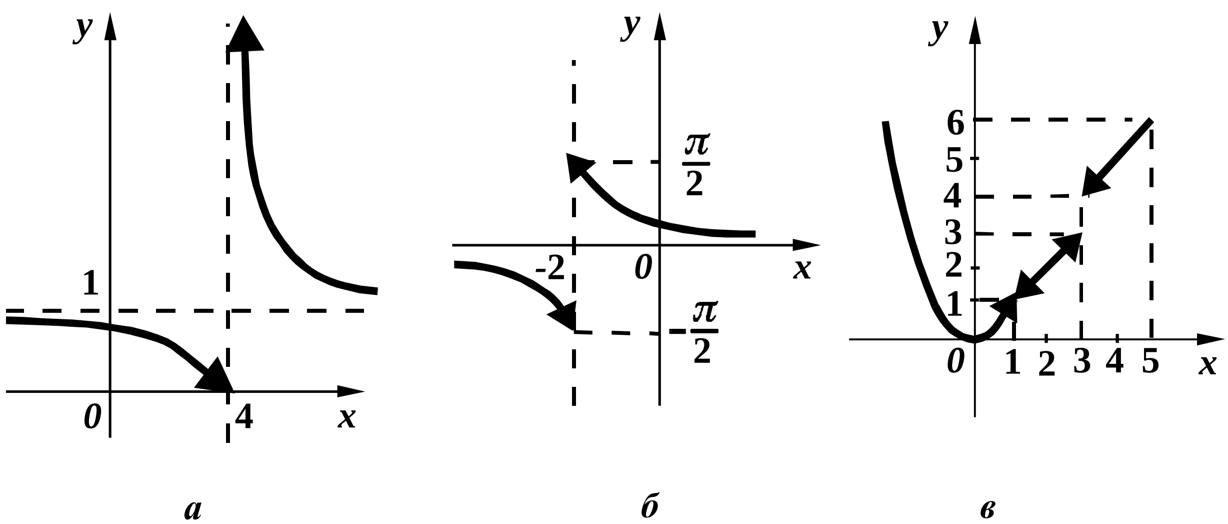


Рис. 4.13

Приклад 4. Дослідити на неперервність функцію

$$y=\begin{cases} x^2, & якщо\ -\infty < x \le 1 \\ x, & якщо\ \ 1 < x < 3 \\ x+1, & якщо\ \ 3 \le x < \infty \end{cases}.$$

Область визначення функції $(-\infty, +\infty)$. На інтервалах $(-\infty, 1), (1, 3), (3, +\infty)$ функція неперервна. Розриви можуть бути лише в точках $x=1$, $x=3$.

Обчислимо однобічні границі функції в точці $x=1$:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} x^2 = 1; \quad \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} x = 1.$$

Значення функції в точці $x=1$ визначається першим аналітичним виразом, тобто $f(1)=1^2=1$. Оскільки $f(1-0)=f(1+0)=f(1)=1$, то в точці $x=1$ задана функція - неперервна.

Розглянемо $f(x)$ в точці $x=3$: $\lim_{x\to 3-0} f(x) = \lim_{x\to 3-0} x = 3$; $\lim_{x\to 3+0} f(x) = \lim_{x\to 3+0} (x+1) = 4$. Отже, $f(3-0) \ne f(3+0)$ і функція в точці $x=3$ має розрив першого роду. Стрибок функції в точці розриву $f(3+0)-f(3-0)=4-3=1$. Графік функції наведено на рис. 4.13, в.

Неперервність функції на відрізку. Функція $y=f(x)$ називається **неперервною на відрізку**, якщо вона неперервна в кожній точці цього відрізка. Така функція має нижченаведені властивості.

Перша теорема Вейєрштрасса. Неперервна функція на відрізку $[a, b]$ обмежена на цьому відрізку

Друга теорема Вейєрштрасса. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то серед її значень на цьому відрізку існує найменше і найбільше.

Перша теорема Больцано − Коші. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ та її значення на кінцях цього відрізка протилежні за знаком, то існує принаймні одна точка $c \in [a, b]$, для якої $f(c)=0$.

Друга теорема Больцано − Коші. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ та $f(a) \ne f(b)$, то для будь-якого числа μ, що знаходиться між числами $f(a)$ та $f(b)$, існує щонайменше одна точка $c \in [a, b]$, для якої $f(c)=\mu$.

Завдання для самоконтролю

1. Що називається границею числової послідовності?
2. Що називається границею функції $f(x)$ в точці x_0?
3. Яка функція називається нескінченно малою?
4. Які нескінченно малі називаються еквівалентними?
5. Який зв'язок між нескінченно малими та нескінченно великими?

6. Які вирази називають невизначеностями?

7. Яка функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0?

Знайти границі функції неперервного аргументу.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+x^4-20}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+x^4-20}$.

10. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+x^4-20}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x}{3x^2-4x+1}$.

12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x}{3x^2-4x+1}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x}{3x^2-4x+1}$.

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+4x+7}{9x^2-2x+3}}$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+\sqrt{x^5+1}}{x^3+4}$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+1}{\sqrt{x^4+1}+\sqrt{x^4+5}}$.

17. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+5}-\sqrt{x})$.

18. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})$.

19. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

20. $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^3}{x+14}-x^2)$.

21. $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{x}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3})$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$.

23. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x^2}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty}9^{\frac{5x}{10x-6}}$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty}3^{\frac{6x^3+2x^2-4}{3x^3-5}}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 3x}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{tgx}$.

29. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$.

30. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}$.

31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\arcsin 6x}$.

32. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\arcsin(2x-1)}{4x^2-1}$.

33. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$.

34. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$.

35. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{9x^2-1}{arctg(3x-1)}$.

36. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 8x}$. 37. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}$. 38. $\lim\limits_{x\to \infty}(1-\dfrac{3}{x})^{2x}$.

39. $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{x}{1-x}}$. 40. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{x}{x-2}}$. 41. $\lim\limits_{x\to \infty}(\dfrac{3+x}{x-4})^{x}$.

42. $\lim\limits_{x\to \infty}(\dfrac{x+4}{3x+5})^{x}$. 43. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{x}$. 44. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin 3x}{2x})^{2x+1}$.

45. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+\sin 2x}$. 46. $\lim\limits_{x\to 1}(5-4x)^{\frac{x}{1-x}}$. 47. $\lim\limits_{x\to \infty}(1+3x)[\ln(x-1)-\ln x]$.

48. Дослідити на неперервність функцію $f(x)=3^{\frac{1}{x+5}}$.

49. При якому значенні a функція $y=\begin{cases}\sin x, & x\le \pi/2,\\ a-x, & x>\pi/2\end{cases}$ буде неперервною?

50. Знайти точки розриву функції $f(x)=arctg\dfrac{1}{1-x}$ та встановити їх вид.

51. Знайти точки розриву функції $f(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$ та встановити їх вид.

Відповіді:

8. 0. **9.** $-\frac{3}{10}$. **10.** $-\frac{1}{36}$. **11.** ∞. **12.** 1. **13.** 0. **14.** $\frac{1}{3}$. **15.** 0. **16.** $\frac{1}{2}$. **17.** 0.
8. $\frac{5}{2}$. **19.** $\frac{1}{4}$. **20.** ∞. **21.** -1. **22.** $\frac{1}{2}$. **23.** $\frac{1}{2}$. **24.** $-\frac{3}{2}$. **25.** 3. **26.** 9. **27.** $\frac{1}{3}$.
28. 5. **29.** 1. **30.** $\frac{1}{4}$. **31.** $\frac{5}{6}$. **32.** $\frac{1}{2}$. **33.** $\frac{1}{2}$. **34.** 8. **35.** 2. **36.** $\frac{1}{4}$. **37.** e^2.
38. e^{-6}. **39.** e^2. **40.** e^4. **41.** e^7. **42.** 0. **43.** 4. **44.** $\frac{3}{2}$. **45.** e^2. **46.** e^4.
47. -3. **48.** Точка $x=-5$ є точкою розриву другого роду. **49.** $a=1+\pi/2$.
50. Точка $x=1$ є точкою розриву першого роду. Стрибок функції в цій точці буде $\delta=-\pi$. **51.** $x=0$, $x=1$ – точки усувного розриву; $x=-1$ – точка розриву другого роду.

Розділ 5. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

5.1. Похідна

Означення похідної. Нехай функція $y=f(x)$ визначена в деякому інтервалі (a,b), x - фіксоване значення аргументу з цього інтервалу, $\Delta x\neq 0$ - приріст аргументу такий, що $x+\Delta x\in (a,b)$.

Приростом функції $y=f(x)$ у точці x відповідно до приросту аргументу Δx називається число $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.

Похідною y' функції $y=f(x)$ називається границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx, коли останній довільно прямує до нуля (якщо ця границя існує)

$$\boxed{y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}. \qquad (5.1)$$

Операція знаходження похідної функції $f(x)$ називається ***диференціюванням*** цієї функції.

Інші позначення похідної: y'_x, $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df}{dx}$.

Конкретне значення похідної при $x=a$ позначають $f'(a)$ або $y'|_{x=a}$.

З означення похідної випливає спосіб її знаходження. Щоб знайти похідну функції $y=f(x)$ в деякій точці x треба:

1) надати значенню x довільного приросту Δx та знайти відповідний приріст функції $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$;

2) знайти відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$;

3) знайти границю цього відношення

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Приклад 1. Знайти похідну функції $f(x)=x^2$ у точці $x=3$.

Розв'язання. Спочатку визначимо похідну даної функції в точці x, надавши x довільного приросту Δx, обчислимо

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Тоді
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x.$$

Отже, $(x^2)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x \Rightarrow (x^2)'=2x$ у кожній точці x, а в точці $x=3$ значення похідної буде $f'(3)=2\cdot 3=6$.

Використовуючи наведену вище схему, можна знайти похідні від основних елементарних функцій.

Наприклад, **похідна степеневої функції**. Для функції $y = x^n$, де n - будь-яке дійсне ціле число, знайдемо приріст функції, застосувавши біном Ньютона:

$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n = [x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n] - x^n =$$

$$= nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n.$$

Розділимо отриману рівність на $\Delta x \neq 0$, дістанемо

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}.$$

В цьому виразі перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$. Всі доданки, що містять Δx, обернуться на нуль, дістаємо $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Можна показати, що формула $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ справджується для всіх $\alpha \in R$.

Похідна функції $y = \sin x$. Запишемо відношення приросту функції до приросту аргументу в точці x

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}).$$

Використовуючи першу важливу границю, маємо

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}) = 1\cdot\cos x \Rightarrow (\sin x)' = \cos x.$$

Похідна показникової функції $y = a^x\ (0 < a \neq 1)$. Аналогічно з попередніми прикладами маємо $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$. Позначимо $a^{\Delta x} - 1 = t$, тоді $\Delta x = \log_a(1+t)$, причому $t \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Отже, $y' = a^x \lim\limits_{t \to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)} = a^x\frac{1}{\lim\limits_{t \to 0}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}}$.

Беручи до уваги неперервність функції та другу важливу границю, одержимо $y' = \frac{a^x}{\log_a e} \Rightarrow (a^x)' = a^x\ln a$. Якщо $a = e$, то $\ln e = 1$ та $(e^x)' = e^x$.

Розглянемо функцію $y = \arcsin x$, де $|x| \le 1$; $|y| \le \frac{\pi}{2}$. Функція $x = \sin y$ має похідну $x'_y = \cos y \neq 0$, якщо $|y| < \frac{\pi}{2}$. Враховуючи формулу $y'_x = \frac{1}{x'_y}$, для знаходження похідної від оберненої функції дістанемо

$$(\arcsin x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Таким чином, використовуючи схему знаходження похідної для кожної основної елементарної функції, отримаємо формули, які разом утворюють таблицю похідних основних елементарних функцій.

Таблиця похідних основних елементарних функцій

1. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$.

2. $(a^x)' = a^x \ln a$, окремий випадок $(e^x)' = e^x$.

3. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, окремий випадок $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

4. $(\sin x)' = \cos x.$

5. $(\cos x)' = -\sin x.$

6. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$

7. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

8. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

9. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

10. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}.$

11. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}.$

Геометричний зміст похідної. Нехай крива (рис. 5.1) задана у прямокутній системі координат рівнянням $y = f(x)$, де $f(x)$ - визначена та неперервна функція в деякому інтервалі;

$M(x_0; y_0)$ - фіксована точка на кривій; $P(x; y)$ - довільна точка кривої; MP - січна; MT - дотична до кривої у точці M; β - кут, утворений січною з додатним напрямом осі Ox.

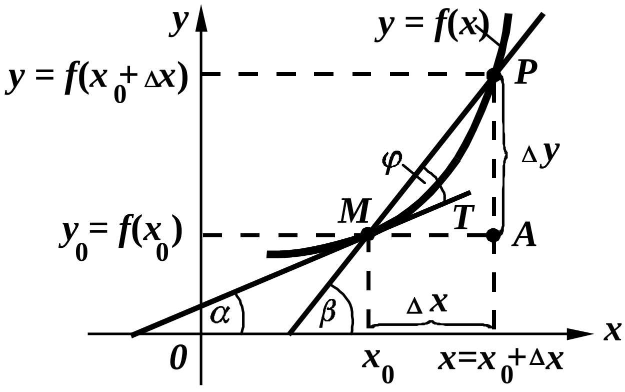


Рис. 5.1

З рис. 5.1 видно, що кутовий коефіцієнт k січної MP буде
$$tg\beta = \frac{PA}{MA} = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (5.2)$$

При $x \to x_0$ (або $\Delta x \to 0$) точка P пересувається вздовж кривої до точки M і січна MP повертається навколо точки M, а відтак, кут β змінюється, прямуючи до кута α між дотичною MT і додатним напрямом осі Ox. Якщо MT не перпендикулярна осі Ox, то це рівнозначно умові $tg\beta \to tg\alpha$. Отже, перейшовши при $\Delta x \to 0$ до границі в рівності (5.2), матимемо $tg\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Отже, **геометричний зміст** похідної полягає в тому, що похідна $f'(x_0)$ функції $f(x)$ у точці x_0 - це ***кутовий коефіцієнт дотичної***, проведеної до кривої у точці x_0:
$$f'(x_0) = tg\alpha = k. \qquad (5.3)$$

Це дає змогу записати ***рівняння дотичної*** до кривої $y = f(x)$ в точці $M(x_0; y_0)$ у вигляді
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \qquad (5.4)$$
де $(x_0; f(x_0))$ - точка дотику; x, y - змінні координати.

Нормаллю до кривої називається пряма, що проходить через точку дотику, перпендикулярно до дотичної.

Оскільки кутові коефіцієнти дотичної та нормалі пов'язані між собою умовою перпендикулярності $k_д k_н = -1$, то рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці $M(x_0, y_0)$ має вигляд
$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0). \qquad (5.5)$$

Фізичний зміст похідної. Нехай точка P рухається по числовій прямій, $S(t)$ − координата точки P у момент часу t. Тоді середня швидкість точки P за період часу $[t_0, t_0 + \Delta t]$ дорівнює $\frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}$, а її миттєва швидкість у точці t_0 визначається як $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}$. Отже, миттєва швидкість точки в момент часу t_0 визначається формулою $V(t_0) = S'(t_0)$.

Узагальнюючи, можна сказати: якщо функція $y = f(x)$ описує деякий фізичний процес, то похідна $y' = f'(x)$ є швидкістю зміни цього процесу. В цьому полягає **фізичний зміст** похідної.

Зазначимо, що відношення $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ визначає ***середню швидкість*** $V_{ср}$ ***зміни функції*** $y = f(x)$ відносно аргументу x на відрізку

$[x_0, x_0+\Delta x]$, а границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)=V_{мит}$ - ***миттєву швидкість зміни значень функції*** відносно аргументу x у точці x_0. Саме у цьому й полягає ***фізичний зміст похідної***, який обумовлює широке застосування диференціального числення при вивченні різних явищ. Швидкість перебігу фізичних, хімічних, біологічних процесів завжди виражається за допомогою похідної.

5.2. Диференційовність функції

Поняття диференційовності функції у точці. Функція $y=f(x)$ називається ***диференційовною*** в точці x_0, якщо її приріст Δy у цій точці можна записати у вигляді

$$\boxed{\Delta y = f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x}, \tag{5.6}$$

де $\alpha(\Delta x)$ - нескінченно мала функція при $\Delta x\to 0$.

Для того щоб функція $y=f(x)$ була диференційовною в точці x_0, необхідно і достатньо, щоб вона мала у цій точці скінченну похідну.

Отже, для функції однієї змінної диференційовність та існування похідної – поняття рівнозначні.

За умови диференційовності функції у кожній точці деякого інтервалу вважають, що функція ***диференційовна на інтервалі.***

Зв'язок між поняттями диференційовності та неперервності. Якщо функція $y=f(x)$ диференційовна у точці x_0, то вона в цій точці неперервна.

Проте, обернене твердження в загальному випадку не виконується: функція, неперервна у точці x_0, не обов'язково буде диференційовною в цій точці. Наприклад, функція $y=|x|$ у точці $x_0=0$ - неперервна, але недиференційовна. Це обумовлено тим, що границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|x+\Delta x|-|x|}{\Delta x}$ при $x=0$ не існує, оскільки

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}1, & \textit{якщо } \Delta x>0;\\ -1, & \textit{якщо } \Delta x<0.\end{cases}$$

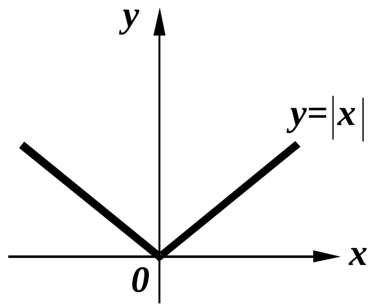


Рис. 5.2

Геометрично це означає відсутність дотичної до кривої в точці $x_0=0$ (рис. 5.2).

5.3. Основні правила диференціювання

Припустимо, $u=u(x)$ і $v=v(x)$ - диференційовні функції, залежні від x. Диференціювання функцій підпорядковується таким правилам.

1. Похідна сталої дорівнює нулю: $\boxed{C'=0}$.

2. Похідна функції $y = x$ дорівнює одиниці: $\boxed{x' = 1}$.

3. Похідна алгебраїчної суми скінченного числа диференційовних функцій дорівнює алгебраїчній сумі похідних цих функцій: $\boxed{(u \pm v)' = u' \pm v'}$.

4. Похідна добутку двох диференційовних функцій дорівнює сумі добутку похідної першої функції на другу функцію та добутку першої функції на похідну другої функції: $\boxed{(uv)' = u'v + uv'}$.

Н а с л і д о к. Сталий множник можна виносити за знак похідної: $\boxed{(Cu)' = C(u)'}$.

5. Похідну частки двох диференційовних функцій дістаємо за формулою $\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$ за умови $v \neq 0$.

6. Якщо $u = \varphi(x)$ має в деякій точці похідну $\varphi'(x)$, а функція $y = f(u)$ у відповідній точці $u = \varphi(x)$ похідну $y'_u = f'(u)$, то складена функція $y = f(\varphi(x))$ в точці x також матиме похідну, причому: $\boxed{y'_x = f'_\varphi \cdot \varphi'_x \quad \text{або} \quad y'_x = y'_u \cdot u'_x}$.

Отже, похідна складеної функції дорівнює добутку похідної даної функції за аргументом u на похідну проміжного аргументу u за змінною x.

7. Якщо для функції $y = f(x)$ існує обернена функція $x = \varphi(y)$ та в точці x функція $y = f(x)$ має скінченну відмінну від нуля похідну y'_x, то обернена функція $x = \varphi(y)$ у відповідній точці $y = f(x)$ також матиме похідну x'_y, причому: $\boxed{x'_y = \frac{1}{y'_x}}$.

8. Якщо функція $y = f(x)$ задана параметрично: $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$, то похідну знаходять за формулою $\boxed{y'_x = \frac{\varphi'_t}{\phi'_t}}$ або $\boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}}$.

9. Щоб продиференціювати неявно задану функцію рівнянням $F(x, y) = 0,$ потрібно взяти похідну по x від обох частин рівняння, вважаючи y функцією від x, і одержане рівняння розв'язати відносно y' Похідна неявно заданої функції виражається через незалежну змінну x та саму функцію y.

10. **Похідна степенево-показникової функції**. Таку похідну знаходять за допомогою логарифмічного диференціювання. Спочатку функцію треба прологарифмувати, а потім знайти похідну як від неявної функції. Нехай дана функція $y = u(x)^{v(x)}$, де $u(x)$ і $v(x)$ − задані та диференційовні функції від x. Знайдемо похідну функції: $\ln y = v \ln u$; $\Rightarrow$ $\frac{y'}{y} = v' \ln u + v\frac{u'}{u}$; $y' = u^v\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right)$.

Таким чином, $\boxed{(u^v)' = u^v \ln u \cdot v' + v u^{v-1} u'}$.

5.4. Диференціал функції

Означення диференціала. Нехай функція $y=f(x)$ - диференційовна в деякому інтервалі, тоді за формулою (5.6) приріст функції буде $\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$. Отже, приріст функції складається з двох доданків. Один залежить від Δx лінійно, а другий не є лінійним відносно Δx, містить степені Δx, вищі за перший.

Головна частина приросту функції $f'(x)\Delta x$, лінійна відносно приросту аргументу, називається ***диференціалом функції*** та позначається символом dy (або $df(x)$). Отже, $dy=f'(x)\Delta x$.

Очевидно, диференціал функції відрізняється від приросту функції на величину $\alpha\Delta x$, яка при $\Delta x\to 0$ є нескінченно малою вищого порядку за Δx, бо

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0.$$

Для $f(x)=x$ маємо $dx=x'\Delta x=\Delta x$, тобто диференціал та приріст аргументу збігаються. Це дає змогу надати диференціалу функції такого вигляду:

$$\boxed{dy=f'(x)dx}. \tag{5.7}$$

Звідси $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$, таким чином, похідна функції $y=f(x)$ у точці x дорівнює відношенню диференціала функції у цій точці до диференціала незалежної змінної.

Приклад 1. Знайти диференціал і приріст функції $y=5x^2-2x$ при $x=3$ та $\Delta x=0{,}1$.

Розв'язання. Диференціал функції буде $dy=(5x^2-2x)'\Delta x=(10x-2)\Delta x$.

Приріст функції: $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(5(x+\Delta x)^2-2(x+\Delta x))-(5x^2-$ $-2x)=(10x+5\Delta x-2)\Delta x$. При $x=3$ і $\Delta x=0{,}1$ дістанемо $dy=2{,}8$; $\Delta y=2{,}85$. Різниця між Δy та dy незначна, складає всього $0{,}05$.

Геометричний зміст диференціала функції. Нехай точка M (рис. 5.3) на графіку функції $y=f(x)$ відповідає значенню аргументу x_0; точка N - значенню аргументу $x_0+\Delta x$; MA - дотична до кривої $f(x)$ у точці M; α - кут нахилу дотичної до осі Ox. Тоді MB - приріст аргументу, NB - відповідний приріст функції. З трикутника AMB маємо $AB=tg\alpha\cdot MB=f'(x_0)\Delta x=dy$.

Таким чином, диференціал dy функції $y=f(x)$ в точці x_0, що відповідає приросту Δx, дорівнює ***приросту ординати дотичної до графіка цієї функції у точці*** $M(x_0;f(x_0))$.

Форма диференціала першого порядку не залежить від того, чи є аргумент функції незалежною змінною або функцією іншого аргументу. Ця властивість диференціала називається ***інваріантністю форми диференціала.***

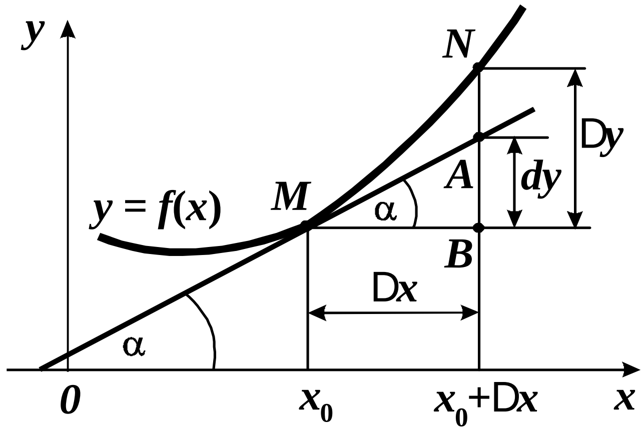


Рис. 5.3

З означення (5.6) випливає, що властивості диференціала аналогічні властивостям похідної. Наприклад,

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \quad d(uv) = udv + vdu, \quad d(ku) = kdu, \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2},$$

(тут u та v − диференційовні функції; k − стала).

Наближені обчислення за допомогою диференціала грунтуються на заміні приросту функції її диференціалом $\Delta y \approx dy$ або

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x}. \tag{5.8}$$

Максимальна абсолютна похибка δy такої заміни буде $\delta y = |f'(x_0)|\delta x$, де δx − максимальна абсолютна похибка величини x: $|\Delta x| \le \delta x$.

Приклад 2. Обчислити наближене значення функції $f(x) = e^{1-x^2}$ при $x = 1{,}05$ за допомогою диференціала.

Розв'язання. За x_0 візьмемо значення 1,00, тоді $\Delta x = x - x_0 = 0{,}05$; $f(x_0) = f(1) = e^0 = 1$; $f'(x) = -2xe^{1-x^2}$; $f'(x_0) = f'(1) = -2$. Підставивши ці значення у формулу (5.7), дістанемо шукане наближене значення функції $f(1{,}05) \approx 1 + (-2)\cdot 0{,}05 = 0{,}9$.

5.5. Похідні та диференціали вищих порядків

Похідна $f'(x)$ функції $y = f(x)$, визначеної та диференційовної на інтервалі (a, b), називається ***похідною першого порядку*** та являє собою функцію, також визначену на інтервалі (a, b). Може статися, що ця функція $f'(x)$ сама диференційовна в деякій точці x інтервалу (a, b), а саме: має у цій точці похідну. Тоді похідна від похідної першого порядку називається

похідною другого порядку або ***другою похідною*** функції $y = f(x)$ у точці x і позначається як $f''(x)$. Отже,

$$f''(x) = (f'(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}. \qquad (5.9)$$

Похідні вищих порядків визначаються індуктивно, іншими словами - **похідною** n**-го порядку** називається похідна від похідної $(n-1)$-го порядку. Для позначення похідної вищого порядку використовують римські або арабські цифри взяті в дужки. Наприклад, $f^{(5)}, \ldots, f^{(n)}$ чи $f^{IV}(x)$ і т. д.

З'ясуємо, як будуються диференціали вищих порядків. Диференціал функції $dy = f'(x)dx$, який називається також **першим диференціалом**, залежить від двох змінних: x та dx. **Другий диференціал** $d^2 y$ функції $y = f(x)$ (або **диференціал другого порядку**) визначається як диференціал від першого диференціала dy за умов: dy розглядається як функція лише змінної x, а dx - сталий множник; приріст незалежної змінної x береться саме такий, як і при обчисленні першого диференціала функції $f(x)$, тобто рівним dx. Таким чином, за означенням

$$d^2 y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (df'(x))dx = f''(x)dxdx = f''(x)(dx)^2$$

або

$$\boxed{d^2 y = f''(x)dx^2}. \qquad (5.10)$$

Аналогічно за тих же умов визначається n-й диференціал $d^n y$ як перший диференціал від (n-1)-го диференціала. За методом індукції для n-го диференціала можна дістати формулу

$$\boxed{d^n y = f^{(n)}(x)dx^n}. \qquad (5.11)$$

З формул (5.10) і (5.11) для диференціалів функції виходить

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad y''' = f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3}, \quad \ldots \quad y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Ці формули справджуються лише за умови, що x - незалежна змінна.

З а у в а ж е н н я. У диференціалах вищих порядків $d^n y$ при $n \geq 2$ зникає інваріантність форми відносно вибору змінних. Так, для складеної функції $y = y(x(t))$ узагальнюється формула (5.10)

$$d^2 y = d(dy) = d(y'_x x'_t dt) = d(y'_x dx) = (dy'_x)dx + y'_x d(dx) = y''_{xx} dx^2 + y'_x d^2 x.$$

5.6. Деякі теореми диференціального числення

Сформулюємо кілька важливих теорем, які є проміжною ланкою між теорією і технікою диференціювання, та розглянемо застосування їх на практиці, зокрема в геометрії.

Теорема Ролля. Нехай функція $y=f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, диференційована принаймні в інтервалі (a,b) та $f(a)=f(b)$. Тоді знайдеться хоча б одна точка $c\in(a,b)$, у якій похідна функції дорівнює нулю $f'(c)=0$.

Усі умови теореми суттєві, зокрема неперервність. Так, для $f(x)=|x|$ на відрізку $[-a,a]$ не існує точки c, у якій $f'(c)=0$.

Геометричний зміст теореми полягає в тому, що на графіку функції, яка задовольняє умови теореми, існує хоча б одна точка, у якій дотична до графіка паралельна осі Ox (рис. 5.4).

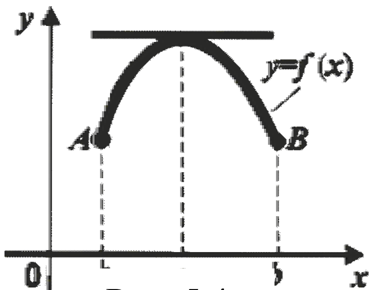


Рис. 5.4

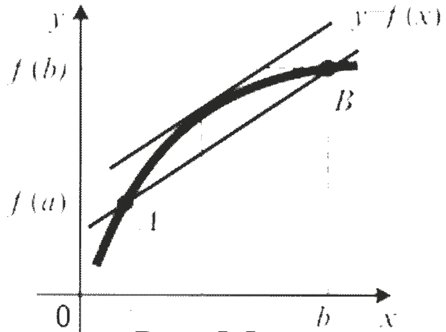


Рис. 5.5

Теорема Лагранжа. Нехай функція $y=f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і диференційовна принаймні в інтервалі (a,b). Тоді знайдеться хоча б одна точка $c\in(a,b)$, для якої має місце рівність

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c). \qquad (5.12)$$

Цю формулу називають **формулою Лагранжа** або **формулою скінченних приростів**.

Геометричне тлумачення теореми Лагранжа полягає в тому, що на графіку функції, яка задовольняє на певному інтервалі умови теореми, існує хоча б одна точка, в якій дотична до графіка функції паралельна січній, що проходить через крайні точки графіка функції на цьому інтервалі (рис. 5.5).

Правило Лопіталя. Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ визначені та диференційовні в деякому околі точки $x=x_0$, за винятком може самої точки x_0. Крім того, нехай також $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, при цьому $g'(x)\neq 0$ в тому ж околі точки x_0. Тоді, якщо існує границя відношення похідних функцій $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (скінченна або нескінченна), то існує і границя $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ та справедлива формула

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (5.13)$$

З а у в а ж е н н я 1. Правило Лопіталя залишається правильним і у випадках, коли $x\to\infty$.

Приклад 1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-7x+6}{x^3-5x^2+2x+8}=\{\dfrac{0}{0}\}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-7}{3x^2-10x+2}=-\dfrac{5}{6}$.

З а у в а ж е н н я 2. Якщо границя відношення похідних $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ знову є невизначеністю, то правило Лопіталя застосовують кілька разів, доки не усунуть невизначеність або не виявлять, що границі не існує.

Приклад 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{3x^2}=\{\dfrac{0}{0}\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{6x}=\{\dfrac{0}{0}\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{6}=\dfrac{1}{3}$.

З а у в а ж е н н я 3. Невизначеності вигляду $\{0\cdot\infty\}$ та $\{\infty-\infty\}$ за допомогою тотожних перетворень можна звести до невизначеностей вигляду $\{\dfrac{0}{0}\}$ та $\{\dfrac{\infty}{\infty}\}$ і потім застосовувати правило Лопіталя.

Приклад 4. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x})=\{\infty-\infty\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}=\{\dfrac{0}{0}\}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\{\frac{0}{0}\}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=0.$$

З а у в а ж е н н я 4. Щодо знаходження границь функцій $u(x)=[f(x)]^{g(x)}$, які дають невизначеності вигляду $\{0^\infty\}$, $\{\infty^0\}$, $\{1^\infty\}$, то перед застосуванням правила Лопіталя корисно врахувати неперервність показникової функції та формулу

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\ln f(x)}. \tag{5.14}$$

Приклад 5. $\lim\limits_{x\to \pi/4}(tgx)^{tg2x}=e^{\lim\limits_{x\to\pi/4}tg2x\ln tgx}$.

Разом з тим $\lim\limits_{x\to\pi/4}tg2x\ln tgx=\{\infty\cdot 0\}=\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\ln tgx}{ctg2x}=\{\dfrac{0}{0}\}=$

$$=-\lim_{x\to\pi/4}\frac{\frac{1}{tgx}\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{2}{\sin^2 2x}}=-\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin^2 2x}{2tgx\cos^2 x}=-1.$$

5.7. Застосування диференціального числення для дослідження функцій

За допомогою похідної можна визначити чимало елементів поведінки функцій, зокрема, знайти інтервали монотонності, опуклості, точки екстремумів та перегину.

Монотонність функції. Якщо диференційовна на інтервалі (a, b) функція $y = f(x)$ має на ньому додатну (від'ємну) похідну $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то функція на цьому інтервалі зростає (спадає).

Екстремум функції. Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0.

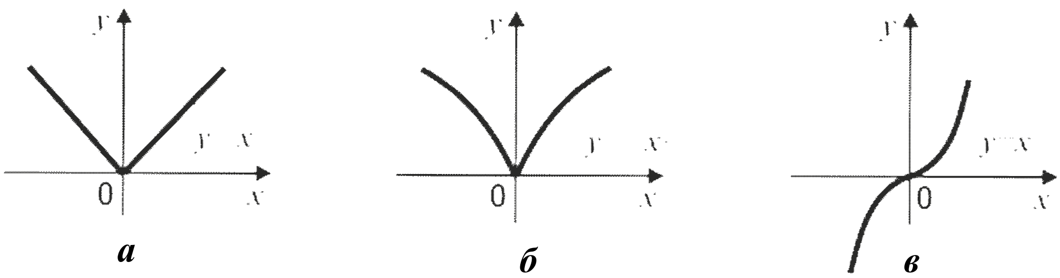
Функція $f(x)$ має в точці x_0 максимум (мінімум), якщо існує такий окіл U_{x_0}, у межах якого значення функції $f(x_0)$ буде найбільшим (найменшим) серед усіх значень цієї функції, і для довільного $x \in U_{x_0}$ виконується нерівність $f(x) - f(x_0) < 0$ ($f(x) - f(x_0) > 0$).

Термін «максимум» та «мінімум» об'єднують загальним терміном «екстремум».

Необхідна умова екстремуму функції. Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0 і має в цій точці екстремум, то $f'(x_0) = 0$.

З а у в а ж е н н я. Функція може мати екстремум і в точках, де вона недиференційовна. Наприклад, функція $y = |x|$ має мінімум у точці $x = 0$, але у цій точці вона недиференційовна (рис. 5.6, а). Функція $y = \sqrt[3]{x^2}$ також має у точці $x = 0$ мінімум, хоча похідна $y'(0)$ нескінченна (рис. 5.6, б).

Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, але функція в них зберігає неперервність, називаються **критичними** точками функції. Отже, функція може мати екстремум лише в критичній точці, але не в будь-якій критичній точці буде екстремум. Так, для функції $y = x^3$ точка $x = 0$ – критична, бо похідна $y' = 3x^2$ дорівнює в цій точці нулю, але екстремуму тут не буде (рис. 5.6, в).



а *б* *в*

Рис. 5.6

Перша достатня умова екстремуму. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна в околі точки x_0 та диференційовна в цьому околі за винятком, можливо, самої точки x_0. Якщо похідна $f'(x)$ цієї функції при переході через точку x_0 змінює знак, то при $x = x_0$ функція має екстремум. Причому при переході зліва направо знак $f'(x)$ змінюється з «+» на «–», то буде максимум, якщо навпаки, − мінімум.

Приклад 1. Знайти екстремуми та проміжки монотонності функції $f(x)=2x^3-9x^2+12x-8$.

Розв'язання. Знаходимо першу похідну $f'(x)=6x^2-18x+12$. Розв'язуємо рівняння $f'(x)=0$, тобто рівняння $6x^2-18x+12=0$ і одержуємо критичні точки $x_1=1, x_1=2$. Досліджуємо знак похідної в околі кожної з критичних точок, для цього розбиваємо область визначення (числову вісь) на інтервали $(-\infty,1),(1,2),(2,\infty)$, вибираємо всередині кожного з цих інтервалів довільну точку і визначаємо в ній знак першої похідної. Так, у першому інтервалі беремо точку $x=0$, у другому – $x=3/2$ у третьому – $x=3$. Відповідно маємо: $f'(0)>0$, $f'(3/2)<0$, $f'(3)>0$ (рис. 5.7). У критичній точці $x=1$ функція має максимум, а у критичній точці $x=2$ – мінімум. Екстремальні значення функції дорівнюють $f_{\max}(1)=-3$, $f_{\min}(2)=-4$. Дана функція зростає в інтервалах $(-\infty,\ 1)$ і $(2,\ \infty)$ та спадає в інтервалі $(1,\ 2)$.

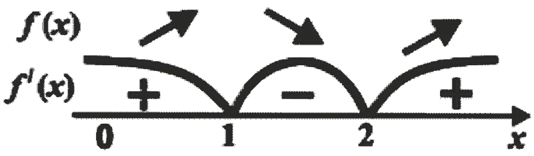


Рис. 5.7

Друга достатня умова екстремуму. Якщо функція $y=f(x)$ двічі диференційовна в точці $x=x_0$, причому $f'(x_0)=0$, а $f''(x_0)\neq 0$ та $f''(x)$ неперервна в деякому околі точки $x=x_0$, то в точці $x=x_0$ функція $f(x)$ має екстремум, причому максимум, якщо $f''(x_0)<0$, і мінімум, якщо $f''(x_0)>0$.

Приклад 2. Знайти екстремуми функції $f(x)=x\,e^{-2x}$.

$$f'(x)=e^{-2x}-2xe^{-2x}=e^{-2x}(1-2x);\qquad e^{-2x}(1-2x)=0 \Rightarrow x=1/2.$$

Розв'язання. Оскільки функція диференційована при $x\in R$, то критичною буде точка $x=1/2$. Знаходимо другу похідну $f''(x)=4e^{-2x}(x-1)$ і визначаємо її знак у критичній точці: $f''(1/2)=-2/e<0$. Отже, при $x=1/2$ функція має максимум, причому $f_{\max}(1/2)=1/2e$.

Найбільше і найменше значення функції. Розглянемо графік функції, зображеної на рис. 5.8. Згідно з цим графіком для функції, заданої на замкненому інтервалі, максимум може не бути найбільшим значенням (це

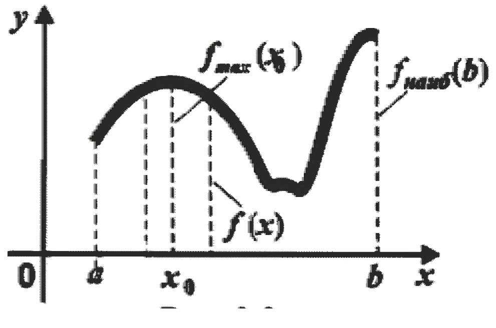


Рис. 5.8

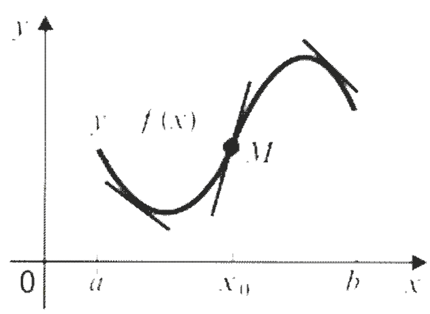


Рис. 5.9

стосується мінімуму та найменшого значення). У цьому разі треба знайти критичні точки функції, відібрати ті з них, які належать даному інтервалу. Після цього треба знайти значення функції як в точках, які залишилися, так і в кінцевих точках інтервалу. Серед здобутих значень відібрати найбільше та найменше.

Звернемо увагу на важливий випадок. Якщо неперервна на відрізку $[a, b]$ функція має лише один екстремум, то в разі максимуму це буде її найбільше значення, а в разі мінімуму – найменше.

Приклад 3. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$ на відрізку $[-5, 5]$.

Розв'язання. Знаходимо критичні точки, що належать даному відрізку. Перша похідна $f'(x) = 3x^2 + 6x - 72$. Корені рівняння $3x^2 + 6x - 72 = 0$ – це точки $x_1 = 4$ та $x_2 = -6$, але $x_2 \notin [-5; 5]$. Обчислюємо значення функції в критичній точці $x_1 = 4$ і на кінцях відрізка $[-5, 5]$: $f(4) = -86$; $f(5) = -70$; $f(-5) = 400$. Отже, на даному відрізку найбільше значення функції $f_{найб}(-5) = 400$, а найменше – $f_{найм}(4) = -86$.

Напрям опуклості графіка функції. Графік функції $y = f(x)$ називається **опуклим вгору** (**опуклим вниз**) на інтервалі (a, b), якщо всі точки графіка лежать нижче (вище) точок дотичних, проведених до графіка функції в кожній точці інтервалу (a, b) (крім точок дотику).

Так, на рис. 5.9 зображено графік функції, яка опукла вниз на інтервалі (a, x_0) і вгору на інтервалі (x_0, b).

Достатні умови опуклості вгору (опуклості вниз) графіка функції. Нехай функція $y = f(x)$ двічі диференційовна на інтервалі (a, b). Тоді $f(x)$ опукла вгору (опукла вниз), якщо $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) для довільного $x \in (a, b)$.

Точка, в якій функція змінює напрям опуклості, називається **точкою перегину** графіка функції (на рис. 5.9 це точка M). Дотична до кривої, проведена в точці M, перетинає криву.

Достатня умова перегину. Якщо $f''(x_0) = 0$, ∞ або не існує та при переході через x_0 змінює знак, то x_0 є абсцисою точки перегину графіка функції $f(x)$.

Приклад 4. Знайти точки перегину та дослідити на опуклість графік функції $\dfrac{1}{1+x^2}$.

Розв'язання: $f'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$; $f''(x) = -2\dfrac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}$.

Друга похідна $f''(x) = 0$ при $x = \pm 1/\sqrt{3}$ (точок, у яких $f''(x)$ не існує, немає). Визначаємо знаки другої похідної в околі знайдених точок $x_1 = 1/\sqrt{3}$ та $x_2 = -1/\sqrt{3}$. $f''(x) > 0$ при $x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$. Отже, на цих інтервалах графік функції опуклий вниз. Оскільки $f''(x) < 0$ при $x \in (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, то на цьому інтервалі графік опуклий вгору (рис. 5.10). Точки $x = \pm 1/\sqrt{3}$ – це абсциси точок перегину, причому $f(\pm 1/\sqrt{3}) = \frac{3}{4}$.

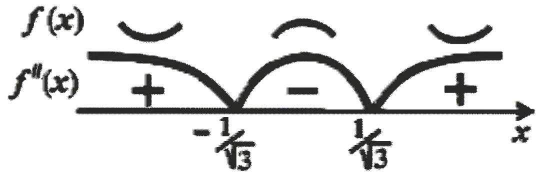
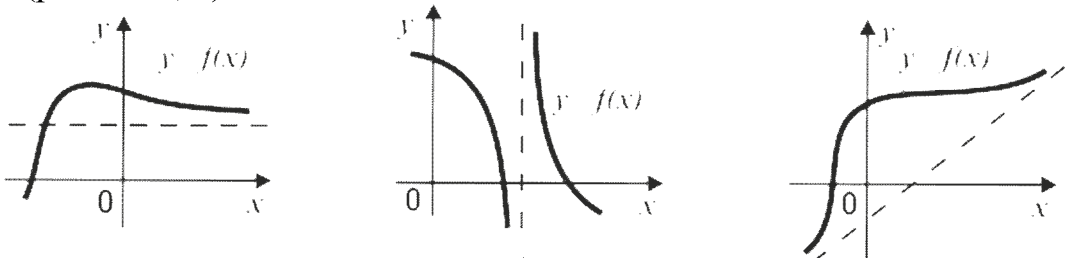


Рис. 5.10

Асимптоти функції. При дослідженні функції визначають її поводження при необмеженому зростанні (за абсолютною величиною) аргументу або необмеженому зростанні абсолютної величини значень самої функції в скінченному інтервалі області визначення. Геометрично ці дослідження приводять до поняття асимптот графіка функції.

Асимптотою кривої $y = f(x)$ називається пряма, з такою властивістю: відстань від точки $(x; f(x))$ кривої до цієї прямої наближається до нуля за умови необмеженого віддалення точки графіка $y = f(x)$ від початку координат.

Розрізняють горизонтальні (рис. 5.11, а), вертикальні (рис.5.11, б) та похилі (рис. 5.11, в) асимптоти.



а *б* *в*

Рис. 5.11

Нехай функція $y = f(x)$ визначена у певному околі точки x_0, крім, можливо самої точки, і хоча б одна з границь $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ та $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ дорівнює нескінченності. Тоді пряма $x = x_0$ – **вертикальна асимптота** графіка функції.

Для того щоб пряма $y = kx + b$ була похилою асимптотою графіка функції $y = f(x)$ при $x \to \infty$, необхідно і достатньо, щоб існували два граничних значення

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{та} \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = b. \qquad (5.15)$$

Якщо $k = 0$, то похила асимптота перетворюється на горизонтальну.

Приклад 5. Знайти асимптоти графіка функції $\dfrac{x^2-2x}{x-1}$.

Розв'язання. Область визначення функції $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$. Точка $x=1$ – точка розриву другого роду, бо $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^2-2x}{x-1}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x^2-2x}{x-1}=-\infty$.

Отже, графік функції має вертикальну асимптоту $x=1$.

Аби знайти похилу асимптоту, шукаємо такі границі:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x}{x(x-1)}=1;$$

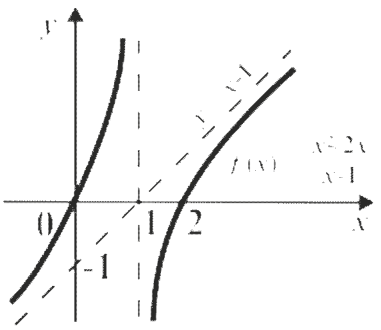


Рис. 5.12

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1-x}=-1.$$

Пряма $y=x-1$ – похила асимптота графіка функції, і графічно при $x\to\infty$ графік даної функції неухильно зближується з цією прямою (рис. 5.12).

Загальна схема дослідження функцій та побудова їх графіків. Досліджують функції та будують їх графіки за такою схемою:

1) знайти область визначення;

2) дослідити функцію на парність та періодичність;

3) визначити точки перетину кривої з осями координат;

4) дослідити функцію на неперервність, встановити характер точок розриву функції, знайти асимптоти;

5) знайти екстремуми функції та інтервали монотонності;

6) знайти напрями опуклості та точки перегину графіка функції;

7) побудувати графік за схемою: накреслити асимптоти та нанести характерні точки (екстремуми, точки перегину, точки перетину з осями координат), зобразити поводження графіка біля асимптот. З'єднати всі знайдені точки та врахувати парність і періодичність функції, інтервали монотонності та напрями опуклості.

Приклад 6. Дослідити та побудувати графік функції $f(x)=\dfrac{x^3-4}{(x-1)^3}$.

1. Область визначення $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$.

2. Функція загального вигляду (неперіодична, немає симетрії щодо осей координат).

3. Графік функції перетинає вісь абсцис у точці $(\sqrt[3]{4};0)$, а вісь ординат – у точці $(0;4)$.

4. Функція неперервна в області визначення. З'ясуємо характер точки

розриву $x=1$: $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^3-4}{(x-1)^3}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x^3-4}{(x-1)^3}=-\infty \Rightarrow$ точка $x=1$ – точка розриву другого роду, а пряма $x=1$ – вертикальна асимптота функції.

Задля встановлення наявності похилих та горизонтальних асимптот відшукуємо границі: $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3-4}{x(x-1)^3}=0$; $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3-4}{(x-1)^3}=1$.

Це означає, що крива має горизонтальну асимптоту $y=1$.

5. Визначаємо екстремуми функції та інтервали монотонності.

$$f'(x)=\frac{3x^2(x-1)^3-(x^3-4)3(x-1)^2}{(x-1)^6}=-3\frac{x^2-4}{(x-1)^4}.$$

Для знаходження критичних точок розв'язуємо рівняння $f'(x)=0$, тобто $x^2-4=0$, звідси $x=\pm 2$. У точці $x=1$ похідної не існує, проте це значення не розглядаємо, оскільки воно не належить області визначення. Похідна від'ємна при $x<-2$ та $x>2$ і додатна для $|x|<2$; $x\neq 1$ (рис. 5.13). Отже, на проміжках $(-\infty,-2)$ та $(2,+\infty)$ функція спадає, а на проміжках $(-2,1)$ та $(1,2)$ – зростає; $x=-2$ – точка мінімуму функції, $x=2$ – точка максимуму. Відповідні екстремальні значення функції : $f_{\min}(-2)=\dfrac{4}{9}$; $f_{\max}(2)=4$.

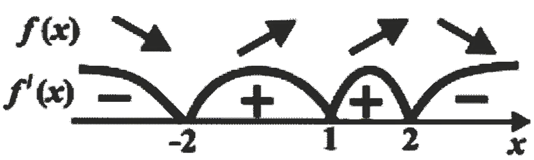


Рис. 5.13

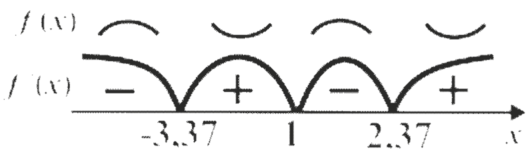


Рис. 5. 14

6. Знаходимо точки перегину графіка функції та інтервали опуклості.

$$f''(x)=-3\frac{2x(x-1)^4-4(x^2-4)(x-1)^3}{(x-1)^8}=6\frac{x^2+x-8}{(x-1)^5}.$$

$f''(x)=0$, якщо $x^2+x-8=0$ або $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{33}}{2}$ $\Rightarrow$ $x_1\approx -3{,}37$; $x_2\approx 2{,}37$.

Отже, $f''(x)=\dfrac{6(x+3{,}37)(x-2{,}37)}{(x-1)^5}$.

Друга похідна $f''(x)>0$, якщо $x\in(-3{,}37;1)\cup(2{,}37;\infty)$ (рис. 5.14). Тому в цих інтервалах графік функції опуклий вниз, а при $x\in(-\infty,-3{,}37)\cup(1,2{,}37)$ – опуклий вгору, бо на цих інтервалах $f''(x)<0$. Зауважимо, що абсцисами точок перегину є лише $x_1=-3{,}37$ та $x_2=2{,}37$. При $x=1$ не може бути точки перегину, бо вона не входить в область визначення функції.

Використовуючи одержані відомості, будуємо графік функції (рис. 5.15).

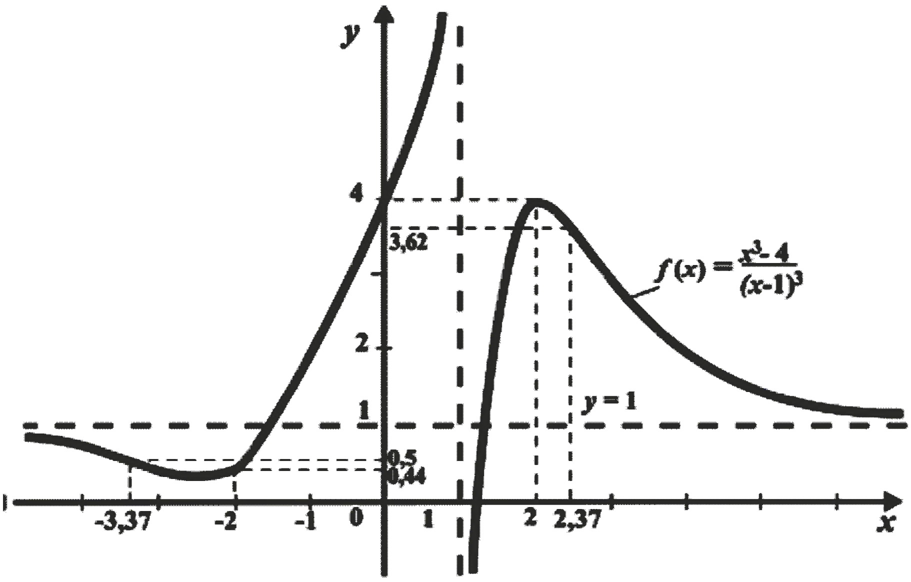


Рис. 5.15

Завдання для самоконтролю

1. Дати означення похідної функції $y = f(x)$ в точці x.

2. Зазначити дії та в якій послідовності їх треба виконати, щоб знайти похідну визначеної на проміжку (a, b) функції $y = f(x)$ в деякій точці $x \in (a, b)$ за допомогою означення похідної.

3. Який геометричний зміст має похідна?

4. Сформулювати означення диференціала функції $y = f(x)$ в точці x.

5. Записати формулу для обчислення диференціала функції $y = f(x)$.

6. Сформулювати теорему Ролля.

7. Сформулювати теорему Лагранжа.

8. Сформулювати правило Лопіталя.

9. Сформулювати необхідні умови екстремуму функції $y = f(x)$.

10. Сформулювати достатні умови екстремуму функції $y = f(x)$.

11. За якими умовами графік функції $y = f(x)$ буде опуклий вгору (опуклий вниз)?

12. Як знаходяться асимптоти графіка функції $y = f(x)$?

Знайти похідні функцій.

13. $y = \dfrac{x^5}{5} - 3x^3 + 4x - \dfrac{2}{3}$.

14. $y = 2x^3 - \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{x^2}{3} + 3$.

15. $y = -\dfrac{2\sqrt{x}}{a^2} + \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} - 7\pi$.

16. $y = a\sqrt[5]{x^3} - \dfrac{b}{\sqrt{x^5}}$.

17. $y = \dfrac{m + bx}{e^2}$.

18. $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

19. $y = -\dfrac{a}{\sqrt{3x}} + \dfrac{4\sqrt[4]{x^3}}{b}$.

20. $y = \dfrac{2x - 7}{3\pi}$.

21. $y=\frac{3-2x^3}{\sqrt[3]{\pi}}-\frac{5tg1-3}{x^2}+\frac{1}{x}$.

22. $y=\frac{7}{x^3+3x-1}$.

23. $y=3^x(7-3^{-x}\sqrt[5]{x^2})$.

24. $y=(2\sqrt[3]{x^2}+6\sqrt[3]{x})\sqrt[3]{x^4}$.

25. $y=(2x^3-\sqrt{x})\sin x$.

26. $y=(\sqrt{x}-\frac{1}{2x})\cos x$.

27. $y=(e^x+3)(\frac{1}{x}-ctgx)$.

28. $y=7^x+\frac{1}{x^3}\arccos x$.

29. $y=\sin e\ln x+\frac{5}{x}$.

30. $y=(5+x^3)\cos x+4xctgx$.

31. $y=\frac{\cos x}{4+3tgx}$.

32. $y=\frac{2^x-5^x}{10^x}$.

33. $y=\frac{1}{\arcsin x}$.

34. $y=\frac{3^x+\cos x}{x^3+\ln x}$.

35. $y=\frac{3-\ln x}{x^2+2x-1}$.

36. $y=\frac{arctgx}{x^3+\ln x}$.

37. $y=\frac{x\sqrt{x}+e^x}{x-e}$.

Знайти похідні складених функцій.

38. $y=e^{\sin x}$.

39. $y=(5x^2-3x+1)^2$.

40. $y=\ln(x^2+5\sqrt{x}-3)$.

41. $y=\cos(x^3-\frac{3}{x})$.

42. $y=\ln(1+\sin x)$.

43. $y=\arcsin\sqrt[3]{x}$.

44. $y=\ln\sin(x^3+2)$.

45. $y=arctg\,e^{\sin 3x}$.

46. $y=\ln\ln\ln\frac{1}{x}$.

47. $y=3^{tgx}\cos^2 x$.

48. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$.

49. $y=\ln ctg^2(\sqrt[5]{x^3}+2)$.

50. $y=e^{tgx}\cos^3 x$.

51. $y=7^{ctg\sqrt{x}}\sin^2\sqrt{x}$.

52. $y=(e^{arctg\sqrt[3]{x}}+1)^3$.

53. $y=\arccos\sqrt{1-x^2}-\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$.

54. $y=\ln\sqrt{1+e^{2x}}+e^{-\pi}arcctge^{x^2}$.

55. $y=(\arccos\sqrt{1-4x^2}+1)^2$.

56. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

57. $y=\sin\cos^2 tg^3 x^4+10^{\frac{x}{2\pi}}$.

58. $y=(\frac{a}{b})^x(\frac{b}{x})^a(\frac{x}{a})^b$.

59. $y=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$.

60. $y=\ln\ln\ln x$.

Знайти похідні неявно заданих функцій.

61. $x^2+y^2-2x+6y-15=0$.

62. $y^3-tgy+\cos x-x^3=0$.

63. $e^{\frac{y}{x}}-tgx-\cos(x-y)=0$.

64. $x^3+x^2y+y^2=0$.

65. $tgy-xy=0$.

66. $x^2y+arctg\frac{x}{y}=5x$.

67. $e^{x+y}-\ln\sin\frac{y}{x}=3\pi$.

68. $\sin(x+y)-y=0$.

Знайти похідні степенево-показникових функцій.

69. $y=(x+1)^{ctgx}$. 70. $y=(1+x^2)^{arctg^2 x}$. 71. $y=(\sin 5x)^{x^3-4}$.

72. $y=x^x$, $(x>0)$. 73. $y=(1-x^2)^{\arccos\sqrt{x}}$. 74. $y=(\cos x)^{\sin x}$.

75. $y=x^{a^x}+x^{x^a}+a^{x^x}$, $(a>0, x>0)$. 76. $y=(arctgx)^{\arcsin^2 x}$.

Знайти похідні параметрично заданих функцій.

77. $\begin{cases} x=2t+3t^2, \\ y=t^2+2t^3. \end{cases}$ 78. $\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t. \end{cases}$ 79. $\begin{cases} x=\frac{1}{t}e^t, \\ y=(t-1)^2 e^t. \end{cases}$

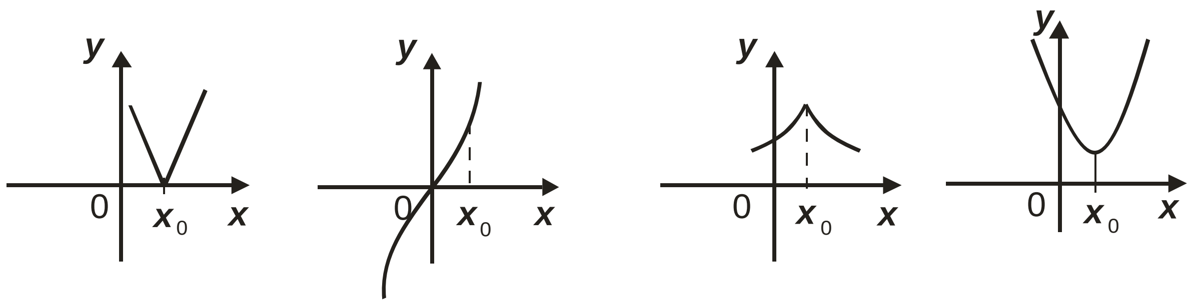
80. $\begin{cases} x=\ln\sin\frac{t}{2}, \\ y=\ln\sin t. \end{cases}$ 81. $\begin{cases} x=arcctg\frac{t}{4}, \\ y=\ln(t^2+16). \end{cases}$ 82. $\begin{cases} x=3^{tgt}, \\ y=\frac{\ln 3}{\cos t}. \end{cases}$

Знайти диференціали функцій.

83. $y=\frac{\pi}{x}$. 84. $y=\ln\sin 3^{tg\sqrt[5]{x^4}}$. 85. $y=arctg\sqrt{x^2-1}$. 86. $d(xe^x)$. 87. $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$.

88. $3^{x+2y}-\sin\frac{y}{x}=9$, $(2,\pi)$. 89. $x^2+2xy-y^2=2x$, $(2,1)$. 90. $d(\sqrt{a^2-x^2})$.

91. Графіки яких функцій, зображених на рис. 5.16, не мають дотичної у точці x_0?



а *б* *в* *г*

Рис. 5.16

92. За даними рис. 5.17 визначити, чому дорівнює значення похідної $f'(x_0)$ у точці x_0?

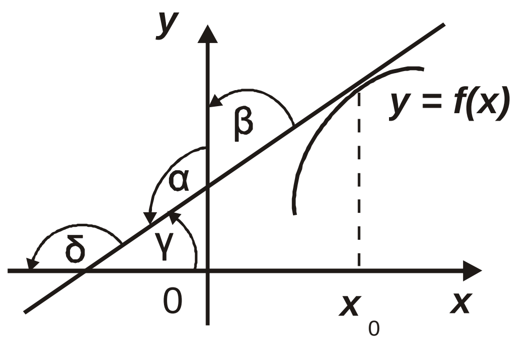


Рис. 5.17

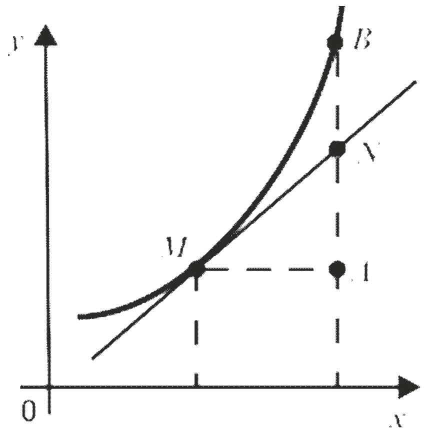


Рис. 5.18

93. Визначити відрізки, що відповідають Δy, dy та α › Δx для функції $y = f(x)$, зображеної на рис. 5.18.

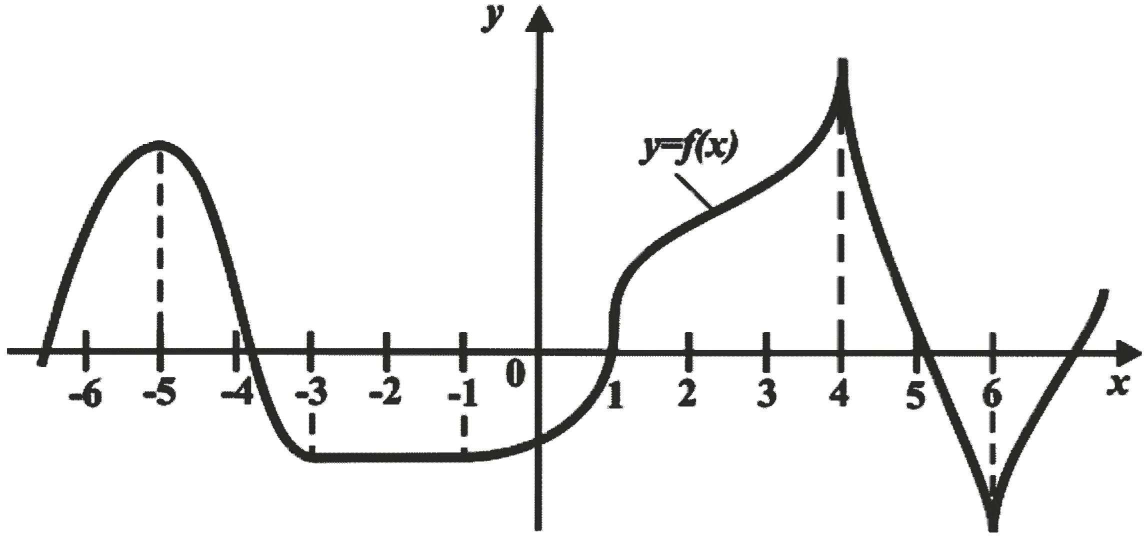
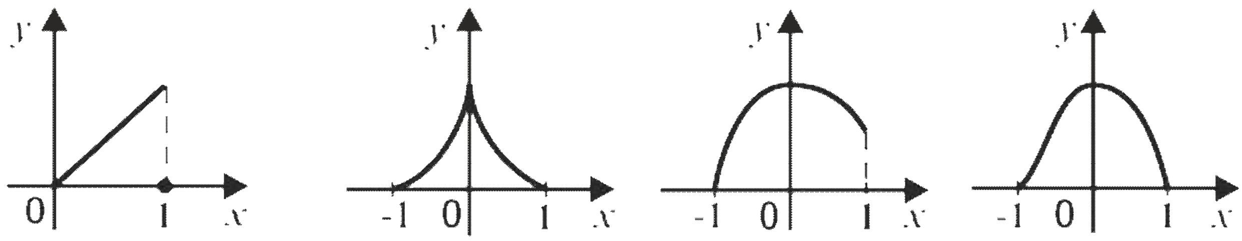


Рис. 5.19

94. За графіком функції $y = f(x)$ (рис. 5.19) встановити відповідність між значеннями незалежної змінної x та знаком кутового коефіцієнта дотичної.

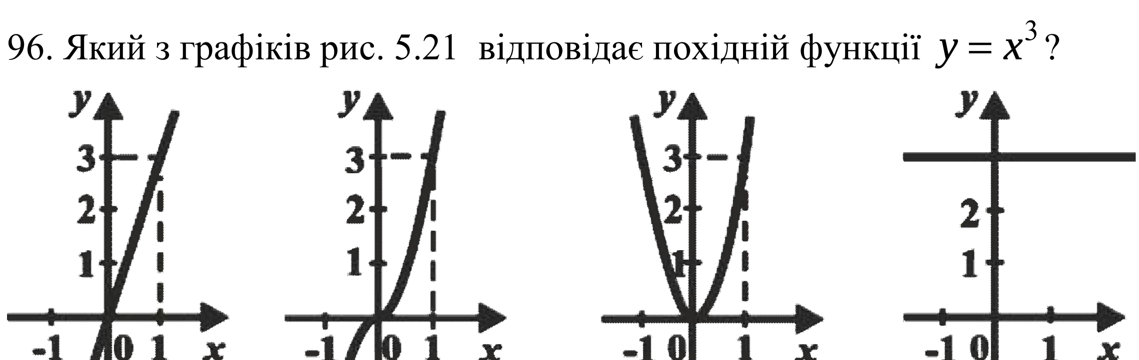
95. Серед наведених нижче функцій (рис. 5.20) вибрати ту, яка задовольняє всі умови теореми Ролля. Для інших функцій вказати ту з умов теореми, яка не виконується.



а *б* *в* *г*

Рис. 5.20

96. Який з графіків рис. 5.21 відповідає похідній функції $y = x^3$?



а *б* *в* *г*

Рис. 5.21

97. На рис. 5.22 наведено графік похідної $f'(x)$. Визначити, на яких проміжках функція $f(x)$ спадна.

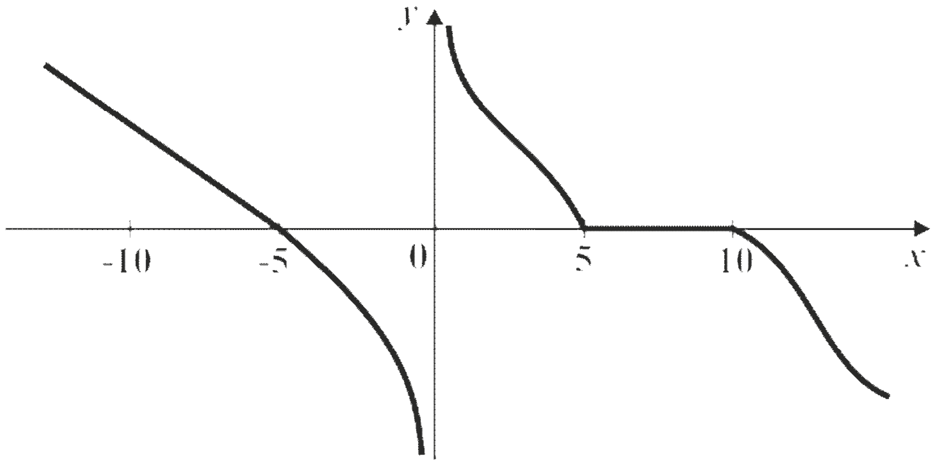


Рис. 5.22

98. На рис. 5.23 зображено графік функції $y = f(x)$. На яких проміжках перша похідна $f'(x) < 0$?

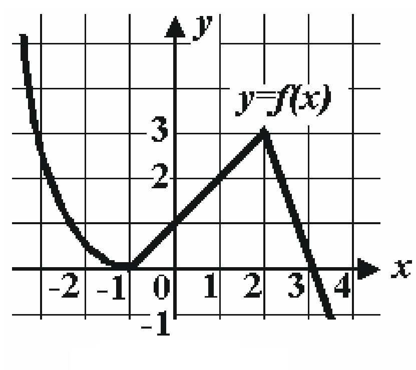


Рис. 5.23

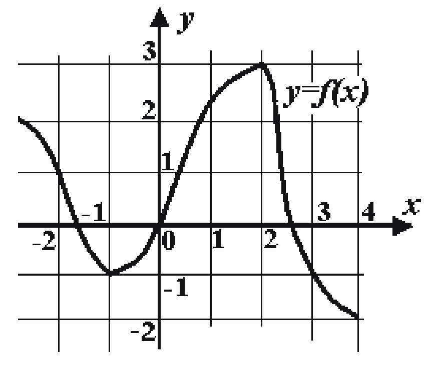


Рис. 5.24

99. Визначити які з нерівностей $f'(-2) < f'(1)$; $f'(-2) > f'(1)$; $f'(2) < f'(3)$; $f'(1) < f'(2)$ відповідають графіку функції, зображеної на рис. 5.24.

100. На рис. 5.25 зображено графік першої похідної $f'(x)$ функції $y = f(x)$. На яких проміжках функція зростає?

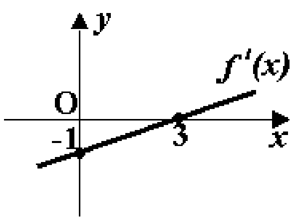


Рис. 5.25

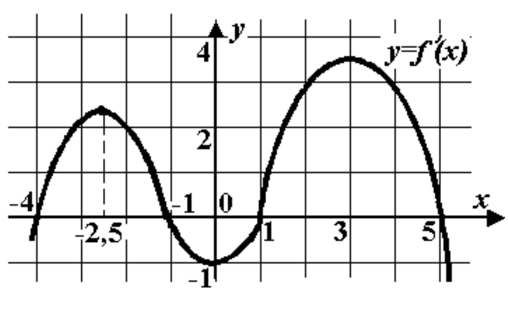


Рис. 5.26

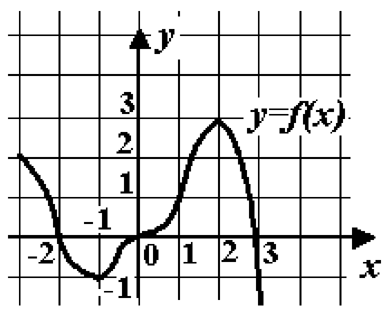


Рис. 5.27

101. На рис. 5.26 зображено графік першої похідної $f'(x)$ функції $y = f(x)$. На яких проміжках функція $f(x)$ спадає?

102. На рис. 5.27 зображено графік функції $y = f(x)$. Укажіть точки, у яких $f'(x) = 0$.

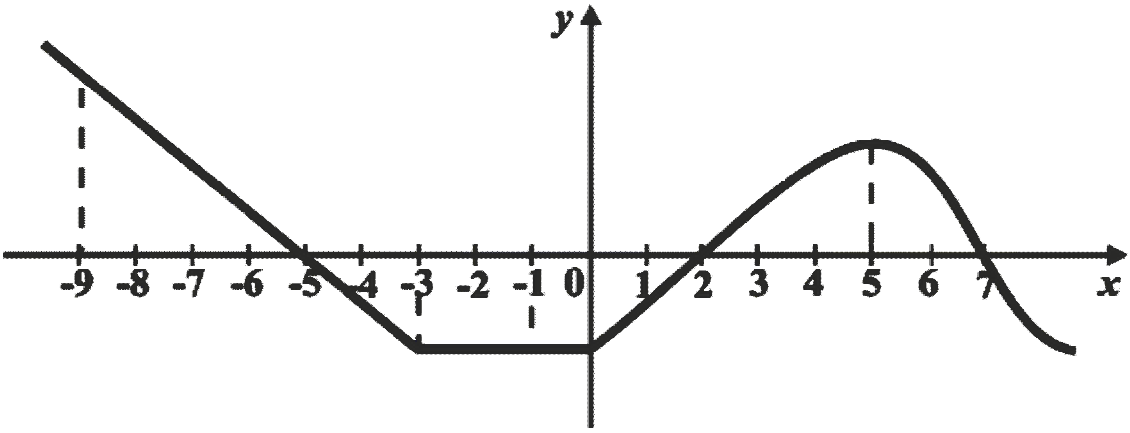


Рис. 5.28

103. На рис. 5.28 наведено графік похідної $f'(x)$ функції $y = f(x)$. Чи буде ця функція мати екстремуми і якщо так, то визначити точки та характер екстремуму.

104. Згідно з графіком функції $y = f(x)$ (рис. 5.29) вказати проміжки, в яких $f'(x) > 0$.

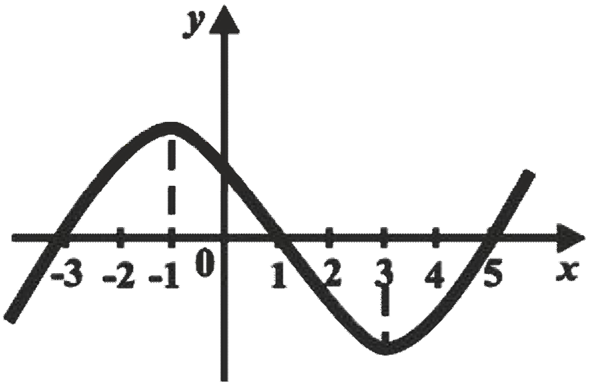


Рис. 5.29

105. Згідно з графіком другої похідної $f''(x)$ (рис. 5.30) вказати проміжки, на яких функція $f(x)$ опукла вниз.

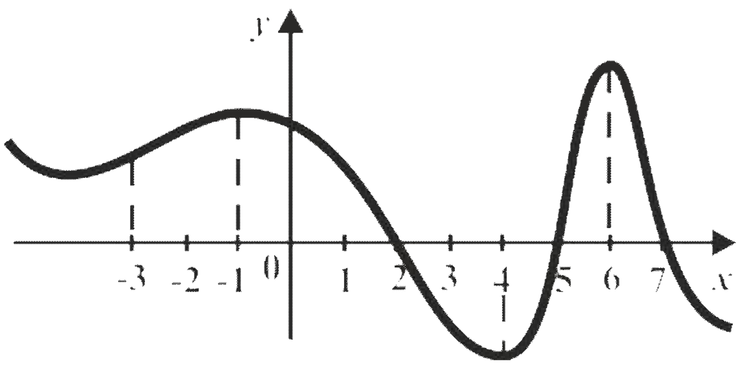


Рис. 5.30

106. Згідно з графіком другої похідної $f''(x)$ (рис. 5.31) вказати проміжки спаду першої похідної $f'(x)$.

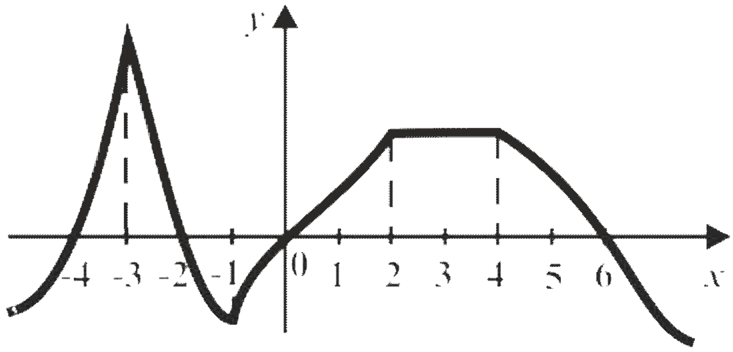


Рис. 5.31

Дослідити функції та побудувати графіки.

107. $y = 2\ln x - x^2$. 108. $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1}$. 109. $y = \sqrt[3]{x^3 - 2x}$.

110. $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$. 111. $y = \dfrac{x^3}{4(2-x)^2}$. 112. $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$.

113. $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$. 114. $y = \dfrac{|x-1|}{x^2}$. 115. $y = (\dfrac{x}{2}+3)e^{\frac{1}{2x}}$. 116. $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

Відповіді:

91. а, в. **92.** $f'(x_0) = tg\gamma$. **93.** $\Delta y = AB$, $dy = AN$, а $\Delta x = NB$. **94.** Якщо $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, 4) \cup (6, \infty)$, тоді $k > 0$; якщо $x \in (-3, -1)$, тоді $k = 0$; якщо $x \in (-5, -3) \cup (4, 6)$, тоді $k < 0$. **95.** Умови теореми Ролля виконуються на рис. 5.20, г; на рис. 5.20, а та 5.20, в функція має різне значення в межових точках інтервалу ($f(0) \neq f(1)$, $f(-1) \neq f(1)$); на рис. 5.20, б функція не диференційовна в точці $x = 0$. **96.** в. **97.** $x \in (-5, 0) \cup (10, \infty)$. **98.** $x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$. **99.** $f''(-2) < f''(1)$, $f''(2) > f''(3)$. **100.** $x \in (3, \infty)$. **101.** $x \in (-\infty, -4) \cup (-1, 1) \cup (5, \infty)$. **102.** $x = -1$, $x = 0$, $x = 2$. **103.** $f(-5)$ – max, $f(2)$ – min, $f(7)$ – max. **104.** $x \in (1, 5)$. **105.** $x \in (-\infty, 2) \cup (5, 7)$. **106.** $x \in (-\infty, -4) \cup (-2, 0) \cup (6, \infty)$.

Розділ 6. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

6.1. Поняття функції багатьох змінних

У попередніх частинах ми розглядали функцію однієї змінної $y = f(x)$ та основні поняття диференціального числення для неї.

Розглянемо аналогічні поняття, але для функції кількох змінних. Саме такі функції мають широке застосування в практичній діяльності людини.

Наприклад, температура, тиск залежать від часу вимірювання і точки простору, їх можна задати функціональною залежністю $u = f(t, x, y, z)$. Отже, температура та тиск є функціями чотирьох змінних. Площа прямокутника зі сторонами x та y визначається формулою $S = xy$ і є функцією двох змінних.

Для того щоб описати та вивчити такі залежності, вводиться поняття функції багатьох змінних і розробляється апарат для дослідження таких функцій.

У теорії функцій багатьох змінних зручно користуватися геометричною термінологією. Тож визначимо необхідні геометричні поняття.

Множину різноманітних упорядкованих сукупностей дійсних чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називають ***n-вимірним координатним простором*** R^n. При цьому кожна сукупність $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ зветься точкою простору R^n, а числа $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - ***координатами точки***. Координатний простір називають ***евклідовим простором*** E^n, якщо відстань ρ між будь-якими двома його точками $M(x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n)$ та $M_1(x_1^1; x_2^1; \ldots; x_n^1)$ визначається формулою

$$\rho(M, M_1) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^1 - x_i)^2},$$

де n - вимірність евклідового простору.

Евклідів простір E^1 - це числова пряма, евклідові простори E^2 та E^3 геометрично являють собою відповідно площину та тривимірний простір, у яких запроваджують прямокутні системи координат.

Деякі типи множин простору E^n:

· ***n-вимірна закрита куля*** з радіусом R та центром у точці $M_0(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ - це множина точок $M(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ евклідового простору, координати яких задовольняють нерівність $\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 \le R^2$; якщо координати точок задовольняють строгу нерівність $\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 < R^2$, то куля зветься ***відкритою;***

· ε***-окіл точки*** $M_0(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ - це відкрита n-вимірна куля радіуса ε з центром у точці M_0;

· ***відкрита множина*** простору E^n - це множина, усі точки якої є внутрішніми (для внутрішніх точок існує деякий окіл, всі точки якого належать множині);

· ***замкнена множина*** простору E^n - це множина, що містить усі внутрішні та межові точки (точка буде ***межовою*** за умови, що будь-який ε-окіл точки містить як точки, які належать множині, так і точки, що не належать їй). Сукупність усіх межових точок створює ***межу*** множини;

· ***зв'язна множина*** – це множина, де будь-які дві точки можна з'єднати неперервною кривою, усі точки якої належать множині;

· ***обмежена*** множина – це множина, яку можна розмістити у n-вимірній кулі скінченного радіуса;

· ***область –*** відкрита зв'язна точкова множина.

Якщо кожній точці $M(x_1;x_2;\ldots;x_n)$ множини $\{M\}$ точок евклідового простору E^n ставиться у відповідність за визначеним законом число u, то вважають, що на множині $\{M\}$ задана ***функція n змінних,*** яку позначають $u=f(M)$ або $u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Тут $x_1,x_2,\ldots,x_n$ – ***незалежні змінні (аргументи***). Множина точок $\{M\}$, для яких існує функція, – це ***область визначення функції***. Число u, що відповідає даній точці M, зветься частинним значенням функції у точці, а сукупність $\{u\}$ усіх частинних значень функції $u=f(M)$ утворює ***множину значень*** цієї функції.

Зауважимо, що функції двох та трьох змінних часто позначають як $z=f(x,y)$ чи $u=f(x,y,z)$.

Способи задання функцій багатьох змінних ті самі, що і функцій однієї змінної, – табличний, аналітичний та графічний.

Аналітичний спосіб задання функції − це задання функції формулою, отже, область визначення − це сукупність значень аргументів, при яких формула має сенс.

Приклад 1. Знайти область визначення функції $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$.

Розв'язання. Область визначення $D(f)$ знайдемо із системи нерівностей

$$\begin{cases}\ln(1-x^2-y^2)\neq 0;\\ 1-x^2-y^2>0;\\ 4x-y^2\geq 0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-x^2-y^2\neq 1;\\ x^2+y^2<1;\\ y^2\leq 4x.\end{cases}$$ Таким чином,

$$D(f)=\{x,y\in R: x^2+y^2<1\cap y^2\leq 4x\cap x^2+y^2\neq 0\}.$$

Зобразимо область визначення $D(f)$ на координатній площині xOy (рис. 6.1). Ця область відкрита. Точки, що лежать на параболі $y^2=4x$ та праворуч від неї у напрямі осі Ox, крім точки $(0;0)$, задовольняють нерівність

$y^2 \le 4x$. Точки, що лежать всередині одиничного кола, задовольняють нерівність $x^2 + y^2 < 1$.

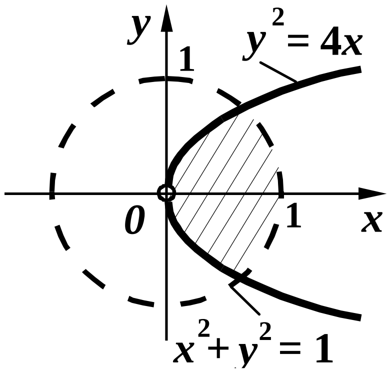


Рис. 6.1

Графічно можна зобразити тільки функцію двох змінних. ***Графіком функції*** $z = f(x, y)$ називається множина точок тривимірного простору, апліката z яких зв'язана з абсцисою x та ординатою y функціональним співвідношенням $z = f(x, y)$. Отже, функція $z = f(x, y)$ визначає деяку поверхню у тривимірному просторі. Наочне уявлення про функцію двох змінних дає також метод перетину, який полягає в тому, що поверхню $z = f(x, y)$ перетинають площинами $x = x_0$, $y = y_0$ та розглядають графіки функцій $z = f(x_0, y)$ або $z = f(x, y_0)$ однієї змінної (рис. 6.2).

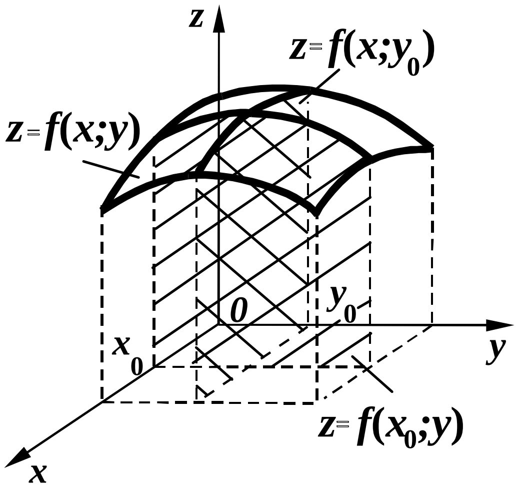


Рис. 6.2

І все ж привабливішим інструментом дослідження функції двох змінних можна вважати лінії рівня. ***Лінія рівня функції*** $z = f(x, y)$ – це лінія на площині xOy, у кожній точці якої функція $f(x, y)$ набуває сталого значення, тобто лінії рівня визначаються рівнянням $f(x, y) = C$, де C – стала, яку називають ***рівнем.*** При різних числових значеннях C дістають сім'ю ліній рівня, за допомогою якої аналізують складний характер поверхні $z = f(x, y)$. Зазначимо, що поняття ліній рівня широко використовують насамперед у геодезії, картографії, на синоптичних картах. Значна частина економічних механізмів також ілюструється рисунками, де зображені лінії рівня функцій двох змінних. Для функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ аналогічно визначають ***поверхні рівня*** $f(x, y, z) = C$.

Приклад 2. Знайти лінії рівня функції $u = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

Розв'язання. Лінія рівня − це множина точок площини xOy, координати яких задовольняють умову $\dfrac{1}{x^2 + y^2} = C$. Якщо $C \le 0$, то ліній рівня не існує. У разі $C > 0$, перетворюючи вихідне рівняння, матимемо $x^2 + y^2 = {}^1\!/_C$. Отже, сім'я ліній рівня при $C > 0$ складається із кіл з центром у точці (0;0) та радіусом ${}^1\!/_{\sqrt{C}}$ (рис. 6.3).

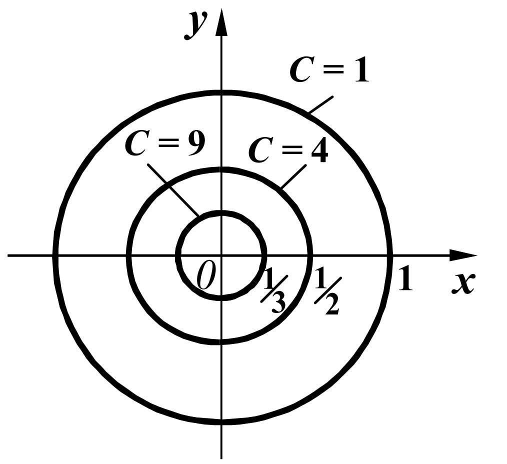


Рис. 6.3

Аналогічно функції однієї змінної функції багатьох аргументів можна класифікувати як дробові, алгебраїчні, трансцендентні, періодичні, парні, непарні, обмежені, необмежені, складені, подані неявно та параметрично.

6.2. Границя та неперервність функції двох змінних

Нагадаємо, що в просторі R^2 відстань між двома точками $M(x;y)$ і $M_0(x_0;y_0)$ обчислюється за формулою $d = d(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Якщо $d(M, M) < \delta$, де δ − деяке додатне число то кажуть, що точка M міститься в δ-околі точи M_0.

Число A називають ***границею функції*** $u = f(x, y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$, якщо ця функція визначена в околі точки $M_0(x_0;y_0)$, крім, може, самої точки M_0, та для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що за всіх сукупностей значень x, y, які задовольняють нерівності $0<|x-x_0|<\delta$, $0<|y-y_0|<\delta$, виконується нерівність $|f(x,y)-A|<\varepsilon$. Позначення: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$.

Дамо еквівалентне означення границі.

Число A зветься ***границею функції*** $u=f(M)$ при $M\to M_0$, якщо ця функція визначена в околі точки M_0, крім, може, самої точки M_0, та для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться таке $\delta(\varepsilon)>0$, що для всіх M, узятих з кулі радіуса δ з центром у точці M_0, всі значення функції $f(M)$ задовольняють нерівність $|f(M)-A|<\varepsilon$. Позначення: $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A$.

Оскільки означення границі функції багатьох змінних аналогічне означенню границі функції однієї змінної, то більшість теорем про границі для функції однієї змінної можна перенести на випадок функції багатьох змінних.

Це означає, якщо функції $f(M)$ та $g(M)$ визначені на множині D і мають в точці M_0 цієї множини границі A та B відповідно, то функції $f(M)\pm g(M)$, $f(M)\cdot g(M)$, $\dfrac{f(M)}{g(M)}$ $(g(M)\neq 0)$ мають в точці M_0 границі, які відповідно дорівнюють $A\pm B$, $A\cdot B$, $\dfrac{A}{B}$ $(B\neq 0)$.

З а у в а ж е н н я. Між поняттями границі в точці для функції однієї змінної та функції кількох змінних існує й принципова відмінність.

Річ у тому, що коли $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, де $f(x)$ − функція однієї змінної, то це означає, що обидві односторонні її границі дорівнюють числу A. Правильне й обернене твердження. Для функції кількох змінних $z=f(M)$ точка M може наближатися до точки M_0 нескінченною множиною способів, і тоді **рівність $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A$ справджується тоді й тільки тоді, коли границя дорівнює A при будь-якому наближені точки M до точки M_0.**

Приклад 1. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ для функції $f(x,y)=x+y\sin\dfrac{1}{x}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\left(x+y\sin\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x\text{- фікс}}}\left(x+y\sin\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0} x=0$;

границя $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\text{- фікс}}}\left(x+y\sin\dfrac{1}{x}\right)$ не існує, тому що множник $\sin\dfrac{1}{x}$ не має границі при $x \to 0$ (у будь-якому малому околі точки $x = 0$ функція $\sin\frac{1}{x}$ набуває всіх значень від -1 до 1); $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x + y\sin\frac{1}{x}) = 0$.

Відповідь. 0; не існує; 0.

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \frac{\ln(x+y)}{y}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \frac{\ln(x+y)}{y} = \{y = kx\} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(x+kx)}{kx} = \frac{\ln(1+k)}{k}$.

Таким чином, при русі довільної точки $M(x;y)$ по різних лініях дістали різні значення границі даної функції при $x \to 1$, $y \to 0$. Звідси випливає, що ця границя не існує.

Функцію $f(M)$, визначену в околі точки M_0, називають ***неперервною в точці*** M_0 та її околі, якщо $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$ (незалежно від способу прямування точки M до точки M_0).

Це означення збігається з виконанням таких трьох умов:

1) функція $f(M)$ визначена в точці M_0;

2) існує $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$;

3) $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Якщо в точці M_0 хоч би одна з перелічених умов не виконується, то M_0 називають ***точкою розриву функції*** $f(M)$. Точки розриву можуть бути ізольованими, утворювати лінії чи поверхні розриву тощо.

Функцію $f(M)$ називають ***неперервною на множині*** $D \subset R^n$, якщо вона неперервна в кожній точці M цієї множини.

Сформулюємо основні **властивості неперервних** функцій.

1. Якщо функція неперервна в замкненій обмеженій області, то вона обмежена в цій області.
2. Якщо функція неперервна в замкненій обмеженій області, то вона в цій області набуває найбільшого та найменшого значення.

Приклад 3. Знайти точки розриву функції $u = \frac{1 - xyz}{2x + 3y - z + 4}$.

Розв'язання. Функція може бути розривною там, де вона невизначена. Отже, для функції $u = \frac{1 - xyz}{2x + 3y - z + 4}$ це площина $2x + 3y - z + 4 = 0$ (знаменник обертається на нуль). Тому маємо поверхню розриву $2x + 3y - z + 4 = 0$.

Приклад 4. Дослідити на неперервність функцію $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

Розв'язання. Функція має розрив у точці $(0;0)$, тому що вона невизначена у цій точці. Оскільки $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x.y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{x^2+y^2}=\{\rho^2=x^2+y^2\}=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{1}{\rho^2}=\infty$, то точка $(0;0)$ є точкою розриву другого роду.

Завдання для самоконтролю

1. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty} f(x,y)$, $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f(x,y)$ для функції $f(x,y)=(x^2+y^2)^3e^{-x^2-y^2}$. **Відповідь:** 0; 0; 0.

2. Знайти границю $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. **Відповідь.** Границі не існує.

3. Дослідити на неперервність функцію $z=\dfrac{1}{x^2-y^2}$.

Відповідь. Функція на прямих $y=x$, $y=-x$ має розрив другого роду.

4. Дослідити на неперервність функцію $z=\dfrac{1}{\ln\left|1-x^2-4y^2\right|}$.

Відповідь. У точці $(0;0)$ та на еліпсі $\dfrac{x^2}{2}+2y^2=1$ функція має розрив другого роду. На еліпсі $x^2+4y^2=1$ розрив усувний.

5. Знайти розриви функції $u=\dfrac{\cos(x+y)}{x^2+y^2-z}$.

Відповідь. Функція має розриви в точках параболоїда $z=x^2+y^2$.

6.3. Частинні похідні першого порядку

Нехай у деякій області простору задана функція n незалежних змінних

$$u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Візьмемо довільну точку в області визначення функції $P(x_1;x_2;\ldots,x_i;\ldots;x_n)$. Надамо аргументу x_i довільного приросту Δx_i, залишаючи значення всіх інших аргументів незмінними. Отримаємо нову точку

$P_1(x_1; x_2; \ldots; x_i + \Delta x_i; \ldots; x_n)$. Приріст Δx_i викличе відповідний приріст функції, який називається ***частинним:***

$$\Delta_i u = \Delta_{x_i} u = f(x_1, x_2, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n).$$

Розділимо частинний приріст $\Delta_i u$ на приріст незалежної змінної Δx_i.

Перейдемо до границі відношення $\dfrac{\Delta_i u}{\Delta x_i}$, довільно наближаючи Δx_i до нуля.

Частинною похідною першого порядку по x_i у точці $P(x_1; x_2; \ldots, x_i; \ldots; x_n)$ функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається границя відношення $\dfrac{\Delta_i u}{\Delta x_i}$ в точці M, коли $\Delta x_i \to 0$, якщо ця границя існує і має скінченне значення. Записують це так: $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{\Delta_i u}{\Delta x_i} = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$.

Для функції n змінних за цим принципом можна побудувати n частинних похідних першого порядку $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}$.

Частинна похідна $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ характеризує швидкість зміни функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точці $P(x_1; x_2; \ldots, x_i; \ldots; x_n)$ за змінною x_i.

Для функції двох змінних $z = f(x, y)$ можна побудувати дві частинні похідні першого порядку: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$.

Оскільки частинна похідна від функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ за означенням є похідною по одній змінній при постійних значеннях інших змінних, правила знаходження похідних функції однієї змінної повною мірою можна перенести на частинні похідні.

Приклад 1. Знайти частинні похідні першого порядку функції $z = x\sin(3x + y)$.

Розв'язання. При знаходженні частинної похідної за змінною x вважаємо y сталою величиною. Маємо: $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{y=const} = (x)'_x \sin(3x + y) + x(\sin(3x + y))'_x = \sin(3x + y) + 3x\cos(3x + y)$. І навпаки, якщо визначаємо частинну похідну по y, сталою величиною вважаємо x: $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=const} = x(\sin(3x + y))'_y = x\cos(3x + y)$.

Геометрично частинна похідна $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$ функції $z = f(x, y)$ за змінною x у точці $M_0(x_0;y_0;f(x_0,y_0))$ дорівнює тангенсу кута α, де α – кут між додатним напрямом осі Ox та дотичною, проведеною до кривої $z=f(x,y_0)$ в точці $M_0(x_0;y_0;f(x_0,y_0))$. Аналогічно $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$ – це тангенс кута β між додатним напрямом осі Oy та дотичною в точці $M_0(x_0;y_0;f(x_0,y_0))$ до кривої, утвореної перетином поверхні $z=f(x,y)$ із площиною $x=x_0$ (рис. 6.4).

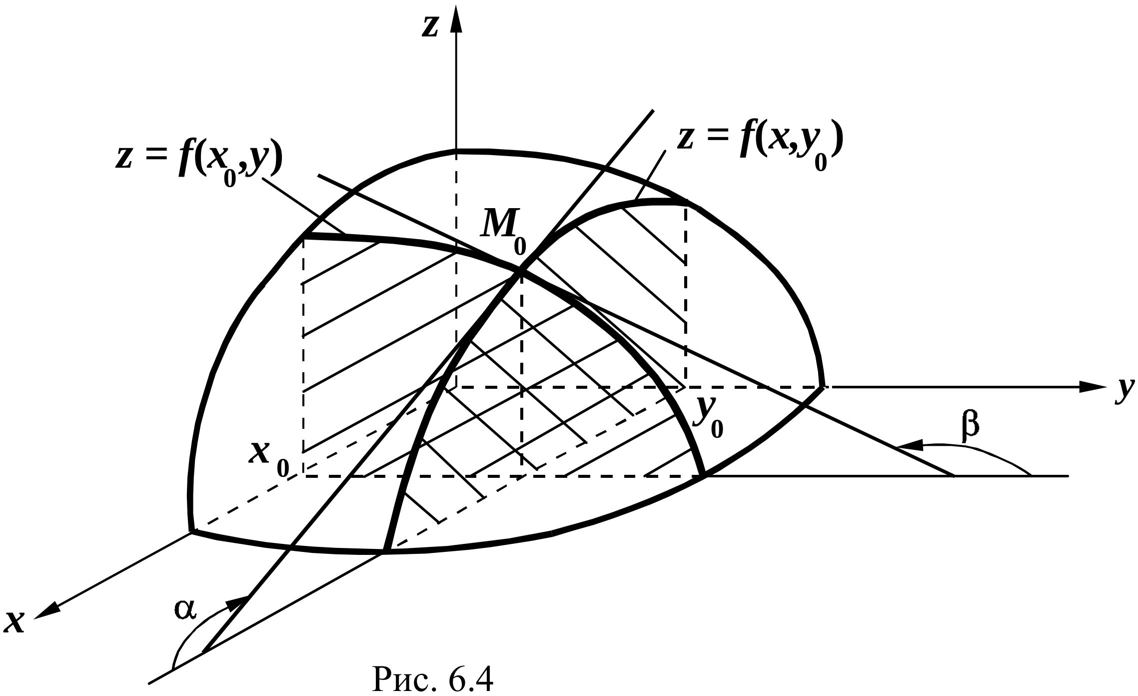


Рис. 6.4

Диференціювання складеної функції. Нехай у деякій області D визначена функція $u=f(x_1,x_2,\ldots x_n)$, кожна змінна якої, у свою чергу, залежить від кількох змінних, тобто $x_i=\varphi_i(t_1,t_2,\ldots t_j,\ \ldots,t_k)$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,k}$. Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial t_j}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_j}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_j}+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_j}. \qquad (6.1)$$

Для функції двох змінних $z=f(x,y)$, $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ остання формула набуває вигляду:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}};\quad \boxed{\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}}. \qquad (6.2)$$

Приклад 2. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ для функції $z=\ln(x^2+y^2)$, де $x=u-v$, $y=uv$.

Розв'язання. Оскільки

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial x}{\partial u}=1,\quad \frac{\partial x}{\partial v}=-1,\quad \frac{\partial y}{\partial u}=v,\quad \frac{\partial y}{\partial v}=u,$$

то за формулами (6.2) дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2x}{x^2+y^2}\cdot 1+\frac{2y}{x^2+y^2}v=\frac{2(u-v)+2uv^2}{(u-v)^2+u^2v^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{2x}{x^2+y^2}\cdot(-1)+\frac{2y}{x^2+y^2}u=\frac{-2(u-v)+2u^2v}{(u-v)^2+u^2v^2}.$$

Формулу (6.1) можна узагальнити на такі випадки:

1) нехай у деякій області D визначена функція $z=f(x,y)$, кожна змінна якої, у свою чергу, залежить від змінної t, тобто $x=x(t)$, $y=y(t)$, тоді

$$\boxed{\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}}; \tag{6.3}$$

2) якщо $z=f(x,y)$, а $y=y(x)$, то $z=f(x,y(x))$ – складена функція аргументу x, у цьому випадку з формули (6.3) маємо

$$\boxed{\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}}. \tag{6.4}$$

Приклад 3. Знайти похідну $\frac{dz}{dt}$ функції $z=e^{xy}$, де $x=\sin 2t$, $y=\cos 2t$.

Розв'язання. Згідно з формулою (6.3) знаходимо:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy},\quad \frac{dx}{dt}=2\cos 2t,\quad \frac{dy}{dt}=-2\sin 2t,$$

$$\frac{dz}{dt}=ye^{xy}2\cos 2t+xe^{xy}(-2\sin 2t)=2e^{\sin 2t\cos 2t}(\cos^2 2t-\sin^2 2t)=2e^{\frac{1}{2}\sin 4t}\cos 4t.$$

Приклад 4. Знайти повну похідну функції $z=\frac{x+e^{xy}}{y}$, якщо $y=\sqrt{x}$.

Розв'язання. Оскільки $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1+ye^{xy}}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xye^{xy}-x-e^{xy}}{y^2}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$,

то за формулою (6.4) маємо: $\frac{dz}{dx}=\frac{1+ye^{xy}}{y}+\frac{xye^{xy}-x-e^{xy}}{y^2}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Підставимо

замість y його вираз через x, дістанемо: $\frac{dz}{dx}=\frac{x+e^{x\sqrt{x}}(3x\sqrt{x}-1)}{2x\sqrt{x}}\times$

Диференціювання неявно заданої функції. Якщо функція y від аргументів $x_1,x_2,\ldots x_n$ задається рівнянням

$$F(y, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \tag{6.5}$$

не розв'язаним відносно y, то кажуть що функція задана **неявно**.

Правила диференціювання неявно заданих функцій випливають безпосередньо із способу їх задання та формулюються такою теоремою.

Теорема. Нехай функція неявно задана рівняння (6.5) і виконуються такі умови: 1) $F(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ та її частинні похідні F'_{x_1}, F'_{x_2}, $\ldots$, F'_{x_n}, F'_y визначені та неперервні у точці $M_0(y^0; x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)$ та її околі; 2) $F(y^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = 0$; 3) $F'_y(y^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \neq 0$. Тоді існує окіл точки M_0, у якому рівняння (6.5) визначає неперервну та диференційовну функцію, частинні похідні якої можна визначити за формулою:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)}{F'_y(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{6.6}$$

Якщо маємо функцію двох змінних $F(x, y, z) = 0$, то формула (6.6) набуває вигляду

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}}; \qquad \boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}}. \tag{6.7}$$

Приклад 5. Знайти частинні похідні функції $\sin xyz - 2e^{\frac{x}{y}} + 3xz - 5yz = 0$.

Розв'язання. При $F = \sin xyz - 2e^{\frac{x}{y}} + 3xz - 5yz$ за формулою (6.7) маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz\cos xyz - \frac{2}{y}e^{\frac{x}{y}} + 3z}{xy\cos xyz + 3x - 5y}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz\cos xyz + \frac{2x}{y^2}e^{\frac{x}{y}} - 5z}{xy\cos xyz + 3x - 5y}.$$

Похідна за напрямом. Градієнт. Нехай функція $u = f(x, y, z)$ визначена у декому околі точки $M(x; y; z)$; $\bar{l}$ − вектор, який задає певний напрям.

Похідною за напрямом вектора $\bar{l}$ від функції $u = f(x, y, z)$ в точці M називається границя відношення приросту функції Δu у даному напрямі до приросту довжини вектора Δl при $\Delta l \to 0$ та позначається $\frac{\partial u}{\partial \bar{l}} = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l}$.

Якщо напрям задається одиничним вектором $\bar{e} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$, то формула для обчислення похідної за напрямом має вигляд

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial \bar{e}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma}. \tag{6.8}$$

Штучно сконструйований вектор $\bar{s}$, координатами якого є значення частинних похідних функції $u = f(x, y, z)$ в точці M називають **градієнтом** функції u в цій точці та позначають $grad\,u$. Отже,

$$\boxed{\bar{s} = grad\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}}. \qquad (6.9)$$

Напрям градієнта збігається з напрямом найбільшої швидкості зміни функції $u = f(x, y, z)$, а величина цієї найбільшої швидкості зміни функції дорівнює довжині вектора $grad\,u$.

Властивості градієнта:

$$grad(u \pm v) = grad\,u \pm grad\,v; \qquad grad(cu) = c\,grad\,u;$$

$$grad(uv) = v\,grad\,u + u\,grad\,v; \qquad grad\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,grad\,u - u\,grad\,v}{v^2}, \quad v \neq 0,$$

де $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $c = const$.

Приклад 6. Знайти $grad\,z$ у точці $M(1;1)$, якщо $z = \ln(x^2 + y^2)$.

Розв'язання: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^2 + y^2}$; $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{M(1;1)} = 1$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{M(1;1)} = 1$.

За формулою (6.9) дістанемо

$$\left. grad\,u\right|_{M(1;1)} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M(1;1)}\bar{i} + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M(1;1)}\bar{j} = \bar{i} + \bar{j}.$$

Приклад 7. Знайти найбільшу швидкість зростання функції $u = 7x^2y - \frac{7}{2}y^2z + \frac{14}{3}z^3$ в точці $M_0(1;0;3)$.

Розв'язання: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 14xy$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 7x^2 - 7yz$; $\dfrac{\partial u}{\partial z} = 14z^2 - \dfrac{7}{2}y^2$;

$$grad\,u = 14xy\bar{i} + (7x^2 - 7yz)\bar{j} + (14z^2 - \frac{7}{2}y^2)\bar{k}; \qquad grad\,u(M_0) = 7\bar{j} + 126\bar{k}.$$

Найбільша величина швидкості зміни функції буде

$$\max\left.\frac{\partial u}{\partial \bar{e}}\right|_{M_0} = \left|grad\,u(M_0)\right| = \sqrt{7^2 + (126)^2} = 35\sqrt{13}.$$

6.4. Повний та частинні диференціали

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в точці $M(x; y)$ в області $D(f)$ та має неперервні частинні похідні в цій точці та її околі. Тоді її повний приріст можна записати так: $\Delta z = \dfrac{\partial z(x,y)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial z(x,y)}{\partial y}\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y$,

де $\alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$, $\beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Головна лінійна частина повного приросту Δz функції $z = f(x, y)$

відносно приростів незалежних змінних називається повним диференціалом функції та позначається: $dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$.

Прирости Δx та Δy незалежних змінних, як у разі функції однієї змінної, дорівнюють відповідно dx та dy, а відтак

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy}. \tag{6.10}$$

Наведену формулу (6.10) повного диференціала функції двох змінних узагальнимо на випадок функції n змінних $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n.$$

Приклал 1. Обчислити значення повного диференціала функції $u = x^3 + 2y^2z - 3xy - x + 5$ у точці $M(1;2;-1)$.

Розв’язання. Знайдемо частинні похідні та їх значення в точці M:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y - 1,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 4yz - 3x,\quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2y^2, \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = -4,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = -11, \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = 8.$$

Таким чином, $\left.du\right|_M = -4dx - 11dy + 8dz$.

Частинними диференціалами функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називають відповідно добутки $d_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}dx_i$.

Функція $z = f(x, y)$ має два частинних диференціала:

$$\boxed{d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}dx};\qquad \boxed{d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}dy}.$$

Різниця між повним приростом диференційовної функції в точці M та її повним диференціалом у цій точці є нескінченно малою величиною вищого порядку, ніж $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2}$, при $\Delta x_i \to 0$. Отже, виконується наближена рівність

$$\boxed{\Delta u \approx du},$$

звідки для функції двох змінних $z = f(x, y)$ маємо

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial (x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial (x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y}. \tag{6.11}$$

Приклад 2. Обчислити наближено $2{,}95 \cdot \sin 0{,}5$.

Розв’язанн. Шукаємо значення функції $z = f(x, y)$ в точці $(2{,}95; 0{,}5)$ за формулою (6.11), для чого дістанемо значення функції та її похідних першого порядку в точці $(3;\frac{\pi}{6})$: $f(3;\frac{\pi}{6}) = 3\sin\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}$; $\frac{\partial u}{\partial x} = \sin y$; $\frac{\partial u}{\partial y} = x\cos y$; та $\frac{\partial u(3,\frac{\pi}{6})}{\partial x} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\frac{\partial u(3,\frac{\pi}{6})}{\partial y} = 3\cos\frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Враховуючи, що $x = 2{,}95$; $y = 0{,}5$; $x_0 = 3$; $y_0 = \frac{\pi}{6}$, маємо $\Delta x = x - x_0 = -0{,}05$, $\Delta y = y - y_0 = \frac{\pi}{6} - 0{,}5 \approx 0{,}023$. Отже,

$$2{,}95 \cdot \sin 0{,}5 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-0{,}05) + \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 0{,}023 = 1{,}534.$$

6.5. Похідні та диференціали вищих порядків

Частинні похідні вищих порядків. Частинні похідні першого порядку $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ $(i = \overline{1,n})$ функції $u = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ являють собою деякі функції змінних x_i, $(i = \overline{1,n})$ і, в свою чергу, можуть мати частинні похідні по різних змінних. Якщо $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ має в точці M частинну похідну за аргументом x_k, то ця похідна називається **частинною похідною другого порядку** (або **другою частинною похідною**) функції $u = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ за аргументами x_i, x_k в точці M та позначається $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$.

При $k = i$ частинна похідна другого порядку позначається $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

За умови $k \neq i$ частинна похідна другого порядку називається **мішаною.**

Функція $z = f(x; y)$ має дві частинні похідні першого порядку $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ та чотири частинні похідні другого порядку, а саме:

$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \qquad z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}; \qquad z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Якщо мішані частинні похідні другого порядку існують у деякому околі точки $M(x;y)$ і неперервні в самій точці $M(x;y)$, то вони не залежать від порядку диференціювання, тобто справджується рівність

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}.$$

Приклад 1. Знайти в точці $M(0;1)$ частинні похідні другого порядку функції $z = (x+2y)\cos(x+y)$.

Розв'язання. Маємо: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \cos(x+y) - (x+2y)\sin(x+y)$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2\cos(x+y) - (x+2y)\sin(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin(x+y) - \sin(x+y) - (x+2y)\cos(x+y) =$$

$$= -2\sin(x+y) - (x+2y)\cos(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2\sin(x+y) - 2\sin(x+y) - (x+2y)\cos(x+y) =$$

$$= -4\sin(x+y) - (x+2y)\cos(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\sin(x+y) - 2\sin(x+y) - (x+2y)\cos(x+y) =$$

$$= -3\sin(x+y) - (x+2y)\cos(x+y).$$

Знайдемо значення цих частинних похідних у точці $M(0;1)$:

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_M = -2\sin 1 - 2\cos 1 \approx -2{,}76; \quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_M = -4\sin 1 - 2\cos 1 \approx -4{,}44;$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_M = -3\sin 1 - 2\cos 1 \approx -3{,}6.$$

Аналогічно визначаються частинні похідні порядку, вищого за другий.

Приклад 2. Знайти всі частинні похідні третього порядку функції $z = x^3 + 4xy^2 + y^3 + xy + x + 2y + 4$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 4y^2 + y + 1; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 8xy + 3y^2 + x + 2.$$

Визначаємо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 6x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 8y + 1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 8x + 6y.$$

Знаходимо частинні похідні третього порядку:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = 6; \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 6;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}=\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=0;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}=\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=8.$$

Диференціали вищих порядків. Для диференційовної в точці M функції двох змінних $z=f(x,y)$ було введено поняття диференціала першого порядку і знайдено формулу: $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$.

Диференціалом другого порядку функції двох змінних називається диференціал від диференціала першого порядку цієї функції, тобто

$$d^2 z=d(dz).$$

Знайдемо другий диференціал функції $z=f(x,y)$, для чого вважатимемо dx та dy сталими множниками, а функції $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ диференційовними, тоді функція dz буде функцією двох змінних x та y і

$$d^2 z=d(dz)=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dy=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dy\right)dx+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy=$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2+\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2.$$

Остаточно маємо $\boxed{d^2 z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2}$.

Аналогічно вводиться поняття диференціала n-го порядку. **Диференціал** n-го **порядку** — це диференціал від диференціала $(n-1)$-го порядку, записують $d^n z=d(d^{n-1}z)$.

Приклад 3. Знайти диференціал другого порядку функції $z=\sin(xy)$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні першого та другого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\cos(xy); \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=x\cos(xy); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-y^2\sin(xy);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\cos(xy)-xy\sin(xy); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-x^2\sin(xy).$$

Отже, $d^2 z=-y^2\sin(xy)dx^2+2(\cos(xy)-xy\sin(xy))dxdy-x^2\sin(xy)dy^2$.

Завдання для самоконтролю

Знайти частинні похідні першого порядку даних функцій.

1. $z = x^2 + y^3 + 3x^5 y^3$. 2. $z = xy^2$. 3. $z = 2^x \ln y$. 4. $u = \dfrac{\cos x}{\cos y}$.

5. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 6. $z = 2\sqrt{x} + \ln y + 4(x + y^2)$. 7. $u = xy\ln(xy)$.

8. $z = \ln\sqrt{\dfrac{x - y}{x + y}}$. 9. $z = (x^2 + 4)\cos(\sqrt[3]{x} + 2y)$. 10. $u = arctg\,\dfrac{x}{y}$.

11. $u = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. 12. $u = e^x(\cos y + x\sin y)$. 13. $u = \sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}$.

14. $z = x\sin(3x + y)$. 15. $u = e^{x^2} ctg(1 + \dfrac{y}{x})$. 16. $u = xye^{\sin(\pi xy)}$.

17. $u = (1 + \sin^2 x)^{\ln y}$. 18. $u = e^{\frac{x}{y}} tg(x + y)$. 19. $z = arctg\,\dfrac{x + y}{1 - xy}$.

Знайти частинні похідні $\dfrac{\partial u}{\partial x}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}$; $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ даних функцій.

20. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 21. $u = yz + \dfrac{x(x - z)}{y^2}$. 22. $u = x^{y^z}$. 23. $u = z^{xy}$.

24. $u = \sin z - x^2 y$. 25. $u = xyz + \dfrac{x}{yz}$. 26. $u = xy + yz + zx$.

Довести, що дані функції $z(x, y)$ задовольняють зазначені рівняння.

27. $z = y\ln(x^2 - y^2)$, $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$.

28. $z = x\ln\dfrac{y}{x}$, $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

29. $z = \sin\dfrac{x}{y}$, $\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

30. $u = \sin(xy + yz)$, $x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$.

31. $u = (\dfrac{y}{x})^z$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = u\ln\dfrac{y}{x}$.

32. $z = e^{xy}$, $\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Знайти похідну $\dfrac{dz}{dt}$ функцій.

33. $z = e^{xy}$, де $x = \sin 2t$, $y = \cos 2t$.

34. $z=\sqrt{\dfrac{1+x}{1+y}}$, де $x=-\cos t$, $y=\cos t$.

35. Знайти у точці $(0;1)$ похідні $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ функції $u^3+3xyu+1=0$.

36. Знайти частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z=u+v^2$, де $u=x^2+\sin y$ та $v=\ln(x+y)$.

Знайти частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ неявно заданих функцій.

37. $x^2-2y^2+3z^2-yz+y=0$.
38. $yz=arctg(xz)$.
39. $x^4-3y^4-z^2+4xyz-2x+1=0$.
40. $z\ln(x+z)-xye^z=0$.

Знайти частинні диференціали функцій.

41. $z=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.
42. $z=\sqrt[3]{x+y^2}$.
43. $z=\dfrac{x^2}{y}$.
44. $z=x\sin 2y$.
45. $u=xyz$.
46. $u=x^{yz}$.

Знайти повний диференціал функцій.

47. $z=x^2y^3$.
48. $z=\ln\dfrac{1}{xy^2}$.
49. $z=5^{\sqrt{x}-2y}$.
50. $z=\cos^2\dfrac{x}{y}$.
51. $z=\ln\dfrac{1}{xy^2}$.
52. $z=5^{\sqrt{x}-2y}$.
53. $z=\cos^2\dfrac{x}{y}$.
54. $u=ze^{x^3+y^2}$.
55. $u=e^{xyz}$.
56. $f(x,y)=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$.
57. $u=tx^{\frac{y}{z}}$.
58. $u=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
59. $u=xy+yz+zx$.
60. $z=x^2y^3$.
61. $f(x,y)=2x^4-3x^2y^2$.
62. $f(x,y)=(y^3+2x^2y+3)^4$.
63. $f(x,y)=(1+xy)^y$.

Знайти диференціал неявно заданих функцій.

64. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.
65. $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$.
66. $xyz=x+y+z$.
67. $u^3-3(x+y)u^2+z^3=0$.

Знайти диференціал функції $u=f(x,y,z)$ в точці $N_0(x_0;y_0;z_0)$.

68. $u=\dfrac{yz}{x}$, $N_0(1,2,3)$.
69. $u=\dfrac{x}{z}+\dfrac{1}{x}+\ln y-arctgz$, $N_0(2,-1,1)$.
70. $u=\cos(xy+xz)$, $N_0(1,\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6})$.
71. $u=xyz-x^2+\dfrac{y^2}{2}-\dfrac{z^2}{2}$, $N_0(3,2,-2)$.

Замінюючи приріст функції диференціалом наближено обчислити.

72. $1{,}02^{3{,}01}$. 73. $\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3}$.

74. $\sin 29^0 \cdot tg 46^0$. 75. $1{,}002\cdot 2{,}003^2\cdot 3{,}004^3$. $1{,}02^{3{,}01}$.

Знайти повний приріст та повний диференціал функції $z=f(x,y)$ в точці M_0 при даних значеннях Δx та Δy.

76. $z=xy^2$ в точці $M_0(3;2)$ при $\Delta x=0{,}2$, $\Delta y=0{,}3$.

77. $z=x^2+y$ в точці $M_0(1;2)$ при $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=0{,}2$.

78. На скільки зміниться діагональ та площа прямокутника зі сторонами $x=6$ м і $y=8$ м, якщо перша сторона збільшиться на 2 мм, а друга – зменшиться на 5 мм.

Знайти частинні похідні другого порядку функцій.

79. $z=x^2y^2-3x^3y$. 80. $z=x\sin(x+y)$. 81. $z=(\frac{y}{x})^2$. 82. $z=xe^{-xy}$.

83. $z=\ln(x^2+4y^3)$. 84. $z=arctg\,\frac{x+y}{1-xy}$. 85. $u=z2^{xy}$. 86. $z=x\sin^2 y$.

87. $z=xe^{x^2+y^3}$. 88. $z=\ln(x+y^2)$. 89. $u=x^{\frac{y}{z}}$. 90. $z=xy+\frac{y}{x}$.

91. $z=x^5+y^5-5x^3y^3$. 92. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 93. $u=xy+yz+zx$.

Довести, що функції задовольняють відповідні рівняння.

94. $z=e^{xy}$, $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

95. $u=x(x+y)^2+y(x+y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

96. $u=\sqrt{xy}+\frac{x}{y}$, $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

97. $z=\ln(x+e^{-y})$, $\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$.

98. $z=e^{xy}$, $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2xyz=0$.

99. $z=\frac{x}{y}$, $x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

100. $z=\cos y+(y-x)\sin y$, $(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

101. $z=e^{\frac{x}{y}}$, $\qquad y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

6.6. Екстремуми функцій багатьох змінних

Локальний екстремум. Нехай функція $u=f(M)$ визначена в області $D\subset R^n$, а $M_0(x_1^0;x_2^0;\ldots;x_n^0)$ - деяка точка цієї області.

Якщо існує окіл точки M_0, який належить області D і для будь-якої точки $M(x_1;x_2;\ldots;x_n)$ із цього околу виконується нерівність $f(M)<f(M_0)$ ($f(M)>f(M_0)$), то точка M_0 називається ***точкою локального максимуму*** (***мінімуму***), а число $f(M)$ - ***локальним максимумом*** (***мінімумом***) цієї функції.

Точки максимуму та мінімуму функції називають її **точками екстремуму** (епітет "локальний" у стислому викладі часто випускають).

Згідно з означенням локального екстремуму повний приріст функції $\Delta u=f(M)-f(M_0)$ задовольняє одній з умов в околі точки M_0: $\Delta u<0$, якщо M_0 - точка локального максимуму; $\Delta u>0$, якщо M_0 - точка локального мінімуму.

Необхідні умови існування екстремуму функції. Якщо функція $u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ має частинні похідні та екстремум у точці M_0, то всі похідні у цій точці дорівнюють нулю:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{M_0}=0,\qquad i=\overline{1,n}.$$

З а у в а ж е н н я 1. Необхідні умови існування екстремуму функції у точці M_0 можна записати в еквівалентній формі: $du\big|_{M_0}=0$, де du - повний диференціал функції.

З а у в а ж е н н я 2. Неперервна функція може мати екстремум також у точках, у яких вона недиференційовна (цього разу екстремумам відповідатимуть вістря поверхонь – графіків функцій). Наприклад, функція $z=\sqrt{x^2+y^2}$ має у початку координат мінімум, проте у цій точці недиференційована (графік цієї функції ─ це конічна поверхня з вершиною у початку координат).

З а у в а ж е н н я 3. Точки, у яких функція визначена, а її частинні похідні дорівнюють нулю або не існують, називають ***критичними точками*** функції.

Таким чином, екстремум функції (якщо існує) може бути тільки у критичних точках, але не у будь-якій критичній точці функція має екстремум. Наявність екстремуму в критичній точці та його характер визначають за допомогою другого диференціала функції, яку досліджують.

Неважко помітити, що другий диференціал функції багатьох змінних $d^2u = (\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n)^2 u$ - це, власне, симетрична квадратична форма відносно диференціалів незалежних змінних dx_1, $dx_2, \ldots, dx_n$. Матриця цієї квадратичної форми така:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} & \ldots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Вона називається ***матрицею Гессе,*** а її визначник – ***гессіаном.*** Поняття знаковизначеності та знакозмінності квадратичної форми надає можливість сформулювати ***достатні умови існування локального екстремуму функції багатьох змінних*** у вигляді такої теореми.

Теорема. Нехай функція $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ має всі неперервні другі частинні похідні в околі своєї критичної точки $M_0(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)$. Тоді, якщо у цій точці другий диференціал d^2u - знаковизначена квадратична форма від диференціалів $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ незалежних змінних, то функція матиме в точці M_0 локальний екстремум. У точці M_0 буде мінімум при $d^2u > 0$ та максимум при $d^2u < 0$. Якщо ж d^2u - знакозмінна квадратична форма у точці M_0, то функція $u = f(M)$ у цій точці екстремуму не має.

Згідно з критерієм Сильвестра $d^2u > 0$ тоді й тільки тоді, коли всі головні мінори матриці Гессе додатні, а $d^2u < 0$ тоді й тільки тоді, коли всі головні мінори непарного порядку від'ємні, а парного – додатні.

У випадку функції двох змінних $z = f(x, y)$ достатні умови існування екстремуму можна подати у компактній зручній формі.

Нехай функція $z = f(x, y)$ в околі критичної точки $M_0(x_0; y_0)$ має неперервні похідні другого порядку $A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0}$, $C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0}$, $B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0}$.

Тоді, якщо $\Delta = AC - B^2 > 0$, то функція $z = f(x, y)$ має в точці M_0 локальний екстремум, а саме: мінімум при $A > 0$ та максимум при $A < 0$. За умови, що $\Delta = AC - B^2 < 0$, функція локального екстремуму в точці M_0 не має (це очевидно, бо $\Delta = AC - B^2$ є гессіаном функції двох змінних). Якщо ж $\Delta = 0$, то питання про локальний екстремум функції $z=f(x,y)$ у точці M_0 залишається відкритим.

Приклад 1. Дослідити на екстремум функцію $u=x^3+y^2+z^2+6xy-4z$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+6y;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y+6x;\quad \frac{\partial u}{\partial z}=2z-4.$$

Розв'язок системи $\begin{cases}3x^2+6y=0;\\ 2y+6x=0;\\ 2z-4=0\end{cases}$ дає критичні точки $M_1(6;-18;2)$ та $M_2(0;0;2)$. Інших критичних точок функція не має. Обчислюємо частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=2$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=6$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=0$ та складаємо матрицю Гессе $H=\begin{pmatrix}6x & 6 & 0\\ 6 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$. У точці $(6;-18;2)$ її головні мінори $\Delta_1=6x$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}6x & 6\\ 6 & 2\end{vmatrix}=12x-36$, $\Delta_3=\begin{vmatrix}6x & 6 & 0\\ 6 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=24x-72$ будуть додатними. Отже, у цій точці функція має мінімум $u_{\min}(6;-18;2)=-112$. Щодо дослідження функції у точці $(0;0;2)$, застосувати критерій Сильвестра тут неможливо, оскільки $\Delta_1=0$. У цій точці, проте, екстремуму немає. Дійсно, $u(0;0;2)=-4$, а при малих ε приріст функції

$$\Delta u=u(\varepsilon;0;2)-u(0;0;2)=\varepsilon^3-4-(-4)=\varepsilon^3$$

знакозмінний, тобто $\Delta u>0$ при $\varepsilon>0$ та $\Delta u<0$ при $\varepsilon<0$.

Найбільше та найменше значення функції. Якщо функція $u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ диференційовна в обмеженій замкненій області та неперервна на її межі, то вона досягає свого найбільшого та найменшого значень (***глобального або абсолютного максимуму*** та ***глобального або абсолютного мінімуму***) у цій області в критичній точці або в точці, що належить межі області.

Приклад 2. Знайти найбільше та найменше значення функції $u=x^2y$ в області $x^2+y^2\le 1$.

Розв'язання. Спочатку шукаємо критичні точки функції відповідно до необхідних умов існування екстремуму: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2xy$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2 \Rightarrow \begin{cases} 2xy = 0, \\ x^2 = 0 \end{cases}$ та, розв'язуючи цю систему, дістаємо єдину критичну точку $O(0;0)$, яка належить даній області (рис. 6.5). Далі досліджуємо поведінку функції на межі області – на колі $x^2 + y^2 = 1$, для чого виражаємо x^2 через y та підставляємо у формулу даної функції $u = (1 - y^2)y \Rightarrow u = y - y^3$; $y \in [-1, 1]$. Похідна цієї функції $u' = 1 - 3y^2$. За умови $u' = 0$ дістаємо $1 - 3y^2 = 0$ звідки знаходимо критичні точки $y = \pm\sqrt{\dfrac{1}{3}}$. Відповідними точками на колі будуть точки

$$M_1(\sqrt{\tfrac{2}{3}};\sqrt{\tfrac{1}{3}}),\quad M_2(-\sqrt{\tfrac{2}{3}};\sqrt{\tfrac{1}{3}}),\quad M_3(-\sqrt{\tfrac{2}{3}};-\sqrt{\tfrac{1}{3}}),\quad M_4(\sqrt{\tfrac{2}{3}};-\sqrt{\tfrac{1}{3}}).$$

Свого ж найбільшого та найменшого значень функція може досягти у кінцевих точках відрізку $y \in [-1, 1]$, яким на межі області відповідатимуть точки $M_5(0;1)$ та $M_6(0;-1)$. Обчислюємо значення функції $u = x^2 y$ у здобутих точках: $u(0;0) = 0$; $u(0;\ldots\pm 1) = 0$; $u(\pm\sqrt{\frac{2}{3}};\mp\sqrt{\frac{1}{3}}) = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$; $u(\pm\sqrt{\frac{2}{3}};-\sqrt{\frac{1}{3}}) = -\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

Очевидно, найбільшим значенням функції в даній області буде $u_{найб}(\pm\sqrt{\frac{2}{3}};\sqrt{\frac{1}{3}}) = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$, а найменшим - $u_{найм}(\pm\sqrt{\frac{2}{3}};-\sqrt{\frac{1}{3}}) = -\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

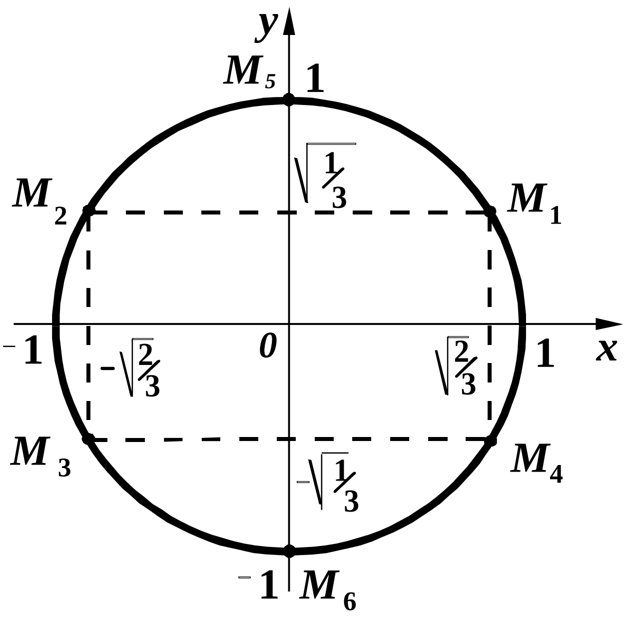


Рис. 6.5

6.7. Умовний екстремум

Нехай аргументи функції

$$u = f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{6.12}$$

не є незалежними змінними, а зв’язані між собою додатковими співвідношеннями

$$\varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0; \quad j = \overline{1, m}; \quad m < n, \qquad (6.13)$$

які назвемо ***умовами зв’язку***.

Функція $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ має у точці $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ ***умовний мінімум (максимум)*** за умов зв’язку (6.13), якщо координати точки M_0 задовольняють рівняння (6.13) та якщо існує такий окіл цієї точки, у якому значення функції $f(M_0)$ - найменше (найбільше) для всіх точок, координати яких задовольняють умову зв’язку.

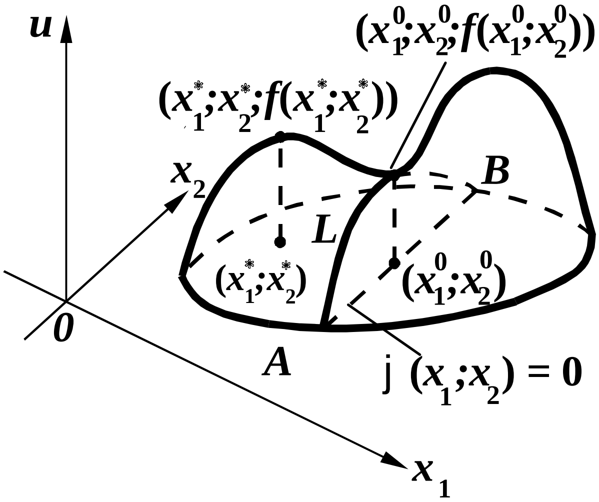


Рис. 6.6

Очевидно, умовний максимум (мінімум) – це найбільше (найменше) значення функції у точці M_0 відносно не всіх точок околу точки M_0, а лише тих, координати яких зв’язані між собою умовами (6.13). Так, з рис. 6.6, на якому зображено графік функції $u = f(x_1, x_2)$, видно, що точка $(x_1^*; x_2^*)$ - це точка локального (безумовного) максимуму функції. Точка ж $(x_1^0; x_2^0)$ є точкою умовного максимуму функції, бо точка $(x_1^0; x_2^0; f(x_1^0, x_2^0))$ - найвища на “стежці” L, що проходить через “перевал” графіка функції. Лінія AB, рівняння якої $\varphi(x_1, x_2) = 0$, - проекція “стежки” L на площину x_1Ox_2.

З а у в а ж е н н я. У задачах на пошук умовного екстремуму функції $u = f(M)$ за даних умов зв’язку саму функцію $u = f(M)$ часто називають ***цільовою*** функцією, бо її максимізація (мінімізація) - це формальний вираз якої-небудь мети (наприклад, максимізації обсягу виробництва при фіксованих витратах).

Розглянемо два методи розв’язання задачі на умовний екстремум.

1. **Метод виключення частини змінних**. Нехай рівняння зв’язку (6.13) можна розв’язати відносно яких-небудь m змінних, наприклад, відносно змінних $x_1, x_2, \ldots, x_m$:

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(x_{m+1}, \ldots, x_n); \\ x_2 &= g_2(x_{m+1}, \ldots, x_n); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m &= g_m(x_{m+1}, \ldots, x_n). \end{aligned} \qquad (6.14)$$

У цьому випадку підстановкою рівнянь (6.14) у вираз цільової функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задача на пошук умовного екстремуму зводиться до дослідження складної функції $n - m$ змінних $u = f(g_1, g_2, \ldots, g_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$ на звичайний безумовний екстремум.

Приклад 1. Знайти умовний екстремум функції $z = x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 10$ за умови зв'язку $x + y = 4$.

Розв'язання. З рівняння зв'язку дістаємо $y = 4 - x$. Підставляємо y у вираз для даної функції:

$$z = x^2 + (4 - x)^2 + x(4 - x) - 5x - 4(4 - x) + 10 = x^2 - 5x + 10.$$

Локальний екстремум функції $F(x) = x^2 - 5x + 10$ буде умовним екстремумом функції $z = f(x; y)$. Згідно з достатньою умовою існування екстремуму функції однієї змінної знаходимо: $F'(x) = 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$; $F''(x) = 2 > 0$ при будь-якому x і тому в точці $x = \frac{5}{2}$ функція $F(x)$ має мінімум $F_{\min}(\frac{5}{2}) = \frac{15}{4}$. Тоді функція $z = f(x; y)$ у відповідній точці $(\frac{5}{2}; \frac{3}{2})$ має умовний мінімум $z_{\min}(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}) = \frac{15}{4}$.

2. **Метод Лагранжа**. Нехай, як і досі, розв'язується задача на пошук умовного екстремуму функції (6.12) за умов зв'язку (6.13).

За своєю суттю метод Лагранжа полягає в тому, що будується ***функція Лагранжа***, яка є сумою цільової функції (6.12) та функції зв'язку φ_j, помножених на незалежні сталі множники λ_j (їх називають ***множниками Лагранжа),*** а саме:

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j(x_1, \ldots, x_n). \qquad (6.15)$$

Очевидно, у точках $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координати яких задовольняють рівняння зв'язку (6.13), виконується рівність $L(M) = f(M)$ і тому умовні екстремуми функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ та локальні екстремуми функції Лагранжа збігаються. Для визначення критичних точок функції Лагранжа розв'язують систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0, \quad j = \overline{1, j}, \end{cases} \qquad (6.16)$$

і задача на пошук умовного екстремуму функції (6.12) зводиться до пошуку локальних екстремумів функції Лагранжа (відзначимо, що завжди $\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$). Таким чином, якщо точка $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ є точкою умовного екстремуму функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ за умов зв'язку (6.13), то точка $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0)$ - критична точка функції Лагранжа. Коли критичні точки функції Лагранжа знайдено, то їх звичайно "скорочують", вилучаючи з них останні координати $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0$. Далі питання про наявність екстремумів у критичних точках вирішується на підставі достатніх умов – дослідження знаку другого диференціала d^2L функції Лагранжа у критичних точках. При цьому обчислюють $d^2L(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, припускаючи, що всі аргументи функції $x_1, x_2, \ldots, x_n$ незалежні, а далі $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$ замінюють на диференціали неявних функцій зв'язку (6.13).

Якщо другий диференціал функції Лагранжа, обчислений у досліджуваній критичній точці, являє собою додатно (від'ємно) визначену квадратичну форму, то функція (6.12) матиме умовний мінімум (максимум) у цій точці. Невизначеність квадратичної форми свідчить про відсутність умовного екстремуму.

Приклад 2. Знайти умовні екстремуми функції $z = 5 - 3x - 4y$ за умови зв'язку $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$.

Розв'язання. Складаємо функцію Лагранжа

$$L(x; y; z) = 5 - 3x - 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 25).$$

За необхідними умовами (6.16) дістаємо систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = -3 + 2x\lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -4 + 2y\lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 25 = 0, \end{cases}$$

звідки $x = 3$; $y = 4$ при $\lambda = \frac{1}{2}$ та $x = -3$; $y = -4$ при $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Таким чином, функція $z(x, y)$ може мати умовний екстремум у точках $(3;4)$ та $(-3;-4)$. Обчислюємо другий диференціал функції Лагранжа:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad d^2L = 2\lambda\, dx^2 + 2\lambda\, dy^2 = 2\lambda(dx^2 + dy^2).$$

Визначаємо перший диференціал функції $\varphi(x, y)$: $d\varphi = 2x dx + 2y dy$.

Тоді в точках $(\pm 3; \pm 4)$ маємо $6dx + 8dy = 0$ або $dy = -\frac{3}{4}dx$. Звідси $d^2L(3; 4; \frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{1}{2}(dx^2 + (-\frac{3}{4}dx)^2) = \frac{25}{16}dx^2 > 0$ і другий диференціал d^2L є додатно визначеною квадратичною формою, а відтак функція $z(x, y)$ у точці має умовний мінімум $z_{\min}(3,4) = 5 - 9 - 16 = -20$.

Аналогічно знаходимо $d^2L(-3,-4,-\frac{1}{2}) = -\frac{25}{16}dy^2 < 0$ і d^2L у другій точці є від'ємно визначеною квадратичною формою. Отже, функція $z(x,y)$ у точці $(-3;-4)$ матиме умовний максимум $z_{\max}(-3;-4) = 30$.

6. 8. Метод найменших квадратів

На практиці часто доводиться зустрічатися ні з теоретичними, а з емпіричними формулами, які відтворюють безпосередньо результати експериментів або спостережень.

Нехай з експерименту отримано ряд вимірів величин x та y і в результаті дістали таблицю значень

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
y	y_1	y_2	$\ldots$	y_n

Якщо аналітичний вираз функції $y = f(x)$ невідомий або досить складний, то з'являється практично важлива задача: за цими даними встановити емпіричну формулу, яка дасть змогу отримати значення функції y_i при $x = x_i$ $(i = \overline{1,n})$.

Цю задачу з геометричної точки зору можна сформулювати так: за точками, які подано координатами $(x_1\, y_1)$, $(x_2\, y_2)$, $\ldots$, $(x_n\, y_n)$, треба відтворити рівняння кривої, що проходить через ці точки.

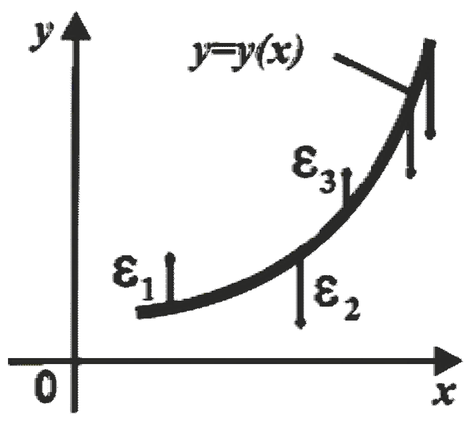


Рис. 6.7

Зрозуміло, що при цьому неможна претендувати на те, щоб формула точно відтворювала результати експерименту, тобто крива не повинна точно проходити через ці точки (рис. 6.7). Бажано охопити стислою формулою всю різноманітність чисельних результатів, так щоб за цією формулою не тільки можна було би (хоч би приблизно) відтворити ці результати, але також легко виконувати інтерполювання, тобто обчислювати значення величини y, які безпосередньо з експерименту не було отримано, а також формула робиться особливо корисною під час застосування до цих результатів методів аналізу.

Отже, побудування емпіричної формули складається з двох етапів: 1) з'ясування загального вигляду цієї формули та 2) визначення найкращих її параметрів.

Якщо характер залежності між величинами x та y невідомий, то вигляд емпіричної формули можна вибрати довільним. Але перевагу віддають простим формулам, які мають хорошу точність. Якщо відсутні відомості про проміжні значення, то за звичаєм припускають, що емпірична функція аналітична, без точок розриву, та графік її – гладка крива.

Вдалий вибір емпіричної формули значною мірою залежить від досвіду та майстерності складача. Велике значення має геометричне зображення отриманих даних у декартовій або в інших спеціальних системах координат.

При певному навику щодо положення точок, які визначають деяку гладку криву, можна приблизно вгадати загальний вигляд залежності за допомогою встановлення схожості між побудованим графіком та зразками відомих кривих.

Так, в багатьох випадках можна обмежитися поліномом $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Нерідко використовують інші елементарні функції.

Що стосується визначення найкращих параметрів, які входять до емпіричної формули, то ця задача легша та розв'язується регулярними методами. Розглянемо метод найменших квадратів.

Нехай проведено $n+1$ експеримент з вимірюванням двох величин x та y, у результаті чого отримано значення $x_0, x_1, \ldots, x_n$ та $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Аналізуючи залежність змінної y від x, встановлено, що невідому функціональну залежність можна описати за допомогою полінома

$$Q_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m, \quad \text{де} \quad m < n. \tag{6.17}$$

При цьому виникає питання: як підібрати коефіцієнти $a_0, a_1, \ldots, a_m$, щоб графіки функції та полінома якнайменше відрізнялися один від одного? Введемо величину

$$S = \sum_{i=0}^{n} [Q_m(x_i) - f(x_i)]^2, \tag{6.18}$$

яка залежить від $m+1$ змінних коефіцієнтів. Якщо ці коефіцієнти вибрати так, щоб функція S виявилася мінімальною, то задача була б розв'язана. Величину $Q_m(x_i) - f(x_i)$ називають ***відхилом.*** У виразі (6.18) береться сума квадратів таких відхилів і знаходиться мінімум. Звідси й назва – ***метод найменших квадратів.***

Для визначення коефіцієнтів $a_0, a_1, \ldots, a_m$ складаємо необхідні умови екстремуму, які утворюють таку систему:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial a_j} = \sum_{i=0}^{n}[a_0 + a_1 x_i + \ldots +$$
$$+ a_j x_i^j + \ldots + a_m x_i^m - f(x_i)]x_i^j = 0, \qquad j = \overline{0,m}. \tag{6.19}$$

Введемо позначення

$$s_k = x_0^k + x_1^k + \ldots + x_n^k, \tag{6.20}$$
$$t_k = x_0^k y_0 + x_1^k y_1 + \ldots + x_n^k y_n, \quad k = \overline{0,m}.$$

Систему (6.19) можна перетворити, враховуючи позначення (6.20), та записати:

$$\begin{cases} a_0 s_0 + a_1 s_1 + \ldots + a_m s_m = t_0; \\ a_0 s_1 + a_1 s_2 + \ldots + a_m s_{m+1} = t_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 s_j + a_1 s_{j+1} + \ldots + a_m s_{j+m} = t_j; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 s_m + a_1 s_{m+1} + \ldots + a_m s_{2m} = t_m, \end{cases} \tag{6.21}$$

де $s_0 = x_0^0 + x_1^2 + \ldots + x_n^0 = n+1$.

Розв'язуючи систему (6.21), знаходимо коефіцієнти полінома (6.17).

Розглянемо випадок, коли функціональну залежність між величинами x та y можна описати за допомогою полінома другого степеня.

Нехай залежність y від x знайдена експериментально набором точок

$$(x_1;\ y_1),\ (x_2;\ y_2),\ \ldots,\ (x_n;\ y_n). \tag{6.22}$$

Проте аналітичну залежність будемо шукати у вигляді формули

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{або} \quad y - ax^2 - bx - c. \tag{6.23}$$

Якщо число точок $n > 3$, то крива (6.23) з трьома вільними параметрами a, b, c зможе пройти через усі точки (6.22) тільки у винятковому випадку (почергова підстановка координат кожної з точок у рівняння (6.23) приведе до системи з n рівнянь з трьома невідомими a, b, c, яка при $n > 0$, як правило, несумісна). Але сталі a, b, c можна підібрати так, щоб загальний відхил кривої (6.23) від системи точок (6.22) був у деякому сенсі малий.

Якщо точка з множини $(x_i;\ y_i)$ (6.22) не лежить на кривій (6.23), то при підстановці координат точки у друге рівняння з (6.23) його ліва частина не обертається на нуль. Замість цього дістанемо

$$y_i - ax_i^2 - bx_i - c = \varepsilon_i, \text{ де } \varepsilon_i \neq 0 \text{ (рис. 6.7).}$$

Величину $\varepsilon_i = y_i - y(x_i)$ називають **нев'язкою**.

Число ε_i визначає відхил точки $(x_i; y_i)$ від кривої (6.23). У якості характеристики відхилу може бути будь-який степінь величини ε_i, зокрема ε_i^2 (на відміну від числа ε_i, яке буває додатним, від'ємним або таким, що дорівнює нулю, величина ε_i^2 невід'ємна). Сумарна квадратична нев'язка для цієї сукупності точок (6.22) характеризується величиною

$$S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - ax_i^2 - bx_i - c]^2.$$

При зміні параметрів a, b, c змінюється і величина – функція аргументів a, b, c: $S = S(a,b,c)$. Природно вважати, що крива (6.23) буде близька до всіє множини точок (6.22) в цілому, якщо функція S досягне мінімуму, існування якого зрозуміло за змістом задачі. Необхідні умови екстремуму приводять до нормальної системи для визначення коефіцієнтів a, b, c.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = -2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = -2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial c} = -2\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) = 0. \end{cases}$$

Або

$$\begin{cases} a\sum x_i^4 + b\sum x_i^3 + c\sum x_i^2 = \sum x_i^2 y_i, \\ a\sum x_i^3 + b\sum x_i^2 + c\sum x_i = \sum x_i y_i, \\ a\sum x_i^2 + b\sum x_i + c\,n = \sum y_i. \end{cases} \qquad (6.24)$$

Підсумовування тут виконується за всіма значеннями $i = \overline{1,n}$.

Як тільки отримана система трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими a, b, c буде розв'язана, визначиться і крива (6.23).

Приклад 1. Маємо набір точок:

$$(-2;\ 2{,}5),\quad (-1;\ 0{,}5),\quad (0;\ -1),\quad (1;\ 0{,}5),\quad (2;\ 2{,}5).$$

Визначити за методом найменших квадратів залежність y від x, покладаючи $y = ax^2 + bx + c$.

Розв'язання. Для обчислення коефіцієнтів нормальної системи (6.24) складемо табл. 1.

Таблиця 1

x_i	-2	-1	0	1	2	$\sum x_i = 0$
y_i	2,5	0,5	-1	0,5	2,5	$\sum y_i = 5$
x_i^2	4	1	0	1	4	$\sum x_i^2 = 10$
x_i^3	-8	-1	0	1	8	$\sum x_i^3 = 0$
x_i^4	16	1	0	1	16	$\sum x_i^4 = 34$
$x_i y_i$	-5	-0,5	0	0,5	5	$\sum x_i y_i = 0$
$x_i^2 y_i$	10	0,5	0	0,5	10	$\sum x_i^2 y_i = 21$
$y(x_i)$	2,6	0,2	-0,6	0.2	2,6	$y = 0{,}8x^2 - 0{,}6$
ε_i	-0,1	0,3	-0,4	0,3	-0,1	$\sum \varepsilon_i = 0$

Виходячи з таблиці система (6.24) набуде вигляду

$$\begin{cases} 34a + 10c = 21, \\ 10b = 0, \\ 10a + 5c = 5 \end{cases} \Rightarrow \quad a = 0{,}8; \qquad b = 0; \qquad b = -0{,}6.$$

Отже, $y = 0{,}8x^2 - 0{,}6$. Підставимо в це рівняння абсциси даних точок та обчислимо розрахункові значення ординат $y(x_i)$ (восьмий рядок таблиці). Відхилення $y_i - y(x_i)$ визначить величину ε_i для кожної з даних точок в умовах задачі (останній рядок таблиці). На рис. 6.8 побудована, знайдена за методом найменших квадратів, парабола $y = 0{,}8x^2 - 0{,}6$ та задана система точок.

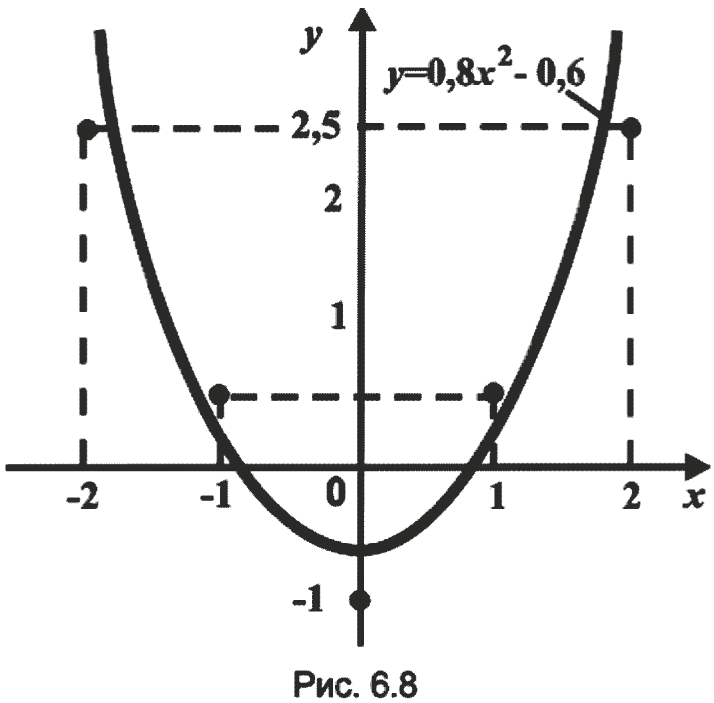


Рис. 6.8

Приклад 2. Результати експерименту характеризуються точками:

(7; 83,7), (12; 72,9), (17; 63,2), (22; 54,7), (27; 47,5), (32; 41,4), (37; 36,3).

Знайти за методом найменших квадратів аналітичну залежність y від x у вигляді емпіричної формули $y = ax^2 + bx + c$.

Розв'язання. Щоб знайти коефіцієнти $a, b, c,$ треба скласти та розв'язати систему (6.24). Це легко зробити за допомогою табл. 2.

Таблиця 2

x_i	7	12	17	22	27	32	37	$\sum x_i = 154$
y_i	83,7	72,9	63,2	54,7	47,5	41,4	36,3	$\sum y_i = 399{,}7$
x_i^2	49	144	289	484	729	1024	1369	$\sum x_i^2 = 4088$
x_i^3	343	1728	4913	10648	19683	32768	50653	$\sum x_i^3 = 120736$
x_i^4	2401	20736	83521	234256	531441	1048576	1874161	$\sum x_i^4 = 3795092$
$x_i y_i$	585,9	874,8	1074,4	1203,4	1282,5	1324,8	1343,1	$\sum x_i y_i = 7688{,}9$
$x_i^2 y_i$	4101,3	10497,6	18264,8	26474,8	34627,5	42393,6	49694,7	$\sum x_i^2 y_i = 186054{,}3$
$y(x_i)$	83,69	72,88	63,24	54,76	47,46	41,32	36,36	
ε_i	0,01	0,02	- 0,04	- 0,06	0,04	0,08	-0,06	

Отже, нормальна система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів a, b, c має вигляд:

$$\begin{cases} 4088a + 154b + 7c = 399{,}7; \\ 120736a + 4088b + 154c = 7688{,}9; \\ 3795092a + 120736b + 4088c = 186054{,}3. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, дістанемо

$$a = 0{,}023381, \qquad b = -2{,}6066, \qquad c = 100{,}791.$$

Таким чином, емпірична формула має вигляд

$$y(x_i) = 0{,}02338x^2 - 2{,}6066x + 100{,}79.$$

Табл. 2 показує узгодженість емпіричної формули з експериментальними даними (останній рядок). Характеристика відхилу буде $\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = 0{,}0173.$

Метод найменших квадратів має таку перевагу, що коли сума квадратів відхилень мала, то самі ці відхилення також малі за абсолютною величиною.

Недолік метода − це громіздкість обчислень. Тому до цього методу звертаються під час обробки спостережень високої точності, коли треба отримати досить точні значення параметрів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дубовик В.П. Вища математика : навч. посіб. / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – Київ : А.С.К., 2003. – 640 с.
2. Овчинников П.П. Вища математика : підручник / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко ; під заг. ред. П.П. Овчинникова. – Київ : Техніка, 2000. – Ч. 1. – 591 с.
3. Сушко С.О. Математика для економічних спеціальностей : навч. посіб. / С.О. Сушко, Л.Я. Фомичова, Т.С. Кагадій ; М-во освіти і наки України, Нац. гірн. акад. України. – Дніпропетровськ : НГА України, 2000. – 375 с.
4. Фомичова Л.Я. Вища математика. Диференціальне числення у прикладах та задачах : навч. посіб. / Л.Я. Фомичова, В.М. Почепов, С.О. Сушко, В.В. Фомичов. – Дніпропетровськ: ТОВ ЛізуновПрес, 2012. – 156 с.
5. Фомичова Л.Я. Лінійна алгебра у прикладах та задачах : навч. посіб. / Л.Я. Фомичова, В.В. Фомичов, В.М. Почепов та ін.; М-во освіти і науки України, Нац. Гірн. ун-т. – 2-е вид., випр. – Дніпропетровськ: Національний гірничий університет, 2010. – 123 с.
6. Фомичова Л.Я. Математика 1 : конспект лекцій / Л.Я. Фомичова. – Дніпро : ЛізуновПрес, 2017. – 72 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЗЧИК

Н а в ч а л ь н е   в и д а н н я

Фомичова Людмила Яківна

Почепов Віктор Миколайович

Фомичов Вадим Володимирович

МАТЕМАТИКА 1

Лінійна і векторна алгебра
Аналітична геометрія
Вступ до математичного аналізу
Диференціальне числення

Навчальний посібник

Редактор Ю.В. Рачковська

Підписано до друку 30.05.2019. Формат 30х42/4.
Папір офсетний. Ризографія. Ум. друк. арк. 8,7.
Обл.-вид. арк. 8,7. Тираж 50 пр. Зам. №

Підготовлено до друку та видрукувано
у Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка».
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004.
49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19