

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

В.М. ГОРЄВ

ТЕХНІЧНА ЕЛЕКТРОДИНАМІКА

Навчальний посібник

Дніпро
2019

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»



В.М. ГОРЄВ

ТЕХНІЧНА ЕЛЕКТРОДИНАМІКА

Навчальний посібник

Дніпро
НТУ «ДП»
2019

УДК 537.8

Г 68

Рекомендовано вченою радою Національного технічного університету «Дніпровська політехніка» як навчальний посібник для студентів спеціальності 172 телекомунікації та радіотехніка (протокол № 20 від 25.10.2019).

Рецензенти:

О.Й. Соколовський, д-р. фіз.-мат. наук, проф. (Дніпровський національний університет ім. Олесь Гончара);

М.О. Алексєєв, д-р. техн. наук, проф. (Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»).

Горєв В.М.

Г 68 Технічна електродинаміка: навч. пос. / В.М. Горєв; Міністерство освіти і науки України, Нац. техн. у-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2019. – 91 с.

ISBN 978-966-350-716-3

Описано математичні основи технічної електродинаміки, її базові постулати та фундаментальні наслідки з них. Розглянуто найвідоміші аналітично розв'язувані задачі технічної електродинаміки.

Навчальний посібник охоплює матеріал, передбачений програмою дисципліни та радіотехніка, і може бути корисним студентам інших спеціальностей, що вивчають технічну електродинаміку.

УДК 537.8

ISBN 978-966-350-716-3

© В. М. Горєв, 2019

© НТУ «Дніпровська політехніка», 2019

Зміст

1. Математичні основи технічної електродинаміки.....	5
1.1. Базові визначення.....	5
1.2. Індексний запис.....	7
1.3. Деякі корисні тотожності та їх доведення	9
1.4. Теорема Остроградського–Гауса та формула Стокса.....	12
1.5. Загальний вигляд закону зміни або збереження скалярної величини у фізиці.....	12
2. Рівняння Максвелла.....	15
2.1. Величини, що описують заряди і поле та їх розмірності.....	15
2.2. Рівняння Максвелла та рівняння неперервності.....	18
2.3. Вектор Пойнтігна та закон збереження енергії.....	19
2.4. Поведінка полів на межі двох середовищ.....	21
3. Метод комплексних амплітуд. Випадок монохроматичного поля.....	26
3.1. Визначення комплексної амплітуди.....	26
3.2. Рівняння Максвелла та закон збереження заряду в термінах комплексних амплітуд.....	27
3.3. Матеріальні рівняння для середовищ з втратами енергії.....	29
3.4. Комплексний вектор Пойнтінга.....	31
3.5. Закон зміни енергії в термінах комплексних амплітуд для монохроматичного випадку.....	32
3.6. Рівняння балансу потужностей в термінах струму провідності та стороннього струму.....	35
4. Плоска монохроматична хвиля у необмеженому просторі.....	38
4.1. Хвильове рівняння.....	38
4.2. Розв’язок хвильового рівняння для плоскої монохроматичної хвилі у необмеженому просторі.....	40

4.3. Властивості полів у плоскій монохроматичній хвилі в необмеженому просторі.....	43
4.4. Хвилі у середовищі з втратами та у середовищі без втрат.....	46
5. Загальні властивості хвиль у напрямних системах.....	50
5.1. Зв'язок між повздовжніми та поперечними компонентами хвиль...	50
5.2. Класифікація хвиль у напрямних системах.....	53
5.2.1. TEM–хвилі.....	53
5.2.2. TM–хвилі.....	54
5.2.3. TE–хвилі.....	55
5.2.4. Гібридні хвилі.....	56
6. Прямокутний хвилевід.....	58
6.1. Граничні умови на стінках хвилеводу.....	58
6.2. TM–хвилі у прямокутному хвилеводі.....	60
6.3. TE–хвилі у прямокутному хвилеводі.....	64
6.4. Загальні властивості хвильового процесу у плоскому хвилеводі для середовища усередині без втрат.....	66
7. Двопроводова довга лінія.....	70
7.1. Двопроводова довга лінія та параметри, які її описують.....	70
7.2. Виведення телеграфних рівнянь.....	71
7.3. Нескінченна лінія без втрат.....	74
7.3.1. Розв'язання диференціального рівняння відповідного типу...	75
7.3.2. Розв'язок для струму на напруги вздовж лінії.....	77
7.4. Нескінченна лінія без спотворення.....	79
7.5. Задача про включення лінії скінченної довжини без втрат.....	82
Список рекомендованої літератури.....	90

1. Математичні основи технічної електродинаміки

1.1. Базові визначення

Позначимо орти осей декартової системи координат як \vec{e}_x , \vec{e}_y та \vec{e}_z .

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a} = \vec{e}_x a_x + \vec{e}_y a_y + \vec{e}_z a_z$ та $\vec{b} = \vec{e}_x b_x + \vec{e}_y b_y + \vec{e}_z b_z$ є число, яке позначають (\vec{a}, \vec{b}) , та яке за визначенням дорівнює

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (1.1)$$

Фізичний сенс скалярного добутку векторів – це добуток модулів векторів на косинус кута між ними:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha, \quad \alpha - \text{кут між } \vec{a} \text{ та } \vec{b}. \quad (1.2)$$

З формули (1.2) очевидно, що скалярний добуток перпендикулярних один одному векторів дорівнює нулю.

Векторним добутком векторів $\vec{a} = \vec{e}_x a_x + \vec{e}_y a_y + \vec{e}_z a_z$ та $\vec{b} = \vec{e}_x b_x + \vec{e}_y b_y + \vec{e}_z b_z$ є вектор, який позначають $[\vec{a}, \vec{b}]$, та який за визначенням дорівнює

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x (a_y b_z - a_z b_y) + \vec{e}_y (a_z b_x - a_x b_z) + \vec{e}_z (a_x b_y - a_y b_x). \quad (1.3)$$

Векторний добуток $[\vec{a}, \vec{b}]$ є перпендикулярним до обох векторів \vec{a} та \vec{b} , напрямлений за правилом правого гвинта, та за модулем дорівнює площі паралелограма, побудованого на даних векторах:

$$|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha, \quad \alpha - \text{кут між } \vec{a} \text{ та } \vec{b}. \quad (1.4)$$

З формули (1.4) очевидно, що якщо вектори \vec{a} та \vec{b} колінеарні, то їх векторний добуток дорівнює нулю.

Слід зауважити, що за домовленістю систему координат завжди обирають так, щоб вектори \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z утворювали праву трійку:

$$[\vec{e}_x, \vec{e}_y] = \vec{e}_z. \quad (1.5)$$

Радіус-вектором точки з декартовими координатами (x, y, z) є вектор \vec{r} , який проведено з початку координат до даної точки:

$$\vec{r} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z. \quad (1.6)$$

Нехай задано скалярну величину, що залежить від координат $\varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z)$. Тоді *градієнтом* цієї величини є *векторна* величина, що залежить від координат $\text{grad}\varphi(x, y, z)$, що за визначенням дорівнює

$$\text{grad}\varphi(x, y, z) = \vec{e}_x \frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial z}. \quad (1.7)$$

Наприклад, нехай задано величину $\varphi(\vec{r}) = r = |\vec{r}|$. Порахуємо її градієнт:

$$\begin{aligned} \text{grad}|\vec{r}| &= \text{grad}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \vec{e}_x \frac{\partial\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial y} + \\ &+ \vec{e}_z \frac{\partial\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial z} = \vec{e}_x \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \vec{e}_y \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \\ &+ \vec{e}_z \frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\vec{r}}{r}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

тож $\text{grad}r = \vec{r}/r$.

Нехай задано векторну величину, що залежить від координат $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(x, y, z) = \vec{e}_x A_x(x, y, z) + \vec{e}_y A_y(x, y, z) + \vec{e}_z A_z(x, y, z)$. Тоді *дивергенцією* цієї величини називається *скалярна* величина, що за визначенням дорівнює

$$\text{div}\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(x, y, z)}{\partial z}. \quad (1.9)$$

Наприклад, знайдемо дивергенцію від величини $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{r}$:

$$\text{div}(\vec{r}) = \text{div}(\vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3. \quad (1.10)$$

Ротором векторної величини $\vec{A}(\vec{r})$ є векторна величина, що за визначенням дорівнює

$$\text{rot}\vec{A}(\vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \quad (1.11)$$

Наприклад, знайдемо ротор від величини $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{r} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z$:

$$\text{rot}(\vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z) = \vec{e}_x \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) = 0. \quad (1.12)$$

1.2. Індексний запис

«В лоб» записувати вище вказані перетворення досить громіздко, тому широко використовується так званий індексний запис. Ідея цього запису наступна: x -координаті відповідає індекс 1, y -координаті відповідає індекс 2, z -координаті відповідає індекс 3. Іншими словами, компоненти будь-якого вектора \vec{a} записуються наступним чином: $a_x = a_1$, $a_y = a_2$, $a_z = a_3$, самі координати записуються наступним чином: $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$. При цьому використовується так зване правило підсумовування Ейнштейна: по індексах, що попарно повторюються та знаходяться по один бік від знаку рівності, проводиться підсумовування.

Відповідно, скалярний добуток у індексному записі записується наступним чином:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_i b_i. \quad (1.13)$$

Пояснимо, чому так. Індекс i попарно повторюється по один бік від знаку рівності, тож по ньому проводиться підсумовування: $a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

Тоді маємо $(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, що є у повній

відповідності з виразом (1.1). Зауважимо, що індекс, за яким проводиться підсумовування, часто називають «німим» індексом.

Аналогічно, градієнт та дивергенція в індексній формі є наступними:

$$\text{grad}\varphi = \vec{e}_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \quad \text{div}A = \frac{\partial A_i}{\partial x_i}. \quad (1.14)$$

Читачу пропонується самостійно провести аналогію між виразом (1.14) та відповідними виразами (1.7) та (1.9).

Зауважимо також, що градієнт (як і будь-який вектор) часто записують покомпонентно:

$$(\text{grad}\varphi)_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}. \quad (1.15)$$

Як бачимо, індекс i у виразі (1.15) не є німим – він повторюється по різні боки від знаку рівності. Такий індекс називають «словомовним» (російською мовою – «говорящим»). По словомовному індексу підсумовування не проводиться, він означає покомпонентну рівність. Іншими словами, вираз (1.16) еквівалентний трьом рівностям:

$$\begin{aligned} (\text{grad}\varphi)_1 = (\text{grad}\varphi)_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad (\text{grad}\varphi)_2 = (\text{grad}\varphi)_y = \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \\ (\text{grad}\varphi)_3 = (\text{grad}\varphi)_z = \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Векторний добуток індексною формою записують за допомогою так званого символу Леві–Чивіті ε_{ijk} , який вводиться наступним чином:

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{312} = \varepsilon_{231} = 1, \quad \varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = -1, \quad (1.18)$$

всі інші компоненти ε_{ijk} , тобто ті, для яких хоча б два індекси є однаковими, дорівнюють нулю. Як бачимо, символ Леві–Чивіті змінює знак при перестановці сусідніх індексів, та не змінює знак при циклічній перестановці індексів:

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{jki}, \quad \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}, \quad \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}. \quad (1.19)$$

Символ Леві–Чивіті має наступну корисну властивість:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jn} \delta_{km} - \delta_{kn} \delta_{jm}, \quad (1.20)$$

де

$$\delta_{jm} = \begin{cases} 1, & j = m \\ 0, & j \neq m \end{cases} \quad \text{– символ Кронекера.} \quad (1.21)$$

При підсумовуванні символ Кронекера «захоплює» індекси:

$$A_i \delta_{im} = A_m. \quad (1.22)$$

Відповідно, векторний добуток записується наступним чином:

$$[\vec{a}, \vec{b}]_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k. \quad (1.23)$$

Давайте розберемось, чому так. Розглянемо x -компоненту виразу (1.23):

$$[\vec{a}, \vec{b}]_1 = \varepsilon_{1jk} a_j b_k, \quad (1.24)$$

індекси j та k німі, за ними проводиться підсумовування. З цього підсумовування «виживуть» лише члени з $j=2, k=3$ та $j=3, k=2$, бо всі інші члени дорівнюють нулю через визначення символу Леві–Чивіті. Тому наслідком (1.24) є

$$[\vec{a}, \vec{b}]_1 = [\vec{a}, \vec{b}]_x = \varepsilon_{123} a_2 b_3 + \varepsilon_{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2 = a_y b_z - a_z b_y, \quad (1.25)$$

що узгоджується з (1.3). Читачу пропонується самостійно впевнитись, що y - та z -компоненти виразу (1.23) також узгоджується з виразом (1.3).

Аналогічно ротор записується індексною формою наступним чином:

$$(\text{rot} \vec{A})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j}. \quad (1.26)$$

1.3. Деякі корисні тотожності та їх доведення

Тотожність 1:

$$\text{div}(\text{rot} \vec{A}) = 0. \quad (1.27)$$

Доведення:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{A}) = \frac{\partial(\operatorname{rot}\vec{A})_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j}}{\partial x_i} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_j \partial x_i}. \quad (1.28)$$

Надалі використаємо той факт, що німі індекси можна перейменувати.

Перейменуємо німі індекси $i \leftrightarrow j$ у наступному виразі:

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_j \partial x_i} = \varepsilon_{jik} \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (1.29)$$

Тоді з урахуванням (1.28) та (1.29) маємо

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{A}) = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_j} + \varepsilon_{jik} \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \frac{1}{2} (\varepsilon_{ijk} + \varepsilon_{jik}) \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (1.30)$$

На основі (1.19) бачимо, що $\varepsilon_{ijk} + \varepsilon_{jik} = 0$, що дає $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{A}) = 0$, що і треба було довести.

Тотожність 2:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = 0. \quad (1.31)$$

Доведення проводиться аналогічно доведенню тотожності 1:

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi))_i &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial(\operatorname{grad}\varphi)_k}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} = \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{1}{2} \underbrace{(\varepsilon_{ijk} + \varepsilon_{ikj})}_{=0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} = 0. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Тотожність 3:

$$\operatorname{div}[\vec{a}, \vec{b}] = (\vec{b}, \operatorname{rot}\vec{a}) - (\vec{a}, \operatorname{rot}\vec{b}). \quad (1.33)$$

Доведення. З одного боку,

$$\operatorname{div}[\vec{a}, \vec{b}] = \frac{\partial[\vec{a}, \vec{b}]_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \varepsilon_{ijk} a_j b_k}{\partial x_i} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_j b_k}{\partial x_i}. \quad (1.34)$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned}
(\vec{b}, \text{rot}\vec{a}) - (\vec{a}, \text{rot}\vec{b}) &= b_j (\text{rot}\vec{a})_j - a_j (\text{rot}\vec{b})_j = b_j \underbrace{\varepsilon_{jik}}_{k \leftrightarrow j} \frac{\partial a_k}{\partial x_i} - a_j \varepsilon_{jik} \frac{\partial b_k}{\partial x_i} = \\
&= b_k \underbrace{\varepsilon_{kij}}_{=\varepsilon_{ijk}} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} - a_j \underbrace{\varepsilon_{jik}}_{=-\varepsilon_{ijk}} \frac{\partial b_k}{\partial x_i} = \varepsilon_{ijk} \left(b_k \frac{\partial a_j}{\partial x_i} + a_j \frac{\partial b_k}{\partial x_i} \right) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_j b_k}{\partial x_i}.
\end{aligned} \tag{1.35}$$

На основі виразів (1.34) та (1.35) бачимо, що тотожність (1.33) виконується.

Тотожність 4:

$$\text{rotrot}\vec{a} = \text{grad}(\text{div}\vec{a}) - \Delta\vec{a}, \tag{1.36}$$

де

$$(\Delta\vec{a})_i = \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2 a_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_i}{\partial z^2}, \tag{1.37}$$

оператор Δ має назву оператора Лапласа.

Доведення. З одного боку,

$$(\text{rotrot}\vec{a})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial (\text{rot}\vec{a})_k}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \varepsilon_{knm} \frac{\partial a_m}{\partial x_n}}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knm} \frac{\partial^2 a_m}{\partial x_j \partial x_n}. \tag{1.38}$$

На основі (1.20) та (1.22) звідси маємо, що

$$(\text{rotrot}\vec{a})_i = (\delta_{in} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jn}) \frac{\partial^2 a_m}{\partial x_j \partial x_n} = \frac{\partial^2 a_j}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_j}. \tag{1.39}$$

З іншого боку,

$$(\text{grad}(\text{div}\vec{a}) - \Delta\vec{a})_i = \frac{\partial \text{div}\vec{a}}{\partial x_i} - (\Delta\vec{a})_i = \frac{\partial (\partial a_j / \partial x_j)}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2 a_j}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_j} \tag{1.40}$$

Тож на основі (1.39) та (1.40) бачимо, що тотожність (1.36) виконується.

Тотожність 5:

$$([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{b}, [\vec{c}, \vec{a}]), \tag{1.41}$$

Доведення:

$$([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = [\vec{a}, \vec{b}]_i c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k c_i = \varepsilon_{kij} b_k c_i a_j = b_k [\vec{c}, \vec{a}]_k = (\vec{b}, [\vec{c}, \vec{a}]). \tag{1.42}$$

Тотожності, доведені у цьому розділі, будуть використовуватись у подальших розділах курсу.

1.4. Теорема Остроградського–Гауса та формула Стокса

Нехай \vec{A} є векторна величина $\vec{A}(\vec{r})$ та деякий об'єм простору V , який обмежено замкненою поверхнею S . Тоді виконується *теорема Остроградського–Гауса*:

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{A} \cdot dV = \oiint_S (\vec{A}, \vec{dS}), \quad (1.43)$$

де $\vec{dS} = \vec{n}dS$, dS – елементарний елемент поверхні, \vec{n} – одиничний вектор, перпендикулярний до цього елемента та напрямлений ззовні об'єму V . У лівій частині виразу (1.43) стоїть тривимірний інтеграл від дивергенції \vec{A} по об'єму V . Інтеграл по замкненій поверхні, що стоїть у правій частині виразу (1.43), називають потоком вектора \vec{A} через поверхню S . «Кружечок» у позначенні цього інтегралу підкреслює той факт, що інтеграл взято по замкненій поверхні.

Нехай маємо незамкнену поверхню S , що обмежена замкненим контуром l . Тоді має місце *формула Стокса*:

$$\iint_S (\operatorname{rot} \vec{A}, \vec{dS}) = \oint_l (\vec{A}, \vec{dl}), \quad (1.44)$$

де \vec{dl} – вектор, співнаправлений з елементарним елементом контура, та за модулем дорівнює елементарному елементу контура. Інтеграл у правій частині виразу (1.44) називають циркуляцією вектора \vec{A} за контуром l .

1.5. Загальний вигляд закону зміни або збереження скалярної величини у фізиці

Нехай маємо деяку скалярну фізичну величину, яка може залежати від часу $A(t)$. Тоді у загальному вигляді *закон її зміни* у диференціальній формі є наступним:

$$\frac{\partial a(\vec{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}(\vec{r}, t)) = b(\vec{r}, t), \quad (1.45)$$

де $a(\vec{r}, t)$ – густина даної величини, $\vec{j}(\vec{r}, t)$ – густина потоку даної величини, $b(\vec{r}, t)$ – джерело даної величини (фактично, густина потужності зміни даної величини). Якщо $b(\vec{r}, t) = 0$, то вираз (1.45) є *законом збереження* величини $A(t)$.

Розберемось, чому. Візьмемо інтеграл від обох частин виразу (1.45) за об'ємом V , що обмежений нескінченно віддаленою поверхнею S , на якій, фізично очевидно, потік відповідної величини дорівнює нулю. Матимемо наступне:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V a(\vec{r}, t) dV + \iiint_V \operatorname{div}(\vec{j}(\vec{r}, t)) dV = \iiint_V b(\vec{r}, t) dV. \quad (1.46)$$

За теоремою Остроградського–Гауса перепишемо цей вираз:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V a(\vec{r}, t) dV + \oiint_S (\vec{j}(\vec{r}, t), \vec{dS}) = \iiint_V b(\vec{r}, t) dV. \quad (1.47)$$

Так як поверхня нескінченно віддалена, і на ній густина потоку $\vec{j}(\vec{r}, t) = 0$, то, очевидно, приходимо до виразу

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V a(\vec{r}, t) dV = \iiint_V b(\vec{r}, t) dV. \quad (1.48)$$

Позначимо

$$B(t) = \iiint_V b(\vec{r}, t) dV. \quad (1.49)$$

Також очевидно, що

$$A(t) = \iiint_V a(\vec{r}, t) dV, \quad (1.50)$$

тобто кількість величини A у всьому просторі – це інтеграл від густини цієї величини по всьому простору. Тоді маємо закон зміни величини у інтегральній формі:

$$\frac{\partial A(t)}{\partial t} = B(t), \quad (1.51)$$

звідки очевидно, що фізичний сенс величини $B(t)$ – це потужність зміни (швидкість зміни) величини $A(t)$ з часом.

Також очевидно, що при $b(\vec{r}, t) = 0$ матимемо $B(t) = 0$, та, відповідно, $A(t) = \text{const}$, що свідчить про те, що величина $A(t)$ зберігається з часом у всьому просторі. Локально густина $a(\vec{r}, t)$ може бути різною у різних точках простору в різні моменти часу, проте загальна кількість величини A у просторі з часом не змінюється. Тобто при $b(\vec{r}, t) = 0$ дійсно вираз (1.45) дійсно описує закон збереження величини $A(t)$.

2. Рівняння Максвелла

2.1. Величини, що описують заряди і поле та їх розмірності

Одразу зауважимо, що викладення матеріалу буде вестись в системі одиниць вимірювання СІ.

Густина заряду – скалярна величина ρ , що за визначенням дорівнює

$$\rho = \frac{dq}{dV}, \quad (2.1)$$

де dV – об'єм, який є дуже малим порівняно з об'ємом системи, проте макроскопічним, та dq – це заряд, який розміщено у об'ємі dV .

Густина струму – векторна величина \vec{j} , що за визначенням дорівнює

$$\vec{j} = \vec{n}_0 \frac{dI}{dS}, \quad (2.2)$$

де dS – елементарна площадка, яка є перпендикулярною до руху зарядів, \vec{n}_0 – одиничний вектор, який напрямлено за рухом позитивних зарядів та dI – струм, що проходить через елементарну площадку dS . Слід зауважити, що вектор \vec{n}_0 є перпендикулярним до площадки dS .

В загальному випадку густина заряду та густина струму залежать від координат та часу: $\rho = \rho(\vec{r}, t)$, $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t)$.

Силову характеристикою електричного поля є *напруженість електричного поля* $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$, а силову характеристикою магнітного поля є *магнітна індукція* $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$. На точковий заряд q , що знаходиться в електромагнітному полі, діє сила

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}], \quad (2.3)$$

де \vec{v} – вектор швидкості заряду.

Крім електричного поля та магнітної індукції вводять ще дві величини, які описують поле – *електричну індукцію* $\vec{D} = \vec{D}(\vec{r}, t)$ та *напруженість магнітного*

поля $\vec{H} = \vec{H}(\vec{r}, t)$. Величини \vec{D} , \vec{H} пов'язані з величинами \vec{E} , \vec{B} через матеріальні рівняння.

Матеріальні рівняння залежать від середовища. Наприклад, для вакууму вони мають вигляд

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t), \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{H}(\vec{r}, t), \quad (2.4)$$

де μ_0 та ε_0 – відповідно, магнітна та електрична сталі,

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}, \quad (2.5)$$

c – швидкість світла. Для найпростіших ізотропних не феромагнітних та не сегнетоелектричних середовищ, у випадку не сильних полів, які не сильно змінюються у просторі і часі, матеріальні рівняння мають вигляд

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t), \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu \mu_0 \vec{H}(\vec{r}, t), \quad (2.6)$$

де ε та μ – відповідно, діелектрична та магнітна проникливість середовища. Діелектрична проникність середовища вказує, у скільки разів сила взаємодії між двома точковими зарядами в середовищі менша за відповідну у вакуумі. Магнітна проникливість вказує, у скільки разів зовнішнє магнітне поле може бути посилено в даному середовищі. Для вакууму $\varepsilon = \mu = 1$. Слід зауважити, що в загальному випадку матеріальні рівняння можуть бути набагато складнішими за (2.6).

У електродинаміці використовується багато одиниць розмірностей, тому важливо вміти виразити ці одиниці в термінах базових одиниць СІ. Як відомо, одними з базових одиниць СІ є метр, кілограм, секунда та ампер. Через ці чотири одиниці виражається розмірність всіх вказаних вище величин. З формул (2.1) та (2.2) очевидно, що

$$[\rho] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3} = \frac{\text{А} \cdot \text{с}}{\text{м}^3}, \quad [\vec{j}] = \frac{\text{А}}{\text{м}^2}. \quad (2.7)$$

На основі (2.3) маємо

$$[\vec{E}] = \frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} \cdot \frac{1}{\text{м}} = \frac{\text{В}}{\text{м}}, \quad (2.8)$$

зазвичай розмірність напруженості електричного поля вказують як В/м. Виразимо також її через базові одиниці СІ:

$$[\vec{E}] = \frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \frac{1}{\text{А} \cdot \text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{с}^3}. \quad (2.9)$$

Магнітну індукцію вимірюють у Теслах: $[\vec{B}] = \text{Тл}$. Виразимо цю розмірність через базові одиниці СІ. З (2.3) бачимо, що

$$[\vec{B}] = \text{Тл} = \frac{[\vec{E}]}{[\vec{v}]} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{с}^3 \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг}}{\text{А} \cdot \text{с}^2}. \quad (2.10)$$

Виразимо розмірність магнітної сталості:

$$[\mu_0] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}} \cdot \frac{1}{\text{м}} = \frac{\text{В}}{\text{м}} \cdot \frac{\text{с}}{\text{А}} = [\text{E}] \cdot \frac{\text{с}}{\text{А}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{с}^3} \cdot \frac{\text{с}}{\text{А}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^2}, \quad (2.11)$$

та, відповідно, електричної сталості:

$$[\varepsilon_0] = \frac{1}{[\mu_0] \cdot [c]^2} = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}} \cdot \frac{\text{с}^2}{\text{м}^2} = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{с}^4}{\text{кг} \cdot \text{м}^3}. \quad (2.12)$$

Зауважимо також, що розмірність електричної сталості часто записують як Ф/м. Дійсно,

$$\Phi = \frac{\text{Кл}}{\text{В}} = \frac{\text{Кл}^2}{\text{Дж}} = \frac{\text{Кл}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{с}^4}{\text{кг} \cdot \text{м}^2}, \quad (2.13)$$

Звідки очевидно, що

$$[\varepsilon_0] = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{с}^4}{\text{кг} \cdot \text{м}^3} = \frac{\Phi}{\text{м}}. \quad (2.14)$$

Діелектрична та магнітна проникності є безрозмірними:

$$[\varepsilon] = [\mu] = 1. \quad (2.15)$$

Залишилось виразити розмірності електричної індукції та напруженості магнітного поля. Це можна зробити на основі виразу (2.4):

$$[\vec{D}] = [\varepsilon_0][\vec{E}] = \frac{\text{A}^2 \cdot \text{c}^4}{\text{кг} \cdot \text{м}^3} \cdot \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{A} \cdot \text{c}^3} = \frac{\text{A} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} \quad (2.16)$$

та

$$[\vec{H}] = \frac{[\vec{B}]}{[\mu_0]} = \frac{\text{кг}}{\text{A} \cdot \text{c}^2} \cdot \frac{\text{A}^2 \cdot \text{c}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{\text{A}}{\text{м}}. \quad (2.17)$$

Отримані розмірності вище вказаних величин в термінах базових розмірностей системи СІ є дуже важливими – вони дозволяють перевіряти розмірності у всіх подальших обчисленнях. Більш того, як буде видно в подальшому, на основі розмірних міркувань можна пояснювати фізичний сенс деяких нових отриманих величин.

2.2. Рівняння Максвела та рівняння неперервності

Рівняння Максвела є математично сформульованими фундаментальними постулатами електродинаміки. Вони написані на основі величезної кількості експериментальних даних. Явний вигляд цих рівнянь наступний:

$$\text{div}\vec{D} = \rho, \quad \text{div}\vec{B} = 0, \quad \text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j}. \quad (2.18)$$

Слід зауважити, що рівняння Максвела мають бути доповнені матеріальними рівняннями. *Усі ефекти електродинаміки є наслідками рівнянь Максвела.*

Одним з найважливіших рівнянь електродинаміки є рівняння неперервності. Продиференціюємо за часом перше рівняння у (2.18):

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{div}\vec{D} = \frac{\partial}{\partial t} \rho \Rightarrow \text{div} \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial\rho}{\partial t}, \quad (2.19)$$

зауважимо, що так як дивергенція, ротор та градієнт є операціями взяття частинних похідних за координатами, а порядок диференціювання можна змінювати місцями, то можна змінювати місцями вище названі операції та диференціювання за часом. Відповідно, на основі (2.18) та (2.19) маємо

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{H} - \vec{j}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{H}) - \operatorname{div}\vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (2.20)$$

та згідно тотожності (1.27) перепишемо цей вираз як

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0. \quad (2.21)$$

Рівняння (2.21) є *рівнянням неперервності*. Фізичний сенс цього рівняння є очевидним з (1.45) – воно описує *закон збереження заряду*.

2.3. Вектор Пойнтігна та закон збереження енергії

Цей підрозділ присвячено виведенню закону збереження енергії для найпростіших середовищ, що описуються матеріальними рівняннями (2.6).

Розглянемо вираз $(\vec{E}, \operatorname{rot}\vec{H}) - (\vec{H}, \operatorname{rot}\vec{E})$. З одного боку, на основі рівнянь Максвелла (2.18) маємо

$$\begin{aligned} (\vec{E}, \operatorname{rot}\vec{H}) - (\vec{H}, \operatorname{rot}\vec{E}) &= \left(\vec{E}, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \right) - \left(\vec{H}, -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \\ &= \left(\vec{E}, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) + \left(\vec{H}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) + (\vec{E}, \vec{j}) = \varepsilon \varepsilon_0 \left(\vec{E}, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) + \mu \mu_0 \left(\vec{H}, \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) + (\vec{E}, \vec{j}) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2 + \mu \mu_0 H^2}{2} \right) + (\vec{E}, \vec{j}), \end{aligned} \quad (2.22)$$

остання рівність у (2.22) має місце, бо

$$\frac{\partial E^2}{\partial t} = \frac{\partial E_i E_i}{\partial t} = E_i \frac{\partial E_i}{\partial t} + \frac{\partial E_i}{\partial t} E_i = 2E_i \frac{\partial E_i}{\partial t} = 2 \left(\vec{E}, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right), \quad (2.23)$$

Аналогічно $\frac{\partial H^2}{\partial t} = 2 \left(\vec{H}, \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right)$. Дещо перетворимо перший доданок фінального

виразу у (2.22):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2 + \mu \mu_0 H^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon \varepsilon_0 (\vec{E}, \vec{E}) + \mu \mu_0 (\vec{H}, \vec{H})}{2} \right) = \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{(\vec{E}, \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}) + (\vec{H}, \mu \mu_0 \vec{H})}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{(\vec{E}, \vec{D}) + (\vec{H}, \vec{B})}{2} \right),$$

звідки маємо

$$(\vec{E}, \text{rot} \vec{H}) - (\vec{H}, \text{rot} \vec{E}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{(\vec{E}, \vec{D}) + (\vec{H}, \vec{B})}{2} \right) + (\vec{E}, \vec{j}). \quad (2.25)$$

З іншого боку, на основі тотожності (1.33) маємо

$$(\vec{E}, \text{rot} \vec{H}) - (\vec{H}, \text{rot} \vec{E}) = -\text{div} [\vec{E}, \vec{H}]. \quad (2.26)$$

На основі (2.25) та (2.26) отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{(\vec{E}, \vec{D}) + (\vec{H}, \vec{B})}{2} \right) + \text{div} [\vec{E}, \vec{H}] = -(\vec{E}, \vec{j}). \quad (2.27)$$

Тож на основі (1.45) бачимо, що (2.27) є законом зміни деякої величини, густина якої є

$$w = \frac{(\vec{E}, \vec{D}) + (\vec{H}, \vec{B})}{2}, \quad (2.28)$$

густина потоку якої дорівнює

$$\vec{\Pi} = [\vec{E}, \vec{H}] \quad (2.29)$$

та джерелом якої є $-(\vec{E}, \vec{j})$. Треба розібратися з фізичним сенсом цієї величини.

Зауважимо, що густина w залежить лише від характеристик поля, розмірність цієї густини отримаємо на основі (2.9) та (2.16):

$$[w] = [\vec{E}] \cdot [\vec{D}] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{с}^3} \cdot \frac{\text{А} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} \cdot \frac{1}{\text{м}^3} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}. \quad (2.30)$$

Тож w – густина деякої величини розмірності Дж та яка пов'язана лише з полем. Фундаментальні величини розмірності Дж – це енергія та робота, проте робота повинна проводитись полем над зарядами, а у густину w характеристики зарядів не входять – лише характеристики поля. Тому величина w є густиною енергії електромагнітного поля, та вираз (2.27) є законом зміни

енергії електромагнітного поля. Відповідно, вектор $\vec{\Pi}$ (див. (2.29)) є густиною потоку енергії електромагнітного поля. Цей вектор назвали вектором Пойнтінга.

2.4. Поведінка полів на межі двох середовищ

За визначенням, *поверхневою густиною заряду* є величина

$$\xi = \frac{dq}{dS}, \quad (2.31)$$

де dS – елементарна (проте макроскопічна) площадка поверхні розділу двох середовищ, та dq – заряд, який міститься у цій пощадці.

За визначенням, *поверхневою густиною струму* є величина

$$\vec{\eta} = \vec{n} \frac{dI}{dl}, \quad (2.32)$$

де dl – елементарний елемент довжини, що належить поверхні розділу двох середовищ, \vec{n} – одиничний вектор, напрямлений вздовж руху позитивних зарядів, $\vec{n} \perp dl$; dI – струм, що протікає через елемент довжини dl .

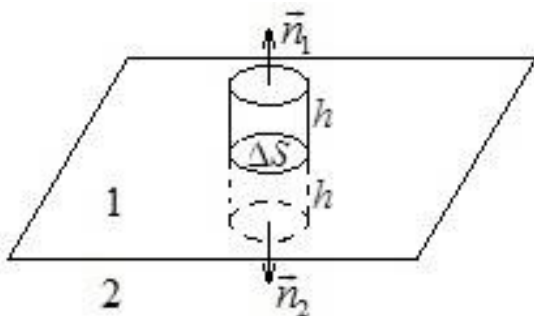


Рис. 2.1

Розглянемо елементарну площадку ΔS на поверхні розділу двох середовищ, див. рис. 2.1. На цій площадці як на основі побудуємо циліндр висотою $2h$, половина циліндру знаходиться у першому середовищі, половина – у другому.

Візьмемо перше з рівнянь Максвела (2.18),

та проінтегруємо його за об'ємом цього циліндру, коли $h \rightarrow 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \iiint_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \lim_{h \rightarrow 0} \iiint_V \rho dV. \quad (2.33)$$

Вираз у правій частині рівняння (2.33) є, очевидно, зарядом, що міститься у «сплющеному до розділу середовищ» циліндрі, тобто

$$\lim_{h \rightarrow 0} \iiint_V \rho dV = \xi \cdot \Delta S. \quad (2.34)$$

Ліву частину рівняння (2.33) перепишемо на основі теореми Остроградського–Гауса:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \iiint_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \lim_{h \rightarrow 0} \oiint_S (\vec{D}, \vec{dS}), \quad (2.35)$$

інтеграл у правій частині береться за поверхнею циліндру. Він є сумою інтегралу за основами та за боковою поверхнею циліндру:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oiint_S (\vec{D}, \vec{dS}) = \lim_{h \rightarrow 0} \oiint_{S_1} (\vec{D}, \vec{dS}) + \lim_{h \rightarrow 0} \oiint_{S_2} (\vec{D}, \vec{dS}) + \lim_{h \rightarrow 0} \oiint_{S_{\text{бок}}} (\vec{D}, \vec{dS}), \quad (2.36)$$

S_1 – основа циліндру, що лежить у першому середовищі, S_2 – основа циліндру, що лежить у другому середовищі.

Очевидно, що

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oiint_{S_{\text{бок}}} (\vec{D}, \vec{dS}) = 0, \quad (2.37)$$

бо бокова поверхня у «сплющеного» циліндра зникає. Також

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oiint_{S_1} (\vec{D}, \vec{dS}) = (\vec{D}, \vec{n}_1) \Delta S, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \oiint_{S_2} (\vec{D}, \vec{dS}) = (\vec{D}, \vec{n}_2) \Delta S, \quad (2.38)$$

де \vec{n}_1 , \vec{n}_2 – одиничні вектори, перпендикулярні до поверхні розділу середовищ, напрямлені у перше та друге середовище, відповідно. Важливо розуміти, що перший інтеграл у (2.38) береться у першому середовищі, а другий інтеграл у (2.38) – у другому. Так як $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$, то ввівши позначення $\vec{n} = \vec{n}_1$ на основі (2.34) – (2.38) можемо переписати (2.33) як

$$\left((\vec{D}, \vec{n})_I - (\vec{D}, \vec{n})_{II} \right) \Delta S = \xi \cdot \Delta S, \quad (2.39)$$

де індекс I означає, що величина взята у першому середовищі, індекс II – у другому. Так як $D_n = (\vec{D}, \vec{n})$ є компонентою електричної індукції, нормальною (перпендикулярною) до поверхні розділу середовищ, то (2.39) остаточно перепишемо як

$$D_{n1} - D_{n2} = \xi. \quad (2.40)$$

Тобто отримано, що *нормальна компонента вектора електричної індукції при переході через межу двох середовищ стрибкоподібно змінюється на поверхневу густину заряду.*

Зробивши аналогічні викладки для другого рівняння Максвела у (2.18), можна отримати, що

$$B_{n1} - B_{n2} = 0, \quad (2.41)$$

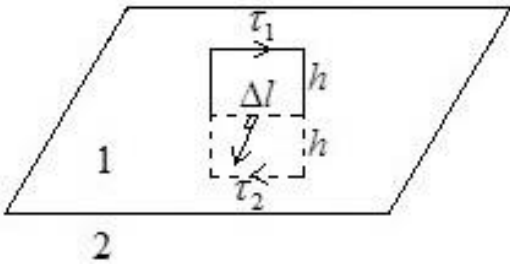


Рис. 2.2

тобто *нормальна компонента вектора магнітної індукції на межі двох середовищ є неперервною.* Це твердження можна переформулювати так: *нормальна компонента вектора магнітної індукції не змінюється при переході через межу двох середовищ.*

Візьмемо елементарний елемент довжини Δl на поверхні розділу двох середовищ (див. рис. 2.2). Побудуємо прямокутник зі сторонами Δl та $2h$, половина прямокутника знаходиться у першому середовищі, інша половина – у другому, див. рис. 2.2.

Візьмемо четверте рівняння Максвела (2.18) та проінтегруємо його за площею прямокутника, коли $h \rightarrow 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \iint_S (\text{rot} \vec{H}, \vec{dS}) = \lim_{h \rightarrow 0} \iint_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \vec{dS} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \iint_S (\vec{j}, \vec{dS}). \quad (2.42)$$

Похідна від вектора електричної індукції за часом є завжди скінченною, а площа прямокутника прямує до нуля при $h \rightarrow 0$, тому

$$\lim_{h \rightarrow 0} \iint_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \vec{dS} \right) = 0. \quad (2.43)$$

Також очевидно, що останній член у правій частині (2.42) є струмом через «сплющений до межі двох середовищ прямокутник», тому

$$\lim_{h \rightarrow 0} \iint_S (\vec{j}, \vec{dS}) = \eta \cdot \Delta l. \quad (2.44)$$

Що стосується лівої частини (2.42), то застосуємо формулу Стокса:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \iint_S (\text{rot} \vec{H}, \vec{dS}) = \lim_{h \rightarrow 0} \oint_l (\vec{H}, \vec{dl}), \quad (2.45)$$

інтеграл береться по контуру, що обмежує прямокутник. Очевидно, що

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_l (\vec{H}, \vec{dl}) = \lim_{h \rightarrow 0} \oint_{l_1} (\vec{H}, \vec{dl}) + \lim_{h \rightarrow 0} \oint_{l_2} (\vec{H}, \vec{dl}) + \lim_{h \rightarrow 0} \oint_{l_{\text{бок}}} (\vec{H}, \vec{dl}), \quad (2.46)$$

де l_1 та l_2 – сторони прямокутника, що паралельні межі розділу середовищ, та які знаходяться, відповідно, у першому та другому середовищі, $l_{\text{бок}}$ – сторони прямокутника, що перпендикулярні межі розділу середовищ.

Так як «бокові» сторони зникають при $h \rightarrow 0$, то

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_{l_{\text{бок}}} (\vec{H}, \vec{dl}) = 0. \quad (2.47)$$

Також

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_{l_1} (\vec{H}, \vec{dl}) = (\vec{H}, \vec{\tau}_1) \Delta l, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \oint_{l_2} (\vec{H}, \vec{dl}) = (\vec{H}, \vec{\tau}_2) \Delta l, \quad (2.48)$$

де $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2$ – одиничні вектори, співнаправлені зі сторонами прямокутника, див. рис. 2.2. Важливо зауважити, що перший інтеграл у (2.48) взято у першому середовищі, а другий – у другому.

Так як $\vec{\tau}_1 = -\vec{\tau}_2$, то ввівши позначення $\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 = -\vec{\tau}_2$ на основі (2.45)–(2.48)

маємо

$$\lim_{h \rightarrow 0} \iint_S (\text{rot} \vec{H}, \vec{dS}) = \left((\vec{H}, \vec{\tau})_I - (\vec{H}, \vec{\tau})_{II} \right) \Delta l, \quad (2.49)$$

індекс I означає, що величина взята у першому середовищі, індекс II – у другому. Так як $H_{\vec{\tau}} = (\vec{H}, \vec{\tau})$ є тангенціальною (паралельною межі розділу) компонентою вектора напруженості магнітного поля, то на основі (2.49), (2.42)–(2.44) остаточно запишемо

$$H_{\tau 1} - H_{\tau 2} = \eta, \quad (2.50)$$

тобто тангенціальна компонентна вектора напруженості магнітного поля при переході через межу двох середовищ стрибкоподібно змінюється на величину поверхневої густини струму.

Взявши третє рівняння Максвелла (2.18) та зробивши аналогічні викладки, можна отримати, що

$$E_{\tau 1} - E_{\tau 2} = 0, \quad (2.51)$$

тобто тангенціальна компонентна вектора напруженості електричного поля на межі двох середовищ є неперервною. Це твердження можна переформулювати так: тангенціальна компонентна вектора напруженості електричного поля не змінюється при переході через межу двох середовищ.

3. Метод комплексних амплітуд. Випадок монохроматичного поля.

3.1. Визначення комплексної амплітуди

У багатьох випадках, що розглядаються у технічній електродинаміці, всі характеристики поля та зарядів змінюються з часом з однаковою постійною частотою. Такий випадок називають випадком монохроматичного поля, та його зручно описувати в термінах комплексних амплітуд.

Єдиною скалярною величиною, що міститься у рівняннях Максвела (2.18), є густина заряду. Нехай вона залежить від часу за законом

$$\rho = \rho_m \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.1)$$

де амплітуда ρ_m та фаза φ можуть залежати від координат, проте не від часу. Тоді цій величині ставиться у відповідність комплексна величина

$$\tilde{\rho} = \rho_m e^{i(\omega t + \varphi)} = \rho_m e^{i\varphi} e^{i\omega t} \quad (3.2)$$

так, що

$$\tilde{\rho} = \text{Re } \rho. \quad (3.3)$$

Множник у величині $\tilde{\rho}$, який множиться на $e^{i\omega t}$, назвали *комплексною амплітудою* величини ρ :

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_m e^{i\omega t}, \quad \tilde{\rho}_m = \rho_m e^{i\varphi}. \quad (3.4)$$

Все наведене вище стосується визначення комплексної амплітуди для скалярної величини. Для векторної величини комплексна амплітуда вводиться наступним чином. Нехай задано векторну величину

$$\vec{A} = \vec{e}_x A_{mx} \cos(\omega t + \varphi_x) + \vec{e}_y A_{my} \cos(\omega t + \varphi_y) + \vec{e}_z A_{mz} \cos(\omega t + \varphi_z), \quad (3.5)$$

амплітуди компонент A_{mx} , A_{my} , A_{mz} та фази компонент φ_x , φ_y , φ_z можуть залежати від координат, проте не від часу. Поставимо величині \vec{A} у відповідність комплексну величину $\tilde{\vec{A}}$:

$$\tilde{\vec{A}} = \left(\vec{e}_x A_{mx} e^{i\varphi_x} + \vec{e}_y A_{my} e^{i\varphi_y} + \vec{e}_z A_{mz} e^{i\varphi_z} \right) e^{i\omega t}, \quad \vec{A} = \text{Re } \tilde{\vec{A}}. \quad (3.6)$$

Вектор-множник у величині $\tilde{\vec{A}}$, який множиться на $e^{i\omega t}$, назвали *комплексною*

амплітудою векторної величини \vec{A} :

$$\vec{\tilde{A}} = \vec{\tilde{A}}_m e^{i\omega t}, \quad \vec{\tilde{A}}_m = \vec{e}_x A_{mx} e^{i\varphi_x} + \vec{e}_y A_{my} e^{i\varphi_y} + \vec{e}_z A_{mz} e^{i\varphi_z}. \quad (3.7)$$

Зауважимо, що комплексна амплітуда скалярної або векторної величини може залежати від координат, проте не від часу.

3.2. Рівняння Максвелла та закон збереження заряду в термінах комплексних амплітуд

Згідно з рівняннями (2.18) «руками» напишемо наступні рівняння:

$$\operatorname{div} \vec{\tilde{D}} = \tilde{\rho}, \quad \operatorname{div} \vec{\tilde{B}} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{\tilde{E}} = -\frac{\partial \vec{\tilde{B}}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{\tilde{H}} = \frac{\partial \vec{\tilde{D}}}{\partial t} + \vec{\tilde{j}}. \quad (3.8)$$

Слід зауважити, що рівняння (2.18) є наслідками рівнянь (3.8). Дійсно, взявши дійсну частину від першого з рівнянь (3.8), отримуємо

$$\operatorname{Re}(\operatorname{div} \vec{\tilde{D}}) = \operatorname{Re} \tilde{\rho} \Rightarrow \operatorname{div}(\operatorname{Re} \vec{\tilde{D}}) = \operatorname{Re} \tilde{\rho} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{D} = \rho. \quad (3.9)$$

Для інших рівнянь доведення є аналогічним.

Візьмемо перше з рівнянь (3.8) та перепишемо його в термінах комплексних амплітуд:

$$\operatorname{div}(\vec{\tilde{D}}_m e^{i\omega t}) = \tilde{\rho}_m e^{i\omega t}. \quad (3.10)$$

Так як дивергенція є оператором диференціювання за координатами, а не за часом, та комплексні амплітуди залежать лише від координат, а не від часу, то наслідком (3.10) є

$$e^{i\omega t} \operatorname{div} \vec{\tilde{D}}_m = \tilde{\rho}_m e^{i\omega t}, \quad (3.11)$$

скоротивши на $e^{i\omega t}$, отримаємо

$$\operatorname{div} \vec{\tilde{D}}_m = \tilde{\rho}_m. \quad (3.12)$$

Аналогічно на основі другого рівняння з (3.8) отримаємо

$$\operatorname{div} \vec{\tilde{B}}_m = 0. \quad (3.13)$$

Візьмемо четверте рівняння з (3.8) та перепишемо його в термінах комплексних амплітуд:

$$\text{rot}\left(\tilde{H}_m e^{i\omega t}\right) = \frac{\partial \tilde{D}_m e^{i\omega t}}{\partial t} + \tilde{j}_m e^{i\omega t}. \quad (3.14)$$

Так як ротор є оператором диференціювання за координатами, а не за часом, та комплексні амплітуди залежать лише від координат, а не від часу, то наслідком (3.14) є

$$e^{i\omega t} \text{rot} \tilde{H}_m = \frac{\partial e^{i\omega t}}{\partial t} \tilde{D}_m + \tilde{j}_m e^{i\omega t} \Rightarrow e^{i\omega t} \text{rot} \tilde{H}_m = i\omega e^{i\omega t} \tilde{D}_m + \tilde{j}_m e^{i\omega t}, \quad (3.15)$$

скоротивши на $e^{i\omega t}$, отримуємо

$$\text{rot} \tilde{H}_m = i\omega \tilde{D}_m + \tilde{j}_m. \quad (3.16)$$

Аналогічно взявши третє рівняння з (3.8), отримаємо

$$\text{rot} \tilde{E}_m = -i\omega \tilde{B}_m. \quad (3.17)$$

Випишемо в одну систему рівняння (3.12), (3.13), (3.16), (3.17):

$$\text{div} \tilde{D}_m = \tilde{\rho}_m, \text{div} \tilde{B}_m = 0, \text{rot} \tilde{H}_m = i\omega \tilde{D}_m + \tilde{j}_m, \text{rot} \tilde{E}_m = -i\omega \tilde{B}_m. \quad (3.18)$$

Система рівнянь (3.18) є *рівняннями Максвелла для комплексних амплітуд у монохроматичному випадку*.

Візьмемо дивергенцію від третього рівняння у (3.18):

$$\text{div}\left(\text{rot} \tilde{H}_m\right) = i\omega \cdot \text{div} \tilde{D}_m + \text{div} \tilde{j}_m, \quad (3.19)$$

та підставимо перше з рівнянь (3.18) у (3.19):

$$\text{div}\left(\text{rot} \tilde{H}_m\right) = i\omega \tilde{\rho}_m + \text{div} \tilde{j}_m. \quad (3.20)$$

За тотожністю (1.27) $\text{div}\left(\text{rot} \tilde{H}_m\right) = 0$, та

$$i\omega \tilde{\rho}_m + \text{div} \tilde{j}_m = 0, \quad (3.21)$$

звідки

$$\tilde{\rho}_m = \frac{i}{\omega} \operatorname{div} \tilde{\vec{j}}_m. \quad (3.22)$$

Вираз (3.22) є законом збереження заряду (рівнянням неперервності) для комплексних амплітуд. Як бачимо, у монохроматичному випадку густина заряду однозначно задається густиною струму.

3.3. Матеріальні рівняння для середовищ з втратами енергії

Як зазначено вище, для найпростіших середовищ матеріальні рівняння мають вигляд $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$ та $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$, див. (2.6). Для таких середовищ поведінка векторів \vec{D} та \vec{E} є, фактично, однаковою – між ними просто стоїть постійний розмірний множник. Те ж саме можна сказати і про поведінку векторів \vec{B} та \vec{H} .

Деякі складнішими є середовища, у яких наявний зсув фаз між векторами \vec{D} та \vec{E} . Електрична індукція \vec{D} є характеристикою поля в середовищі, та вона «підбудовується» під зміну напруженості електричного поля \vec{E} . Коли ця «підбудова» не є миттєвою, то вектор \vec{D} може відставати за фазою від вектора \vec{E} :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_x \cos(\omega t + \varphi_x) \vec{e}_x + E_y \cos(\omega t + \varphi_y) \vec{e}_y + E_z \cos(\omega t + \varphi_z) \vec{e}_z, \\ \vec{D} &= D_x \cos(\omega t + \varphi_x - \delta_\varepsilon) \vec{e}_x + D_y \cos(\omega t + \varphi_y - \delta_\varepsilon) \vec{e}_y + \\ &+ D_z \cos(\omega t + \varphi_z - \delta_\varepsilon) \vec{e}_z, \end{aligned} \quad (3.23)$$

де між амплітудами компонент виконуються співвідношення

$$D_x = \varepsilon \varepsilon_0 E_x, \quad D_y = \varepsilon \varepsilon_0 E_y, \quad D_z = \varepsilon \varepsilon_0 E_z. \quad (3.24)$$

Тоді відповідні комплексні величини до цих векторів:

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{E}} &= \left(\vec{e}_x E_x e^{i\varphi_x} + \vec{e}_y E_y e^{i\varphi_y} + \vec{e}_z E_z e^{i\varphi_z} \right) e^{i\omega t}, \quad \vec{E} = \operatorname{Re} \tilde{\vec{E}}, \\ \tilde{\vec{D}} &= \varepsilon \varepsilon_0 \left(\vec{e}_x E_x e^{i\varphi_x} + \vec{e}_y E_y e^{i\varphi_y} + \vec{e}_z E_z e^{i\varphi_z} \right) e^{-i\delta_\varepsilon} e^{i\omega t}, \quad \vec{D} = \operatorname{Re} \tilde{\vec{D}}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

та відповідні комплексні амплітуди:

$$\begin{aligned}\tilde{\vec{E}}_m &= \vec{e}_x E_x e^{i\varphi_x} + \vec{e}_y E_y e^{i\varphi_y} + \vec{e}_z E_z e^{i\varphi_z}, \\ \tilde{\vec{D}}_m &= \varepsilon \varepsilon_0 \left(\vec{e}_x E_x e^{i\varphi_x} + \vec{e}_y E_y e^{i\varphi_y} + \vec{e}_z E_z e^{i\varphi_z} \right) e^{-i\delta_\varepsilon}.\end{aligned}\quad (3.26)$$

Тоді на основі (3.26) бачимо, що для комплексних амплітуд виконується рівняння

$$\tilde{\vec{D}}_m = \varepsilon \varepsilon_0 e^{-i\delta_\varepsilon} \tilde{\vec{E}}_m, \quad (3.27)$$

яке перепишемо у наступному вигляді:

$$\tilde{\vec{D}}_m = \tilde{\varepsilon} \varepsilon_0 \tilde{\vec{E}}_m, \quad (3.28)$$

де

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon e^{-i\delta_\varepsilon} = \varepsilon (\cos \delta_\varepsilon - i \sin \delta_\varepsilon). \quad (3.29)$$

Рівняння (3.28) є матеріальним рівнянням для комплексних амплітуд у випадку монохроматичного поля для середовищ з втратами. Величину $\tilde{\varepsilon}$ назвали комплексною діелектричною проникністю середовища,

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon' - i\varepsilon''. \quad (3.30)$$

На основі (3.29) бачимо, що

$$\varepsilon' = \varepsilon \cos \delta_\varepsilon, \quad \varepsilon'' = \varepsilon \sin \delta_\varepsilon, \quad \operatorname{tg} \delta_\varepsilon = \varepsilon'' / \varepsilon'. \quad (3.31)$$

Величину $\operatorname{tg} \delta_\varepsilon$ назвали тангенсом кута діелектричних втрат.

Вектор магнітної індукції \vec{B} може відставати за фазою від вектора напруженості магнітного поля \vec{H} :

$$\begin{aligned}\vec{H} &= H_x \cos(\omega t + \varphi_x) \vec{e}_x + H_y \cos(\omega t + \varphi_y) \vec{e}_y + H_z \cos(\omega t + \varphi_z) \vec{e}_z, \\ \vec{B} &= B_x \cos(\omega t + \varphi_x - \delta_\mu) \vec{e}_x + B_y \cos(\omega t + \varphi_y - \delta_\mu) \vec{e}_y + \\ &\quad + B_z \cos(\omega t + \varphi_z - \delta_\mu) \vec{e}_z,\end{aligned}\quad (3.32)$$

де між амплітудами компонент виконуються співвідношення

$$B_x = \mu \mu_0 H_x, \quad B_y = \mu \mu_0 H_y, \quad B_z = \mu \mu_0 H_z. \quad (3.33)$$

Аналогічними міркуваннями можна отримати зв'язок між комплексними амплітудами векторів \vec{B} та \vec{H} :

$$\vec{B}_m = \tilde{\mu}\mu_0\vec{H}_m, \quad (3.34)$$

де

$$\tilde{\mu} = \mu e^{-i\delta_\mu} = \mu(\cos\delta_\mu - i\sin\delta_\mu) = \mu' - i\mu'', \quad \text{tg}\delta_\mu = \mu''/\mu', \quad (3.35)$$

рівняння (3.34) є матеріальним рівнянням для комплексних амплітуд у випадку монохроматичного поля для середовищ з втратами. Величина $\tilde{\mu}$ називається комплексною магнітною проникністю середовища, а $\text{tg}\delta_\mu$ є тангенсом кута магнітних втрат.

Чому наявність зсуву фаз між \vec{D} та \vec{E} , або зсув фаз між \vec{B} та \vec{H} веде до втрат енергії у середовищі, буде пояснено у наступних підрозділах. Також зауважимо, що у випадку відсутності зсувів фаз матеріальні рівняння (3.34) та (3.28) все одно є застосовними – для цього випадку просто $\tilde{\mu} = \mu \in \mathbb{R}$ та $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \in \mathbb{R}$, відповідно.

3.4. Комплексний вектор Пойнтінга

Нехай у монохроматичному випадку

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_x \cos(\omega t + \varphi_{Ex})\vec{e}_x + E_y \cos(\omega t + \varphi_{Ey})\vec{e}_y + E_z \cos(\omega t + \varphi_{Ez})\vec{e}_z, \\ \vec{H} &= H_x \cos(\omega t + \varphi_{Hx})\vec{e}_x + H_y \cos(\omega t + \varphi_{Hy})\vec{e}_y + H_z \cos(\omega t + \varphi_{Hz})\vec{e}_z. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Тоді порахуємо вектор Пойнтінга, та знайдемо його середнє значення за період:

$$\begin{aligned} \Pi_n &= [\vec{E}, \vec{H}]_n = \varepsilon_{njc} E_j \cos(\omega t + \varphi_{Ej}) H_k \cos(\omega t + \varphi_{Hk}) = \\ &= \varepsilon_{njc} \frac{E_j H_k}{2} \cos(\varphi_{Ej} - \varphi_{Hk}) + \varepsilon_{njc} \frac{E_j H_k}{2} \cos(2\omega t + \varphi_{Ej} + \varphi_{Hk}), \end{aligned} \quad (3.37)$$

тут використано відому тригонометричну формулу

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)). \quad (3.38)$$

Відповідно, середнє за період значення:

$$\langle \Pi_n \rangle = \left\langle \varepsilon_{njc} \frac{E_j H_k}{2} \cos(\varphi_{Ej} - \varphi_{Hk}) \right\rangle + \left\langle \varepsilon_{njc} \frac{E_j H_k}{2} \cos(2\omega t + \varphi_{Ej} + \varphi_{Hk}) \right\rangle = \quad (3.39)$$

$$= \varepsilon_{nj\bar{k}} \frac{E_j H_k}{2} \cos(\varphi_{Ej} - \varphi_{Hk}),$$

бо від часу величини E_j , H_k , φ_{Ej} , φ_{Ek} не залежать, середнє значення від константи дорівнює самій константі, а середнє значення від косинуса подвійної кутової частоти за період дорівнює нулю.

Випишемо комплексні амплітуди величин \vec{E} , \vec{H} :

$$\vec{E}_m \approx \vec{e}_x E_x e^{i\varphi_{Ex}} + \vec{e}_y E_y e^{i\varphi_{Ey}} + \vec{e}_z E_z e^{i\varphi_{Ez}}, \quad \vec{H}_m \approx \vec{e}_x H_x e^{i\varphi_{Hx}} + \vec{e}_y H_y e^{i\varphi_{Hy}} + \vec{e}_z H_z e^{i\varphi_{Hz}}, \quad (3.40)$$

та розглянемо величину $\frac{1}{2} \text{Re} \left[\vec{E}_m, \vec{H}_m^* \right]$, зірочка означає комплексне спряження:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Re} \left[\vec{E}_m, \vec{H}_m^* \right]_n &= \frac{1}{2} \text{Re} \left(\varepsilon_{nj\bar{k}} E_j e^{i\varphi_{Ej}} H_k e^{-i\varphi_{Ek}} \right) = \frac{1}{2} \varepsilon_{nj\bar{k}} E_j H_k \text{Re} \left(e^{i(\varphi_{Ej} - \varphi_{Ek})} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{nj\bar{k}} E_j H_k \cos(\varphi_{Ej} - \varphi_{Ek}). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Тож на основі (3.41) та (3.39) бачимо, що *середній за період вектор Пойнтінга наступним чином виражається через комплексні амплітуди:*

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\vec{E}_m, \vec{H}_m^* \right]. \quad (3.42)$$

Відповідно, величину

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{2} \left[\vec{E}_m, \vec{H}_m^* \right]. \quad (3.43)$$

назвали комплексним вектором Пойнтінга.

Зауважимо також, що аналогічними міркуваннями можна показати, що у монохроматичному випадку середнє за період значення

$$\langle (\vec{E}, \vec{j}) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\vec{E}_m, \vec{j}_m^* \right). \quad (3.44)$$

3.5. Закон зміни енергії в термінах комплексних амплітуд для монохроматичного випадку

Розглянемо вираз $\left(\vec{E}_m, \text{rot} \vec{H}_m^* \right) - \left(\vec{H}_m^*, \text{rot} \vec{E}_m \right)$. Згідно тотожності (1.33) маємо

$$\left(\tilde{\vec{E}}_m, \text{rot}\tilde{\vec{H}}_m^*\right) - \left(\tilde{\vec{H}}_m^*, \text{rot}\tilde{\vec{E}}_m\right) = -\text{div}\left[\tilde{\vec{E}}_m, \tilde{\vec{H}}_m^*\right]. \quad (3.45)$$

З іншого боку, виразимо $\text{rot}\tilde{\vec{H}}_m^*$ та $\text{rot}\tilde{\vec{E}}_m$ на основі рівнянь Максвелла для комплексних амплітуд (3.18):

$$\text{rot}\tilde{\vec{H}}_m^* = -i\omega\tilde{\vec{D}}_m^* + \tilde{\vec{j}}_m^*, \quad \text{rot}\tilde{\vec{E}}_m = -i\omega\tilde{\vec{B}}_m, \quad (3.46)$$

на основі чого маємо

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\vec{E}}_m, \text{rot}\tilde{\vec{H}}_m^*\right) - \left(\tilde{\vec{H}}_m^*, \text{rot}\tilde{\vec{E}}_m\right) &= \left(\tilde{\vec{E}}_m, -i\omega\tilde{\vec{D}}_m^* + \tilde{\vec{j}}_m^*\right) - \left(\tilde{\vec{H}}_m^*, -i\omega\tilde{\vec{B}}_m\right) = \\ &= i\omega\left(\left(\tilde{\vec{H}}_m^*, \tilde{\vec{B}}_m\right) - \left(\tilde{\vec{E}}_m, \tilde{\vec{D}}_m^*\right)\right) + \left(\tilde{\vec{E}}_m, \tilde{\vec{j}}_m^*\right). \end{aligned} \quad (3.47)$$

На основі (3.45) та (3.47) маємо

$$i\omega\left(\left(\tilde{\vec{H}}_m^*, \tilde{\vec{B}}_m\right) - \left(\tilde{\vec{E}}_m, \tilde{\vec{D}}_m^*\right)\right) + \left(\tilde{\vec{E}}_m, \tilde{\vec{j}}_m^*\right) = -\text{div}\left[\tilde{\vec{E}}_m, \tilde{\vec{H}}_m^*\right]. \quad (3.48)$$

Рівняння (3.48), по аналогії з (2.27), можна трактувати як закон зміни енергії для монохроматичного поля. Проте на основі матеріальних рівнянь це рівняння далі конкретизують. Використаємо матеріальні рівняння (3.34) та (3.28):

$$i\omega\left(\tilde{\mu}\mu_0\left(\tilde{\vec{H}}_m^*, \tilde{\vec{H}}_m\right) - \tilde{\varepsilon}^* \varepsilon_0\left(\tilde{\vec{E}}_m, \tilde{\vec{E}}_m^*\right)\right) + \text{div}\left[\tilde{\vec{E}}_m, \tilde{\vec{H}}_m^*\right] = -\left(\tilde{\vec{E}}_m, \tilde{\vec{j}}_m^*\right). \quad (3.49)$$

Нехай

$$\tilde{\vec{E}}_m = \vec{e}_x E_x e^{i\varphi_x} + \vec{e}_y E_y e^{i\varphi_y} + \vec{e}_z E_z e^{i\varphi_z}, \quad (3.50)$$

тоді

$$\left(\tilde{\vec{E}}_m, \tilde{\vec{E}}_m^*\right) = E_j e^{i\varphi_j} E_j e^{-i\varphi_j} = E_j E_j = E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 = E^2, \quad (3.51)$$

де через E^2 позначено суму квадратів амплітуд компонент вектора \vec{E} , $E^2 \in \mathbb{R}$.

Аналогічно

$$\left(\tilde{\vec{H}}_m^*, \tilde{\vec{H}}_m\right) = H^2, \quad (3.52)$$

де H^2 – сума квадратів амплітуд компонент вектора \vec{H} , $H^2 \in \mathbb{R}$. Тоді рівняння (3.49) з урахуванням (3.30) та (3.35) переписується як

$$i\omega((\mu' - i\mu'')\mu_0 H^2 - (\varepsilon' + i\varepsilon'')\varepsilon_0 E^2) + \operatorname{div} \left[\tilde{\vec{E}}_m, \tilde{\vec{H}}_m^* \right] = - \left(\tilde{\vec{E}}_m \tilde{\vec{j}}_m^* \right). \quad (3.53)$$

Випишемо окремо дійсну частину рівняння (3.53) :

$$\omega(\mu''\mu_0 H^2 + \varepsilon''\varepsilon_0 E^2) + \operatorname{div} \operatorname{Re} \left[\tilde{\vec{E}}_m, \tilde{\vec{H}}_m^* \right] = - \operatorname{Re} \left(\tilde{\vec{E}}_m \tilde{\vec{j}}_m^* \right). \quad (3.54)$$

та уявну частину рівняння (3.53):

$$\omega(\mu'\mu_0 H^2 - \varepsilon'\varepsilon_0 E^2) + \operatorname{div} \operatorname{Im} \left[\tilde{\vec{E}}_m, \tilde{\vec{H}}_m^* \right] = - \operatorname{Im} \left(\tilde{\vec{E}}_m \tilde{\vec{j}}_m^* \right). \quad (3.55)$$

Помножимо рівняння (3.54) на $\frac{1}{2}$. Тоді з урахуванням (3.42) та (3.44) маємо

$$\frac{1}{2} \omega(\mu''\mu_0 H^2 + \varepsilon''\varepsilon_0 E^2) + \operatorname{div} \langle \vec{\Pi} \rangle = - \langle (\vec{E}, \vec{j}) \rangle. \quad (3.56)$$

Очевидно, що рівняння (3.56) є рівнянням для середніх величин. Як відомо, середню за період потужність називають активною потужністю. Проінтегруємо дане рівняння за деяким об'ємом:

$$\iiint_V \frac{1}{2} \omega(\mu''\mu_0 H^2 + \varepsilon''\varepsilon_0 E^2) dV + \iiint_V \operatorname{div} \langle \vec{\Pi} \rangle dV + \iiint_V \langle (\vec{E}, \vec{j}) \rangle dV = 0, \quad (3.57)$$

та на основі теореми Остроградського–Гауса маємо

$$\iiint_V \frac{1}{2} \omega(\mu''\mu_0 H^2 + \varepsilon''\varepsilon_0 E^2) dV + \left\langle \oint_S (\vec{\Pi}, \vec{dS}) \right\rangle + \iiint_V \langle (\vec{E}, \vec{j}) \rangle dV = 0, \quad (3.58)$$

тут використано, що інтеграл від середнього є середнім від інтегралу. Рівняння (3.58) назвали *рівнянням балансу активної потужності в даному об'ємі*.

Розберемось з фізичним сенсом величини першого доданку у лівій частині (3.58). Розглянемо випадок, коли $\langle (\vec{E}, \vec{j}) \rangle = 0$. Тоді

$$\iiint_V \frac{1}{2} \omega(\mu''\mu_0 H^2 + \varepsilon''\varepsilon_0 E^2) dV = - \left\langle \oint_S (\vec{\Pi}, \vec{dS}) \right\rangle = \left\langle \oint_S (\vec{\Pi}, -\vec{dS}) \right\rangle, \quad (3.59)$$

Зауважимо, що вектор \vec{dS} напрямлено зовні об'єму. Тоді $\left\langle \oint_S (\vec{\Pi}, -\vec{dS}) \right\rangle$ є

середньою за період потужність енергії, що входить до даного об'єму. Середня за період кількість енергії поля, що знаходиться в даному об'ємі, не повинна

змінюватись, інакше поле буде залежати від часу не за гармонійним законом.

Тоді з (3.59) бачимо, що $\iiint_V \frac{1}{2} \omega (\mu'' \mu_0 H^2 + \varepsilon'' \varepsilon_0 E^2) dV$ є середньою за період потужністю втрат енергії в даному об'ємі. Зауважимо, що тут розглянуто лише внесок поля у дану величину. Як буде показано нижче, в середню за період потужність втрат енергії є ще внесок струму провідності.

Відповідно, втрати відсутні лише коли $\mu'' = \varepsilon'' = 0$, тобто коли немає зсувів фаз між векторами \vec{D} і \vec{E} та \vec{B} і \vec{H} . Тож наявність втрат енергії поля у середовищі пов'язана з ненульовою різницею фаз між векторами \vec{D} та \vec{E} або \vec{B} та \vec{H} .

Помножимо рівняння (3.55) на $\frac{1}{2}$ та проінтегруємо за деяким об'ємом:

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{1}{2} \omega (\mu' \mu_0 H^2 - \varepsilon' \varepsilon_0 E^2) dV + \frac{1}{2} \text{Im} \iiint_V \text{div} [\tilde{\vec{E}}_m, \tilde{\vec{H}}_m^*] dV = \\ = -\frac{1}{2} \text{Im} \iiint_V (\tilde{\vec{E}}_m \tilde{\vec{j}}_m^*) dV. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Тоді за теоремою Остроградського–Гауса з урахуванням (3.43) маємо

$$\frac{1}{2} \omega \iiint_V (\mu' \mu_0 H^2 - \varepsilon' \varepsilon_0 E^2) dV + \frac{1}{2} \text{Im} \oint_S (\tilde{\vec{\Pi}}, \vec{dS}) + \frac{1}{2} \text{Im} \iiint_V (\tilde{\vec{E}}_m \tilde{\vec{j}}_m^*) dV = 0. \quad (3.61)$$

Рівняння (3.61) назвали *рівнянням балансу реактивної потужності в даному об'ємі*.

3.6. Рівняння балансу потужностей в термінах струму провідності та стороннього струму

Як відомо, густина струму є сумою трьох складових:

$$\vec{j} = \vec{j}_{\text{пр}} + \vec{j}_{\text{ст}} + \vec{j}_{\text{конв}}, \quad (3.62)$$

де $\vec{j}_{\text{пр}}$ – густина струму провідності, $\vec{j}_{\text{ст}}$ – густина стороннього струму та $\vec{j}_{\text{конв}}$ – густина конвекційного струму.

Струм провідності – напрямлений рух носіїв електричного заряду в середовищі. Експериментально встановлено закон Ома в диференційній формі:

$$\vec{J}_{\text{пр}} = \sigma \vec{E}, \quad (3.63)$$

де σ – питома провідність середовища, $\sigma = 1/\rho$, де ρ – питомий опір середовища.

Густина стороннього струму є заданою величиною (тобто заданою функцією координат та часу), яка пов'язана з зовнішнім впливом на середовище. Густина стороннього струму є джерелом електромагнітного поля.

Конвекційний струм – перенос зарядів внаслідок руху середовища як цілого.

Дуже часто розглядають випадок нерухомого середовища, тобто випадок відсутності конвекційного струму. В даному випадку рівняння (3.53) матиме вигляд

$$i\omega(\tilde{\mu}\mu_0 H^2 - \tilde{\varepsilon}^* \varepsilon_0 E^2) + \text{div} \left[\tilde{\vec{E}}_m, \tilde{\vec{H}}_m^* \right] = - \left(\tilde{\vec{E}}_m \tilde{\vec{J}}_{\text{прm}}^* \right) - \left(\tilde{\vec{E}}_m \tilde{\vec{J}}_{\text{стм}}^* \right). \quad (3.64)$$

З урахуванням (3.63) маємо

$$\left(\tilde{\vec{E}}_m \tilde{\vec{J}}_{\text{прm}}^* \right) = \sigma \left(\tilde{\vec{E}}_m, \tilde{\vec{E}}_m^* \right) = \sigma E^2, \quad (3.65)$$

та

$$i\omega(\tilde{\mu}\mu_0 H^2 - \tilde{\varepsilon}^* \varepsilon_0 E^2) + \sigma E^2 + \text{div} \left[\tilde{\vec{E}}_m, \tilde{\vec{H}}_m^* \right] = - \left(\tilde{\vec{E}}_m \tilde{\vec{J}}_{\text{стм}}^* \right). \quad (3.66)$$

Зробимо перетворення у лівій частині рівняння (3.66):

$$\begin{aligned} i\omega(\tilde{\mu}\mu_0 H^2 - \tilde{\varepsilon}^* \varepsilon_0 E^2) + \sigma E^2 &= i\omega \left(\tilde{\mu}\mu_0 H^2 - \tilde{\varepsilon}^* \varepsilon_0 E^2 + \frac{\sigma}{i\omega} E^2 \right) = \\ &= i\omega \left(\tilde{\mu}\mu_0 H^2 - \varepsilon_0 \left(\tilde{\varepsilon}^* + i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \right) E^2 \right). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Введемо величину

$$\tilde{\varepsilon}_a = \tilde{\varepsilon} - i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}, \quad (3.68)$$

тоді

$$\tilde{\varepsilon}_a^* = \tilde{\varepsilon}^* + i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}, \quad (3.69)$$

та на основі (3.67)–(3.69) рівняння (3.66) перепишеться як

$$i\omega(\tilde{\mu}\mu_0 H^2 - \tilde{\varepsilon}_a^* \varepsilon_0 E^2) + \operatorname{div} \left[\tilde{\vec{E}}_m, \tilde{\vec{H}}_m^* \right] = - \left(\tilde{\vec{E}}_m \tilde{\vec{j}}_{\text{стм}}^* \right). \quad (3.70)$$

Тоді, аналогічно виведенню виразів (3.61) та (3.57) отримаємо рівняння балансу активної та реактивної потужності у даному об'ємі:

$$\iiint_V \frac{1}{2} \omega (\mu'' \mu_0 H^2 + \varepsilon_a'' \varepsilon_0 E^2) dV + \left\langle \oint_S (\vec{\Pi}, \overline{dS}) \right\rangle + \left\langle \iiint_V (\vec{E} \vec{j}_{\text{ст}}) dV \right\rangle = 0, \quad (3.71)$$

$$\frac{1}{2} \omega \iiint_V (\mu' \mu_0 H^2 - \varepsilon_a' \varepsilon_0 E^2) dV + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \oint_S (\vec{\Pi}, \overline{dS}) + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \iiint_V (\vec{E} \vec{j}_{\text{стм}}^*) dV = 0,$$

де

$$\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon_a' - i\varepsilon_a''. \quad (3.72)$$

Величину $\tilde{\varepsilon}_a$ назвали абсолютною комплексною діелектричною проникністю.

Величина $\iiint_V \frac{1}{2} \omega (\mu'' \mu_0 H^2 + \varepsilon_a'' \varepsilon_0 E^2) dV$ має фізичний сенс потужності втрат

енергії у даному об'ємі, причому тут враховано не лише внесок від поля, але і

внесок від струму провідності. Величина $\left\langle \iiint_V (\vec{E} \vec{j}_{\text{ст}}) dV \right\rangle$ є середньою за період

потужністю взаємодії електричного поля зі стороннім струмом. Дана величина є джерелом енергії електромагнітного поля.

4. Плоска монохроматична хвиля у необмеженому просторі

4.1. Хвильове рівняння

Розглянемо середовище без струмів та зарядів: $\vec{j} = 0$, $\rho = 0$, у якому відсутні зсуви фаз між векторами \vec{D} і \vec{E} та \vec{B} і \vec{H} . Тоді рівняння Максвела (2.18) будуть мати вигляд

$$\operatorname{div}\vec{D} = 0, \operatorname{div}\vec{B} = 0, \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \quad (4.1)$$

та матеріальні рівняння матимуть вигляд (2.6).

Розглянемо величину $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E}$. За тотожністю (1.36)

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E}. \quad (4.2)$$

На основі (4.1) та матеріальних рівнянь маємо

$$\operatorname{div}\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\operatorname{div}\vec{E} = 0 \Rightarrow \operatorname{div}\vec{E} = 0, \quad (4.3)$$

та

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = -\Delta\vec{E}. \quad (4.4)$$

З іншого боку, на основі (4.1) маємо

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} &= \operatorname{rot}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\operatorname{rot}\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\mu\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{H} = -\mu\mu_0\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2} = \\ &= -\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

та на основі (4.4) і (4.5) отримуємо

$$\Delta\vec{E} - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.6)$$

Введемо величину

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad (4.7)$$

тут використано властивість $\mu_0\varepsilon_0 = c^{-2}$, див. (2.5). Тоді рівняння (4.6) переписеться як

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.8)$$

Рівняння (4.8) носить назву *хвильового рівняння для напруженості електричного поля*. Аналогічно, розглянувши величину $\text{rot rot} \vec{H}$, можна отримати *хвильове рівняння для напруженості магнітного поля*:

$$\Delta \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.9)$$

Фізичний сенс величини v – швидкість поширення хвилі у просторі. Наприклад, у вакуумі $\varepsilon = \mu = 1$ та $v = c$ – у вакуумі електромагнітна хвиля поширюється зі швидкістю світла, що є відомим фактом.

Хвильове рівняння можна також вивести в термінах комплексних амплітуд у монохроматичному випадку, при цьому врахувавши можливі зсуви фаз між векторами \vec{D} і \vec{E} та \vec{B} і \vec{H} . Розглянемо середовище без струмів і зарядів. Тоді рівняння Максвелла для комплексних амплітуд (3.18) набудуть вигляд

$$\text{div} \tilde{\vec{D}}_m = 0, \text{div} \tilde{\vec{B}}_m = 0, \text{rot} \tilde{\vec{H}}_m = i\omega \tilde{\vec{D}}_m, \text{rot} \tilde{\vec{E}}_m = -i\omega \tilde{\vec{B}}_m; \quad (4.10)$$

розглядається середовище з матеріальними рівняннями (3.28) та (3.34).

Розглянемо вираз $\text{rot rot} \tilde{\vec{E}}_m$. На основі (4.10), (3.28) та (3.34) маємо

$$\text{rot rot} \tilde{\vec{E}}_m = -i\omega \text{rot} \tilde{\vec{B}}_m = -i\omega \tilde{\mu} \mu_0 \text{rot} \tilde{\vec{H}}_m = \omega^2 \tilde{\mu} \mu_0 \tilde{\vec{D}}_m = \omega^2 \tilde{\varepsilon} \tilde{\mu} \varepsilon_0 \mu_0 \tilde{\vec{E}}_m. \quad (4.11)$$

З іншого боку, на основі тотожності (1.36) та рівнянь (3.28), (3.34), (4.10) маємо

$$\text{rot rot} \tilde{\vec{E}}_m = \text{grad}(\text{div} \tilde{\vec{E}}_m) - \Delta \tilde{\vec{E}}_m = \frac{1}{\tilde{\varepsilon} \varepsilon_0} \text{grad}(\text{div} \tilde{\vec{D}}_m) - \Delta \tilde{\vec{E}}_m = -\Delta \tilde{\vec{E}}_m. \quad (4.12)$$

Порівнюючи (4.11) та (4.12), приходимо до висновку, що

$$\Delta \tilde{\vec{E}}_m + \omega^2 \tilde{\varepsilon} \tilde{\mu} \varepsilon_0 \mu_0 \tilde{\vec{E}}_m = 0. \quad (4.13)$$

Позначимо

$$k = \omega \sqrt{\tilde{\varepsilon} \tilde{\mu} \varepsilon_0 \mu_0}, \quad (4.14)$$

та перепишемо (4.13) як

$$\Delta \tilde{\tilde{E}}_m + k^2 \tilde{\tilde{E}}_m = 0. \quad (4.15)$$

Рівняння (4.15) є хвильовим рівнянням для комплексної амплітуди напруженості електричного поля, величину k назвали хвильовим числом. Для середовища без втрат $k \in \mathbb{R}$, для середовища з втратами енергії $k \notin \mathbb{R}$. Аналогічно розглянувши вираз $\text{rot} \tilde{\tilde{H}}_m$, можна отримати хвильове рівняння для комплексної амплітуди напруженості магнітного поля

$$\Delta \tilde{\tilde{H}}_m + k^2 \tilde{\tilde{H}}_m = 0. \quad (4.16)$$

Електромагнітне поле у будь-якій хвилі є розв'язком хвильових рівнянь.

4.2. Розв'язок хвильового рівняння для плоскої монохроматичної хвилі у необмеженому просторі

Фазовий фронт хвилі – поверхня, всі точки якої мають однакову фазу. Якщо фазовий фронт хвилі є площиною, то таку хвилю називають плоскою хвилею.

Розв'язком рівняння (4.15), який описує плоску монохроматичну хвилю у необмеженому просторі, є

$$\tilde{\tilde{E}}_m = \tilde{a}_E e^{ik(\vec{n}, \vec{r})} + \tilde{b}_E e^{-ik(\vec{n}, \vec{r})}, \quad (4.17)$$

де \vec{n} – одиничний вектор, напрямлений перпендикулярно до хвильового фронту, \tilde{a}_E та \tilde{b}_E – постійні комплексні вектори (тобто вони не залежать не від координат, не від часу). Покажемо, що (4.17) дійсно є розв'язком (4.15).

Порахуємо $\Delta \tilde{\tilde{E}}_m$ на основі (4.17):

$$\begin{aligned} \left(\Delta \tilde{\tilde{E}}_m \right)_j &= \frac{\partial^2 \tilde{E}_{mj}}{\partial x_1 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\tilde{a}_{Ej} e^{ik(\vec{n}, \vec{r})} + \tilde{b}_{Ej} e^{-ik(\vec{n}, \vec{r})} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\tilde{a}_{Ej} \frac{\partial e^{ik(\vec{n}, \vec{r})}}{\partial x_1} + \tilde{b}_{Ej} \frac{\partial e^{-ik(\vec{n}, \vec{r})}}{\partial x_1} \right) = \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\tilde{a}_{Ej} e^{ik(\vec{n}, \vec{r})} ik \frac{\partial(\vec{n}, \vec{r})}{\partial x_l} - \tilde{b}_{Ej} e^{-ik(\vec{n}, \vec{r})} ik \frac{\partial(\vec{n}, \vec{r})}{\partial x_l} \right).$$

Так як

$$\frac{\partial(\vec{n}, \vec{r})}{\partial x_l} = \frac{\partial n_\beta x_\beta}{\partial x_l} = n_\beta \frac{\partial x_\beta}{\partial x_l} = n_\beta \delta_{\beta l} = n_l, \quad (4.19)$$

(див. властивості δ -символу (1.21) та (1.22)), то на основі (4.19) та (4.18) маємо

$$\begin{aligned} \left(\Delta \tilde{E}_m \right)_j &= ik n_l \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\tilde{a}_{Ej} e^{ik(\vec{n}, \vec{r})} - \tilde{b}_{Ej} e^{-ik(\vec{n}, \vec{r})} \right) = \\ &= ik n_l \left(\tilde{a}_{Ej} \frac{\partial e^{ik(\vec{n}, \vec{r})}}{\partial x_l} - \tilde{b}_{Ej} \frac{\partial e^{-ik(\vec{n}, \vec{r})}}{\partial x_l} \right) = \\ &= ik n_l \left(\tilde{a}_{Ej} e^{ik(\vec{n}, \vec{r})} ik \frac{\partial(\vec{n}, \vec{r})}{\partial x_l} + \tilde{b}_{Ej} e^{-ik(\vec{n}, \vec{r})} ik \frac{\partial(\vec{n}, \vec{r})}{\partial x_l} \right) = -k^2 \left(\tilde{a}_{Ej} e^{ik(\vec{n}, \vec{r})} + \tilde{b}_{Ej} e^{-ik(\vec{n}, \vec{r})} \right), \end{aligned} \quad (4.20)$$

тут враховано, що \vec{n} – одиничний вектор, тобто

$$n_l n_l = |\vec{n}|^2 = 1. \quad (4.21)$$

Також зауважимо, що у (4.18) та (4.20) m не є векторним індексом – цей індекс просто позначає комплексну амплітуду.

Тоді на основі (4.20) та (4.17) маємо, що

$$\Delta \tilde{E}_m + k^2 \tilde{E}_m = -k^2 \left(\tilde{a}_E e^{ik(\vec{n}, \vec{r})} + \tilde{b}_E e^{-ik(\vec{n}, \vec{r})} \right) + k^2 \left(\tilde{a}_E e^{ik(\vec{n}, \vec{r})} + \tilde{b}_E e^{-ik(\vec{n}, \vec{r})} \right) = 0, \quad (4.22)$$

тож підстановка (4.17) у (4.15) дає тотожність – вираз (4.17) дійсно є розв'язком рівняння (4.15).

Введемо вектор $\vec{k} = k\vec{n}$, який має назву називається *хвильовий вектор*.

Перепишемо розв'язок (4.15) в термінах хвильового вектору:

$$\tilde{E}_m = \tilde{a}_E e^{i(\vec{k}, \vec{r})} + \tilde{b}_E e^{-i(\vec{k}, \vec{r})}. \quad (4.23)$$

Дуже часто для зручності спрямовують систему координат так, щоб вісь Oz була перпендикулярна хвильовому фронту. Тоді

$$\vec{n} = \vec{e}_z, \quad (\vec{k}, \vec{r}) = k(\vec{e}_z, \vec{r}) = kz, \quad (4.24)$$

та

$$\tilde{\vec{E}}_m = \tilde{a}_E e^{ikz} + \tilde{b}_E e^{-ikz}. \quad (4.25)$$

Перший з цих доданків описує хвилю, яка рухається у від'ємному напрямку осі z , а другий – у додатному. Даний розв'язок є суперпозицією цих двох хвиль.

Покажемо, чому перший доданок описує хвилю, що рухається у додатному напрямку осі z . Комплексна амплітуда напруженості відповідного електричного поля має вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{E}_m^{(+)} &= \tilde{b}_E e^{-ikz} = (\tilde{b}_{Ex} \vec{e}_x + \tilde{b}_{Ey} \vec{e}_y + \tilde{b}_{Ez} \vec{e}_z) e^{-ikz} = \\ &= \left(|\tilde{b}_{Ex}| e^{i\varphi_x} \vec{e}_x + |\tilde{b}_{Ey}| e^{i\varphi_y} \vec{e}_y + |\tilde{b}_{Ez}| e^{i\varphi_z} \vec{e}_z \right) e^{-ikz}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Тоді відповідною комплексною величиною поля $\tilde{E}_m^{(+)}$ є

$$\tilde{E}^{(+)} = \left(|\tilde{b}_{Ex}| e^{i\varphi_x} \vec{e}_x + |\tilde{b}_{Ey}| e^{i\varphi_y} \vec{e}_y + |\tilde{b}_{Ez}| e^{i\varphi_z} \vec{e}_z \right) e^{-ikz} e^{i\omega t}, \quad (4.27)$$

див. (3.5) – (3.7). Розглянемо для простоти середовище без втрат: $k \in \mathbb{R}$. Тоді згідно (3.5) та (3.6) реальне «живе» поле має вигляд

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(+)} = \text{Re } \tilde{E}^{(+)} &= \vec{e}_x |\tilde{b}_{Ex}| \cos(\omega t - kz + \varphi_x) + \vec{e}_y |\tilde{b}_{Ey}| \cos(\omega t - kz + \varphi_y) + \\ &+ \vec{e}_z |\tilde{b}_{Ez}| \cos(\omega t - kz + \varphi_z). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Так як φ_x , φ_y , φ_z є константами, то хвильовий фронт, який є поверхнею постійної фази, опишеться рівнянням

$$\omega t - kz = \text{const}, \quad (4.29)$$

Звідки бачимо, що з зростанням часу координата z хвильового фронту має теж зростати. Тому з плином часу хвиля, що описується другим доданком у (4.25), рухається у додатному напрямку Oz . Аналогічно можна показати, що хвиля, що описується першим доданком у (4.25), рухається у від'ємному напрямку Oz .

Аналогічно розв'язком рівняння (4.16), який описує плоску монохроматичну хвилю у необмеженому простоті, є

$$\tilde{H}_m = \tilde{a}_H e^{ik(\vec{n}, \vec{r})} + \tilde{b}_H e^{-ik(\vec{n}, \vec{r})}, \quad (4.30)$$

\tilde{a}_H, \tilde{b}_H – постійні комплексні вектори (не залежать ні від координат, ні від часу). У випадку $\vec{n} = \vec{e}_z$

$$\tilde{H}_m = \tilde{a}_H e^{ikz} + \tilde{b}_H e^{-ikz}, \quad (4.31)$$

перший доданок описує хвилю, яка рухається у від'ємному напрямку осі z , а другий – у додатному.

Тож розглянутий хвильовий процес є суперпозицією двох хвиль. Одна з них рухається у додатному напрямку Oz , комплексні амплітуди напруженостей полів в ній є наступними:

$$\tilde{E}_m^{(+)} = \tilde{b}_E e^{-ikz}, \quad \tilde{H}_m^{(+)} = \tilde{b}_H e^{-ikz}. \quad (4.32)$$

Друга хвиля рухається у від'ємному напрямку Oz , відповідні комплексні амплітуди:

$$\tilde{E}_m^{(-)} = \tilde{a}_E e^{ikz}, \quad \tilde{H}_m^{(-)} = \tilde{a}_H e^{ikz}. \quad (4.33)$$

Ще раз зауважу, що вирази (4.32) та (4.33) наведено для системи координат, обраної так, щоб вісь Oz була перпендикулярна площині хвильового фронту.

4.3. Властивості полів у плоскій монохроматичній хвилі в необмеженому просторі

У цьому підрозділі покажемо, що у *плоскій монохроматичній хвилі в необмеженому просторі відсутні повздовжні компоненти полів, та напруженості електричного і магнітного поля перпендикулярні одне одному.*

Якщо така хвиля поширюється вздовж Oz , то поля залежать лише від координати z , див. (4.32) та (4.33). Тоді спростимо рівняння Максвела (4.10). Очевидно, що

$$\operatorname{div} \tilde{D}_m = \tilde{\epsilon} \epsilon_0 \operatorname{div} \tilde{E}_m = \tilde{\epsilon} \epsilon_0 \frac{\partial \tilde{E}_{mz}}{\partial z}, \quad \operatorname{div} \tilde{B}_m = \tilde{\mu} \mu_0 \operatorname{div} \tilde{H}_m = \tilde{\mu} \mu_0 \frac{\partial \tilde{H}_{mz}}{\partial z}, \quad (4.34)$$

бо \tilde{E}_m та \tilde{H}_m не залежать від x, y . Також

$$\left(\text{rot}\tilde{\tilde{E}}_m\right)_j = \varepsilon_{jla} \frac{\partial \tilde{E}_{ma}}{\partial x_l} = \varepsilon_{j3a} \frac{\partial \tilde{E}_{ma}}{\partial z}, \quad \left(\text{rot}\tilde{\tilde{H}}_m\right)_j = \varepsilon_{jla} \frac{\partial \tilde{H}_{ma}}{\partial x_l} = \varepsilon_{j3a} \frac{\partial \tilde{H}_{ma}}{\partial z}, \quad (4.35)$$

звідки

$$\left(\text{rot}\tilde{\tilde{E}}_m\right)_x = \varepsilon_{132} \frac{\partial \tilde{E}_{my}}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{E}_{my}}{\partial z}, \quad \left(\text{rot}\tilde{\tilde{E}}_m\right)_y = \varepsilon_{231} \frac{\partial \tilde{E}_{mx}}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{E}_{mx}}{\partial z}, \quad \left(\text{rot}\tilde{\tilde{E}}_m\right)_z = 0, \quad (4.36)$$

аналогічно

$$\left(\text{rot}\tilde{\tilde{H}}_m\right)_x = -\frac{\partial \tilde{H}_{my}}{\partial z}, \quad \left(\text{rot}\tilde{\tilde{H}}_m\right)_y = \frac{\partial \tilde{H}_{mx}}{\partial z}, \quad \left(\text{rot}\tilde{\tilde{H}}_m\right)_z = 0. \quad (4.37)$$

На основі (4.34) – (4.37) з урахуванням матеріальних рівнянь (3.28) та (3.34) покомпонентно переписемо рівняння (4.10):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{E}_{mz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{H}_{mz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{E}_{my}}{\partial z} = i\omega\tilde{\mu}\mu_0\tilde{H}_{mx}, \quad \frac{\partial \tilde{E}_{mx}}{\partial z} = -i\omega\tilde{\mu}\mu_0\tilde{H}_{my}, \quad 0 = \tilde{E}_{mz}, \\ \frac{\partial \tilde{H}_{my}}{\partial z} = -i\omega\tilde{\varepsilon}\varepsilon_0\tilde{E}_{mx}, \quad \frac{\partial \tilde{H}_{mx}}{\partial z} = i\omega\tilde{\varepsilon}\varepsilon_0\tilde{E}_{my}, \quad 0 = \tilde{H}_{mz}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

З (4.38) одразу бачимо, що повздовжні компоненти полів \tilde{E}_{mz} та \tilde{H}_{mz} є нульовими – тобто у вільному просторі плоска монохроматична електромагнітна хвиля є поперечною.

Розглянемо хвилю, що рухається у від'ємному напрямку Oz . Так як така хвиля є поперечною, то

$$\tilde{\tilde{E}}_m^{(-)} = \tilde{e}_x \tilde{a}_{Ex} e^{ikz} + \tilde{e}_y \tilde{a}_{Ey} e^{ikz}, \quad (4.39)$$

та на основі (4.38) маємо

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{mx}^{(-)} &= \frac{1}{i\omega\tilde{\mu}\mu_0} \frac{\partial \tilde{E}_{my}^{(-)}}{\partial z} = \frac{ik}{i\omega\tilde{\mu}\mu_0} \tilde{a}_{Ey} e^{ikz} = \frac{k}{\omega\tilde{\mu}\mu_0} \tilde{a}_{Ey} e^{ikz}, \\ \tilde{H}_{my}^{(-)} &= -\frac{1}{i\omega\tilde{\mu}\mu_0} \frac{\partial \tilde{E}_{mx}^{(-)}}{\partial z} = -\frac{k}{\omega\tilde{\mu}\mu_0} \tilde{a}_{Ex} e^{ikz}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Обчислимо векторний добуток

$$\left[\tilde{e}_z, \tilde{\tilde{E}}_m^{(-)}\right] = \left[\tilde{e}_z, \tilde{a}_{Ex} e^{ikz} \tilde{e}_x + \tilde{a}_{Ey} e^{ikz} \tilde{e}_y\right] = \tilde{a}_{Ex} e^{ikz} \left[\tilde{e}_z, \tilde{e}_x\right] + \tilde{a}_{Ey} e^{ikz} \left[\tilde{e}_z, \tilde{e}_y\right]. \quad (4.41)$$

Так як

$$\left[\vec{e}_z, \vec{e}_x \right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_y, \quad \left[\vec{e}_z, \vec{e}_y \right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{e}_x, \quad (4.42)$$

то

$$\left[\vec{e}_z, \vec{E}_m \right] = \vec{e}_y \tilde{a}_{Ex} e^{ikz} - \vec{e}_x \tilde{a}_{Ey} e^{ikz}. \quad (4.43)$$

З іншого боку, так як хвиля є поперечною, то на основі (4.40) та (4.43) маємо

$$\vec{H}_m^{(-)} = \vec{e}_x \tilde{H}_{mx}^{(-)} + \vec{e}_y \tilde{H}_{my}^{(-)} = \frac{k}{\omega \tilde{\mu} \mu_0} (\vec{e}_x \tilde{a}_{Ey} e^{ikz} - \vec{e}_y \tilde{a}_{Ex} e^{ikz}) = -\frac{k}{\omega \tilde{\mu} \mu_0} \left[\vec{e}_z, \vec{E}_m^{(-)} \right]. \quad (4.44)$$

З урахуванням (4.14) маємо

$$\vec{H}_m^{(-)} = \sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon} \tilde{\varepsilon}_0}{\tilde{\mu} \mu_0}} \left[-\vec{e}_z, \vec{E}_m^{(-)} \right] = \frac{1}{W} \left[\vec{n}_0, \vec{E}_m^{(-)} \right], \quad (4.45)$$

де $\vec{n}_0 = -\vec{e}_z$ – одиничний вектор, в напрямку якого поширюється хвиля, що розглядається, та

$$W = \sqrt{\frac{\tilde{\mu} \mu_0}{\tilde{\varepsilon} \tilde{\varepsilon}_0}}. \quad (4.46)$$

Поговоримо про розмірність величини W . На основі (2.15), (2.11) та (2.12) маємо, що

$$[W] = \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^2} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^4}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^3}. \quad (4.47)$$

З іншого боку,

$$\text{Ом} = \frac{\text{В}}{\text{А}} = \frac{\text{Дж}}{\text{А} \cdot \text{Кл}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^3}. \quad (4.48)$$

Тобто з (4.47) та (4.48) бачимо, що величина W вимірюється у омах. Цю величину назвали *хвильовим опором* вільного простору.

На основі (4.45) можна зробити висновок, що *вектори* \vec{n}_0 , $\vec{E}_m^{(-)}$ та $W \cdot \vec{H}_m^{(-)}$ *створюють праву трійку у плоскій монохроматичній хвилі*. Звідси очевидно,

що вектори $\tilde{E}_m^{(-)}$ та $\tilde{H}_m^{(-)}$ є перпендикулярними один одному. Аналогічно можна показати, що для хвилі, що рухається в додатному напрямку Oz , виконується такий же самий за фізичним змістом вираз

$$\tilde{H}_m^{(+)} = \frac{1}{W} \left[\tilde{n}_0, \tilde{E}_m^{(+)} \right], \quad \tilde{n}_0 = \vec{e}_z. \quad (4.49)$$

4.4. Хвилі у середовищі з втратами та у середовищі без втрат

Розглянемо хвилю, що рухається у додатному напрямку Oz . Спочатку розглянемо середовище без втрат, тобто $k \in \mathbb{R}$, $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\mu = \tilde{\mu} \in \mathbb{R}$, $W \in \mathbb{R}$.

Як показано вище, у такому випадку електричне поле у хвилі залежить від часу за законом (4.28), а координата z хвильового фронту пов'язана з часом співвідношенням (4.29). При цьому слід зауважити, що рівняння (4.28) було виписано без врахування того, що хвиля є поперечною (цей факт було виведено дещо пізніше за рівняння (4.28)). Тому з врахуванням того, що хвиля є поперечною, запишемо вираз для реального «живого» електричного поля та його комплексної амплітуди:

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(+)} = \text{Re } \tilde{E}^{(+)} &= \vec{e}_x \left| \tilde{b}_{Ex} \right| \cos(\omega t - kz + \varphi_x) + \vec{e}_y \left| \tilde{b}_{Ey} \right| \cos(\omega t - kz + \varphi_y), \\ \tilde{E}_m^{(+)} &= \left(\left| \tilde{b}_{Ex} \right| e^{i\varphi_x} \vec{e}_x + \left| \tilde{b}_{Ey} \right| e^{i\varphi_y} \vec{e}_y \right) e^{-ikz}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

На основі (4.49) та (4.42) порахуємо $\tilde{H}_m^{(+)}$:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_m^{(+)} &= \frac{1}{W} \left| \tilde{b}_{Ex} \right| e^{i\varphi_x} e^{-ikz} [\vec{e}_z, \vec{e}_x] + \frac{1}{W} \left| \tilde{b}_{Ey} \right| e^{i\varphi_y} e^{-ikz} [\vec{e}_z, \vec{e}_y] = \\ &= \frac{1}{W} \left| \tilde{b}_{Ex} \right| e^{i\varphi_x} e^{-ikz} \vec{e}_y - \frac{1}{W} \left| \tilde{b}_{Ey} \right| e^{i\varphi_y} e^{-ikz} \vec{e}_x, \end{aligned} \quad (4.51)$$

та запишемо відповідну залежність від часу реального «живого» магнітного поля:

$$\vec{H}^{(+)} = \frac{1}{W} \left| \tilde{b}_{Ex} \right| \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \vec{e}_y - \frac{1}{W} \left| \tilde{b}_{Ey} \right| \cos(\omega t - kz + \varphi_y) \vec{e}_x. \quad (4.52)$$

Як бачимо з виразів (4.50) та (4.52), поля у плоскій монохроматичній хвилі, що поширюється у вільному просторі без втрат, залежать від часу за незгасаючими синусоїдальними законами.

Фазова швидкість хвилі – це швидкість руху фазового фронту. Для хвилі, що розглядається, цю швидкість можна отримати на основі рівняння (4.29):

$$z = \frac{\omega}{k}t + \text{const} \Rightarrow v_{\phi} = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}. \quad (4.53)$$

Підставимо (4.14) у (4.53) та з урахуванням (2.5) отримаємо фазову швидкість плоскої монохроматичної хвилі у вільному просторі без втрат:

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad (4.54)$$

Зауважимо, що розгляд хвилі, що рухається у від'ємному напрямку Oz , очевидно, призводить до таких самих висновків про незгасання полів та про величину фазової швидкості.

Розглянемо тепер хвилю у середовищі з втратами, тобто у випадку, коли $k \notin \mathbb{R}$, $W \notin \mathbb{R}$, тобто у випадку, коли $\tilde{\varepsilon}$ або $\tilde{\mu}$ є комплексними.

$$k = \omega\sqrt{\tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}\varepsilon_0\mu_0} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}} = \beta - i\alpha, \quad \beta, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (4.55)$$

фізично завжди реалізується випадок $\alpha > 0$. На основі комплексної амплітуди (4.32) випишемо реальне «живе» електричне поле з урахуванням (4.55) та того, що хвиля є поперечною:

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(+)} &= \text{Re}\left(\tilde{E}_m^{(+)} e^{i\omega t}\right) = \text{Re}\left(\tilde{b}_E e^{-ikz} e^{i\omega t}\right) = \text{Re}\left(\left(\tilde{b}_{Ex} \vec{e}_x + \tilde{b}_{Ey} \vec{e}_y\right) e^{-\alpha z} e^{-i\beta z} e^{i\omega t}\right) = \\ &= \text{Re}\left(\left(|\tilde{b}_{Ex}| e^{i\varphi_x} \vec{e}_x + |\tilde{b}_{Ey}| e^{i\varphi_y} \vec{e}_y\right) e^{-\alpha z} e^{-i\beta z} e^{i\omega t}\right) = \\ &= \left(\vec{e}_x |\tilde{b}_{Ex}| \cos(\omega t - \beta z + \varphi_x) + \vec{e}_y |\tilde{b}_{Ey}| \cos(\omega t - \beta z + \varphi_y)\right) e^{-\alpha z}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Нехай

$$W = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}\mu_0}{\tilde{\varepsilon}\varepsilon_0}} = |W| e^{i\psi}. \quad (4.57)$$

Тоді на основі (4.49) та (4.42) маємо

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_m^{(+)} &= \frac{1}{W} \left[\vec{e}_z, \tilde{E}_m^{(+)} \right] = \frac{1}{|W| e^{i\psi}} \left[\vec{e}_z, (\tilde{b}_{Ex} \vec{e}_x + \tilde{b}_{Ey} \vec{e}_y) e^{-\alpha z} e^{-i\beta z} \right] = \\
&= \frac{1}{|W|} \tilde{b}_{Ex} e^{-\alpha z} e^{-i\psi} e^{-i\beta z} [\vec{e}_z, \vec{e}_x] + \frac{1}{|W|} \tilde{b}_{Ey} e^{-\alpha z} e^{-i\psi} e^{-i\beta z} [\vec{e}_z, \vec{e}_y] = \\
&= \frac{1}{|W|} |\tilde{b}_{Ex}| e^{i\varphi_x} e^{-\alpha z} e^{-i\psi} e^{-i\beta z} \vec{e}_y - \frac{1}{|W|} |\tilde{b}_{Ey}| e^{i\varphi_y} e^{-\alpha z} e^{-i\psi} e^{-i\beta z} \vec{e}_x,
\end{aligned} \tag{4.58}$$

та відповідне реальне «живе» магнітне поле:

$$\begin{aligned}
\vec{H}^{(+)} &= \text{Re} \left(\tilde{H}_m^{(+)} e^{i\omega t} \right) = \\
&= \left(\frac{1}{|W|} |\tilde{b}_{Ex}| \cos(\omega t - \beta z + \varphi_x - \psi) \vec{e}_y - \frac{1}{|W|} |\tilde{b}_{Ey}| \cos(\omega t - \beta z + \varphi_y - \psi) \vec{e}_x \right) e^{-\alpha z}.
\end{aligned} \tag{4.59}$$

На основі виразів (4.56) та (4.59) бачимо, що на відміну від середовища без втрат, у середовищі з втратами поля експоненційно згасають з координатою, а також між напруженостями електричного та магнітного полів наявний зсув фаз ψ .

Також на основі (4.56) та (4.59) бачимо, що постійність фази хвилі описується рівнянням

$$\omega t - \beta z = \text{const}, \tag{4.60}$$

звідки з урахуванням (4.14) та (2.5) фазова швидкість хвилі у вільному просторі з втратами дорівнює

$$v_\Phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\text{Re } k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \text{Re} \sqrt{\tilde{\varepsilon} \tilde{\mu}}} = \frac{c}{\text{Re} \sqrt{\tilde{\varepsilon} \tilde{\mu}}}. \tag{4.61}$$

Зауважимо, що розгляд хвилі, що рухається у від'ємному напрямку Oz , очевидно, призводить до таких самих висновків про експоненційне згасання полів з координатою, та про величину фазової швидкості.

Окрім фазової швидкості, вводять поняття *групової швидкості*. Під цим терміном розуміють швидкість руху максимуму сигналу, що утворений групою хвиль, частоти яких охоплюють дуже вузький проміжок значень. За визначенням, групова швидкість

$$v_r = \frac{d\omega}{d\beta}. \quad (4.62)$$

Якщо фазова швидкість не залежить від частоти, то фазова і групова швидкість збігаються. Такий факт, наприклад, має місце для плоскої монохроматичної хвилі у відкритому просторі. Якщо фазова швидкість залежить від частоти, то фазова і групова швидкість не дорівнюють одна одній. З груповою швидкістю часто асоціюють швидкість передачі енергії.

5. Загальні властивості хвиль у напрямних системах

5.1. Зв'язок між повздовжніми та поперечними компонентами хвиль

Спрямуємо систему координат так, щоб хвиля у напрямній системі розповсюджувалась вздовж осі Oz . Розглянемо хвилю, яка розповсюджується в додатному напрямку осі Oz . Тоді комплексні амплітуди полів в цій хвилі

$$\tilde{\vec{E}}_m, \tilde{\vec{H}}_m \sim e^{-\tilde{\gamma}z}, \quad (5.1)$$

де $\tilde{\gamma}$ – коефіцієнт розповсюдження хвилі у напрямній системі,

$$\tilde{\gamma} = \alpha + i\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (5.2)$$

У випадку згасання хвилі $\alpha > 0$, у випадку синусоїдальної незгасаючої хвилі $\alpha = 0$.

Розкладемо комплексні амплітуди полів на повздовжні та поперечні складові:

$$\tilde{\vec{E}}_m = \tilde{\vec{E}}_{mt} + \tilde{E}_{mz} \vec{e}_z, \quad \tilde{\vec{H}}_m = \tilde{\vec{H}}_{mt} + \tilde{H}_{mz} \vec{e}_z, \quad (5.3)$$

де

$$\tilde{\vec{E}}_{mt} = \tilde{E}_{mx} \vec{e}_x + \tilde{E}_{my} \vec{e}_y, \quad \tilde{\vec{H}}_{mt} = \tilde{H}_{mx} \vec{e}_x + \tilde{H}_{my} \vec{e}_y \quad (5.4)$$

є поперечними компонентами полів. Зауважимо також, що розглядаються середовища без струмів та зарядів. На основі (5.1) бачимо, що

$$\frac{\partial \tilde{\vec{E}}_m}{\partial z} = -\tilde{\gamma} \tilde{\vec{E}}_m, \quad \frac{\partial \tilde{\vec{H}}_m}{\partial z} = -\tilde{\gamma} \tilde{\vec{H}}_m. \quad (5.5)$$

За визначенням ротора (1.11) маємо

$$\text{rot} \tilde{\vec{E}}_m = \vec{e}_x \left(\frac{\partial \tilde{E}_{mz}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{E}_{my}}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial \tilde{E}_{mx}}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{E}_{mz}}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial \tilde{E}_{my}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{E}_{mx}}{\partial y} \right), \quad (5.6)$$

та на основі (5.6) перепишемо поперечні компоненти четвертого з рівнянь Максвела (4.10):

$$\vec{e}_x \left(\frac{\partial \tilde{E}_{mz}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{E}_{my}}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial \tilde{E}_{mx}}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{E}_{mz}}{\partial x} \right) = -i\omega \tilde{\mu}_0 \tilde{\vec{H}}_{mt}, \quad (5.7)$$

тут враховано матеріальне рівняння (3.34).

З урахуванням (5.5) переписемо (5.7) як

$$\vec{e}_x \left(\frac{\partial \tilde{E}_{mz}}{\partial y} + \tilde{\gamma} \tilde{E}_{my} \right) + \vec{e}_y \left(-\tilde{\gamma} \tilde{E}_{mx} - \frac{\partial \tilde{E}_{mz}}{\partial x} \right) = -i\omega \tilde{\mu} \mu_0 \tilde{H}_{mt}, \quad (5.8)$$

Помножимо цей вираз векторно на \vec{e}_z :

$$[\vec{e}_x, \vec{e}_z] \left(\frac{\partial \tilde{E}_{mz}}{\partial y} + \tilde{\gamma} \tilde{E}_{my} \right) + [\vec{e}_y, \vec{e}_z] \left(-\tilde{\gamma} \tilde{E}_{mx} - \frac{\partial \tilde{E}_{mz}}{\partial x} \right) = -i\omega \tilde{\mu} \mu_0 [\tilde{H}_{mt}, \vec{e}_z], \quad (5.9)$$

з урахуванням того, що

$$[\vec{e}_x, \vec{e}_z] = -\vec{e}_y, \quad [\vec{e}_y, \vec{e}_z] = \vec{e}_x \quad (5.10)$$

маємо

$$-\tilde{\gamma} (\vec{e}_y \tilde{E}_{my} + \vec{e}_x \tilde{E}_{mx}) - \left(\vec{e}_x \frac{\partial \tilde{E}_{mz}}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \tilde{E}_{mz}}{\partial y} \right) = -i\omega \tilde{\mu} \mu_0 [\tilde{H}_{mt}, \vec{e}_z]. \quad (5.11)$$

Введемо оператор градієнту лише за поперечними компонентами:

$$\text{grad}_t \varphi \equiv \vec{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (5.12)$$

Тоді (5.11) на основі (5.4) переписеться як

$$\tilde{\gamma} \tilde{E}_{mt} + \text{grad}_t \tilde{E}_{mz} = i\omega \tilde{\mu} \mu_0 [\tilde{H}_{mt}, \vec{e}_z] \Rightarrow [\tilde{H}_{mt}, \vec{e}_z] = \frac{1}{i\omega \tilde{\mu} \mu_0} (\tilde{\gamma} \tilde{E}_{mt} + \text{grad}_t \tilde{E}_{mz}). \quad (5.13)$$

Повернемося до виразу (5.8) та «перезберемо» члени у лівій частині:

$$\left(\vec{e}_x \frac{\partial \tilde{E}_{mz}}{\partial y} - \vec{e}_y \frac{\partial \tilde{E}_{mz}}{\partial x} \right) + \tilde{\gamma} (\vec{e}_x \tilde{E}_{my} - \vec{e}_y \tilde{E}_{mx}) = -i\omega \tilde{\mu} \mu_0 \tilde{H}_{mt}. \quad (5.14)$$

Розглянемо вираз $[\text{grad}_t \tilde{E}_{mz}, \vec{e}_z]$ та з урахуванням (5.10) отримаємо

$$[\text{grad}_t \tilde{E}_{mz}, \vec{e}_z] = [\vec{e}_x, \vec{e}_z] \frac{\partial \tilde{E}_{mz}}{\partial x} + [\vec{e}_y, \vec{e}_z] \frac{\partial \tilde{E}_{mz}}{\partial y} = \vec{e}_x \frac{\partial \tilde{E}_{mz}}{\partial y} - \vec{e}_y \frac{\partial \tilde{E}_{mz}}{\partial x}. \quad (5.15)$$

Розглянемо аналогічно вираз $[\tilde{E}_{mt}, \vec{e}_z]$:

$$[\tilde{E}_{mt}, \vec{e}_z] = \tilde{E}_{mx} [\vec{e}_x, \vec{e}_z] + \tilde{E}_{my} [\vec{e}_y, \vec{e}_z] = -\vec{e}_y \tilde{E}_{mx} + \tilde{E}_{my} \vec{e}_x. \quad (5.16)$$

Тоді на основі (5.15) та (5.16) переписемо (5.14):

$$\left[\text{grad}_t \tilde{E}_{mz}, \vec{e}_z \right] + \tilde{\gamma} \left[\tilde{E}_{mt}, \vec{e}_z \right] = -i\omega \tilde{\mu} \mu_0 \tilde{H}_{mt}. \quad (5.17)$$

Розглянемо тепер третє з рівнянь Максвела (4.10) з урахуванням матеріального рівняння (3.28). Тоді аналогічно можна отримати вирази

$$\left[\tilde{E}_{mt}, \vec{e}_z \right] = -\frac{1}{i\omega \tilde{\epsilon} \epsilon_0} \left(\tilde{\gamma} \tilde{H}_{mt} + \text{grad}_t \tilde{H}_{mz} \right) \quad (5.18)$$

та

$$\left[\text{grad}_t \tilde{H}_{mz}, \vec{e}_z \right] + \tilde{\gamma} \left[\tilde{H}_{mt}, \vec{e}_z \right] = i\omega \tilde{\epsilon} \epsilon_0 \tilde{E}_{mt}. \quad (5.19)$$

Дійсно, в нас у порівнянні з викладками (5.6)–(5.17) «виникає ще один» знак мінус, \tilde{E}_m та \tilde{H}_{mt} «міняються місцями», та «замість» множника $\tilde{\mu} \mu_0$ «виникає» множник $\tilde{\epsilon} \epsilon_0$, в іншому розрахунки є такими ж самими.

Підставимо (5.13) у (5.19):

$$\left[\text{grad}_t \tilde{H}_{mz}, \vec{e}_z \right] + \tilde{\gamma} \frac{1}{i\omega \tilde{\mu} \mu_0} \left(\tilde{\gamma} \tilde{E}_{mt} + \text{grad}_t \tilde{E}_{mz} \right) = i\omega \tilde{\epsilon} \epsilon_0 \tilde{E}_{mt}, \quad (5.20)$$

звідки прямими алгебраїчними перетвореннями знаходимо

$$\begin{aligned} \left[\text{grad}_t \tilde{H}_{mz}, \vec{e}_z \right] + \frac{\tilde{\gamma}}{i\omega \tilde{\mu} \mu_0} \text{grad}_t \tilde{E}_{mz} &= \tilde{E}_{mt} \left(i\omega \tilde{\epsilon} \epsilon_0 - \frac{\tilde{\gamma}^2}{i\omega \tilde{\mu} \mu_0} \right) = \\ &= \tilde{E}_{mt} \left(\frac{-\omega^2 \tilde{\mu} \mu_0 \tilde{\epsilon} \epsilon_0 - \tilde{\gamma}^2}{i\omega \tilde{\mu} \mu_0} \right) = -\frac{k^2 + \tilde{\gamma}^2}{i\omega \tilde{\mu} \mu_0} \tilde{E}_{mt}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

див. (4.14). Тоді з (5.21) знаходимо

$$\tilde{E}_{mt} = -\frac{i\omega \tilde{\mu} \mu_0}{k^2 + \tilde{\gamma}^2} \left[\text{grad}_t \tilde{H}_{mz}, \vec{e}_z \right] - \frac{\tilde{\gamma}}{k^2 + \tilde{\gamma}^2} \text{grad}_t \tilde{E}_{mz}. \quad (5.22)$$

Підставивши (5.18) у (5.17), аналогічно отримаємо

$$\tilde{H}_{mt} = \frac{i\omega \tilde{\epsilon} \epsilon_0}{\tilde{\gamma}^2 + k^2} \left[\text{grad}_t \tilde{E}_{mz}, \vec{e}_z \right] - \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}^2 + k^2} \text{grad}_t \tilde{H}_{mz}. \quad (5.23)$$

Вирази (5.22) та (5.23) задають зв'язок між поперечними та повздовжніми компонентами полів у хвилі, що розповсюджується у напрямній системі у додатному напрямку осі Oz. Як бачимо, у напрямних системах поперечні

компоненти полів є однозначними функціями повздовжніх. Відповідні вирази для хвилі, що розповсюджується у від'ємному напрямку Oz , можна отримати формальною заміною $\tilde{\gamma}$ на $-\tilde{\gamma}$ у (5.22) та (5.23).

5.2. Класифікація хвиль у напрямних системах

Спрямуємо систему координат так, щоб хвиля у напрямній системі розповсюджувалась у додатному напрямку осі Oz . Розіб'ємо хвильові рівняння (4.15) на поперечну та повздовжню частини:

$$\Delta_t \tilde{E}_m + \frac{\partial^2 \tilde{E}_m}{\partial z^2} + k^2 \tilde{E}_m = 0, \quad (5.24)$$

де введено оператор Лапласа лише за поперечними компонентами

$$\Delta_t \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (5.25)$$

На основі рівняння (5.5) перепишемо (5.24):

$$\Delta_t \tilde{E}_m + (k^2 + \tilde{\gamma}^2) \tilde{E}_m = 0. \quad (5.26)$$

Аналогічно можна отримати відповідне рівняння для магнітного поля:

$$\Delta_t \tilde{H}_m + (k^2 + \tilde{\gamma}^2) \tilde{H}_m = 0. \quad (5.27)$$

Хвилі у напрямних системах розділяють на 4 типи: ТЕМ–хвилі, ТМ–хвилі, ТЕ–хвилі та гібридні хвилі.

5.2.1. ТЕМ–хвилі

Цей тип хвиль також називають *поперечними* електромагнітними хвилями.

Повздовжні компоненти хвиль у таких хвилях є нульовими:

$$\tilde{E}_{mz} = 0, \quad \tilde{H}_{mz} = 0. \quad (5.28)$$

Тоді на основі (5.22) та (5.23) бачимо, що єдиний можливий випадок, коли поперечні компоненти хвиль є ненульовими – це випадок, коли

$$k^2 + \tilde{\gamma}^2 = 0 \Rightarrow \tilde{\gamma} = \pm ik, \quad (5.29)$$

зауважимо, що для хвилі, яка розповсюджується в додатному напрямку Oz , реалізується випадок $\tilde{\gamma} = ik$. Відповідно, коефіцієнт розповсюдження ТЕМ-хвилі дорівнює коефіцієнту розповсюдження хвилі у відкритому просторі, який заповнено тим же самим середовищем, що і дану напрямну систему. На основі (5.29) та (5.28) бачимо, що рівняння (5.26) та (5.27) для ТЕМ-хвилі набудуть вигляду

$$\Delta_t \tilde{\vec{E}}_{mt} = 0, \quad \Delta_t \tilde{\vec{H}}_{mt} = 0. \quad (5.30)$$

У ТЕМ-хвилі є взаємно-однозначний зв'язок між векторами $\tilde{\vec{E}}_{mt}$ та $\tilde{\vec{H}}_{mt}$. На основі виразу (5.13) знаходимо, що у ТЕМ-хвилі

$$\left[\tilde{\vec{H}}_{mt}, \vec{e}_z \right] = \frac{\tilde{\gamma} \tilde{\vec{E}}_{mt}}{i\omega \tilde{\mu} \mu_0} = \frac{ik \tilde{\vec{E}}_{mt}}{i\omega \tilde{\mu} \mu_0} = \frac{i\omega \sqrt{\tilde{\mu} \tilde{\epsilon} \mu_0 \epsilon_0} \tilde{\vec{E}}_{mt}}{i\omega \tilde{\mu} \mu_0} = \sqrt{\frac{\tilde{\epsilon} \epsilon_0}{\tilde{\mu} \mu_0}} \tilde{\vec{E}}_{mt} = \frac{1}{W} \tilde{\vec{E}}_{mt}, \quad (5.31)$$

див. (4.14) та (4.46); W – хвильовий опір відповідного вільного простору. На основі (5.31) бачимо, що вектори \vec{e}_z , $\tilde{\vec{E}}_{mt}$ та $W \tilde{\vec{H}}_{mt}$ утворюють праву трійку (ту ж саму властивість має хвиля у необмеженому просторі).

Характеристичним опором хвилі називають відношення поперечної компоненти електричного поля до поперечної компоненти магнітного поля у даній хвилі. На основі (5.31) бачимо, що *характеристичний опір ТЕМ-хвилі співпадає з характеристичним опором відповідного вільного простору та не залежить від частоти.*

Відомим є факт, що ТЕМ-хвиля може поширюватись лише у системі, де межа діелектрика з провідниками утворює багатозв'язну область, іншими словами, цю межу неможливо накреслити на папері, не відриваючи олівця від паперу. Тобто, такі хвилі можуть поширюватись у системах з двома чи більше ізольованими один від іншого провідниками.

5.2.2. ТМ-хвилі

Ці хвилі називають ще поперечно-магнітними, або електричними, або Е-хвилями.

В таких хвилях повздовжня компонента магнітного поля є нульовою, а електричного – ні:

$$\tilde{E}_{mz} \neq 0, \quad \tilde{H}_{mz} = 0. \quad (5.32)$$

З рівняння (5.26) маємо

$$\Delta_t \tilde{E}_{mt} + \vec{e}_z \Delta_t \tilde{E}_{mz} + (k^2 + \tilde{\gamma}^2) \tilde{E}_{mt} + (k^2 + \tilde{\gamma}^2) \vec{e}_z \tilde{E}_{mz} = 0, \quad (5.33)$$

та окремо виділимо звідси рівняння для повздовжньої компоненти:

$$\Delta_t \tilde{E}_{mz} + (k^2 + \tilde{\gamma}^2) \tilde{E}_{mz} = 0. \quad (5.34)$$

Алгоритм пошуку полів у такій хвилі є наступним. Розв'язується спочатку рівняння (5.34), а далі за знайденою компонентою \tilde{E}_{mz} та нульовою $\tilde{H}_{mz} = 0$ на основі виразів (5.22) та (5.23) отримують поперечні компоненти полів.

Так як $\tilde{H}_{mz} = 0$, то на основі (5.22) та (5.23) маємо

$$\tilde{E}_{mt} = -\frac{\tilde{\gamma}}{k^2 + \tilde{\gamma}^2} \text{grad}_t \tilde{E}_{mz}, \quad \tilde{H}_{mt} = \frac{i\omega \tilde{\epsilon} \epsilon_0}{\tilde{\gamma}^2 + k^2} \left[\text{grad}_t \tilde{E}_{mz}, \vec{e}_z \right], \quad (5.35)$$

та підставивши перше рівняння (5.35) у друге, отримуємо

$$\frac{\tilde{\gamma}}{i\omega \tilde{\epsilon} \epsilon_0} \tilde{H}_{mt} = \left[\vec{e}_z, \tilde{E}_{mt} \right], \quad (5.36)$$

звідки бачимо, що вектори \tilde{E}_{mt} та \tilde{H}_{mt} є ортогональними один одному у ТМ-хвилі, та характеристичний опір ТМ-хвилі дорівнює

$$W_E = \frac{\tilde{\gamma}}{i\omega \tilde{\epsilon} \epsilon_0}. \quad (5.37)$$

Також на основі першого з рівнянь (5.35) бачимо, що вектор \tilde{E}_{mt} є пропорційним до поперечного градієнту повздовжньої компоненти поля.

5.2.3. ТЕ-хвилі

Такі хвилі називають ще поперечно-електричними, або магнітними, або Н-хвилями. В таких хвилях повздовжня компонента електричного поля є нульовою, а магнітного – ні:

$$\tilde{E}_{mz} = 0, \quad \tilde{H}_{mz} \neq 0. \quad (5.38)$$

Аналогічно виведенню рівняння (5.34), для ТЕ-хвилі можна отримати наступне рівняння для повздовжньої компоненти:

$$\Delta_t \tilde{H}_{mz} + (k^2 + \tilde{\gamma}^2) \tilde{H}_{mz} = 0. \quad (5.39)$$

Алгоритм пошуку полів у такій хвилі є наступним. Розв'язується спочатку рівняння (5.39), а далі за знайденою компонентою \tilde{H}_{mz} та нульовою $\tilde{E}_{mz} = 0$ на основі виразів (5.22) та (5.23) отримують поперечні компоненти полів.

Так як $\tilde{E}_{mz} = 0$, то на основі (5.22) та (5.23) маємо

$$\tilde{E}_{mt} = -\frac{i\omega\tilde{\mu}\mu_0}{k^2 + \tilde{\gamma}^2} \left[\text{grad}_t \tilde{H}_{mz}, \vec{e}_z \right], \quad \tilde{H}_{mt} = -\frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}^2 + k^2} \text{grad}_t \tilde{H}_{mz}. \quad (5.40)$$

Підставивши друге рівняння (5.40) у перше, отримуємо

$$\tilde{E}_{mt} = \frac{i\omega\tilde{\mu}\mu_0}{\tilde{\gamma}} \left[\tilde{H}_{mt}, \vec{e}_z \right], \quad (5.41)$$

звідки бачимо, що вектори \tilde{E}_{mt} та \tilde{H}_{mt} є ортогональними один одному у ТЕ-хвилі, та характеристичний опір ТЕ-хвилі дорівнює

$$W_H = \frac{i\omega\tilde{\mu}\mu_0}{\tilde{\gamma}}. \quad (5.42)$$

Також на основі другого з рівнянь (5.40) бачимо, що вектор \tilde{H}_{mt} є пропорційним до поперечного градієнту повздовжньої компоненти поля.

5.2.4. Гібридні хвилі

У гібридній хвилі повздовжні компоненти обох полів є ненульовими:

$$\tilde{E}_{mz} \neq 0, \quad \tilde{H}_{mz} \neq 0. \quad (5.43)$$

Аналогічно виведенню рівняння (5.34) можна показати, що для гібридної хвилі рівняння для повздовжніх компонент полів є наступними:

$$\Delta_t \tilde{E}_{mz} + (k^2 + \tilde{\gamma}^2) \tilde{E}_{mz} = 0, \quad \Delta_t \tilde{H}_{mz} + (k^2 + \tilde{\gamma}^2) \tilde{H}_{mz} = 0. \quad (5.44)$$

Алгоритм пошуку полів у такій хвилі є наступним. Розв'язуються спочатку рівняння (5.44), а далі за знайденими компонентами \tilde{H}_{mz} та \tilde{E}_{mz} на основі виразів (5.22) та (5.23) отримують поперечні компоненти полів.

Відомим є факт, що гібридні хвилі можуть поширюватись у системі, що складається з декількох діелектричних шарів, що граничать один з одним.

6. Прямокутний хвилевід

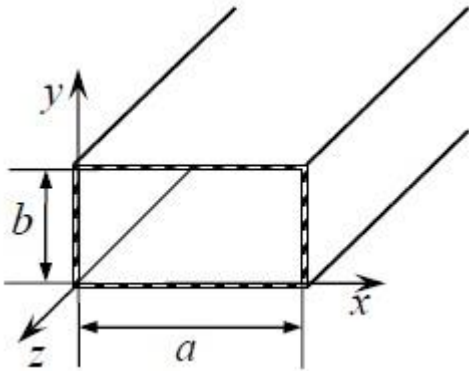


Рис. 6.1.

Прямокутний хвилевід – це напрямна система, що обмежена металевою трубою прямокутного перерізу. Прямокутний хвилевід є однією з найпростіших напрямних систем та він є часто застосовним на практиці.

Розглянемо нескінченний хвилевід, що витягнуто вздовж осі Oz . Нехай поперечні розміри хвилеводу $a > b$, див. рис. 6.1. Більший з поперечних розмірів відкладемо вздовж Ox , менший – вздовж Oy , див. рис. 6.1. Під фразою «нескінченний» хвилевід розуміється такий, що його розмір вздовж Oz є на декілька порядків більшим за a . Очевидно, що такий хвилевід спрямовує хвилю вздовж Oz . Для простоти розглянемо хвилю, що розповсюджується в додатному напрямку Oz .

Метал, що обмежує внутрішній простір хвилеводу, для простоти вважатимемо *ідеальним провідником*. Параметри внутрішнього середовища хвилеводу $\tilde{\epsilon}$, $\tilde{\mu}$ вважаємо заданими. При виведенні полів у хвилі, що поширюється таким хвилеводом, будемо базуватись на відомому експериментальному факті: *електромагнітне поле не входить усередину ідеального провідника*. Також слід пам'ятати, що нам для початку достатньо порахувати лише повздовжні компоненти полів. Поперечні компоненти однозначно виражаються через повздовжні за виразами (5.22) та (5.23).

Так як у цьому хвилеводі немає декількох шарів різних діелектриків, та границя провідника з діелектриком є однозв'язною областю, то у *такому хвилеводі можуть поширюватись лише ТМ– та ТЕ–хвилі*.

6.1. Граничні умови на стінках хвилеводу

Розглянемо межу двох середовищ – внутрішнього середовища хвилеводу (діелектрика) та ідеального провідника (стінок хвилеводу).

Як відомо з вище розглянутої поведінки полів на межі двох середовищ, тангенціальна компонента електричного поля є неперервною на межі двох середовищ, див. (2.51). Відповідно, так як електромагнітне поле не входить усередину ідеального провідника, то

$$\tilde{E}_{m\tau} = 0 \Big|_{\text{НаСтінках}}, \quad (6.1)$$

звідки

$$\tilde{E}_{mz} = 0 \Big|_{\text{НаСтінках}}, \quad (6.2)$$

бо на стінках z -компонента є однією з тангенціальних компонент, див. рис. 6.1. Умову (6.2) розпишемо детальніше:

$$\tilde{E}_{mz} \Big|_{x=a} = \tilde{E}_{mz} \Big|_{x=0} = \tilde{E}_{mz} \Big|_{y=b} = \tilde{E}_{mz} \Big|_{y=0} = 0, \quad (6.3)$$

Умова (6.3) є граничною умовою для повздовжньої компоненти електричного поля на стінках.

Знайдемо тепер граничну умову для \tilde{H}_{mz} на стінках. Як відомо з вище розглянутої поведінки полів на межі двох середовищ, нормальна компонента магнітної індукції є неперервною на межі двох середовищ, див. (2.41). Так як електромагнітне поле не входить усередину ідеального провідника, то

$$\tilde{B}_{mn} = 0 \Big|_{\text{НаСтінках}} \Rightarrow \mu\mu_0 \tilde{H}_{mn} = 0 \Big|_{\text{НаСтінках}} \Rightarrow \tilde{H}_{mn} = 0 \Big|_{\text{НаСтінках}}. \quad (6.4)$$

Середовище всередині хвилеводу є середовищем без струмів та зарядів, відповідно, для нього виконуються рівняння Максвела (4.10). Розпишемо x - та y -компоненти третього з рівнянь (4.10):

$$\frac{\partial \tilde{H}_{mz}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{H}_{my}}{\partial z} = i\omega \tilde{\epsilon} \epsilon_0 \tilde{E}_{mx}, \quad \frac{\partial \tilde{H}_{mx}}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{H}_{mz}}{\partial x} = i\omega \tilde{\epsilon} \epsilon_0 \tilde{E}_{my}. \quad (6.5)$$

На стінках $x=a$ та $x=0$ \tilde{E}_{my} є однією з тангенціальних компонент, а \tilde{H}_{mx} є нормальною компонентою. Відповідно, на основі (6.4) та (6.1) бачимо, що

$$\tilde{H}_{mx} \Big|_{x=a} = \tilde{H}_{mx} \Big|_{x=0} = 0, \quad \tilde{E}_{my} \Big|_{x=a} = \tilde{E}_{my} \Big|_{x=0} = 0, \quad (6.6)$$

звідки на основі другого з рівнянь (6.5) слідує, що

$$\left. \frac{\partial \tilde{H}_{mz}}{\partial x} \right|_{x=a} = \left. \frac{\partial \tilde{H}_{mz}}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (6.7)$$

На стінках $y=b$ та $y=0$ \tilde{E}_{mx} є однією з тангенціальних компонент, а \tilde{H}_{my} є нормальною компонентою. Відповідно, на основі (6.4) та (6.1) бачимо, що

$$\tilde{H}_{my}|_{y=b} = \tilde{H}_{my}|_{y=0} = 0, \quad \tilde{E}_{mx}|_{y=b} = \tilde{E}_{mx}|_{y=0} = 0, \quad (6.8)$$

звідки на основі першого з рівнянь (6.5) слідує, що

$$\left. \frac{\partial \tilde{H}_{mz}}{\partial y} \right|_{y=b} = \left. \frac{\partial \tilde{H}_{mz}}{\partial y} \right|_{y=0} = 0. \quad (6.9)$$

Умови (6.7) та (6.9) є граничними умовами для повздовжньої компоненти магнітного поля на стінках.

6.2. ТМ-хвилі у прямокутному хвилеводі

Як відомо з пункту 5.2.2, для того, щоб знайти поля у ТМ-хвилі, необхідно спочатку розв'язати рівняння (5.34), а потім обчислити поперечні компоненти хвиль на основі повздовжніх за виразами (5.22) та (5.23). Граничною умовою до рівняння (5.34) є вираз (6.3). Перепишемо рівняння (5.34) «в лоб»:

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}_{mz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{E}_{mz}}{\partial y^2} + (k^2 + \tilde{\gamma}^2) \tilde{E}_{mz} = 0. \quad (6.10)$$

Так як $\tilde{E}_{mz} \sim e^{-\tilde{\gamma}z}$, див. (5.1), то шукаємо розв'язок рівняння (6.10) у вигляді

$$\tilde{E}_{mz} = X(x)Y(y)e^{-\tilde{\gamma}z}, \quad (6.11)$$

де $X(x)$ – деяка функція, що залежить лише від x , а $Y(y)$ – деяка функція, що залежить лише від y . Підставляючи (6.11) у (6.10), отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} Y(y) e^{-\tilde{\gamma}z} + \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} X(x) e^{-\tilde{\gamma}z} + (k^2 + \tilde{\gamma}^2) X(x) Y(y) e^{-\tilde{\gamma}z} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -(k^2 + \tilde{\gamma}^2), \end{aligned} \quad (6.12)$$

тобто сума функцій $\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2}$ та $\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2}$ дорівнює якійсь константі, причому перша з цих функцій залежить лише від x , а друга – лише від y . Таке може бути лише тоді, коли самі ці функції є константами:

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} \frac{1}{X(x)} = -\xi^2, \quad \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} \frac{1}{Y(y)} = -\eta^2, \quad \xi^2 + \eta^2 = k^2 + \tilde{\gamma}^2, \quad (6.13)$$

$$\xi = \text{const}, \quad \eta = \text{const}.$$

Окремо випишемо рівняння

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} \frac{1}{X(x)} = -\xi^2 \Leftrightarrow \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \xi^2 X(x) = 0. \quad (6.14)$$

Його загальний розв'язок є відомим:

$$X(x) = A \sin(\xi x) + B \cos(\xi x), \quad A = \text{const}, \quad B = \text{const}. \quad (6.15)$$

На основі (6.3) та (6.11) бачимо, що повинні виконуватись умови

$$X(a) = X(0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} B \cos(\xi x) = 0 \\ A \sin(\xi a) + B \cos(\xi a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A \sin(\xi a) = 0 \end{cases}. \quad (6.16)$$

Очевидно, що нас цікавлять ненульові розв'язки рівняння (6.14), тому випадок $A=0$ нас не цікавить. Звідси бачимо, що на основі (6.16) єдиним можливим випадком не тотожно нульового розв'язку є випадок, коли

$$\sin(\xi a) = 0 \Rightarrow \xi a = \pi l, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad (6.17)$$

звідки можливими значеннями параметру ξ та можливими ненульовими розв'язками рівняння (6.14) є

$$\xi_l = \frac{\pi l}{a}, \quad X_l(x) = A \sin\left(\frac{\pi l}{a} x\right), \quad l \in \mathbb{Z}, \quad l \neq 0. \quad (6.18)$$

Випишемо рівняння

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} \frac{1}{Y(y)} = -\eta^2 \Leftrightarrow \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \eta^2 Y(y) = 0, \quad (6.19)$$

граничними умовами до нього є наслідками (6.3):

$$Y(b) = Y(0) = 0. \quad (6.20)$$

Аналогічно це рівняння має ненульові розв'язки та відповідні значення параметру η :

$$\eta_n = \frac{\pi n}{b}, \quad Y_n(y) = C \sin\left(\frac{\pi n}{b} y\right), \quad C = \text{const}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq 0. \quad (6.21)$$

Тоді відповідно до (6.18), (6.21), (6.11) та (6.13), можливими ненульовими розв'язками рівняння (6.10) є:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{mz_ln} &= \tilde{E}_{ln}^0 \sin\left(\frac{\pi l}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b} x\right) e^{-\tilde{\gamma}_{ln} z}, \quad \tilde{E}_{ln}^0 = \text{const}, \quad l, n \in \mathbb{Z}, \quad l, n \neq 0, \\ &\left(\frac{\pi l}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 = k^2 + \tilde{\gamma}_{ln}^2. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Зауважимо, що можна розглядати лише додатні l, n . Дійсно, якщо змінити знак у l або n , то квадрат відповідної величини не зміниться; відповідний синус змінить знак, проте цей знак можна «внести» в константу \tilde{E}_{ln}^0 . Тож і для від'ємних, і для додатних l, n вираз (6.22) має таку ж саму структуру. Тоді перепишемо (6.22) як

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{mz_ln} &= \tilde{E}_{ln}^0 \sin\left(\frac{\pi l}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b} x\right) e^{-\tilde{\gamma}_{ln} z}, \quad \tilde{E}_{ln}^0 = \text{const}, \quad l, n \in \mathbb{Z}, \quad l, n > 0, \\ \tilde{\gamma}_{ln}^2 &= \left(\frac{\pi l}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 - k^2. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Відповідно до (6.23), (5.22), (5.36) та (5.37), порахуємо відповідні поперечні компоненти. При розрахунку не забуваємо, що $\tilde{H}_{mz} = 0$, бо розглядаються ТМ-хвилі:

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{E}}_{mt_ln} &= -\frac{\tilde{\gamma}_{ln}}{k^2 + \tilde{\gamma}_{ln}^2} \text{grad}_t \tilde{E}_{mz} = -\frac{\tilde{\gamma}_{ln}}{k^2 + \tilde{\gamma}_{ln}^2} \left(\frac{\partial \tilde{E}_{mz}}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \tilde{E}_{mz}}{\partial y} \vec{e}_y \right) = \\ &= -\tilde{E}_{ln}^0 \frac{\tilde{\gamma}_{ln}}{k^2 + \tilde{\gamma}_{ln}^2} \frac{\pi l}{a} \cos\left(\frac{\pi l}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b} y\right) e^{-\tilde{\gamma}_{ln} z} \vec{e}_x - \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$-\tilde{E}_{ln}^0 \frac{\tilde{\gamma}_{ln}}{k^2 + \tilde{\gamma}_{ln}^2} \frac{\pi n}{b} \sin\left(\frac{\pi l}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{b} y\right) e^{-\tilde{\gamma}_{ln} z} \vec{e}_y,$$

та

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{mt} &= \frac{1}{W_E} [\vec{e}_z, \tilde{E}_{mt}] = \frac{1}{W_E} [\vec{e}_z, \vec{e}_x \tilde{E}_{mx} + \vec{e}_y \tilde{E}_{my}] = \\ &= \frac{1}{W_E} [\vec{e}_z, \vec{e}_x] \tilde{E}_{mx} + \frac{1}{W_E} [\vec{e}_z, \vec{e}_y] \tilde{E}_{my} = \frac{1}{W_E} \vec{e}_y \tilde{E}_{mx} - \frac{1}{W_E} \vec{e}_x \tilde{E}_{my}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Тоді остаточно на основі (6.23), (6.24), (6.25) та (5.37), випишемо покомпонентно поля у ТМ-хвилях, які можуть поширюватися плоским хвилеводом в додатному напрямку Oz, відповідні коефіцієнти розповсюдження хвилі та характеристичні опори хвиль:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{mz_{ln}} &= \tilde{E}_{ln}^0 \sin\left(\frac{\pi l}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b} y\right) e^{-\tilde{\gamma}_{ln} z}, \quad \tilde{H}_{mz_{ln}} = 0, \\ \tilde{E}_{mx_{ln}} &= -\tilde{E}_{ln}^0 \frac{\tilde{\gamma}_{ln}}{k^2 + \tilde{\gamma}_{ln}^2} \frac{\pi l}{a} \cos\left(\frac{\pi l}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b} y\right) e^{-\tilde{\gamma}_{ln} z}, \\ \tilde{E}_{my_{ln}} &= -\tilde{E}_{ln}^0 \frac{\tilde{\gamma}_{ln}}{k^2 + \tilde{\gamma}_{ln}^2} \frac{\pi n}{b} \sin\left(\frac{\pi l}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{b} y\right) e^{-\tilde{\gamma}_{ln} z}, \\ \tilde{H}_{mx_{ln}} &= \frac{1}{W_{Eln}} \tilde{E}_{ln}^0 \frac{\tilde{\gamma}_{ln}}{k^2 + \tilde{\gamma}_{ln}^2} \frac{\pi n}{b} \sin\left(\frac{\pi l}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{b} y\right) e^{-\tilde{\gamma}_{ln} z}, \\ \tilde{H}_{my_{ln}} &= -\frac{1}{W_{Eln}} \tilde{E}_{ln}^0 \frac{\tilde{\gamma}_{ln}}{k^2 + \tilde{\gamma}_{ln}^2} \frac{\pi l}{a} \cos\left(\frac{\pi l}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b} y\right) e^{-\tilde{\gamma}_{ln} z}, \\ \tilde{\gamma}_{ln}^2 &= \left(\frac{\pi l}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 - k^2, \quad W_{Eln} = \frac{\tilde{\gamma}_{ln}}{i\omega \tilde{\epsilon} \epsilon_0}, \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\tilde{E}_{ln}^0 = \text{const}, \quad l, n \in \mathbb{Z}, \quad l, n > 0,$$

Таку ТМ-хвилю, що відповідає певним значенням l, n називають E_{ln} -хвилею (модю). Слід зауважити, що не для будь-яких l, n відповідна хвиля може поширюватись хвилеводом, проте відповідний детальний опис буде надано у підрозділі 6.4.

6.3. ТЕ–хвилі у прямокутному хвилеводі

Як відомо з пункту 5.2.3, для того, щоб знайти поля у ТМ–хвилі, необхідно спочатку розв’язати рівняння (5.39), а потім обчислити поперечні компоненти хвиль на основі повздовжніх за виразами (5.22) та (5.23). Граничними умовами до рівняння (5.39) є вирази (6.7) та (6.9). Перепишемо рівняння (5.39) «в лоб»:

$$\frac{\partial^2 \tilde{H}_{mz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{H}_{mz}}{\partial y^2} + (k^2 + \tilde{\gamma}^2) \tilde{H}_{mz} = 0, \quad (6.27)$$

та аналогічно минулому підрозділу шукаємо його розв’язок у вигляді

$$\tilde{H}_{mz} = X(x)Y(y)e^{-\tilde{\gamma}z}. \quad (6.28)$$

Аналогічно виведенню виразів (6.13), маємо

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \xi^2 X(x) = 0, \quad \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \eta^2 Y(y) = 0, \quad \xi^2 + \eta^2 = k^2 + \tilde{\gamma}^2, \quad (6.29)$$

$$\xi = \text{const}, \quad \eta = \text{const},$$

та, відповідно,

$$X(x) = A \cos(\xi x) + B \sin(\xi x), \quad Y(y) = C \cos(\eta y) + D \sin(\eta y), \quad (6.30)$$

$$A, B, C, D = \text{const}.$$

На основі (6.28) та (6.7) маємо

$$\left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=a} = \left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow \begin{cases} B\xi = 0 \\ -A\xi \sin(a\xi) + B\xi \cos(\xi x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (6.31)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A \sin(a\xi) = 0 \end{cases}$$

звідки, аналогічно до (6.16), маємо можливі значення параметру ξ та можливі ненульові розв’язки для $X(x)$:

$$\xi_l = \frac{\pi l}{a}, \quad X_l(x) = A \cos\left(\frac{\pi l}{a} x\right), \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (6.32)$$

Зробивши аналогічні викладки для $Y(y)$, аналогічно (6.22) маємо можливі ненульові розв’язки для \tilde{H}_{mz} :

$$\tilde{H}_{mz_ln} = \tilde{H}_{ln}^0 \cos\left(\frac{\pi l}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{b} y\right) e^{-\tilde{\gamma}_{ln} z}, \quad \left(\frac{\pi l}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 = k^2 + \tilde{\gamma}_{ln}^2, \quad (6.33)$$

$$l, n \in \mathbb{Z}.$$

Так як і квадрат, і косинус є парними функціями, то можна розглядати лише невід'ємні l, n , тобто перепишемо (6.33):

$$\tilde{H}_{mz_ln} = \tilde{H}_{ln}^0 \cos\left(\frac{\pi l}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{b} y\right) e^{-\tilde{\gamma}_{ln} z}, \quad \tilde{\gamma}_{ln}^2 = \left(\frac{\pi l}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 - k^2, \quad (6.34)$$

$$l, n \in \mathbb{Z}, \quad l, n \geq 0, \quad \tilde{H}_{ln}^0 = \text{const}.$$

На основі (5.23) порахуємо відповідні поперечні компоненти магнітного поля, при цьому пам'ятаємо, що $\tilde{E}_{mz} = 0$, бо розглядається ТЕ-хвиля:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{mt_ln} &= -\frac{\tilde{\gamma}_{ln}}{\tilde{\gamma}_{ln}^2 + k^2} \text{grad}_t \tilde{H}_{mz} = -\frac{\tilde{\gamma}_{ln}}{\tilde{\gamma}_{ln}^2 + k^2} \left(\frac{\partial \tilde{H}_{mz}}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \tilde{H}_{mz}}{\partial y} \vec{e}_y \right) = \\ &= \tilde{H}_{ln}^0 \frac{\tilde{\gamma}_{ln}}{\tilde{\gamma}_{ln}^2 + k^2} \frac{\pi l}{a} \sin\left(\frac{\pi l}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{b} y\right) e^{-\tilde{\gamma}_{ln} z} \vec{e}_x + \\ &+ \tilde{H}_{ln}^0 \frac{\tilde{\gamma}_{ln}}{\tilde{\gamma}_{ln}^2 + k^2} \frac{\pi n}{b} \cos\left(\frac{\pi l}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b} y\right) e^{-\tilde{\gamma}_{ln} z} \vec{e}_y. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Відповідні поперечні компоненти електричного поля порахуємо на основі (5.41) та (5.42):

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{mt_ln} &= \left[W_{Hln} \tilde{H}_{mt_ln}, \vec{e}_z \right] = W_{Hln} \tilde{H}_{mx_ln} [\vec{e}_x, \vec{e}_z] + W_{Hln} \tilde{H}_{my_ln} [\vec{e}_y, \vec{e}_z] = \\ &= -W_{Hln} \tilde{H}_{mx_ln} \vec{e}_y + W_{Hln} \tilde{H}_{my_ln} \vec{e}_x, \quad W_{Hln} = \frac{i\omega \tilde{\mu} \mu_0}{\tilde{\gamma}_{ln}}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Слід зауважити, що на відміну від ТМ-хвиль, у ТЕ-хвилях l або n можуть дорівнювати нулю, проте не одночасно.

Відповідно, на основі (6.34), (6.35) та (6.36), остаточно запишемо покомпонентно поля у ТЕ-хвилях, які можуть поширюватися плоским хвилеводом в додатному напрямку Oz , відповідні коефіцієнти розповсюдження хвилі та характеристичні опори хвиль:

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_{mz_ln} &= \tilde{H}_{ln}^0 \cos\left(\frac{\pi l}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{b}y\right) e^{-\tilde{\gamma}_{ln}z}, \quad \tilde{E}_{mz_ln} = 0, \\
\tilde{H}_{mx_ln} &= \tilde{H}_{ln}^0 \frac{\tilde{\gamma}_{ln}}{\tilde{\gamma}_{ln}^2 + k^2} \frac{\pi l}{a} \sin\left(\frac{\pi l}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{b}y\right) e^{-\tilde{\gamma}_{ln}z}, \\
\tilde{H}_{my_ln} &= \tilde{H}_{ln}^0 \frac{\tilde{\gamma}_{ln}}{\tilde{\gamma}_{ln}^2 + k^2} \frac{\pi n}{b} \cos\left(\frac{\pi l}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b}y\right) e^{-\tilde{\gamma}_{ln}z}, \\
\tilde{E}_{mx_ln} &= \tilde{H}_{ln}^0 W_{Hln} \frac{\tilde{\gamma}_{ln}}{\tilde{\gamma}_{ln}^2 + k^2} \frac{\pi n}{b} \cos\left(\frac{\pi l}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b}y\right) e^{-\tilde{\gamma}_{ln}z}, \\
\tilde{E}_{my_ln} &= -\tilde{H}_{ln}^0 W_{Hln} \frac{\tilde{\gamma}_{ln}}{\tilde{\gamma}_{ln}^2 + k^2} \frac{\pi l}{a} \sin\left(\frac{\pi l}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{b}y\right) e^{-\tilde{\gamma}_{ln}z}, \\
\tilde{\gamma}_{ln}^2 &= \left(\frac{\pi l}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 - k^2, \quad W_{Hln} = \frac{i\omega\tilde{\mu}\mu_0}{\tilde{\gamma}_{ln}},
\end{aligned} \tag{6.37}$$

$$l, n \in \mathbb{Z}, \quad l, n \geq 0, \quad \tilde{H}_{ln}^0 = \text{const},$$

l, n не дорівнюють нулю одночасно.

Таку ТЕ–хвилю, що відповідає певним значенням l, n називають H_{ln} –хвилею (моду). Слід зауважити, що не для будь–яких l, n відповідна хвиля може поширюватись хвилеводом, проте відповідний детальний опис буде надано у підрозділі 6.4.

6.4. Загальні властивості хвильового процесу у плоскому хвилеводі для середовища усередині без втрат

Вище виведені поля у ТМ– та ТЕ–хвилях, що можуть поширюватись в додатному напрямку Oz плоским хвилеводом. Хвильовий процес у хвилеводі є суперпозицією цих хвиль. При цьому слід зазначити, що не будь–які H_{ln} – та E_{ln} –хвилі можуть поширюватись хвилеводом. Покажемо це для середовища без втрат. Наприклад, можна вважати, що часто використовуваний хвилевід з металевими стінками та вакуумом усередині є хвилеводом з внутрішнім середовищем без втрат.

У середовищі без втрат, як зазначено в минулих розділах, $\tilde{\varepsilon}, \tilde{\mu}, k \in \mathbb{R}$. Вище виведено (див. (6.26) та (6.37)), що коефіцієнт розповсюдження хвилі с індексами l та n підпорядковується рівнянню

$$\tilde{\gamma}_{ln}^2 = \left(\frac{\pi l}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 - k^2. \quad (6.38)$$

У випадку $k \in \mathbb{R}$ ліва частина рівняння (6.38) є дійсним числом. Тоді коефіцієнт розповсюдження $\tilde{\gamma}_{ln}$ є або дійсним, або чисто уявним. Рівняння (6.38) має два корені, з них хвилі, що розповсюджується у додатному напрямку Oz , відповідає корінь зі знаком «+». Так як $\tilde{E}_m, \tilde{H}_m \sim e^{-\tilde{\gamma}z}$, то для того, щоб хвиля була незгасаючим синусоїдальним процесом, треба, щоб $\tilde{\gamma}_{ln}$ був чисто уявним. У випадку $\tilde{\gamma}_{ln} \in \mathbb{R} > 0$ відповідні поля будуть експоненційно згасати з координатою, та замість хвилі матимемо експоненційно згасаючий процес. Відповідно, щоб хвиля з індексами l та n могла розповсюджуватись хвилеводом, $\tilde{\gamma}_{ln}$ має бути чисто уявним, та на основі (6.38) бачимо, що для цього має виконуватись умова

$$\left(\frac{\pi l}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 - k^2 < 0. \quad (6.39)$$

Відповідно, хвилеводом будуть поширюватись лише ті хвилі, індекси яких задовольняють умові (6.39).

Критичною частотою хвилі є мінімально можлива частота, при якій відповідна хвиля ще може розповсюджуватись хвилеводом. На основі (6.39) та (4.14) маємо

$$\left(\frac{\pi l}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 - \omega^2 \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 < 0, \quad (6.40)$$

нагадуємо, що $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$ та $\tilde{\mu} = \mu$, бо розглядається середовище без втрат. Так як частота f та кутова частота ω хвилі пов'язані співвідношенням

$$\omega = 2\pi f, \quad (6.41)$$

то на основі (6.40) та (2.5) маємо

$$\left(\frac{\pi l}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 - \frac{4\pi^2 \varepsilon \mu}{c^2} f^2 < 0 \Rightarrow f > \frac{c}{2\sqrt{\varepsilon \mu}} \sqrt{\left(\frac{l}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}. \quad (6.42)$$

Відповідно, критичною частотою хвилі з індексами l та n є

$$f_{\text{кр}} = \frac{c}{2\sqrt{\varepsilon \mu}} \sqrt{\left(\frac{l}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}. \quad (6.43)$$

Основна хвиля у хвилеводі – це хвиля з найменшою критичною частотою.

Найменше значення величини $(l/a)^2 + (n/b)^2$ дорівнює $(1/a)^2$ та досягається при значеннях індексів $l=1, n=0$. Це є наслідком того, що, по-перше, $a \geq b$, а по-друге, найменші значення, що можуть одночасно приймати індекси хвиль – це 1 та 0 для ТЕ-хвиль, див. (6.37) та (6.26). Тоді, як бачимо з (6.43), основною хвилею у плоскому хвилеводі є хвиля H_{10} .

Хвилевід є *одномодовим*, якщо по даному хвилеводі за даною частотою хвильового процесу може поширюватись лише одна хвиля (основна хвиля, основна мода). Для основної хвилі $(l/a)^2 + (n/b)^2 = 1/a^2$. Наступне за мінімальністю значення величини $(l/a)^2 + (n/b)^2$ може досягатись або при $l=2$ та $n=0$ (відповідне значення $4/a^2$), або при $l=0$ та $n=1$ (відповідне значення $1/b^2$). При цьому така хвиля вже має проходити одномодовим хвилеводом. Тобто, даний хвилевід при даній частоті хвильового процесу f є *одномодовим*, якщо виконуються нерівності

$$\frac{c}{2a\sqrt{\varepsilon \mu}} < f < \min\left(\frac{c}{a\sqrt{\varepsilon \mu}}, \frac{c}{2b\sqrt{\varepsilon \mu}}\right). \quad (6.44)$$

Наприклад, на практиці одномодовості хвилеводу можна добитись наступним чином: розглянемо хвилевід з співвідношенням між сторонами $a = 2b$. Тоді (6.44) перетвориться на

$$\frac{c}{2a\sqrt{\varepsilon\mu}} < f < \frac{c}{a\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad (6.45)$$

звідки

$$\frac{c}{2f\sqrt{\varepsilon\mu}} < a < \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon\mu}}. \quad (6.46)$$

Відповідно, якщо треба побудувати хвилевід, що буде одномодовим для відповідної частоти хвильового процесу f , то можна побудувати хвилевід зі співвідношенням між поперечними сторонами $a = 2b$, для більшої з яких виконуються нерівності (6.46). При цьому бажано, щоб ці нерівності виконувались «з запасом», бо отримані нерівності є справедливими в ідеалізованому випадку (середовище без втрат; стінки – ідеально гладкі та ідеально провідні). Реальні оцінки можуть трохи «поворухити» відповідні нерівності. Також слід зауважити, що описаний вище приклад є далеко не єдиною можливістю реалізувати на практиці одномодовий хвилевід.

7. Двопроводова довга лінія

7.1. Двопроводова довга лінія та параметри, які її описують

З курсу теорії електричних кіл та сигналів відомі RLC-кола змінного струму, при розгляді яких «за умовчанням» вважається, що весь активний опір кола зосереджена у резисторах, ємність має лише конденсатор, а індуктивність – лише котушка. Такі кола називають колами з зосередженими параметрами. Відповідний їх опис чудово працює, коли лінійні розміри кола є набагато меншими за довжину електромагнітної хвилі у діелектрику (найчастіше – у повітрі), що оточує коло.

Проте якщо розміри кола є порівняними або більшими за відповідну довжину хвилі, то такий опис перестає працювати. Відповідні кола називають *довгими лініями*. Наприклад, дуже часто лінії передач є довгими лініями. Довгі лінії ще називають *лінії з розподіленими параметрами*. При їх описі треба вважати, що ємність, індуктивність та активний опір таких ліній розподілені по всій довжині лінії, а не сконцентровані лише в певних її місцях. Слід також зауважити, що ще одним параметром, що описує довгу лінію, є провідність ізоляції її проводів.

У даному розділі обмежимося для простоти лише *двопроводовою довгою лінією*, поперечний переріз якої зображено на рис. 7.1, а «вид зверху» одиничної ділянки цієї лінії – на рис. 7.2. Зауважимо, що на рис. 7.2 відрізки *AB* та *KF* мають одиничну довжину.

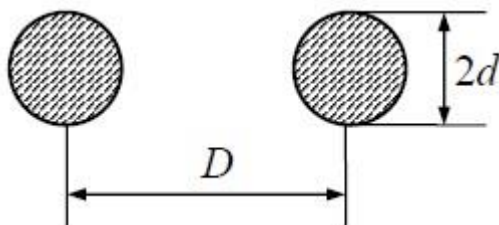


Рис. 7.1

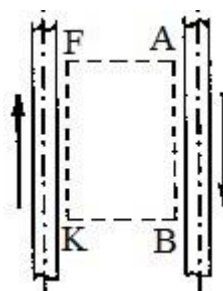


Рис. 7.2

Двопроводова лінія являє собою два однакових круглих проводи, відстань між центрами яких є набагато більшою за їх радіус: $D \gg d$. При цьому слід

зауважити, що відстань D є набагато меншою за довжину хвилі у простоті, що оточує лінію. Струм по різних проводах тече у протилежні боки, див. рис. 7.2.

Для простоти будемо розглядати лише *однорідну лінію*, тобто випадок, коли параметри лінії рівномірно розподілені вздовж її довжини.

Погонною ємністю лінії є відношення заряду на проводах до різниці потенціалів між цими проводами, віднесене до 1 метра лінії, $[C_n] = \Phi/\text{м}$.

Погонною індуктивністю лінії називається відношення магнітного потоку через контур $ABKF$ до струму через проводи, $[L_n] = \text{Гн}/\text{м}$, див. рис. 7.2. Ще раз нагадаємо, що відрізки AB та KF мають одиничну довжину.

Без виведення наведемо відомі з літератури оцінки на погонну ємність та індуктивність двопроводової лінії:

$$C_n \approx \frac{\pi \varepsilon_0}{\ln(D/d)}, \quad L_n \approx \frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{D}{d}\right), \quad (7.1)$$

відповідні наближені формули наведено для випадку, коли проводи оточені повітрям, та оцінка для погонної індуктивності наведена у випадку не феромагнітного матеріалу проводів.

Погонний активний опір лінії – це активний опір одного метра лінії, $[R_n] = \text{Ом}/\text{м}$.

Погонна активна провідність лінії – коефіцієнт пропорційності між струмом витоку та напругою між проводами, віднесений до одного метра лінії, $[G_n] = 1/(\text{Ом} \cdot \text{м})$. Струм витоку пов'язаний з тим, що через наявність електромагнітного поля між проводами, заряди можуть «втікати» з одного проводу на інший.

7.2. Виведення телеграфних рівнянь

На рис. 7.3 зображена еквівалентна схема дуже малої ділянки лінії, «зосередженої» між координатами x та $x + dx$. Систему координат, відповідно, спрямовано так, що лінія є витягнутою вздовж Ox . Тоді струм у проводах та

напруга між проводами будуть функціями двох змінних: часу t та координати x :

$$I = I(x, t), \quad U = U(x, t), \quad (7.2)$$

при цьому слід зауважити, що коли по одному проводу тече струм $I(x, t)$, то по іншому – такий же самий за величиною струм, але напрямлений в протилежну сторону.

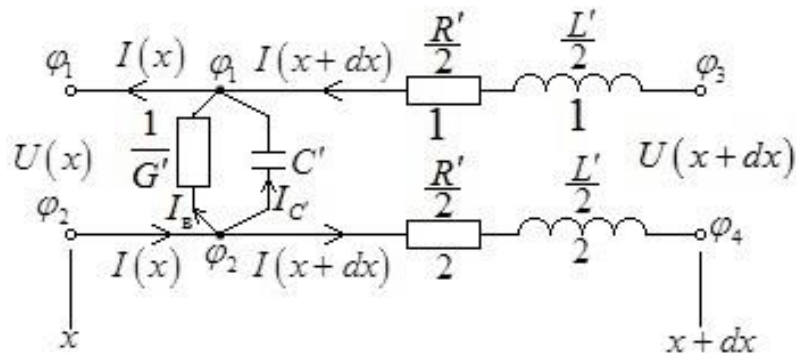


Рис. 7.3

На рис. 7.3. R' , C' , L' , G' є, відповідно, активним опором, ємністю, індуктивністю та провідністю струму витоку відповідної ділянки:

$$R' = R_{\Pi} dx, \quad C' = C_{\Pi} dx, \quad L' = L_{\Pi} dx, \quad G' = G_{\Pi} dx. \quad (7.3)$$

Довжина такої ділянки є набагато меншою за довжину хвилі, тож її можна описувати стандартними відомими з курсу теорії електричних кіл та сигналів методами.

Очевидно, що напруги на кінцях ділянки

$$U(x) = \varphi_2 - \varphi_1, \quad U(x + dx) = \varphi_4 - \varphi_3. \quad (7.4)$$

Першим законом Кірхгофа у вузлах є

$$I(x) = I(x + dx) + I_B + I_C, \quad (7.5)$$

де I_B – струм через резистор $1/G'$ є струмом витоку. За відомим зв'язком струму та напруги на конденсаторі

$$I_C(t) = C' \frac{\partial U_C}{\partial t} = C' \frac{\partial (\varphi_2 - \varphi_1)}{\partial t} = C' \frac{\partial U(x)}{\partial t}. \quad (7.6)$$

За законом Ома для резистору $1/G'$

$$I_B \frac{1}{G'} = \varphi_2 - \varphi_1 \Rightarrow I_B = G'U(x). \quad (7.7)$$

Тоді поєднавши (7.6), (7.7) та (7.5), отримуємо

$$\begin{aligned} I(x) &= I(x+dx) + G'U(x) + C' \frac{\partial U(x)}{\partial t} \Rightarrow \\ \Rightarrow I(x+dx) - I(x) &= -G'U(x) - C' \frac{\partial U(x)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Очевидно, що

$$\begin{aligned} \varphi_2 - \varphi_4 &= U_{R'2} + U_{L'2} = \frac{R'}{2} I(x+dx) + \frac{L'}{2} \frac{\partial I(x+dx)}{\partial t} \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi_4 &= \varphi_2 - \frac{R'}{2} I(x+dx) - L' \frac{\partial I(x+dx)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (7.9)$$

тут використано відомий зв'язок напруги та струму на котушці індуктивності.

Аналогічно отримуємо

$$\varphi_3 = \varphi_1 + \frac{R'}{2} I(x+dx) + \frac{L'}{2} \frac{\partial I(x+dx)}{\partial t}. \quad (7.10)$$

Тоді на основі (7.9) та (7.10) маємо

$$\begin{aligned} \varphi_4 - \varphi_3 &= \varphi_2 - \varphi_1 - R' \cdot I(x+dx) - L' \cdot \frac{\partial I(x+dx)}{\partial t} \Rightarrow \\ \Rightarrow U(x+dx) - U(x) &= -R' \cdot I(x+dx) - L' \cdot \frac{\partial I(x+dx)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Так як dx є дуже малим, то

$$I(x+dx) = I(x) + \frac{\partial I(x)}{\partial x} dx, \quad U(x+dx) = U(x) + \frac{\partial U(x)}{\partial x} dx, \quad (7.12)$$

членами квадратичними та більш високих порядків за dx нехтуємо. Тоді з урахуванням (7.12) та (7.3) перепишемо (7.11) та (7.8), знехтувавши «по дорозі» квадратичними та більш високими за dx порядками:

$$\begin{aligned}\frac{\partial I(x)}{\partial x} dx &= -G_{\Pi} dx U(x) - C_{\Pi} dx \cdot \frac{\partial U(x)}{\partial t}, \\ \frac{\partial U(x)}{\partial x} dx &= -R_{\Pi} dx I(x) - L_{\Pi} dx \frac{\partial I(x)}{\partial t}.\end{aligned}\quad (7.13)$$

Зауважимо, що для того, щоб «не загроможувати» рис. 7.3, у (7.4)–(7.13) мався на увазі, проте не підкреслювався факт, що струм і напруга є функціями не лише координати, але і часу. Скорочуючи dx у (7.13), та підкреслюючи залежність струму і напруги від обох змінних, остаточно маємо

$$\frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = -G_{\Pi} U(x,t) - C_{\Pi} \frac{\partial U(x,t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = -R_{\Pi} I(x,t) - L_{\Pi} \frac{\partial I(x,t)}{\partial t}. \quad (7.14)$$

Рівняння (7.14) носять назву *телеграфних рівнянь*. Струм та напруга вздовж двопроводової довгої лінії є розв'язками цих рівнянь.

7.3. Нескінченна лінія без втрат

Розглянемо найпростіший випадок – лінія є нескінченною в обидві сторони з нехтовно малим погонним опором $R_{\Pi} = 0$. В лініях, де між проводами повітря, дуже часто виток також вважається нехтовно малим, тобто $G_{\Pi} = 0$. Лінія, для якої $R_{\Pi} = 0$ та $G_{\Pi} = 0$ називається *лінією без втрат*. Для лінії без втрат телеграфні рівняння набувають вигляду

$$\frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = -C_{\Pi} \frac{\partial U(x,t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = -L_{\Pi} \frac{\partial I(x,t)}{\partial t}. \quad (7.15)$$

Продиференціюємо перше з рівнянь за координатою, а друге – за часом:

$$\frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial x^2} = -C_{\Pi} \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x \partial t}, \quad \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x \partial t} = -L_{\Pi} \frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial t^2}. \quad (7.16)$$

Продиференціюємо перше з рівнянь (7.15) за часом, а друге – за координатою:

$$\frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial x \partial t} = -C_{\Pi} \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = -L_{\Pi} \frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial x \partial t}. \quad (7.17)$$

На основі (7.16) та (7.17) бачимо, що виконуються рівняння

$$\frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial x^2} = L_{\Pi} C_{\Pi} \frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = L_{\Pi} C_{\Pi} \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}, \quad (7.18)$$

відповідно. Також вважається, що задано початковий розподіл струму та напруги вздовж лінії:

$$U(x,t=0) = u(x), \quad I(x,t=0) = j(x), \quad (7.19)$$

$u(x)$, $j(x)$ – задані функції. Відповідно, можна отримати початкові умови для часових похідних на основі (7.15):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(x,0)}{\partial x} = -L_{\Pi} \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &\Rightarrow \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = -\frac{1}{L_{\Pi}} \frac{\partial u(x)}{\partial x}, \\ \frac{\partial I(x,0)}{\partial x} = -C_{\Pi} \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &\Rightarrow \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = -\frac{1}{C_{\Pi}} \frac{\partial j(x)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Зауважимо, що граничні умови на струм та напругу не накладаються, бо лінія вважається нескінченною в обидві сторони.

7.3.1. Розв'язання диференціального рівняння відповідного типу

На основі (7.18)–(7.20) бачимо, що задача звелась до наступної: дано рівняння

$$\frac{\partial^2 g(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 g(x,t)}{\partial x^2}, \quad a = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad (7.21)$$

та задано початкові умови на функцію $g(x,t)$ та її часову похідну:

$$g(x,t=0) = f(x), \quad \frac{\partial g(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(x), \quad (7.22)$$

$f(x)$, $F(x)$ є заданими функціями. Треба знайти $g(x,t)$.

Як відомо, загальним розв'язком рівняння (7.21) є

$$g(x,t) = \gamma(x+at) + \psi(x-at), \quad (7.23)$$

γ та ψ – деякі функції. Покажемо, що (7.23) дійсно є розв'язком рівняння (7.21). Похідні за координатами:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g(x,t)}{\partial x} &= \frac{d\gamma(x+at)}{d(x+at)} \frac{\partial(x+at)}{\partial x} + \frac{d\psi(x-at)}{d(x-at)} \frac{\partial(x-at)}{\partial x} = \\ &= \frac{d\gamma(x+at)}{d(x+at)} + \frac{d\psi(x-at)}{d(x-at)},\end{aligned}\tag{7.24}$$

аналогічно

$$\frac{\partial g^2(x,t)}{\partial x^2} = \frac{d^2\gamma(x+at)}{d(x+at)^2} + \frac{d^2\psi(x-at)}{d(x-at)^2}.\tag{7.25}$$

Часові похідні:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g(x,t)}{\partial t} &= \frac{d\gamma(x+at)}{d(x+at)} \frac{\partial(x+at)}{\partial t} + \frac{d\psi(x-at)}{d(x-at)} \frac{\partial(x-at)}{\partial t} = \\ &= a \frac{d\gamma(x+at)}{d(x+at)} - a \frac{d\psi(x-at)}{d(x-at)},\end{aligned}\tag{7.26}$$

аналогічно

$$\frac{\partial g^2(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{d\gamma^2(x+at)}{d(x+at)^2} + a^2 \frac{d^2\psi(x-at)}{d(x-at)^2}.\tag{7.27}$$

Тоді на основі (7.25) та (7.27) бачимо, що виконується (7.21).

Функції $\gamma(x+at)$ та $\psi(x-at)$ знайдемо з початкових умов (7.22). На основі (7.22) та (7.23) бачимо, що

$$g(x,t=0) = f(x) = \gamma(x) + \psi(x).\tag{7.28}$$

На основі (7.22) та (7.26) аналогічно бачимо, що

$$F(x) = a \frac{d\gamma(x)}{dx} - a \frac{d\psi(x)}{dx}.\tag{7.29}$$

Проінтегруємо (7.29):

$$\begin{aligned}\int_0^x F(y) dy &= a \int_0^x \frac{d}{dy} (\gamma(y) - \psi(y)) dy \Rightarrow \\ &\Rightarrow \gamma(x) - \psi(x) - \gamma(0) + \psi(0) = \frac{1}{a} \int_0^x F(y) dy.\end{aligned}\tag{7.30}$$

Позначимо

$$A = \gamma(0) - \psi(0) = \text{const}, \quad (7.31)$$

Тоді

$$\gamma(x) - \psi(x) = \frac{1}{a} \int_0^x F(y) dy + A. \quad (7.32)$$

Система рівнянь (7.28) та (7.32) є системою лінійних алгебраїчних рівнянь на функції $\gamma(x)$ та $\psi(x)$. Розв'язавши її, знаходимо

$$\gamma(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x F(y) dy + \frac{A}{2}, \quad \psi(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x F(y) dy - \frac{A}{2}, \quad (7.33)$$

звідки

$$\begin{aligned} \gamma(x+at) &= \frac{1}{2} f(x+at) + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} F(y) dy + \frac{A}{2}, \\ \psi(x-at) &= \frac{1}{2} f(x-at) - \frac{1}{2a} \int_0^{x-at} F(y) dy - \frac{A}{2}, \end{aligned} \quad (7.34)$$

та на основі (7.23) остаточно маємо

$$\begin{aligned} g(x,t) &= \frac{1}{2} (f(x+at) + f(x-at)) + \frac{1}{2a} \left(\int_0^{x+at} F(y) dy - \int_0^{x-at} F(y) dy \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow g(x,t) = \frac{1}{2} (f(x+at) + f(x-at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(y) dy. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Вираз (7.35) є розв'язком відповідної задачі.

7.3.2. Розв'язок для струму на напруги вздовж лінії

На основі початкових умов (7.20) та (7.19) та рівнянь (7.18) згідно з результатами пункту 7.3.1 знаходимо розв'язок для напруги:

$$U(x,t) = \frac{1}{2} (u(x+at) + u(x-at)) - \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \frac{1}{C_{\Pi}} \frac{\partial j(y)}{\partial y} dy = \quad (7.36)$$

$$= \frac{1}{2}(u(x+at) + u(x-at)) - \frac{1}{2a} \frac{1}{C_n}(j(x+at) - j(x-at)), \quad a = 1/\sqrt{L_n C_n}$$

та струму:

$$\begin{aligned} I(x,t) &= \frac{1}{2}(j(x+at) + j(x-at)) - \frac{1}{L_n} \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \frac{\partial u(y)}{\partial y} dy = \\ &= \frac{1}{2}(j(x+at) + j(x-at)) - \frac{1}{2a} \frac{1}{L_n}(u(x+at) - u(x-at)), \quad a = 1/\sqrt{L_n C_n}. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Розіб'ємо ці розв'язки на два доданки:

$$U(x,t) = U^{(+)}(x,t) + U^{(-)}(x,t), \quad I(x,t) = I^{(+)}(x,t) + I^{(-)}(x,t),$$

$$\begin{aligned} U^{(+)}(x,t) &= \frac{1}{2}u\left(x - \frac{t}{\sqrt{L_n C_n}}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L_n}{C_n}}j\left(x - \frac{t}{\sqrt{L_n C_n}}\right), \\ U^{(-)}(x,t) &= \frac{1}{2}u\left(x + \frac{t}{\sqrt{L_n C_n}}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L_n}{C_n}}j\left(x + \frac{t}{\sqrt{L_n C_n}}\right), \\ I^{(+)}(x,t) &= \frac{1}{2}j\left(x - \frac{t}{\sqrt{L_n C_n}}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_n}{L_n}}u\left(x - \frac{t}{\sqrt{L_n C_n}}\right), \\ I^{(-)}(x,t) &= \frac{1}{2}j\left(x + \frac{t}{\sqrt{L_n C_n}}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_n}{L_n}}u\left(x + \frac{t}{\sqrt{L_n C_n}}\right), \end{aligned} \quad (7.38)$$

доданки $I^{(+)}(x,t)$ та $U^{(+)}(x,t)$ описують хвилю, що рухається у додатному напрямку Ox , $I^{(-)}(x,t)$ та $U^{(-)}(x,t)$ – у від'ємному. На основі (7.38) бачимо, що

$$\frac{U^{(+)}(x,t)}{I^{(+)}(x,t)} = \frac{U^{(-)}(x,t)}{I^{(-)}(x,t)} = \sqrt{\frac{L_n}{C_n}}. \quad (7.39)$$

Тож у нескінченній двопроводовій довгій лінії без втрат відношення миттєвого значення напруги до миттєвого значення струму у хвилях, що нею поширюються, дорівнює $\sqrt{L_n/C_n}$ та є постійною величиною. Величину

$$W = \sqrt{\frac{L_{\Pi}}{C_{\Pi}}}. \quad (7.40)$$

назвали *хвильовим опором* лінії. Підкреслимо ще раз – хвильовий опір нескінченної двопроводової лінії без втрат не залежить від частоти!

Також на основі (7.38) бачимо, що фазова швидкість хвилі

$$v_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{L_{\Pi} C_{\Pi}}}. \quad (7.41)$$

Її можна порахувати на основі оцінок (7.1):

$$v_{\phi} \approx \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{D}{d}\right) \frac{\pi \varepsilon_0}{\ln(D/d)}}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c, \quad (7.42)$$

тобто фазова швидкість відповідної хвилі дорівнює швидкості світла.

7.4. Нескінченна лінія без спотворення

Лінією без спотворення називається двопроводова лінія, параметри якої пов'язані співвідношенням

$$R_{\Pi} C_{\Pi} = L_{\Pi} G_{\Pi}. \quad (7.43)$$

Розглянемо нескінченну в обидва боки лінію, розв'язки телеграфних рівнянь (7.14) шукаємо у вигляді

$$U(x,t) = e^{-\frac{R_{\Pi} t}{L_{\Pi}}} V(x,t), \quad I(x,t) = e^{-\frac{R_{\Pi} t}{L_{\Pi}}} J(x,t). \quad (7.44)$$

Перепишемо телеграфні рівняння (7.14) в термінах функцій $V(x,t)$ та $J(x,t)$.

Перше з них:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e^{-\frac{R_{\Pi} t}{L_{\Pi}}} J(x,t)}{\partial x} &= -G_{\Pi} e^{-\frac{R_{\Pi} t}{L_{\Pi}}} V(x,t) - C_{\Pi} \frac{\partial e^{-\frac{R_{\Pi} t}{L_{\Pi}}} V(x,t)}{\partial t} \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{-\frac{R_{\Pi} t}{L_{\Pi}}} \frac{\partial J(x,t)}{\partial x} &= -G_{\Pi} e^{-\frac{R_{\Pi} t}{L_{\Pi}}} V(x,t) - C_{\Pi} e^{-\frac{R_{\Pi} t}{L_{\Pi}}} \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \frac{C_{\Pi} R_{\Pi}}{L_{\Pi}} e^{-\frac{R_{\Pi} t}{L_{\Pi}}} V(x,t) \Rightarrow \end{aligned} \quad (7.45)$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{R_{\text{п}} t}{L_{\text{п}}}} \frac{\partial J(x,t)}{\partial x} = -C_{\text{п}} e^{-\frac{R_{\text{п}} t}{L_{\text{п}}}} \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \left(\frac{C_{\text{п}} R_{\text{п}}}{L_{\text{п}}} - G_{\text{п}} \right) e^{-\frac{R_{\text{п}} t}{L_{\text{п}}}} V(x,t).$$

Скоротимо це рівняння на $e^{-\frac{R_{\text{п}} t}{L_{\text{п}}}}$, та на основі (7.43) бачимо, що множник перед $V(x,t)$ у правій частині є нульовим. Відповідно, дане рівняння зведеться до

$$\frac{\partial J(x,t)}{\partial x} = -C_{\text{п}} \frac{\partial V(x,t)}{\partial t}. \quad (7.46)$$

Аналогічно можна отримати, що друге рівняння (7.14) зводиться до

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = -L_{\text{п}} \frac{\partial J(x,t)}{\partial t}. \quad (7.47)$$

На основі (7.44) бачимо, що початкові умови на функції $V(x,t)$ та $J(x,t)$ співпадають з відповідними умовами на функції $U(x,t)$ та $I(x,t)$:

$$U(x,t=0) = V(x,t=0) = u(x), \quad I(x,t=0) = J(x,t=0) = j(x). \quad (7.48)$$

Тож задача звелась до наступної: дано рівняння (7.46), (7.47) та початкові умови (7.48). Треба знайти $V(x,t)$ та $J(x,t)$. Зауважимо, що точно таку ж задачу (для функцій $U(x,t)$ та $I(x,t)$) розв'язано у підрозділі 7.3. Тому просто запишемо відповідний розв'язок на основі (7.38):

$$\begin{aligned} U(x,t) &= U^{(+)}(x,t) + U^{(-)}(x,t), \quad I(x,t) = I^{(+)}(x,t) + I^{(-)}(x,t), \\ U^{(+)}(x,t) &= e^{-\frac{R_{\text{п}} t}{L_{\text{п}}}} V^{(+)}(x,t), \quad U^{(-)}(x,t) = e^{-\frac{R_{\text{п}} t}{L_{\text{п}}}} V^{(-)}(x,t), \\ I^{(+)}(x,t) &= e^{-\frac{R_{\text{п}} t}{L_{\text{п}}}} J^{(+)}(x,t), \quad I^{(-)}(x,t) = e^{-\frac{R_{\text{п}} t}{L_{\text{п}}}} J^{(-)}(x,t), \end{aligned} \quad (7.49)$$

$$V^{(+)}(x,t) = \frac{1}{2} u \left(x - \frac{t}{\sqrt{L_{\text{п}} C_{\text{п}}}} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L_{\text{п}}}{C_{\text{п}}}} j \left(x - \frac{t}{\sqrt{L_{\text{п}} C_{\text{п}}}} \right),$$

$$V^{(-)}(x,t) = \frac{1}{2} u \left(x + \frac{t}{\sqrt{L_{\text{п}} C_{\text{п}}}} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L_{\text{п}}}{C_{\text{п}}}} j \left(x + \frac{t}{\sqrt{L_{\text{п}} C_{\text{п}}}} \right),$$

$$J^{(+)}(x,t) = \frac{1}{2} j \left(x - \frac{t}{\sqrt{L_n C_n}} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_n}{L_n}} u \left(x - \frac{t}{\sqrt{L_n C_n}} \right),$$

$$J^{(-)}(x,t) = \frac{1}{2} j \left(x + \frac{t}{\sqrt{L_n C_n}} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_n}{L_n}} u \left(x + \frac{t}{\sqrt{L_n C_n}} \right),$$

доданки $I^{(+)}(x,t)$ та $U^{(+)}(x,t)$ описують хвилю, що рухається у додатному напрямку Ox , $I^{(-)}(x,t)$ та $U^{(-)}(x,t)$ – у від’ємному. Бачимо суттєву відмінність лінії без спотворення від лінії без втрат – *хвиля у лінії без спотворення експоненційно згасає з часом, а хвиля у лінії без втрат є незгасаючою.*

Також на основі (7.49) бачимо, що

$$\frac{U^{(+)}(x,t)}{I^{(+)}(x,t)} = \frac{U^{(-)}(x,t)}{I^{(-)}(x,t)} = \sqrt{\frac{L_n}{C_n}}, \quad (7.50)$$

тобто *хвильовий опір лінії без спотворення теж дорівнює $\sqrt{L_n/C_n}$ та не залежить від частоти.* Слід зауважити відомий факт – *хвильовий опір лінії не залежить від частоти лише для лінії без втрат та лінії без спотворення.* Для всіх інших випадків розв’язки телеграфних рівнянь є набагато більш громіздкими та з’являється залежність хвильового опору лінії від частоти хвилі, а також залежність від частоти фазової швидкості хвилі.

Кожен сигнал можна розкласти у інтеграл Фур’є (якщо сигнал періодичний – то в ряд Фур’є). Якщо хвильовий опір лінії не залежить від частоти, то він є однаковим для всіх гармонік сигналу. Відповідно, опір лінії для кожної гармоніки є однаковим та сигнал не спотвориться. У випадку, коли хвильовий опір лінії залежить від частоти, то це призведе до того, що для кожної гармоніки опір буде різним, що призведе до спотворення сигналу. Не менш важливим є факт, що у випадку лінії без спотворення та лінії без втрат швидкість проходження лінією для кожної з гармонік є однаковою, а у інших

випадках – ні. Підсумовуючи вище сказане, *лише лінія без втрат та лінія без спотворення не спотворюють сигнал.*

7.5. Задача про включення лінії скінченної довжини без втрат

Розглянемо лінію без втрат скінченної довжини l , до одного кінця якої підключено генератор синусоїдальної напруги, а інший кінець замкнений накоротко (див. рис. 7.4).

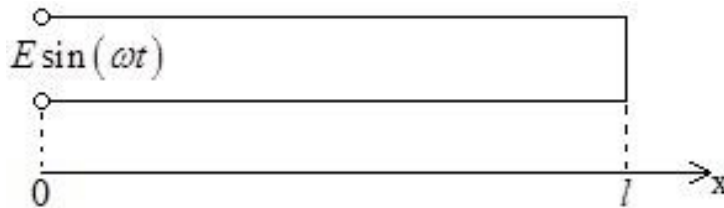


Рис. 7.4

Початкові напруга та струм вздовж лінії вважаються нульовими:

$$U(x, t=0) = 0, \quad I(x, t=0) = 0. \quad (7.51)$$

Очевидно, що граничні умови для напруги мають бути наступними:

$$U(x=0, t) = E \sin(\omega t), \quad U(x=l, t) = 0. \quad (7.52)$$

Знайдемо залежність від часу та координат напруги на лінії. Як було показано вище (див. (7.18)), для лінії без втрат диференціальним рівнянням для напруги є

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2}, \quad a = \sqrt{\frac{1}{C_n L_n}}. \quad (7.53)$$

На основі (7.51), (7.19) та (7.20) бачимо, що початковою умовою на часову похідну від $U(x, t)$ буде

$$\left. \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (7.54)$$

Тож маємо задачу – розв’язати диференціальне рівняння (7.53) з початковими умовами (7.51) і (7.54) та граничними умовами (7.52). Слід зауважити, що відомим є розв’язання такої задачі з нульовими граничними умовами, а у нас граничні умови ненульові. Тому шукаємо розв’язок у вигляді суми двох функцій:

$$U(x,t) = V(x,t) + \Phi(x,t), \quad (7.55)$$

де обидві функції задовольняють диференційному рівнянню (7.53):

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \Phi(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \Phi(x,t)}{\partial x^2}, \quad (7.56)$$

проте початкові та граничні умови для них різні. Функція $V(x,t)$ задовольняє тим самим граничним умовам, що і $U(x,t)$:

$$V(x=0,t) = E \sin(\omega t), \quad V(x=l,t) = 0, \quad (7.57)$$

проте початкові умови для неї не такі ж самі, як для $U(x,t)$. Відповідно, функція $\Phi(x,t)$ задовольняє нульовим граничним умовам:

$$\Phi(x=0,t) = 0, \quad \Phi(x=l,t) = 0. \quad (7.58)$$

Початкові умови для $\Phi(x,t)$ є наслідками початкових умов для $V(x,t)$ та $U(x,t)$.

Шукаємо $V(x,t)$ у вигляді

$$V(x,t) = X(x) \sin(\omega t), \quad (7.59)$$

$X(x)$ – деяка невідома функція. Підставляючи (7.59) у (7.56), отримуємо

$$-\omega^2 X(x) \sin(\omega t) = a^2 \sin(\omega t) \frac{d^2 X(x)}{dx^2} \Rightarrow \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 X(x) = 0, \quad (7.60)$$

Тобто отримали звичайне диференційне рівняння. Його загальний розв'язок

$$X(x) = A \cos\left(\frac{\omega}{a} x\right) + B \sin\left(\frac{\omega}{a} x\right), \quad A, B = \text{const}. \quad (7.61)$$

На основі граничних умов (7.57) маємо

$$X(0) = E, \quad X(l) = 0, \quad (7.62)$$

звідки

$$E = A, \quad 0 = A \cos\left(\frac{\omega l}{a}\right) + B \sin\left(\frac{\omega l}{a}\right) \Rightarrow B = -E \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega l}{a}\right), \quad (7.63)$$

що призводить до

$$\begin{aligned}
X(x) &= E \cos\left(\frac{\omega}{a}x\right) - E \frac{\cos\left(\frac{\omega l}{a}\right)}{\sin\left(\frac{\omega l}{a}\right)} \sin\left(\frac{\omega}{a}x\right) = E \frac{\sin\left(\frac{\omega l}{a} - \frac{\omega x}{a}\right)}{\sin\left(\frac{\omega l}{a}\right)} = \\
&= E \sin\left(\frac{\omega(l-x)}{a}\right) / \sin\left(\frac{\omega l}{a}\right),
\end{aligned} \tag{7.64}$$

звідки на основі (7.59) маємо

$$V(x,t) = E \frac{\sin\left(\frac{\omega(l-x)}{a}\right)}{\sin\left(\frac{\omega l}{a}\right)} \sin(\omega t), \tag{7.65}$$

Наслідками чого є початкові умови

$$V(x,t=0) = 0, \quad \left. \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = E\omega \sin\left(\frac{\omega(l-x)}{a}\right) / \sin\left(\frac{\omega l}{a}\right). \tag{7.66}$$

Звідси на основі (7.55), (7.51) та (7.54) отримуємо початкові умови для $\Phi(x,t)$

$$\Phi(x,t=0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = -E\omega \sin\left(\frac{\omega(l-x)}{a}\right) / \sin\left(\frac{\omega l}{a}\right). \tag{7.67}$$

Відповідно, звели задачу до пошуку функції $\Phi(x,t)$, що є розв'язком диференційного рівняння (7.56) з початковими умовами (7.67) та нульовими граничними умовами (7.58). Задача для такого диференційного рівняння з нульовими граничними умовами є відомою у літературі.

Шукаємо її розв'язок у вигляді

$$\Phi(x,t) = X(x)T(t), \tag{7.68}$$

$X(x)$ – деяка невідома функція, що залежить лише від x , $T(t)$ – деяка невідома функція, що залежить лише від t . Підставивши (7.68) у (7.56), отримуємо

$$X(x)\ddot{T}(t) = a^2 X''(x)T(t), \tag{7.69}$$

де крапка позначає похідну за часом (дві крапки – другу похідну), а штрих – похідну за координатою x (два штрихи – другу похідну). Розділивши рівняння (7.69) на $a^2 X(x)T(t)$, отримуємо

$$\frac{1}{a^2} \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}, \quad (7.70)$$

причому справа стоїть функція лише від координат, а зліва – лише від часу. Тож така рівність може виконуватись тільки у випадку, коли обидві її частини є однаковими константами:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = A = \text{const}, \quad (7.71)$$

тоді

$$\ddot{T}(t) - a^2 AT(t) = 0, \quad X''(x) - AX(x) = 0. \quad (7.72)$$

На основі (7.58) бачимо, що

$$X(0) = X(l) = 0, \quad (7.73)$$

а, очевидно, нас цікавлять розв'язки, що не дорівнюють тотожно нулю.

Можливі три випадки:

1) $A > 0$. Тоді, як відомо, загальним розв'язком для $X(x)$ на основі (7.72) є

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{Ax}} + C_2 e^{-\sqrt{Ax}}, \quad (7.74)$$

що на основі (7.73) призводить до системи рівнянь

$$0 = C_1 + C_2, \quad 0 = C_1 e^{\sqrt{Al}} + C_2 e^{-\sqrt{Al}}, \quad (7.75)$$

але така система рівнянь має лише тривіальний розв'язок $C_1 = C_2 = 0$, що дає тотожній нуль для $X(x)$. Тобто такий випадок нам не підходить.

2) $A = 0$. Тоді, як відомо, загальним розв'язком для $X(x)$ на основі (7.72) є

$$X(x) = C_1 + C_2 x, \quad (7.76)$$

що на основі (7.73) призводить до системи рівнянь

$$0 = C_1, \quad 0 = C_1 + C_2 l, \quad (7.77)$$

що знов призводить до лише тривіального розв'язку $C_1 = C_2 = 0$, тобто такий випадок нам теж не підходить.

3) $A < 0$. Тоді, як відомо, загальним розв'язком для $X(x)$ на основі (7.72) є

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{|A|x}) + C_2 \sin(\sqrt{|A|x}), \quad (7.78)$$

що на основі (7.73) призводить до системи рівнянь

$$0 = C_1, \quad 0 = C_2 \sin(\sqrt{|A|l}), \quad (7.79)$$

яка може мати нетривіальні розв'язки при

$$\sin(\sqrt{|A|l}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{|A|l} = \pi n \Leftrightarrow A = -\frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq 0. \quad (7.80)$$

Слід зауважити, що так як квадрат є парною функцією, то надалі розглядатимемо лише додатні n . Тож приходимо до висновку, що рівняння (7.72) за умови (7.73) можуть мати нетривіальні розв'язки лише коли константа A приймає значення

$$A_n = -\frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n > 0, \quad (7.81)$$

відповідні розв'язки для $X(x)$:

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n > 0, \quad B_n = \text{const}. \quad (7.82)$$

На основі (7.72) та (7.81) бачимо, що кожній такій функції $X_n(x)$ відповідає функція $T_n(t)$, що є розв'язком рівняння

$$\ddot{T}_n(t) + \frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} T_n(t) = 0. \quad (7.83)$$

Загальним розв'язком такого рівняння є

$$T_n(t) = C_n \cos\left(a \frac{\pi n}{l}t\right) + D_n \sin\left(a \frac{\pi n}{l}t\right), \quad C_n, D_n = \text{const}. \quad (7.84)$$

Перепозначивши константи, приходимо до висновку, що відповідними розв'язками рівняння (7.56) для $\Phi(x,t)$ з нульовими граничними умовами є функції

$$\Phi_n(x,t) = \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\left(c_n \cos\left(a\frac{\pi n}{l}t\right) + d_n \sin\left(a\frac{\pi n}{l}t\right)\right), \quad c_n, d_n = \text{const}, \quad (7.85)$$

$$n \in \mathbb{Z}, \quad n > 0,$$

Кожна з функцій (7.85) є розв'язком відповідного лінійного диференціального рівняння з нульовими граничними умовами. Тоді загальним розв'язком такого диференціального рівняння з нульовими граничними умовами буде сума таких функцій:

$$\Phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\left(c_n \cos\left(a\frac{\pi n}{l}t\right) + d_n \sin\left(a\frac{\pi n}{l}t\right)\right), \quad c_n, d_n = \text{const}. \quad (7.86)$$

Відповідні константи c_n, d_n знаходимо з початкових умов (7.67). Для першої з цих початкових умов маємо

$$\Phi(x,t=0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) = 0 \Rightarrow c_n = 0. \quad (7.87)$$

Для другої умови з урахуванням $c_n = 0$

$$-E\omega \sin\left(\frac{\omega(l-x)}{a}\right) \Big/ \sin\left(\frac{\omega l}{a}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{a\pi n}{l} \sin\left(\frac{\pi}{l}nx\right). \quad (7.88)$$

Вираз (7.88) є рядом Фур'є для функції

$$f(x) = -E\omega \sin\left(\frac{\omega(l-x)}{a}\right) \Big/ \sin\left(\frac{\omega l}{a}\right). \quad (7.89)$$

визначеної на проміжку $x \in (0,l)$, не на всій числовій осі. Тоді $d_n \frac{a\pi n}{l}$ – це коефіцієнти розвинення $f(x)$ за синусами. Відповідна «кутова частота», за якою робиться розвинення у ряд, дорівнює π/l , див. (7.88), та відповідний «період» дорівнює $\frac{2\pi}{\pi/l} = 2l$, тобто мова йде про відоме розвинення функції у

ряд Фур'є за синусами на півперіоді. Тоді за широко відомими формулами відповідного розвинення маємо

$$\frac{\pi a n}{l} d_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(n \frac{\pi}{l} x\right) dx, \quad (7.90)$$

причому так як для отримання формули (7.90) функція непарним чином продовжується на відрізок $x \in (l, 2l)$, то у всіх внутрішніх точках інтервалу $x \in (0, l)$ сума у правій частині виразу (7.88) гарантовано збігається до $f(x)$, а у точках $x = 0$ та $x = l$ збігається до нуля.

Тоді

$$d_n = -\frac{2E\omega}{\pi a n} \int_0^l \frac{\sin(\omega(l-x)/a)}{\sin(\omega l/a)} \sin\left(n \frac{\pi}{l} x\right) dx, \quad (7.91)$$

що після доволі громіздкого безпосереднього обчислення «в лоб» за допомогою формули

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \quad (7.92)$$

призводить до

$$d_n = -\frac{2E\omega a}{l \left(\left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 - \omega^2 \right)}. \quad (7.93)$$

Тоді

$$\Phi(x, t) = -\frac{2E\omega a}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 - \omega^2 \right)} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \sin\left(a \frac{\pi n}{l} t\right), \quad (7.94)$$

та на основі (7.94) і (7.66) остаточно запишемо відповідь:

$$U(x, t) = E \frac{\sin(\omega(l-x)/a)}{\sin(\omega l/a)} \sin(\omega t) - \quad (7.95)$$

$$-2 \frac{E\omega a}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 - \omega^2 \right)} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \sin\left(a \frac{\pi n}{l} t\right), \quad a = \sqrt{\frac{1}{C_{II} L_{II}}}.$$

Слід зауважити, що цю відповідь отримано для так званого нерезонансного випадку, тобто випадку, коли

$$\forall n \quad \frac{\pi n a}{l} \neq \omega. \quad (7.96)$$

Зауважимо також, що в теорії довгих ліній розв'язують далеко не лише вище згадані задачі. Наприклад, часто доводиться мати справу з задачами не для лінії без втрат, а для лінії без спотворення; кінець лінії може бути не накоротко замкненим, а містити якесь навантаження (конденсатор, резистор, котушку). Такі задачі теж розв'язуються на основі телеграфних рівнянь, проте вони є набагато більш громіздкими.

Список рекомендованої літератури

1. О.О. Дробахін, Д.Ю. Салтиков, «Електродинаміка НВЧ», Дніпро: РВВ ДНУ, 2015. – 88 с.
2. О.О. Дробахин, С.В. Плаксин, В.Д. Рябчий, Д.Ю. Салтыков, «Техника и полупроводниковая электроника СВЧ», Севастополь: Вебер, 2013.– 322 с.
3. Н.А. Семенов, «Техническая электродинамика. Учебное пособие для вузов», М: Связь, 1973, 480с.
4. Ю.В. Пименов, В.И. Вольман, А.Д. Муравцов, «Техническая электродинамика», М: Радио и связь, 2000, 536с.
5. А.М. Малышев, Г.М. Максимова, «Основы векторного и тензорного анализа для физиков», Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. – 101 с.
6. И.Г. Араманович, В.И. Левин, «Уравнения математической физики», М: Наука, 1969, 288с.

Навчальне видання

Горєв В'ячеслав Миколайович

ТЕХНІЧНА ЕЛЕКТРОДИНАМІКА

Навчальний посібник

Видано в редакції автора

Підписано до друку 28.10.2019. Формат 30x42/4.

Папір офсет. Ризографія. Ум. друк. арк. 5,2.

Обл.-вид. арк. 6,7. Тираж 15 пр. Зам. №

Підготовлено до друку та видруковано в
Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004 р.
49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького 19.