

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет
"Дніпровська політехніка"

Фінансово-економічний
(факультет)

Кафедра економіки та економічної кібернетики
(повна назва)

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА
кваліфікаційної роботи ступеню магістра
(бакалавра, магістра)

студентки Капрош Марина Володимирівна
(ПІБ)

академічної групи 051М-19з-1 ФЕФ
(шифр)

спеціальності 051 Економіка
(код і назва спеціальності)

спеціалізації _____

за освітньо-професійною програмою «Економічна кібернетика»
(офіційна назва)

на тему Підвищення прибутковості ТОВ «Делівері» з використанням економіко-математичних методів
(назва за наказом ректора)

Керівники	Прізвище, ініціали	Оцінка за шкалою		Підпис
		рейтинговою	інституційною	
кваліфікаційної роботи	Антонюк О.П.			
розділів:				
Аналітичний	Антонюк О.П.			
Економічний	Антонюк О.П.			
Інформаційний	Антонюк О.П.			

Рецензент				
-----------	--	--	--	--

Нормоконтролер	Антонюк О.П.			
----------------	--------------	--	--	--

Дніпро
2020

Міністерство освіти та науки України
 Національний технічний університет
 «Дніпровська політехніка»

ЗАТВЕРДЖЕНО:

завідувач кафедри
 економіки та економічної кібернетики
 _____ проф. Кочура Є.В.
 « ____ » _____ 2020 року

ЗАВДАННЯ
на кваліфікаційну роботу
ступеню _____ **магістра**
 (бакалавра, магістра)

студентки Капрош Марина Володимирівна академічної групи 051М-19-1
 (прізвище та ініціали) (шифр)

спеціальності 051 Економіка
 спеціалізації _____

за освітньо-професійною програмою «Економічна кібернетика»
 на тему Підвищення прибутковості ТОВ «Делівері» з використанням
економіко-математичних методів

затверджену наказом ректора НТУ «Дніпровська політехніка» 20.11.2020 р. №963-с

Розділ	Зміст виконання	Термін виконання
Аналітичний	Аналіз фінансової діяльності підприємства та техніко-економічних характеристик підприємства	07.09.20 - 23.09.20
Економічний	Побудова і аналіз економіко-математичної моделі для вирішення поставленої задачі, обчислити економічний ефект	24.09.20 - 20.11.20
Інформаційний	Розробка автоматизованої інформаційної системи для прийняття управлінських рішень.	21.11.20 - 15.12.20

Завдання видано

 (підпис)

Антонюк О.П.
 (прізвище, ініціали)

Дата видачі завдання 07.09.2020 р.

Дата подання дипломної роботи до екзаменаційної комісії 18.12.2020 р.

Завдання прийнято до виконання

 (підпис)

Капрош М.В.
 (прізвище, ініціали)

Дніпро
 2020

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка містить: 90 ст., 16 рис., 19 табл., 3 додатки, 23 джерела.

ТОВ «ДЕЛІВЕРІ», ТРАНСПОРТНІ ВИТРАТИ (ТВ), ЗАДАЧА КОМІВОЯЖЕРА (ЗК), ІНФОРМАЦІЙНА СИСТЕМА (ІС), МЕТОД К-СЕРЕДНІХ, КЛАСТЕРИЗАЦІЯ.

Об'єкт дослідження – логістичні витрати та дані фінансової звітності ТОВ «Делівері».

Мета дипломної роботи – підвищення прибутковості на підприємстві за рахунок зменшення транспортних витрат підприємства на перевезення вантажу від головного розподільчого пункту товарів до пунктів видачі.

Результати та їх новизна – розроблена економіко-математична модель визначення оптимального шляху доставки враховує особливості функціонування підприємств, а саме логістичну мережу підприємства.

В представленій роботі наведено теоретичне обґрунтування вибору моделі для оптимізації логістичних витрат, методи кластеризації та задачі комівояжера.

Розроблено практичні рекомендації по втіленню запропонованих моделей в умовах ТОВ «Делівері».

Наукова новизна представлених в роботі здобутків полягає в розвитку застосування методів економіко-математичного моделювання, а саме в роботі побудовано модель кластеризації 29 пунктів видачі товарів в межах Дніпропетровської області за географічним принципом з подальшим розв'язанням задачі комівояжера для отриманих кластерів.

Практичне значення роботи полягає в мінімізації транспортних витрат на підприємстві ТОВ «Делівері» при доставці товарів по території Дніпропетровщини за рахунок розбиття на кластери пунктів видачі товарів з подальшим розв'язанням задачі комівояжера.

У вступі визначено актуальність теми дослідження, наведено предмет, об'єкт, мету, методи дослідження та задачі.

В першому розділі наведено огляд літературних джерел та виконано фінансово-економічний аналіз діяльності підприємства.

В другому розділі наведено огляд методів для розв'язання поставленої задачі. Розв'язано задачі кластеризації та комівояжера за даними підприємства.

В третьому розділі побудовано інформаційну систему для автоматизації розрахунків наведених в другому розділі.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	7
РОЗДІЛ 1. ОРГАНІЗАЦІЙНО-ЕКОНОМІЧНА ХАРАКТЕРИСТИКА ПІДПРИЄМСТВА ТОВ «ДЕЛІВЕРІ»	9
1.1 Організаційно-правова характеристика ТОВ «Делівері»	9
1.2. Аналіз фінансово – господарської діяльності підприємства	12
1.2.1. Аналіз балансу підприємства.....	15
1.2.2 Горизонтальний аналіз структури та динаміки доходів ТОВ «Делівері»	21
1.2.3 Вертикальний аналіз структури та динаміки витрат ТОВ «Делівері»	26
1.2.4 Розрахунок коефіцієнтів для аналізу фінансового стану підприємства ТОВ «Делівері».....	31
Висновок до розділу 1	38
РОЗДІЛ 2. ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МІНІМІЗАЦІЇ ТРАНСПОРТНИХ ВИТРАТ	39
2.1 Загальна постановка задачі.....	39
2.2. Аналіз економіко-математичних методів кластеризації	40
2.3 Аналіз економіко-математичних методів для розв’язання задачі комівояжера. Метод границь та гілок	44
2.4. Розв’язання задачі кластеризації пунктів видачі.	47
Висновки до розділу 2	65
РОЗДІЛ 3. ПРОЕКТУВАННЯ ТА РОЗРОБКА ІНФОРМАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ.....	66
3.1. Загальна характеристика інформаційного забезпечення	66
3.2. Програмне забезпечення.....	66
3.3. Інструкція користувача.....	68

Висновок до розділу 3	70
ВИСНОВКИ.....	71
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ.....	73
ДОДАТКИ.....	76

ВСТУП

В сучасних умовах інтенсивного розвитку онлайн торгівлі важливу роль в відіграють послуги доставки товарів, як в межах України так її кордони за що зберігає, як і раніше, своє значення через безпечність надання послуг, що забезпечують конфіденційність, вчасність та надійність.

Головним пріоритетом діяльності ТОВ «Делівері» є вчасна та якісна доставка товарів клієнтам, що залежить від великої кількості факторів, які впливають на перевезення, транспортування вантажу, швидкість доставки товарів клієнту. Виконання вчасно замовлення на доставку товару залежить від прийнятих логістичних рішень [1].

В сучасних умовах розвитку онлайн торгівлі день обрана тема є досить актуальною, оскільки однією з вагомих статей витрат для суб'єктів господарювання є витрати на транспортування товарів, адже від витрат, які спрямовує підприємство при доставці товарів на паливно-мастильні матеріали, залежить фінансовий стан підприємства в цілому.

Дипломна робота виконана з використанням матеріалів господарської діяльності ТОВ «Делівері», зібраних впродовж виробничої та передатестаційної практик та інших науково-технічних джерел [2,3]. Питання логістичного управління розглянуто в працях українських науковців Крикавський Є. В. [4], Борисова Л. А.[5], Брагінський В. В.[6] та закордонних фахівців Baljko [7], Jones [8], Shaun Rein [9], сучасні тенденції та перспективи розвитку наведено в [10].

Об'єкт дослідження – логістичні витрати та дані фінансової звітності ТОВ «Делівері».

Предмет дослідження – побудова економіко-математичної моделі мінімізації транспортних витрат на підприємстві ТОВ «Делівері» в ринкових умовах для визначення оптимального шляху перевезення вантажу.

Метою дипломної роботи є підвищення прибутковості на підприємстві за рахунок зменшення транспортних витрат підприємства на перевезення вантажу від головного розподільчого пункту товарів до пунктів видачі.

Для досягнення мети використано наступні методи і матеріали: методи та прийоми *статистичного і економічного аналізу* для аналізу фінансових показників, *графічного представлення даних* для наочного представлення розрахунків, *методи кластерного аналізу* для угруповання пунктів видачі, *математичного моделювання*, нормативні та законодавчі документи, ряд періодичних фахових видань, методична та спеціальна література

Досягненню сформульованої мети сприяла постановка та вирішення таких завдань:

- виконати аналіз фінансового стану підприємства, що розглядається;
- на основі аналізу літературних джерел визначити методи для зменшення транспортних витрат;
- побудувати і розв'язати економіко - математичну модель задачі комівояжера для зменшення транспортних витрат підприємства методом меж та гілок;
- розробити інформаційну систему для автоматизації розрахунків та наочного представлення даних;
- виконати аналіз отриманих результатів та визначити економічний ефект від запронованих в роботі заходів.

РОЗДІЛ 1. ОРГАНІЗАЦІЙНО-ЕКОНОМІЧНА ХАРАКТЕРИСТИКА ПІДПРИЄМСТВА ТОВ «ДЕЛІВЕРІ»

1.1 Організаційно-правова характеристика ТОВ «Делівері»

Повне найменування юридичної особи: ТОВАРИСТВО З ОБМЕЖЕНОЮ ВІДПОВІДАЛЬНІСТЮ ДЕЛІВЕРІ.

Код ЄДРПОУ 31738765

Дата реєстрації: 28.11.2001 (18 років 11 місяців)

Уповноважена особа: Лакатош Олена Сергіївна.

Розмір статутного капіталу 345 320 000,00 грн.

Організаційно-правова форма: Товариство з обмеженою відповідальністю

Форма власності: недержавна власність

Види діяльності:

Основний:

52.29 Інша допоміжна діяльність у сфері транспорту (основний)

Інші:

46.90 Неспеціалізована оптова торгівля

49.41 Вантажний автомобільний транспорт

52.10 Складське господарство

Адреса: ТОВ «Делівері», вулиця Теплична, смт. Слобожанське, Дніпропетровська область.

Група компаній «Делівері» розпочала роботу в 2011 році. Основною спеціалізацією групи є надання транспортних та логістичних послуг для сектора В2В (суб'єкти підприємницької діяльності і корпоративний сектор) та В2С (суб'єкти підприємницької діяльності і привитні клієнти) як на території України, так і за її межами. Доставка товарів автомобільним транспортом по всій Україні.

За роки роботи група стала надійним партнером для більш ніж 500 тисяч корпоративних клієнтів, що працюють у всіх галузях економіки країни.

Основні показники діяльності компанії:

- ✓ Більше 400 складів.
- ✓ 500 000 клієнтів щомісяця.
- ✓ Доставка в будь-яку точку світу.
- ✓ Майже 370 представництв в Україні.
- ✓ Перевезення вантажів до 20т.
- ✓ Послуги страхування життя і вантажу.
- ✓ Більше 2300 рейсів на місяць.
- ✓ 27 сортувально-розподільчих центрів.
- ✓ 14 відділень обслуговування регіональних клієнтів

Компанією здійснюється доставка та збір товарів на складі компанії або до дверей замовника. Підприємство доставляє товари від 1 кг до 8 тонн з наданням пакувальних послуг для вантажу.

Стандартні тарифи встановлюються залежно від ваги та обсягу вантажу. Існують окремі тарифи на перевезення палетизованих та великогабаритних вантажів, автомобільних шин та коліс. Також можна скористатися спеціально розробленими галузевими рішеннями, де запропонують упаковку та індивідуальний тариф доставки.

Компанія надає послуги відповідального зберігання вантажів. Для клієнтів розроблена гнучка система знижок. Підприємство надає можливість скористатися послугами індивідуального менеджера. Клієнтам, зареєстрованим на сайті, надаються додаткові можливості: відстеження вантажів та управління доставкою (зміна одержувачів, встановлення та скасування заборон на видачу товарів, виставлення рахунків, видача квитанцій на відвантаження та інші послуги).

Компанія "Делівері" постійно переглядає та оптимізує свій логістичний ланцюг і процес перевезення з технічної та організаційної точки зору.

На підприємстві стандартизують терміни доставки в залежності від відстані між населеними пунктами відправлення та отримання. Інформація про зміни термінів доставки за напрямками постійно публікується на сайті компанії.

Під ринком розуміється коло кінцевих споживачів, корпоративних клієнтів, роздрібних магазинів, оптових покупців і операторів мобільного зв'язку.



Рис.1.1 Організаційна структура ТОВ «Делівері»

1.2. Аналіз фінансово – господарської діяльності підприємства

Економічний аналіз відіграє важливу роль в економічному розвитку. Так основною метою економічного аналізу є сприяння виконанню планів підприємств і їх підрозділів, і поліпшенню економічної роботи завдяки підготовці проектів оптимальних управлінських рішень. Завдяки цьому створюються умови для забезпечення безкризової ефективної діяльності суб'єктів господарювання.

Завдання аналізу:

1. Аналіз складу, структури та динаміки майна підприємства та джерел його формування [4];
 2. Оцінка ефективності використання майна та оптимальності структури капіталу підприємства;
 3. Аналіз доходів, витрат та фінансових результатів роботи підприємства;
 4. Проведення аналізу надходження та вибуття грошових коштів підприємства;
 5. Оцінка структури та динаміки власного капіталу підприємства.
 6. Виявлення впливу відповідних факторів на показники, які аналізуються і вивчення причинних зв'язків.
 7. Пошук наявних резервів підвищення ефективності виробництва.
 8. Опрацювання конкретних заходів щодо використання виявлених резервів та здійснення контролю за їх виконанням.
 9. Вивчення забезпеченості підприємства трудовими, матеріальними та фінансовими ресурсами.
 10. Узагальнення результатів аналізу для прийняття раціональних управлінських рішень [5].
- 1.2.1. Горизонтальний та вертикальний аналіз [6].

Інформаційною базою для аналізу фінансово-господарської діяльності ТОВ «Делівері» є дані облікових реєстрів фінансової, податкової та статистичної звітності, які наведені у формі № 1 Баланс на 31.12.2019

Економічні результати діяльності ТОВ «Делівері» наведені в табл.1.1.

Таблиця 1.1.

Горизонтальний аналіз фінансово-економічних показників діяльності
ТОВ «Делівері»

Показники	Звітні дані			Відносне відхилення, %	Фактичне відхилення тис. грн.	Відносне відхилення %	Фактичне відхилення тис. грн.
	2017 р.	2018 р.	2019 р.	2017-2018рр.	2017-2018рр	2018-2019рр	2018-2019рр
1. Дохід від реалізації послуг, товарів тис. грн.	7600	7681	7766	1%	81	1%	85
1.2 Доставка в межах України, тис. грн.	1895	1883	1870	-1%	-12	-1%	-13
1.1 Міжнародні відправлення, тис. грн.	1090	1150	1211	6%	60	5%	61
1.3 Страхові послуги, тис. грн.	1103	1128	1164	2%	25	3%	36
1.4. Франчайзінг, тис. грн.	805	859	915	7%	54	7%	56
1.5.Цільові перекази тис. грн.	880	779	738	-11%	-101	-18%	-41
1.6 Приймання товарів, тис. грн.	827	856	904	4%	29	6%	48
1.7 Реалізація товарів, тис. грн.	1000	1025	1031	2%	25	1%	6

Показники	Звітні дані			Відносне відхилення, %	Фактичне відхилення тис. грн.	Відносне відхилення %	Фактичне відхилення тис. грн.
	2017 р.	2018 р.	2019 р.	2017-2018рр.	2017-2018рр	2018-2019рр	2018-2019рр
2. Інші доходи діяльності підприємства, тис. грн.	65	88	113	35%	23	28%	25
3. Середньо-спискова чисельність, чол.	320	328	38	2%	8	-88%	-290
4. Середня заробітна плата, тис. грн.	2105	3000	3010	43%	895	0%	10
5. Загальні витрати, тис. грн.	500	775	200	55%	275	-74%	-575
6. Собівартість послуг і товарів тис. грн.	300	421	521	40%	121	24%	100
7. Витрати на збут, тис. грн.	38	32	72	-16%	-6	125%	40
8. Інші операційні (транспортні) витрати, тис. грн.	662	922	307	39%	260	-67%	-615
9. Фінансовий результат до оподаткування, тис. грн.	165	150	200	-9%	-15	33%	50

Джерело: розраховано здобувачем

За даними таблиці 1.1. зроблено висновок, що в 2018 році дохід збільшився на 81 тис. грн., або на 1,1%, а в 2019 році – дохід збільшився на 85 тис. грн або на 1,1 % також. Дохід від доставки в межах України знаходився на однаковому рівні за розглянутий період. Дохід від страхових послуг має

тендецію до зростання щорічно на 1-2%. Фонд заробітної платні зріс більше ніж на 1 млн. грн з 2017 до 2019 років.

Собівартість послуг за 2018 рік збільшилася на 121 тис. грн., або на 40 %, що зумовлено збільшенням обсягів наданих послуг. Собівартість наданих послуг за 2019 рік збільшився на 100 тис.грн. (24%), це також зумовлене збільшенням обсягів виробництва.

Фінансовий результат до оподаткування зріс з 165 тис. грн у 2017 році до 200 тис грн 2019 році, спостерігається тенденція до нарощування обсягів надання послуг, що є позитивним фактором діяльності даного підприємства.

Економічний аналіз відіграє важливу роль в економічному розвитку підприємства. Так основною метою економічного аналізу є сприяння виконанню планів підприємств і їх підрозділів, поліпшенню економічного стану завдяки підготовці проектів оптимальних управлінських рішень. Завдяки цьому створюються умови для забезпечення безкризової ефективної діяльності суб'єктів господарювання.

1.2.1. Аналіз балансу підприємства.

Інформаційною базою для аналізу фінансово-господарської діяльності ТОВ «Делівері» є дані облікових реєстрів фінансової, податкової та статистичної звітності, які наведені у формі № 1 Балансу підприємства за 2016-2019 роки.

Аналіз динаміки балансу ТОВ «Делівері» представлено в табл. 1.1 та 1.3. А питома вага, тобто частка тих чи інших статей в балансі, в таблицях 1.2 та 1.4. Основою для аналізу слугував баланс ТОВ «Делівері».

Таблиця 1.1

Горизонтальний аналіз активу балансу підприємства «Делівері»

АКТИВ	2016	2017	2018	2019	абс. зміна 2017р., тис. грн	відн. зміна 2017 р., %	абс. зміна 2018р., тис. грн	відн. зміна 2018р., %	абс. зміна 2019р., тис. грн	відн. зміна 2019р., %
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1.Необоротні активи	5717818.7	5942177.1	10934119.1	14083647.3	224358.4	0.04	4991942	0.84	3149528	0.29
2. Оборотні активи	7057793.2	9053283.4	14813236.6	5366 490.03	1995490	0.28	5759953	0.64	553253.4	0.04
3.Витрати майбутніх періодів	36 009.97	875.85	281.93	169.16	-35134.1	-0.98	- 594	-0.68	-112.77	-0.40
Баланс	12811621.8	14996336.3	25747637.6	29 450306.5	2184714	17	8580 448	72.00	2955043	14.00

Таблиця 1.2

Вертикальний аналіз активу балансу підприємства «Делівері»

АКТИВ	2016	2017	2018	2019	2016 пит. вага, %	2017 пит. вага, %	2018 пит. вага, %	2019 пит. вага, %
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1. Необоротні активи	5717818.66	5 942 177.08	10 934 119.06	14 083 647.33	44.6%	39.6%	42.5%	47.8%
2. Оборотні активи	7 057 793.15	9 053 283.36	14 813 236.65	15 366 490.03	55.1%	60.4%	57.5%	52.2%
3. Витрати майбутніх періодів	36 009.97	875.85	281.93	169.16	0.3%	0.0%	0.0%	0.0%
Баланс	12 811 621.8	14 996 336.3	25 747 637.6	29 450 306.5	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%

Аналізуючи табл. 1.1 можна зробити висновок, що за чотири роки роботи підприємства «Делівері» баланс збільшився з 12 811 621.8 тис. грн до 29 450 306.5 тис. грн, що становить 129,9%. Особливо стрімкий ріст спостерігається у 2018-му році, порівняно з 2017-им роком необоротні активи зросли на 84%, оборотні активи на 64%, що говорить про розширення надання послуг підприємством. Після стрімкого росту надання послуг в 2018-му році, в 2019-му значення віансових показників не зросли порівняно з попереднім періодом, але спостерігається поступове зростання оборотів підприємства.

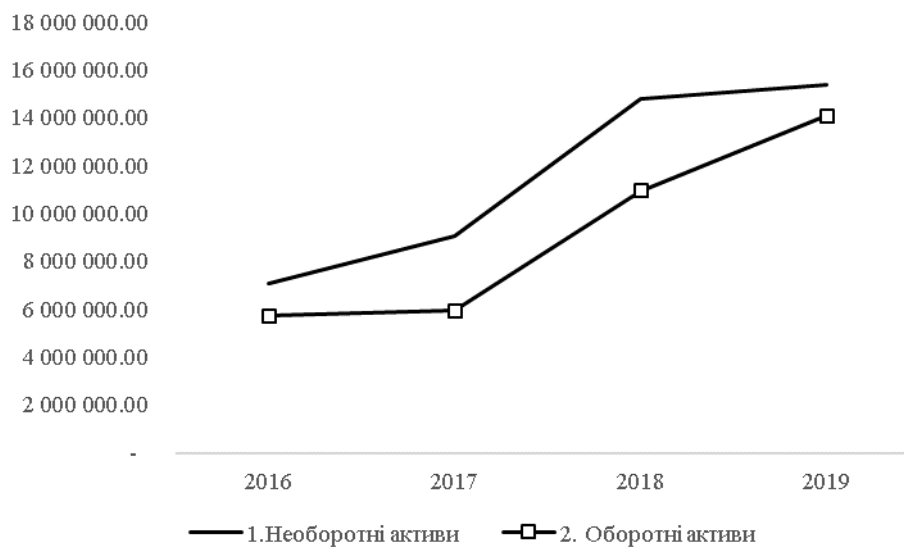


Рис. 1.2 Динаміка активу балансу

Необоротні активи і оборотні активи займають основну частину балансу, що наведено в табл. 1.2 та на рис. 1.2. Питома вага необоротних активів змінюється в межах 40-48% від усього балансу, що свідчить про значні накладні витрати і високу чутливість до зміни виручки, а оборотних активів в межах 52-60% від усього балансу. Отже актив балансу підприємства «Делівері» складається з двох розділів – оборотних і необоротних активів.

Таблиця 1.3

Горизонтальний аналіз пасиву балансу підприємства «Делівері»

ПАСИВ	2016	2017	2018	2019	абс. зміна 2017р., тис. грн	відн. зміна 2017 р., %	абс. зміна 2018р., тис. грн	відн. зміна 2018 р., %	абс. зміна 2019р., тис. грн	відн. зміна 2019 р., %
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1. Власний капітал	9095512	8306934	12108839	16095412	-788578	-9%	3801905.2	46%	3986572.4	33%
2. Забезпечення наступних витрат і платежів	520570	552410	533415	559758	31840	6%	-18995.5	-3%	26343.1	5%
3. Довгострокові зобов'язання	1273869	1790768	1783752	1229245	516899	41%	-7015.8	0%	-554506.4	-31%
4. Поточні зобов'язання	1854222	4282239	11261174	11511979	2428017	131%	6978934.	163%	250805.5	2%
5. Доходи майбутніх періодів	67449	63986	60459	53913	-3463	-5%	-3527.2	-6%	-6545.7	-11%
Баланс	12811622	14996336	25747638	29450307	2184715	17%	8580448	72%	3702668.9	14

Джерело: розраховано автором на основі даних підприємства

Таблиця 1.4

Вертикальний аналіз пасиву балансу підприємства «Делівері»

ПАСИВ	2016	2017	2018	2019	2016 пит. вага, %	2017 пит. вага, %	2018 пит. вага, %	2019 пит. вага, %
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1. Власний капітал	9095511.964	8306933.908	12108839.13	16095411.5	71%	55%	47%	55%
2. Забезпечення наступних витрат і платежів	520570.127	552410.11	533414.63	559757.702	4%	4%	2%	2%
3. Довгострокові зобов'язання	1273868.715	1790767.552	83751.773	3229245.383	10%	12%	0%	11%
4. Поточні зобов'язання	1854221.978	4282239.017	12961173.59	9511979.092	14%	29%	50%	32%
5. Доходи майбутніх періодів	67448.99	63985.698	60458.503	53912.831	1%	0%	0%	0%
Баланс	12811621.77	14996336.29	25747637.63	29450306.51	100	100	100	100

Джерело: розраховано атором на основі даних підприємства

За результатами аналізу табл.1.3 можна спостерігати тенденцію, що і для активу балансу, що до зросту балансу, проте в пасиві цю зміну зумовила зміна поточних зобов'язань на 6978934.6 тис. грн в 2018-му році порівняно з 2017-им роком, що становить 163%. Також зріс такий показник, як власний капітал на 3801905.2 тис. грн у 2018-му році порівняно з 2017-им, це говорить про те що підприємство може обійтись і без зовнішніх інвестицій. Проте довгострокові зобов'язання зменшились на 31% , що складає -554506.4 тис. грн, а в 2019-му році цей показник зріс на 2 510 370 тис. грн – 56%.

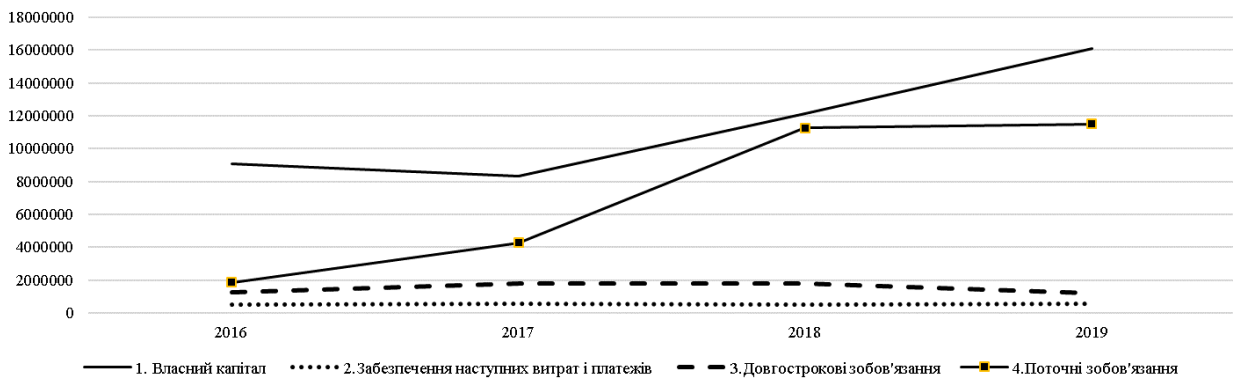


Рис. 1.3 Динаміка пасиву балансу

Джерело: побудовано автором на основі даних підприємства

Як видно з табл. 1.4 та на рис. 1.3, найбільшу частину в балансі пасиву займає власний капітал, питома вага якого змінюється в межах 47-71%, що обумовлено вимогами самофінансування підприємства, також поточні зобов'язання мають досить великий відсоток 14-50%, що говорить про перевагу короткострокових джерел в структурі позикових коштів, довгострокові зобов'язання 0-12%. Інші показники менш значущі.

Аналіз фінансового стану підприємства показав, що результат господарської діяльності досить стабільний. При аналізі фінансової стійкості видно, що підприємство абсолютно стійке. З аналізу платоспроможності спостерігається, що підприємство платоспроможне. Проаналізувавши актив балансу очевидно, що валюта балансу за 2019-ий рік збільшилася на 2 955 043 тис. грн. З аналізу пасиву видно, що підприємство існує за рахунок

власного капіталу (55%). Оскільки підприємство прибуткове, то повиненно спостерігатися економічне зростання, саме над цим потрібно працювати.

1.2.2 Горизонтальний аналіз структури та динаміки доходів ТОВ «Делівері»

На підприємствах з надання послуг основним різновидом доходу є виручка від наданих послуг клієнтам. Крім цього показника розрізняють також інші операційні доходи, дохід від участі в капіталі, інші фінансові доходи, тобто доходи від фінансової діяльності підприємства, а також інші доходи від звичайної діяльності, що підприємство отримує при здійсненні інвестиційної діяльності.

Важливо проаналізувати динаміку доходів на підприємстві, виходячи зі динаміки доходів можна зробити висновки, щодо стану підприємства і передбачити майбутні ситуації. Наприклад, зменшення доходу від реалізації наданих послуг, призведе до зменшення прибутку. На цей показник впливають як зовнішні фактори, так і внутрішні. Розглянувши дану проблему з різних сторін можна зробити висновки, що треба або збільшити реалізацію наданих послуг, або збільшити ціну на послуги, або покращити процес реалізації та інше, тому лише розглядаючи проблему з різних сторін можна обрати правильний шлях до вирішення проблемної ситуації. А для цього потрібно в першу чергу розглянути всі види доходи та витрати на підприємстві. Структуру доходів ТОВ «Делівері» роках відображено у табл. 1.5 – 1.6 дані вираховано у порівняльних цінах для врахування впливу інфляції на показники, що характеризують діяльність підприємства.

Таблиця 1.5

Горизонтальний аналіз динаміки доходів

Стаття	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.	абс. зміна 2017р., тис. грн	відн. зміна 2017р., %	абс. зміна 2018р., тис. грн	відн. зміна 2018р., %	абс. зміна 2019р., тис. грн	відн. зміна 2019р., %
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Дохід (виручка) від реалізації продукції (товарів, робіт, послуг)	6228911.8	8581126.2	11694110.	14193250.	2 352 214.44	38%	3112984.66	36%	2499139.48	21%
Інші операційні доходи	6808274.33	8492410.41	10478583.9	10669815.2	1684136.08	25%	1986173.56	23%	191231.27	2%
Інші фінансові доходи	167637.03	44142.01	35677.69	58559.71	-123495.02	-74%	-8464.32	-19%	22882.02	64%
Інші доходи	40976.65	75351.72	69564.12	58968.52	34375.07	84%	-5787.6	-8%	-10595.6	-15%
Надзвичайні: доходи	0	153.67	284.35	227.48	153.67		130.68	85%	-56.87	-20%
Усього доходів:	13245799.8	17193184.1	22278221.0	24980821.3	3947384.24	60%	5085036.98	30%	2702600.3	12%

Таблиця 1.6

Вертикальний аналіз доходів

Стаття	2016, тис. грн	2017, тис. грн	2018, тис. грн	2019, тис. грн	Пит. вага 2016,%	Пит. вага 2017 ,%	Пит. вага 2018 , %	Пит. вага 2019 , %
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Дохід (виручка) від реалізації продукції (товарів, робіт, послуг)	6228911.81	8581126.25	11694110.9	14193250.9	47%	50%	52%	57%
Інші операційні доходи	6808274.33	8492410.41	10478583.9	10669815.2	51%	49%	47%	43%
Інші фінансові доходи	167637.03	44142.01	35677.69	58559.71	1%	0.3%	0.2%	0.2%
Інші доходи	40976.65	75351.72	69564.12	58968.52	0.3%	0.4%	0.3%	0.2%
Надзвичайні: доходи	0	153.67	284.35	227.48	0%	0.001%	0.001%	0.001%
Усього доходів:	13245799.8	17193184.1	22278221.0	24980821.3	100,00	100,00	100,00	100,00

Для аналізу були використані данні звіту про фінансові результати ТОВ «Делівері» .

Дані табл. 1.5 свідчать про те, що в 2017-2019 роках структура доходів підприємства є постійною, а динаміка складових доходу підприємства була різною. Зокрема, дохід від реалізації послуг збільшувався до 2018 року, а в 2019 році він не зріс, хоча в порівнянні з 2016 він збільшився більш ніж в 2 рази. При цьому його питома вага збільшилась з 47% до 57% в загальній сумі доходів підприємства. Інші операційні доходи були найбільшими у 2019 році, хоча їх питома вага була меншою ніж у 2016 році. Інші фінансові доходи, інші доходи та надзвичайні доходи мають найменшу питому вагу, хоча в 2016 році інші фінансові доходи мали найбільше значення, що складає 167637.03 тис. грн, при цьому їх питома вага складає лише 1%.

Якщо порівнювати два останні роки, а саме 2018 і 2019, то одразу помітне зростання доходів лише на 12%. Це зумовлено в першу чергу зменшенням інших операційних доходів на 4%, що складає 191231.27 тис. грн. Якщо урахувати данні з балансу, можна сказати, що зменшення доходів пов'язано зі зменшенням кількості наданих послуг у 2019-му році. Проте якщо порівняти з 2017-им то спостерігається ріст доходу у 2018-му році.

Для наочного представлення складових доходу побудуємо кругову діаграму доходів за 2019 рік (рис. 1.4), гістограму динаміки доходів (рис. 1.5) та графічно зобразимо зміну доходів за 2016-2019 роки (рис. 1.6).

З діаграми видно, що найбільшу частку доходів складає дохід від реалізації – 62%, але інші операційні доходи також є вагомими – 34% доходу, це говорить про те що в 2018-му році значну частину прибутку займають доходи не пов'язані з виробництвом.

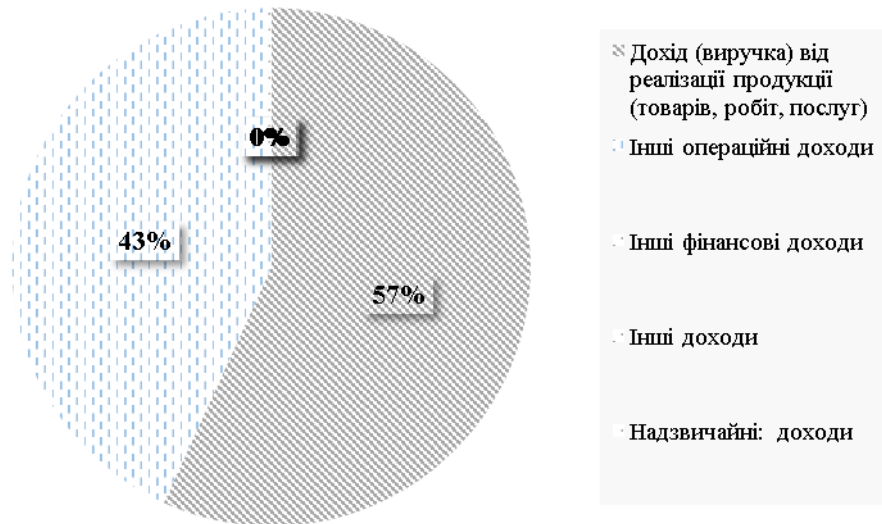


Рис. 1.4 Вертикальний аналіз доходів за 2019-ий рік

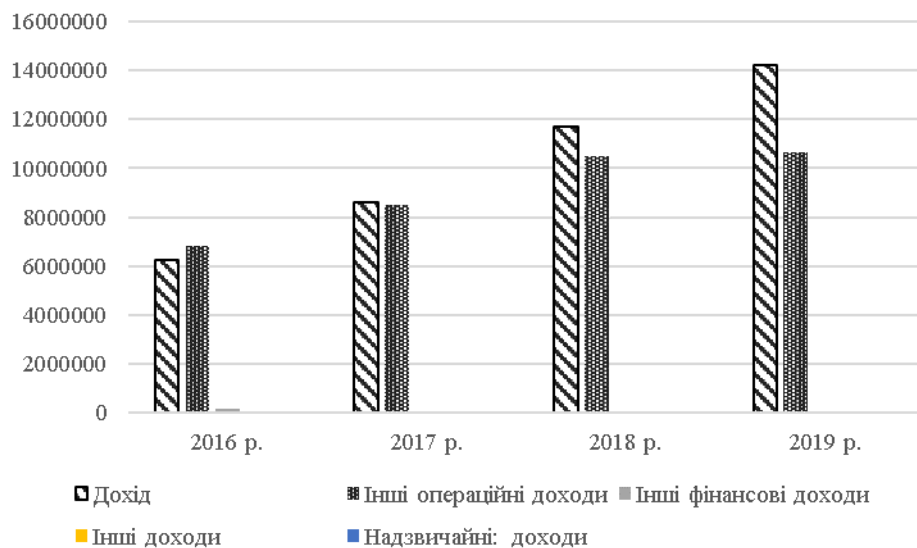


Рис. 1.5 Динаміка доходів за 2016-2019 роки

Джерело: побудовано автором на основі фінансової звітності підприємства

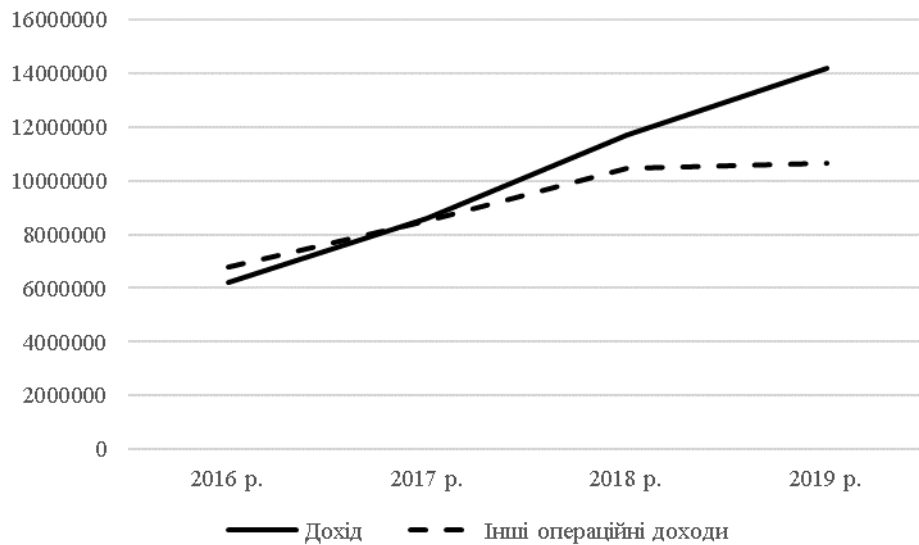


Рис. 1.6 Динаміка зміни основних видів доходів

Джерело: побудовано автором на основі фінансової звітності підприємства

На рисунках 1.5-1.6 видно, що ріст доходів у 2018-му році уповільнився, це скоріше за все пов'язано з неоптимальною кількістю наданих послуг. В свою чергу в 2019-му спад, але дохід все одно збільшився порівняно з 2017-им роком. Для більш повної картини треба проаналізувати динаміку витрат підприємства.

1.2.3 Вертикальний аналіз структури та динаміки витрат ТОВ «Делівері»

Проаналізуємо структуру і динаміку витрат підприємства ТОВ «Делівері» за 2016-2019 роки. Вихідна інформація та сам аналіз наведенні в табл. 1.7-1.8.

Таблиця 1.7

Горизонтальний аналіз динаміки витрат

Стаття	2016, тис. грн	2017, тис. грн	2017, тис. грн	2019, тис. грн	Абс. зміна 2017 р., тис. грн	Відн. зміна 2017 р., %	Абс. зміна 2018р., тис. грн	Відн. зміна 2018 р., %	Абс. зміна 2019р., тис. грн	Відн. зміна 2019 р., %
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Податок на додану вартість	763661	1499787	2594655	1743251	736126	96,39	1094868	73,00	-851404	-32,81
Собівартість реалізованої продукції (робіт, послуг)	2156233	3205347	3654118	3801248	1049114	48,65	448771	14,00	147130	4,03
Адміністративні витрати	55112	66810	74407	69642	11698	21,23	7597	11,37	-4765	-6,40
Витрати на збут	287532	434893	358433	428334	147361	51,25	-76460	-17,58	69901	19,50
Інші операційні витрати	5867562	7760968	15284151	5439475	1893406	32,27	7523183	96,94	-9844676	-64,41
Фінансові витрати	176413	54487	179022	198482	-121926	-69,11	1654535	36,57	-1510540	-88,39
Інші витрати	136473	108175	6719	7564	-28298	-20,74	-101456	-93,79	845	12,58
Податок на прибуток від звичайної діяльності	570385	1183815	2129079	1279063	613430	107,55	945264	79,85	-850016	-39,92
Надзвичайні: витрати	0	105	208	182	105	0,00	103	98,10	-26	-12,50
Усього витрат:	10013371	14314387	25810792	12967241	4301016	42,95	11496405	80,31	-12843551	-49,76

Таблиця 1.8

Вертикальний аналіз витрат

Стаття	2016, тис. грн	2017, тис. грн	2018, тис. грн	2019, тис. грн	пит. вага 2016,%	пит. вага 2017, %	пит. вага 2018, %	пит. вага 2019, %
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Податок на додану вартість	763661	1499787	2594655	1743251	7,63	10,48	10,05	13,44
Собівартість реалізованої продукції (товарів, робіт, послуг)	2156233	3205347	3654118	3801248	21,53	22,39	14,16	29,31
Адміністративні витрати	55112	66810	74407	69642	0,55	0,47	0,29	0,54
Витрати на збут	287532	434893	358433	428334	2,87	3,04	1,39	3,30
Інші операційні витрати	5867562	7760968	15284151	5439475	58,60	54,22	59,22	41,95
Фінансові витрати	176413	54487	1709022	198482	1,76	0,38	6,62	1,53
Інші витрати	136473	108175	6719	7564	1,36	0,76	0,03	0,06
Податок на прибуток від звичайної діяльності	570385	1183815	2129079	1279063	5,70	8,27	8,25	9,86
Надзвичайні: витрати	0	105	208	182	0,00	0,00	0,00	0,00
Усього витрат:	10013371	14314387	25810792	12967241	100	100	100	100

Як видно з аналізу табл. 1.7 та 1.8 впродовж 2017 та 2018 років витрати зростали, в основному за рахунок збільшення собівартості реалізованої продукції та інших операційних витрат. В 2018 році фінансові витрати збільшилися на 37%, що склало 1 654 535 тис. грн, інші операційні витрати збільшилися на 97% - 7 523 183 тис. грн, податок на додану вартість збільшився на 73% - 1 094 868 тис. грн, через збільшення даних статей витрати за 2018 рік є найбільшими і складають 25 810 792 тис. грн.

Для більш наглядного вигляду тих чи інших витрат побудуємо кругову діаграму, на якій буде відображена питома вага витрат за 2018 рік.

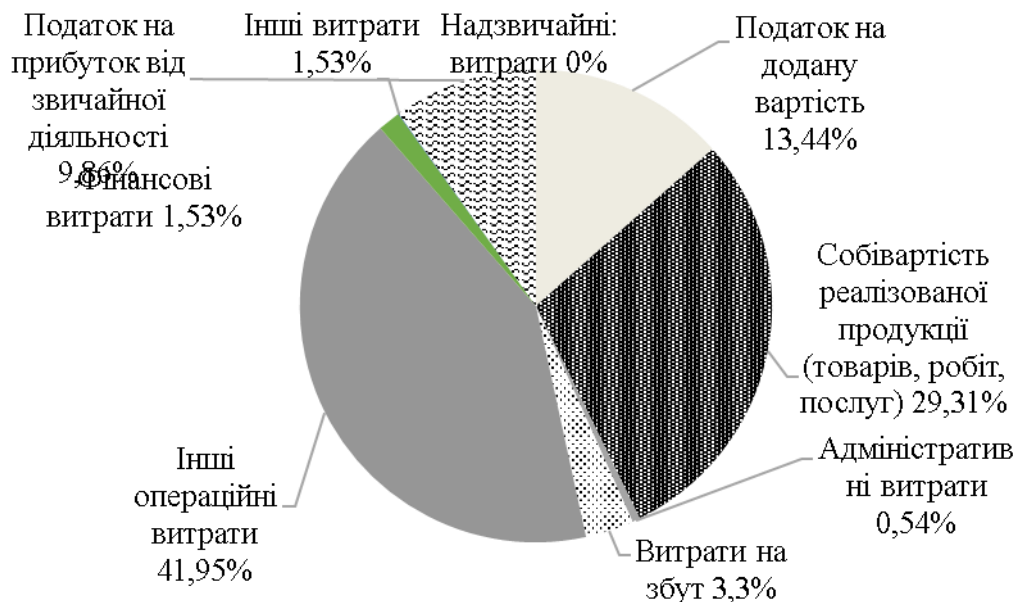


Рис. 1.7 Витрати за 2019-ий рік

Джерело: побудовано автором на основі фінансової звітності підприємства

З діаграми (рис. 1.7) видно, що найбільш вагомими є такі показники як інші операційні витрати (42%), собівартість (29%) та податок на додану вартість (13%). Згідно з попереднім роком: інші операційні витрати зменшились на 64%, що складає 9 844 676 тис. грн, собівартість від реалізованої продукції зростає лише на 4% або 147 130 тис. грн, а податок на додану вартість зменшився на 33% або 851 404 тис. грн. Хоч фінансові витрати мають питому вагу 2% проте вони зменшились на 88%, що складає 1 510 540 тис. грн. порівняно з 2018-м роком.

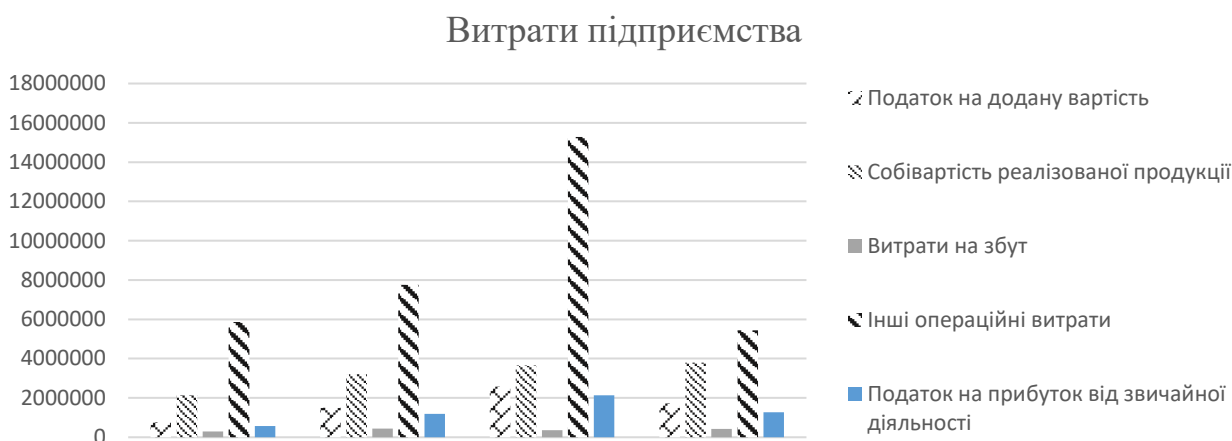


Рис. 1.8 Витрати підприємства за 2016-2019 роки

Джерело: побудовано автором на основі фінансової звітності підприємства

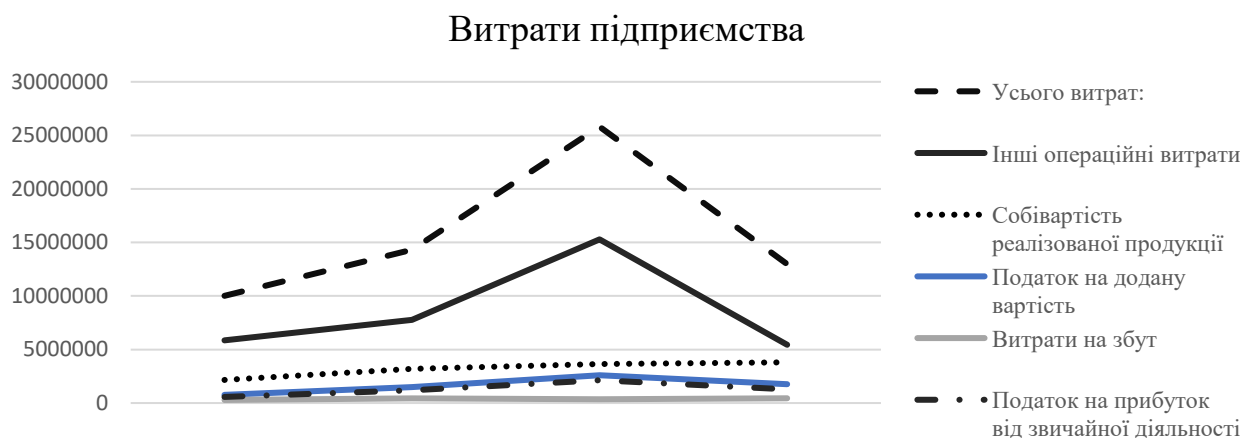


Рис. 1.9 Динаміка витрат ТОВ «Делівері»

Джерело: побудовано автором на основі фінансової звітності підприємства

За рахунок даних змін підприємству ТОВ «Делівері» в 2018-му році вдалося зменшити свої витрати на 50% порівняно з попереднім роком.

На рис. 1.8-1.9 добре видно збільшення витрат у 2018-му році, це скоріше за все пов'язано з кількістю наданих послуг. В свою чергу в 2019-му спад, але на відміну від доходів у 2017-му році витрати були більші, а отже ТОВ «Делівері» зменшило свої витрати не вплинувши на прибуток.

1.2.4 Розрахунок коефіцієнтів для аналізу фінансового стану підприємства ТОВ «Делівері»

Фінансово-економічний аналіз дозволяє отримати найбільш повну інформацію про стан підприємства, його прибутковості або збитковості, стійкості, ліквідності та інших не менш важливих характеристиках.

Для аналізу були використані данні за 2019-ий рік [5].

Важливим критерієм оцінки фінансового стану підприємства виступає його ліквідність платіжних засобів і платоспроможність. Ліквідність підприємства – це здатність перетворити активи в засоби платежу для погашення короткострокових фінансових зобов'язань. Визначають ліквідність підприємства за допомогою системи фінансових коефіцієнтів, які дозволяють порівняти вартість поточних активів, що мають різний ступінь ліквідності із сумою поточних фінансових зобов'язань (табл. 1.9).

Таблиця 1.9

Показники ліквідності

Показники	На початок року	На кінець року	Зміна за рік
1	2	3	4=3-2
1.Коефіцієнт загальної ліквідності	1,17	1,55	0,38
2.Коефіцієнт поточної ліквідності	1,19	1,78	0,59
3.Коефіцієнт абсолютної ліквідності	0,05	0,01	0,01
4.Чистий оборотний капітал	1478103,00	4672395,00	3194292,00

Джерело: розраховано автором на основі фінансової звітності підприємства

Нормальним значенням розглянутого коефіцієнта є 1,5...2,5, але не менші за 1. Оскільки на кінець 2018-го року цей показник зріс до 1,55, зроблено висновок, що підприємство володіє достатньою кількістю вільних ресурсів, які сформувалися

завдяки власним джерелам. З позиції кредиторів підприємства такий варіант формування оборотних коштів є найбільш прийнятним.

Розрахунок коефіцієнта загальної ліквідності проводиться за формулою:

$$\text{Кзл} = \frac{\text{Оборотні активи}}{\text{Поточні зобов'язання}} \quad (1.1)$$

Коефіцієнт поточної ліквідності показує платіжні можливості підприємства щодо погашення поточних зобов'язань за умови своєчасного здійснення розрахунків з дебіторами. Теоретично значення коефіцієнта вважається достатнім, якщо воно перевищує 0,6. На кінець 2018-го року цей показник зріс до 1,78, це говорить про те що дане підприємство є платоспроможним і може самостійно розрахуватися з поточними зобов'язаннями.

Розраховується за формулою (1.2):

$$\text{Кпл} = \frac{\text{Оборотні активи} - \text{запаси}}{\text{поточні}} \text{ зобов'язання} \quad (1.2)$$

Коефіцієнт абсолютної ліквідності дозволяє визначити частку короткострокових зобов'язань, що підприємство може погасити найближчим часом, не чекаючи оплати дебіторської заборгованості й реалізації інших активів. Теоретично значення коефіцієнта вважається достатнім, якщо воно перевищує 0,2...0,3 [6]. На практиці ж значення бувають значно нижчі, і за цим показником не можна відразу робити негативні висновки про можливості підприємства негайно погасити свої борги, тому що мало ймовірно, щоб всі кредитори підприємства одночасно пред'явили б йому свої вимоги. У той же час, занадто високе значення показника абсолютної ліквідності свідчить про нераціональне використання фінансових ресурсів.

Коефіцієнт абсолютної ліквідності визначається за формулою (1.3):

$$\text{К. а.} = \frac{\text{Грошові активи}}{\text{Поточні}} \text{ зобов'язання} \quad (1.3)$$

Чистий оборотний капітал необхідний для підтримки фінансової стійкості підприємства, оскільки перевищення оборотних коштів над короткостроковими зобов'язаннями означає, що підприємство не тільки може погасити свої короткострокові зобов'язання, але і має резерви для розширення діяльності.

Рекомендовані значення має бути більшим 0. За розрахунками значення даного коефіцієнту 0,01, а отже на підприємстві досить оборотного капіталу для погашення поточних зобов'язань.

Розраховується за формулою (1.4):

$$\text{Чок} = \text{поточні активи} - \text{поточні пасиви} \quad (1.4)$$

Умовою й гарантією виживання й розвитку будь-якого підприємства, як бізнес-процесу, є його фінансова стабільність (табл. 1.10). Якщо підприємство фінансово стійке, то воно в стані «витримати» несподівані зміни ринкової кон'юнктури і не опинитися на краю банкрутства. Чим вище стабільність підприємства, тим більше переваг перед іншими підприємствами того ж сектора економіки в одержанні кредитів і залученні інвестицій. Фінансово стійке підприємство вчасно розраховується за своїми обов'язками з державою, позабюджетними фондами, персоналом, контрагентами [7].

Таблиця 1.10

Показники фінансової стійкості підприємства

Показники	На початок року	На кінець року	Зміна за рік
1	2	3	4
1.Коефіцієнт співвідношення залучених і власних коштів	1,08	0,78	-0,3
2.Коэффициент автономії	0,43	0,56	0,13
3.Коефіцієнт маневреності власних коштів	0,11	0,125	0,015
4.Коефіцієнт ефективності використання власних коштів	0,92	0,386	-0,534

Коефіцієнт співвідношення позикових і власних коштів визначає структуру фінансових ресурсів розглянутого підприємства. Максимальне значення цього показника становить 1. На кінець 2019-го року даний показник мав значення 0,78,

що свідчить про перевагу власного капіталу над позиковим. Розраховується за формулою (1.5):

$$K_{сп} = \frac{\text{забезпечення наступних витрат і платежів} + \text{довгострокові зобов'язання} + \text{поточні зобов'язання}}{\text{власний капітал}} \quad (1.5)$$

Коефіцієнт автономії (коефіцієнт концентрації власного капіталу) характеризує частку коштів, вкладених власниками підприємства в загальну вартість майна.

Нормальне мінімальне значення коефіцієнта автономії орієнтовано оцінюється на рівні 0,5, розрахований коефіцієнт дорівнює 0,55, що припускає забезпеченість позикових коштів власними, тобто, реалізувавши майно, сформоване із власних джерел, підприємство зможе погасити зобов'язання.

Розрахунок коефіцієнта автономії проводиться за формулою (1.6):

$$K_a = \text{Власний} \frac{\text{капітал}}{\text{Валюта}} \text{баланса} \quad (1.6)$$

Коефіцієнт маневреності власних коштів характеризує ступінь мобільності використання власного капіталу. Чітких рекомендацій у значенні цього коефіцієнта немає, але вважається, що його значення повинно бути не менше 0,2, що дозволить забезпечити достатню гнучкість у використанні власного капіталу.

Розраховане значення даного показника рівне 0,12, це зумовлено тим, що ТОВ «Делівері» - це підприємство надання послуг і необоротні активи займають 48% від усієї суми балансу.

Визначається за формулою:

$$K_m = \text{Власні оборотні} \frac{\text{кошти}}{\text{Власний капітал}} \quad (1.7)$$

Коефіцієнт ефективності використання власних коштів показує скільки прибутку дає 1 грн. власних коштів. Теоретично, нормальним значенням цього коефіцієнта є значення не менше 0,4. На кінець звітного періоду показник має значення 0,47.

Згідно балансу розраховується за формулою:

$$K_{евк} = \frac{\text{Фінансові результати від звичайної діяльності до оподаткування}}{\text{власний капітал}} \quad (1.8)$$

Стабільність фінансового стану підприємства в умовах ринкової економіки обумовлена значною мірою його діловою активністю, що залежить від шпроти ринків збуту продукції, його ділової репутації, ступеня виконання плану за основними показниками господарської діяльності, рівня ефективності використання ресурсів і стабільності економічного зростання (табл. 1.11).

Таблиця 1.11

Показники ділової активності підприємства

Показники	На початок року	На кінець року	Зміна за рік
1	2	3	4
1. Коефіцієнт оборотності активів	0,66	0,37	-0,29
2. Коефіцієнт оборотності матеріальних запасів	9,30	9,68	0,38
3. Коефіцієнт оборотності основних засобів	2,43	1,71	-0,72
4. Коефіцієнт оборотності власного капіталу	1,29	0,75	-0,54

Коефіцієнт оборотності активів – відображає швидкість обороту сукупного капіталу підприємства, тобто показує, скільки разів за аналізований період відбувається повний цикл виробництва й обіг, що приносить відповідний ефект у вигляді прибутку, або скільки грошових одиниць реалізованої продукції принесла кожна одиниця активів (1.9):

$$K_{oa} = \frac{\text{Чиста виручка від реалізації продукції}}{\text{Середньорічна вартість активів}} \quad (1.9)$$

Оскільки дане підприємство досить велике й відноситься до галузі розрібної торгівлі, коефіцієнт оборотності активів має відносно невелике значення 0,37.

Коефіцієнт оборотності матеріальних запасів відображає число оборотів товарно-матеріальних запасів підприємства за аналізований період. Зниження даного показника свідчить про відносне збільшення виробничих запасів і незавершеного виробництва або про зниження попиту на готову продукцію [8]. Оскільки на кінець 2019-го року показник зріс, це свідчить про більш ліквідну структуру оборотних активів й стійкіше фінансове становище підприємства.

Коефіцієнт оборотності матеріальних запасів визначається за формулою (1.10):

$$K_{\text{омз}} = \frac{\text{Чиста виручка від реалізації продукції}}{\text{Середньорічна вартість запасів}} \quad (1.10)$$

Коефіцієнт оборотності основних засобів (фондовіддача) розраховується як відношення чистої виручки від реалізації продукції (робіт, послуг) до середньорічної вартості основних засобів. Він показує ефективність використання основних засобів підприємства. За розрахунками на даному підприємстві він дорівнює 1,71.

Коефіцієнт оборотності власного капіталу розраховується як відношення чистої виручки від реалізації продукції (робіт, послуг) до середньорічної величини власного капіталу підприємства і характеризує ефективність використання власного капіталу підприємства. За розрахунками коефіцієнт оборотності власного капіталу дорівнює 0,75.

На короткострокову ліквідність або платоспроможність підприємства впливає його здатність генерувати прибуток. У цьому зв'язку розглядається такий аспект діяльності підприємства як рентабельність. Це і якісний і кількісний показник ефективності діяльності всякого підприємства (табл. 1.12).

Коефіцієнт рентабельності активів (економічна рентабельність) характеризує рівень прибутку, що створюється всіма активами підприємства, які перебувають у його використанні згідно з балансом. Оскільки показник зменшився це може свідчити про падаючий попит на продукцію підприємства й про перенагромадження активів.

Таблиця 1.12

Показники рентабельності та прибутковості підприємства

Показники	На початок року	На кінець року	Зміна за рік
1.Коефіцієнт рентабельності активів	0,30	0,22	-0,08
2.Коефіцієнт рентабельності власного капіталу	0,59	0,57	-0,16
3.Коефіцієнт рентабельності діяльності	0,45	0,48	0,02

Даний показник розраховується за формулою (1.11):

$$Кра = \text{Прибуток від звичайної діяльності до оподаткування} / \text{Валюта балансу} \quad (1.11)$$

Коефіцієнт рентабельності власного капіталу (фінансова рентабельність) характеризує рівень прибутковості власного капіталу, вкладеного в дане підприємство, тому найбільший інтерес представляє для наявних і потенційних власників й акціонерів й є одним з основних показників інвестиційної привабливості підприємства, тому що його рівень показує верхню межу дивідендних виплат. За розрахунками вийшло 0,57, що говорить про велика частка власних коштів у загальному обсязі фінансових ресурсів підприємства.

Даний показник розраховується за формулою (1.12):

$$Крвк = \text{Чистий прибуток} / \text{Власний капітал} \quad (1.12)$$

Коефіцієнт рентабельності діяльності розраховується як відношення чистого прибутку підприємства до чистої виручки від реалізації продукції (робіт, послуг)[9]. Збільшення цього показника свідчить про зростання ефективності господарської діяльності підприємства, а зменшення навпаки.

Згідно балансу розраховується за формулою (1.13):

$$Крд = \text{Чистий прибуток} / \text{Чиста виручка від реалізації продукції} \quad (1.13)$$

Висновок до розділу 1

Проаналізувавши показники ліквідності зробено висновок про те, що підприємство, в разі необхідності, зможе швидко погасити короткострокові зобов'язання, реалізувавши свої поточні активи. Загальний висновок по показникам фінансової стійкості можна зробити такий: підприємство стійке, недоліком можна вважати те що власні кошти підприємства мають низький коефіцієнт маневреності, що зумовлено великою часткою необоротних коштів в фінансовій структурі. Позитивним фактором є те, що для покриття матеріально-виробничих запасів у ТОВ «Делівері» достатньо коштів і, в разі необхідності розраховатися, підприємство не змушене буде збільшувати кредиторську заборгованість по оплаті праці, соціальному страхуванню, перед бюджетом, тощо. До того ж більша частина власних обігових коштів знаходиться в грошовій формі, тобто коштів, що мають абсолютну ліквідність.

Виявлено, що підприємство має високий економічний потенціал, та наявність резервів зміцнення фінансової стійкості та резервів які будуть залучені на технічне переозброєння підприємства. Позитивним фактом є те, що при аналізі показників в динаміці постерігається тенденція до їх росту. Хоча потрібно не упускати той фактор, що підвищення рівня конкурентоспроможності та зміцнення фінансової стійкості підприємства можливо лише за умови ретельної детальної оцінки та глибокої реструктуризації всіх напрямків діяльності. Підприємство має значні резерви капіталу, які можна використати для розвитку економічного зростання.

РОЗДІЛ 2. ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МІНІМІЗАЦІЇ ТРАНСПОРТНИХ ВИТРАТ

2.1 Загальна постановка задачі

Компанія "Делівері" постійно переглядає свій логістичний ланцюг і процес перевезення з технічної та логістичної точок зору. Одним з провідних розподільчих пунктів є пункт в місті Дніпро, що забезпечує розподіл перевезень товарів по всій Дніпропетровській області та прилеглим регіонам.

В межах діяльності підприємства здійснюються перевезення вантажу від розподільчого пункту м. Дніпро до 29 складів отримання відбувається 6 раз на тиждень. Робочий графік водіїв 8 годин на день. В кожному пункті відвантаження вантажу займає 15 хвилин, при цьому середня швидкість руху транспортного засобу 50 км/год. Необхідно здійснити доставку вантажу з від розподільчого складу відправки в м. Дніпро до 29 складів отримання Дніпропетровської області.

Для розв'язання поставленої задачі потрібно згрупувати населені пункти за територіальною ознакою. Тобто, спочатку 29 пунктів доставки разом з містом Дніпро кластеризуємо, а потім до кожного кластеру застосовуємо задачу комівояжера. Для поліпшення ситуації на підприємстві, а саме для покращення фінансових показників транспортних витрат, потрібно зменшити операційні витрати, до яких належать і витрати на транспортування. На рис. 1.8-1.9 маємо змогу побачити, що витрати кожного року зростають на 2-7%, тому потрібно розробити заходи для їх зменшення. Для цього адміністративні центри розбиваємо на кластери та для кожного кластеру розв'язуємо задачу комівояжера.

2.2. Аналіз економіко-математичних методів кластеризації

Розв'язання лінійної оптимізаційної моделі для кластеризації об'єктів моливо виконати в MS Excell, але з огляду на відносно велику кількість даних (30 об'єктів) надбудова «Поиск решения» не спроможна розв'язати дану задачу.

Можливість провести кластеризацію реалізована в комплексі програмного забезпечення Statistica 10. Оскільки число класів заделегіть невідоме, то скористаємося до ієрархічними кластер-процедурами. Всі ієрархічні кластер-процедури діляться на агломеративні (об'єднуючі) і розділяючі (розділяють), в пакеті Statistica реалізовані алгомеративні кластер-процедури [9] .

Вибір кількості класів може визначатися на основі аналізу спеціальних функціоналів якості, на основі порівняння розбиття на різну кількість класів, можливості із змістовної інтерпретації та інших критеріїв. Остаточний вибір залишається за дослідником.

Одним з доступних в Statistica інструментів для вибору кількості класів є графік процесу об'єднання (кнопка Graph of Amalgamation schedule) і таблиця об'єднання об'єктів (кнопка Amalgamation schedule), представлені на рис.2.1.

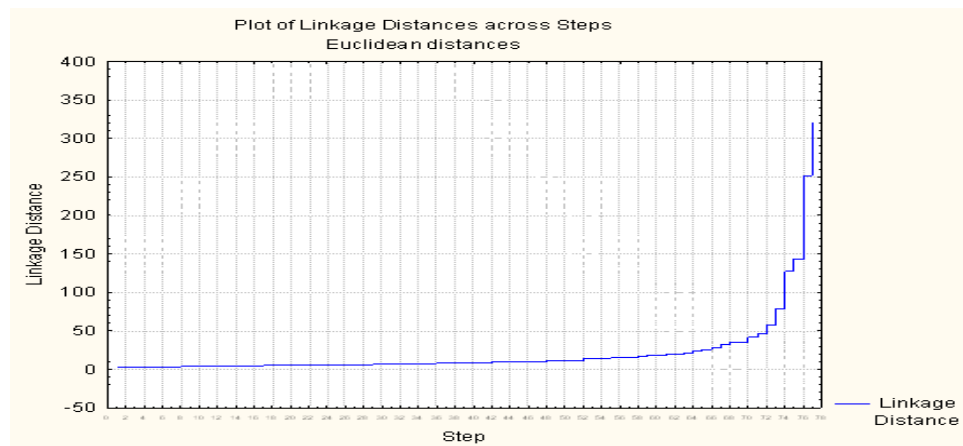


Рисунок 2.1 Графік об'єднання об'єктів в класи методом Уорда

З огляду на те, що Statistica є платним програмним забезпеченням, що ускладнює його застосування для розв'язання науково-пошукових задач. Тому скористаємося потужним інструментом для кластерезації - програмним середовищем Matlab. В ньому можна реалізувати метод k - середніх, метод повного

перебору, ієрархічний кластерний аналіз, реалізація кластеризації за допомогою шару Кохонена та інші. Так як програмний комплекс Matlab задовольняє всі вимоги, то використовувати в роботі буду саме його.

Алгоритм НСМ (Hard C - Means).

Призначення: кластеризація великих наборів числових даних.

Переваги: легкість реалізації, обчислювальна простота.

Недоліки: завдання кількості кластерів, відсутність гарантії в знаходженні оптимального рішення.

Алгоритм PAM (partitioning around medoids).

Обмеження: невеликий обсяг даних.

Переваги: простота використання; швидкість використання; зрозумілість і прозорість алгоритму, алгоритм менш чутливий до викидів в порівнянні з *k-means*.

Недоліки: необхідно задавати кількість кластерів; повільна робота на великих базах даних.

Алгоритм BIRCH (*Balanced Iterative Reducing and Clustering using Hierarchies*). У цьому алгоритмі передбачений двоетапний процес кластеризації.

Призначення: кластеризація дуже великих наборів числових даних.

Обмеження: робота з тільки числовими даними.

Переваги: двоступенева кластеризація, кластеризація великих обсягів даних, працює на

- обмеженому обсязі пам'яті, є локальним алгоритмом, може працювати при одному скануванні
- вхідного набору даних, використовує той факт, що дані неоднаково розподілені по простору, і
- обробляє області з великою щільністю як єдиний кластер.

Недоліки: робота з тільки числовими даними, добре виділяє тільки кластери сферичної форми, є необхідність у завданні порогових значень[9].

Проаналізувавши наведені вище методи, дійшла висновку - найбільш поширений серед неієрархічних методів алгоритм *k*-середніх, так званий швидкий кластерний аналіз. Повний опис алгоритму можна знайти в роботі Хартігана і

Вонга (Hartigan and Wong, 1978) [10]. На відміну від ієрархічних методів, які не вимагають попередніх припущень щодо числа кластерів, для можливості використання цього методу необхідно мати гіпотезу про найбільш ймовірний кількості кластерів.

Алгоритм k -середніх будує k кластерів, розташованих на можливо великих відстанях один від одного. Основний тип завдань, які вирішує алгоритм k -середніх, - наявність припущень (гіпотез) щодо числа кластерів, при цьому вони повинні бути різними настільки, наскільки це можливо. Вибір числа k може базуватися на результатах попередніх досліджень предметної галузі, теоретичних міркуваннях або експертних оцінках.

Алгоритм k -середніх підходить для поставленої задачі, для того щоб згрупувати адміністративні центри Дніпропетровщини.

Загальна ідея алгоритму: задане фіксоване число k кластерів спостереження зіставляються кластерам так, що середні в кластері (для всіх змінних) максимально можливо відрізняються один від одного.

Розглянемо опис алгоритму:

Початковий розподіл об'єктів по кластерам.

Вибирається число k , і на першому кроці ці точки вважаються "центрами" кластерів. Кожному кластеру відповідає один центр. Вибір початкових центроїдів може здійснюватися таким чином:

- ✓ вибір k -спостережень для максимізації початкової відстані;
- ✓ випадковий вибір k -спостережень;
- ✓ вибір перших k -спостережень.

В результаті кожен об'єкт призначений певного кластеру.

Обчислюються центри кластерів, якими потім вважаються по координатно середніми кластерів. Об'єкти знову перерозподіляються. Процес обчислення центрів і перерозподілу об'єктів продовжується до тих пір, поки не виконано одну з умов:

- ✓ кластерні центри стабілізувалися, тобто всі спостереження належать кластеру, якому належали до поточної ітерації;

- ✓ число ітерацій дорівнює максимальному числу ітерацій.

Приклад роботи алгоритму k -середніх при розбитті на два кластери наведено на рис 2.3

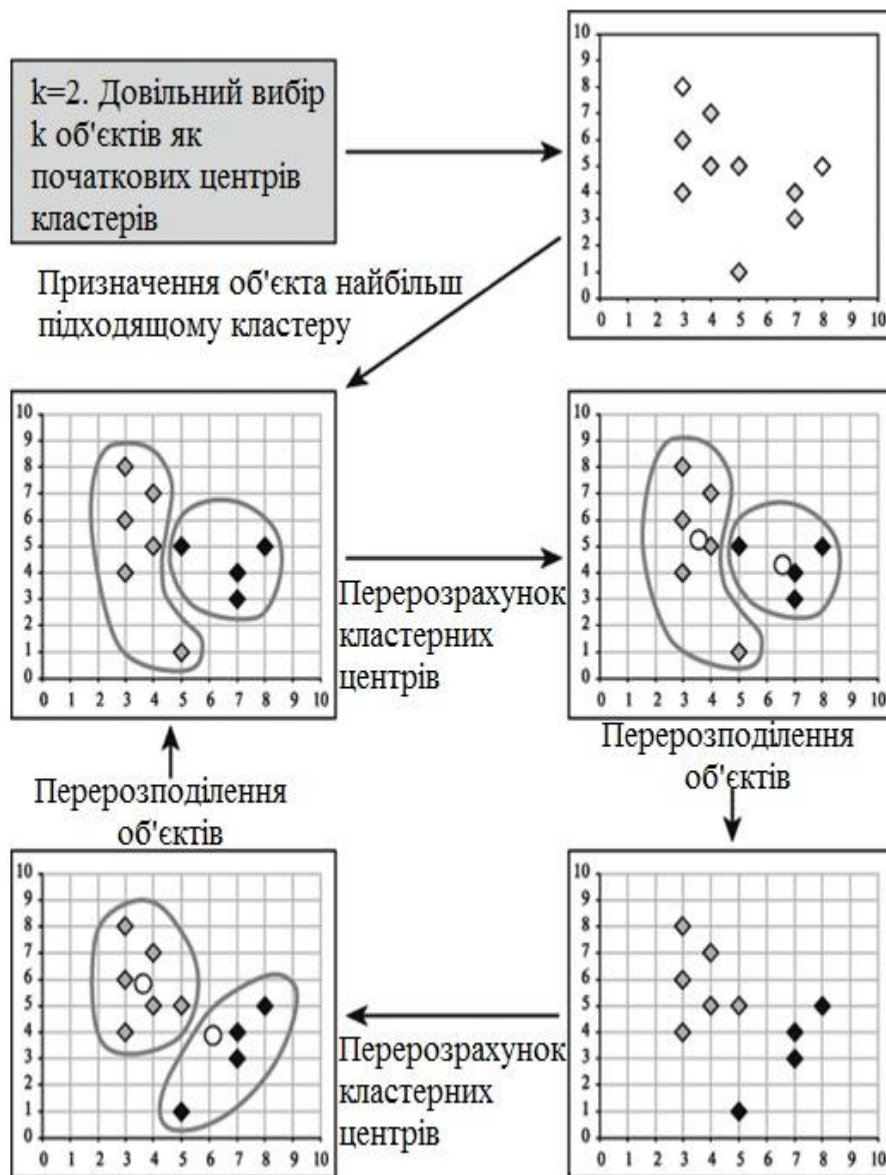


Рис. 2.3. Приклад роботи алгоритму k -середніх (при $k = 2$)

Перевірка якості кластеризації

Після отримання результатів кластерного аналізу методом k -середніх слід перевірити правильність кластеризації (тобто оцінити, наскільки кластери відрізняються один від одного). Для цього розраховуються середні значення для кожного кластера.

Переваги алгоритму k -середніх:

- ✓ простота використання;

- ✓ швидкість використання;
- ✓ зрозумілість і прозорість алгоритму [11].

Тому в даній дипломній роботі використано саме його.

2.3 Аналіз економіко-математичних методів для розв'язання задачі комівояжера. Метод границь та гілок

Задача мінімізації транспортних витрат може бути реалізована багатьма інструментами, зокрема транспортна задача, управлінням транспортними витратами, задача комівояжера.

Транспортна задача - це задача вибору оптимального варіанту доставки продукції від пунктів виробництва до пунктів споживання з врахуванням всіх реальних можливостей.

У загальному вигляді її формулюють: із заданих пунктів необхідно доставити вантаж споживачам, якщо відомі запаси вантажів у постачальників, транспортні витрати і потреби в обсягах перевезень кожному споживачеві.

Класична постановка транспортної задачі за критерієм вартості полягає у наступному.

Нехай є m пунктів доставки (або пунктів виробництва) A_1, A_2, \dots, A_m , в яких розміщено однорідний вантаж в обсязі a_1, a_2, \dots, a_m одиниць. Цей вантаж повинен бути доставлений у деяку систему з n пунктів B_1, B_2, \dots, B_n з обсягом попиту відповідно b_1, b_2, \dots, b_n . Передбачається, що можливе транспортування з кожного пункту постачання в кожний пункт споживання. Відомі транспортні витрати C_{ij} , пов'язані з доставкою одиниці вантажу з пунктів A_i в пункти B_j ($i=1, m; j=1, n$).

Задача полягає у складанні такого плану перевезень, який забезпечує виконання наступних умов:

- запаси кожного постачальника повинні бути повністю вивезені;
- попит всіх пунктів споживання повинен бути задовільнений за рахунок розподілу всього запасу вантажів
- забезпечити мінімальні транспортні витрати.

Умови транспортної задачі подають у формі таблиці 2.1, яка має вигляд

Таблиця 2.1

Умови транспортної задачі

Постачальники A_i	Споживачі B_j						Наявність вантажу
	B_1	B_2	...	B_j	...	B_n	
A_1	C_{11}	C_{12}	...	C_{1j}	...	C_{1n}	a_1
A_2	C_{21}	C_{22}	...	C_{2j}	...	C_{2n}	a_2
...
A_i	C_{i1}	C_{i2}	...	C_{ij}	...	C_{in}	a_i
...
A_m	C_{m1}	C_{m2}	...	C_{mj}	...	C_{mn}	a_m
Потреба у вантажах	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n	$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$

Так як в поставленій вище задачі кількість постачальників (m пунктів відправлення) лише 1, а кожен пункт поставки має бути відвіданим, то методом транспортної задачі не може бути застосованим.

Математична модель задачі комівояжера

Задача комівояжера - задача цілочислового лінійного програмування, де змінні X можуть набувати лише два значення - 0 і 1. Задача комівояжера може бути сформульована як цілочисельна введенням нульових змінних $X_{ij} = 1$, якщо маршрут включає переїзд з міста i безпосередньо в місто j і $X_{ij} = 0$ в іншому випадку. Тоді можна задати математичну модель задачі, тобто записати цільову функцію і систему обмежень:

$$\min Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} c_{ij} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 & j = \overline{1, n} \quad (2) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 & i = \overline{1, n} \quad (3) \\ x_{ij} \geq 0 & i, j = \overline{1, n} \quad (4) \end{cases}$$

Для того, щоб виключити при постановці завдання всі можливі підцикли в систему обмежень задачі включають такі обмеження:

$$U_i - U_j + nX_{ij} \leq n - 1, \text{ де } i = \overline{2, n}, j = \overline{2, n} \text{ і } i \neq j. \quad (2.2)$$

Розглянемо алгоритм розв'язання задачі комівояжера методом гілок та меж.

Одна ітерація складається з такої послідовності дій:

- Визначити мінімальні значення по рядкам та відняти їх від значень в платіжній матриці.
- Визначити мінімальні значення по стовпцям та відняти їх від значень в платіжній матриці
- Отримавши матрицю з нульовими елементами в кожному рядку і стовпцю, необхідно знайти суму мінімальних значень по рядку і стовпцю для нульових елементів матриці.
- Визначивши елемент, що має найбільшу суму, відповідні рядок і стовпець видаляються з матриці, а відповідна дуга заноситься до оптимального маршруту
- Важливий момент, після видалення необхідно на пересіченні рядка і стовпця в яких не має елемента безкінечності вставити його, для подальшого рішення задачі (щоб контур не замкнувся).
- Повторюємо вищевказані дії, поки ранг матриці не стане дорівнювати двом, і в кінці добавляємо дуги, що відповідають нульовим елементам в дворанговій матриці.
- Будуємо оптимальний маршрут.

Задача задовольняє поставлені в роботі задачі, тому для мінімізації транспортних витрат використовуємо задачу комівояжера [12].

Задача комівояжера може бути вирішена точними та наближеними методами: точні алгоритми з доказовими верхніми оцінками (цікаві з теоретичної точки зору) та евристики (алгоритми, добре працюють на практиці, але не мають теоретичних гарантій на час роботи і помилку наближення).

Наприклад, точний метод повного перебору дозволяє знайти точне рішення задачі комівояжера, тобто обчислити довжини всіх можливих маршрутів і вибрати маршрут з найменшою довжиною. Однак навіть для невеликої кількості міст

вирішувати задачу таким способом практично неможливо. Для простого варіанту, симетричної задачі з n містами, існує $(n-1)! / 2$ можливих маршрутів, тобто для 15 міст існує 43 мільярди маршрутів і для 18 міст вже 177000000000000. Що на практиці є неприйнятним. Відзначено, що метод випадкового перебору є дуже довгим, тому він нам не піходить.

Тому скористаємося методами дискретної оптимізації, зокрема *методом гілок і меж*, дозволяють знаходити оптимальні або приблизні рішення для досить великих задач.

Головна ідея жадібного алгоритму (англ. Greedy algorithm) полягає у прийнятті локально оптимальних рішень на кожному етапі, допускаючи, що кінцеве рішення також виявиться оптимальним. Відомо, що якщо структура завдання задається матроїдом, тоді застосування жадібного алгоритму видасть глобальний оптимум. Цей метод використовувати не будемо, так як він дає неефективний результат.

Можливо також використати: метод найближчого сусіда, метод включення, ближнього міста, метод найдешевшого включення, метод мінімального остовного дерева, метод імітації відпалу, метод гілок і меж, угорський метод [13].

2.4. Розв'язання задачі кластеризації пунктів видачі.

Аналізуючи вихідні дані – основні пункти доставки товарів, де є представництва ТОВ «Делівері», географічне розташування адміністративних центрів Дніпропетровської області, куди здійснюється доставка вантажу з центрального офісу у м. Дніпро для зменшення розмірності задачі і відстаней - необхідно згрупувати адміністративні центри за територіальним принципом. Для реалізації цієї мети доцільно скористатися методом кластерного аналізу[13].

Була визначена змінна для зберігання масиву даних, куди були завантажені дані з файлу, заздалегідь занесені в таблицю Excel.

Для застосування процедури кластеризації в таблицю вихідних даних занесемо координати пунктів відправлення та призначення у таблицю та

сконвертуємо з формату DD – градуси, MM – хвилини, SS – секунди у формат DD.DDDD – десяткові дріб за формулою:

$$DDD = DD + \frac{MM}{60} + \frac{SS}{3600} \quad (2.3)$$

Таблиця 2.2

Вихідні дані для кластеризації

Населений пункт	Координати широти	Координати довготи
Кривий Ріг-2	47,66	33,72
Васильківський район	48,25	34,99
Верхньодніпровський район	48,65	34,33
Вільногірськ	48,48	34,02
Кам'янське -1 (Правий бер.)	48,50	34,66
Дніпро	48,66	35,03
Жовті Води	48,35	33,51
Кривий Ріг	47,89	33,38
Криничанський район	48,37	34,46
Магдалинівський район	48,92	34,92
Марганець	47,65	34,62
Межова	48,25	36,71
Нікополь	47,58	34,39
Новомосковськ-1	48,63	35,22
Покров	48,40	34,68
Павлоград	48,53	35,88
Перещепине	49,02	35,37
Першотравенськ	48,35	36,40
Петриківський район	48,73	34,61
Петропавлівський район	48,46	36,42
Токмаківка	48,23	34,07

Населений пункт	Координати широти	Координати довготи
П'ятихатський район	48,41	33,70
Синельникове	48,34	35,52
Солонянський район	48,21	34,88
Софіївський район	48,08	33,90
Тернівка	48,52	36,08
Царичанський район	48,95	34,48
Широківський район	47,69	33,27
Юр'ївський район	48,75	36,02

В програмному середовищі *Matlab 10* виконано кластерезацію на 2,3,4,5,6 кластерів (рис.2.3). Програма для *Matlab 10*, за допомогою якої були виконані розрахунки, має наступний вигляд (приклад розбиття на 2 кластери):

```
[idx, ctrs] = kmeans(data,2); // idx номер кластеру, ctrs- центр кластеру
>> plot(ctrs(:,1),ctrs(:,2),'kx',...
'MarkerSize',12,'LineWidth',2) // малюємо центри кластерів
plot(ctrs(:,1),ctrs(:,2),'ko',...
'MarkerSize',12,'LineWidth',2)
>> plot(data(idx==1,1),data(idx==1,2),'r.','MarkerSize',20) // малюємо 1-й
кластер
hold on
>> lot(data(idx==2,1),data(idx==2,2),'b.','MarkerSize',20) // малюємо 2-й
кластер
```

Отримані результати розбиття множини вхідних об'єктів на 2, 3, 4, 5 кластерів зображені на рис.2.4:

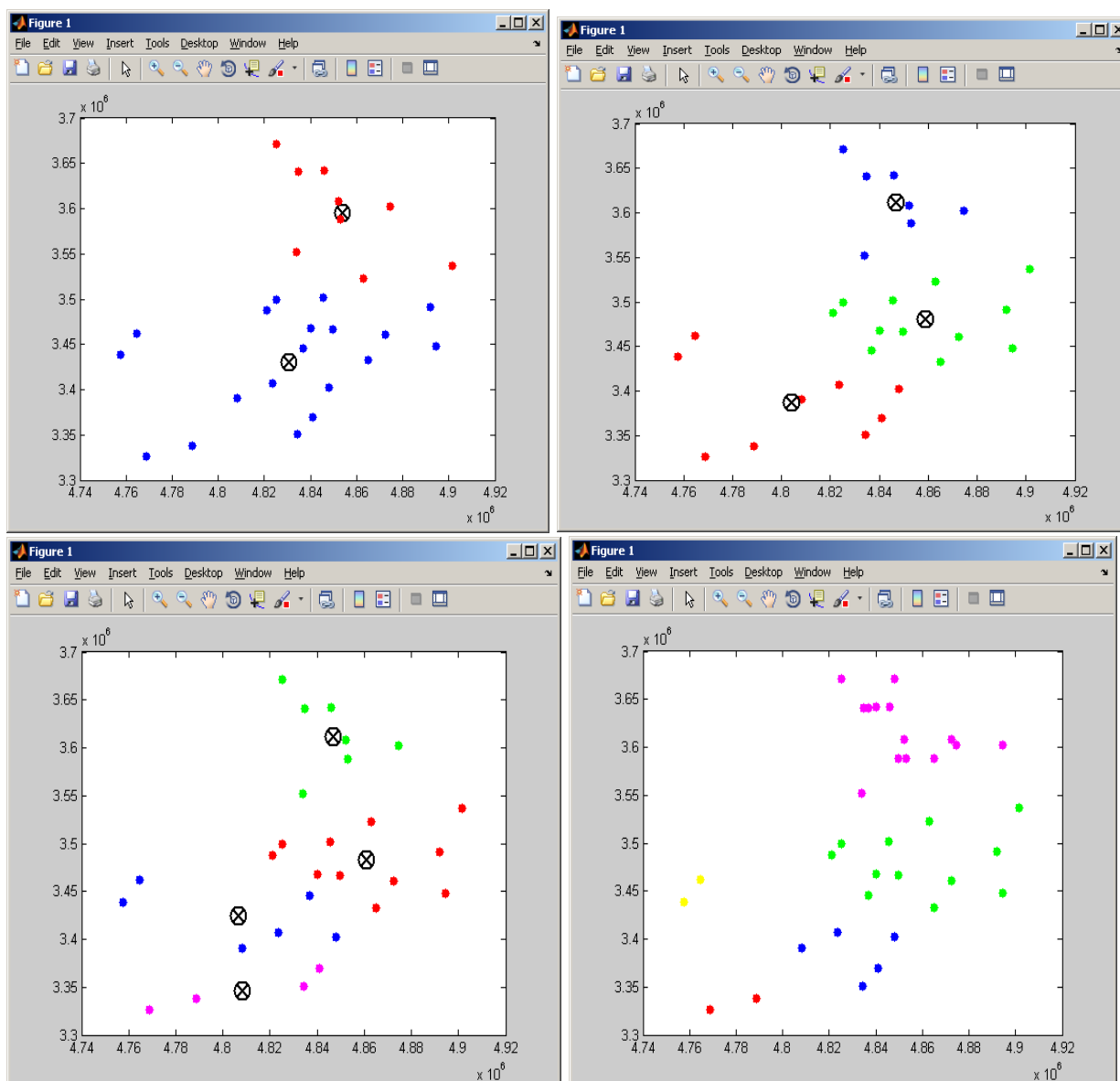


Рис.2.4 Розбиття на 2, 3, 4, 5 кластерів

Приналежність пунктів видачі до відповідного кластеру та результати кластеризації адміністративних районів представлені в табл. 2.3 та 2.4:

Таблиця 2.3

Приналежність пунктів видачі до відповідного кластеру

Адміністративні райони	При розбитті на			
	2 кластери	3 кластери	4 кластери	5 кластерів
Кривий Ріг-2	1	1	2	5
Васильківський район	2	2	4	3
Верхньодніпровський район	2	3	4	3
Вільногірськ	2	1	3	2
Кам'янське -1 (Правий бер.)	2	2	4	3
Дніпро	2	3	4	3
Жовті Води	2	1	3	2
Кривий Ріг	2	3	4	3
Криничанський район	2	3	4	3
Магдалинівський район	2	3	4	3
Марганець	2	1	1	4
Межова	1	2	2	5
Нікополь	2	1	1	4
Новомосковськ-1	1	3	4	3
Покров	2	1	4	3
Павлоград	1	2	2	5
Перещепине	1	3	4	3
Першотравенськ	1	2	2	5
Петриківський район	2	3	4	3
Петропавлівський район	1	2	2	5
Токмаківка	2	2	3	2
П'ятихатський район	2	1	3	2
Синельникове	1	2	2	5

Адміністративні райони	При розбитті на			
	2 кластери	3 кластери	4 кластери	5 кластерів
Солонянський район	2	3	4	3
Софіївський район	2	1	3	2
Тернівка	1	2	2	5
Царичанський район	2	3	4	3
Широківський район	2	1	3	1
Юр'ївський район	1	2	2	5

Результати кластеризації на 5 кластерів наведено на рис. 2.5

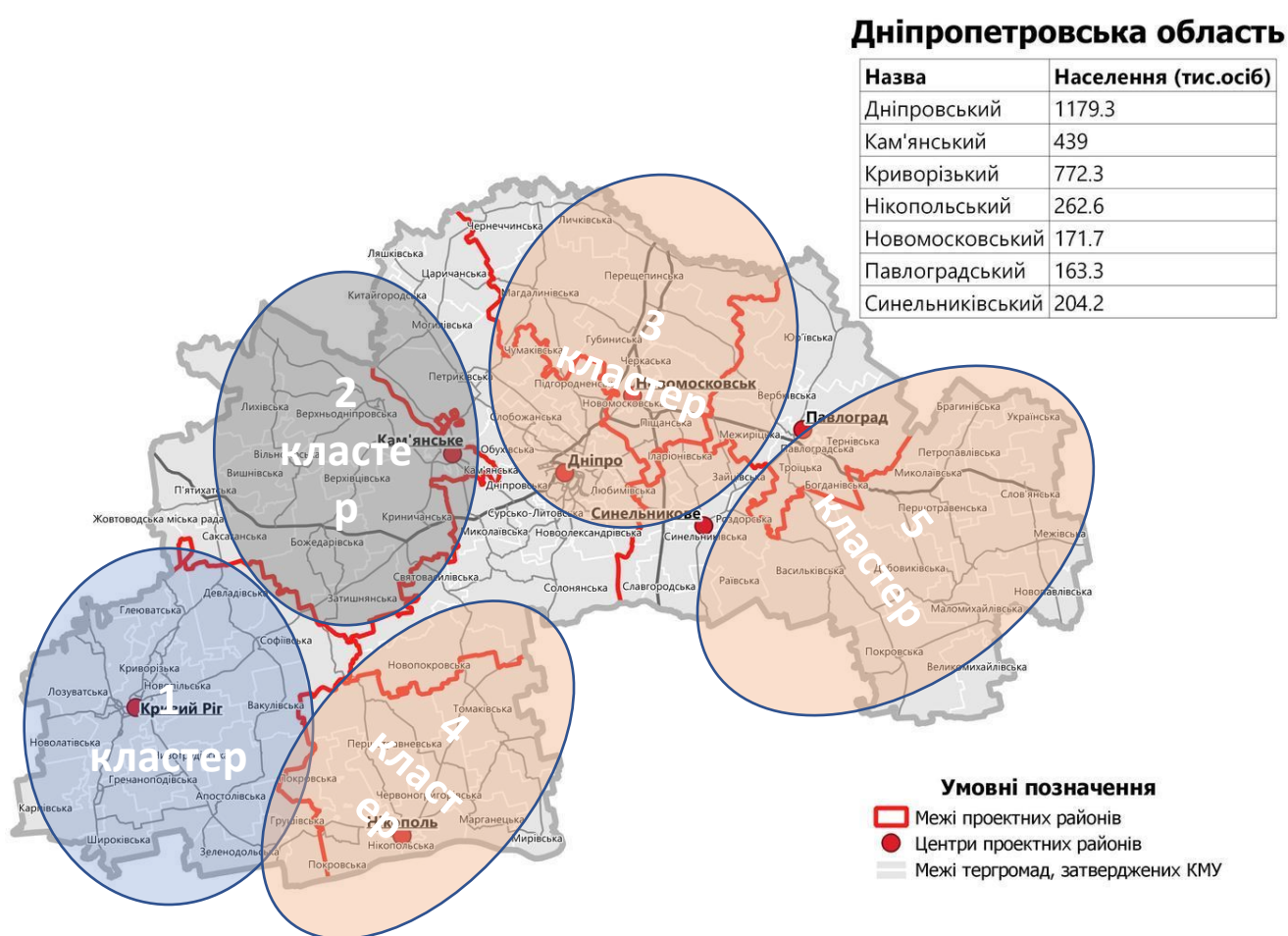


Рис.2.5 Розбиття пунктів видачі на 6 кластерів
Джерело: побудовано автором

Таблиця 2.4

Результати кластеризації пунктів видачі

1-й кластер	2-й кластер	3-й кластер	4-й кластер	5-й кластер
Дніпро	Дніпро	Дніпро	Дніпро	Дніпро
Кривий Ріг	Вільногірськ	Верхньодніпровський район	Покров	Межова
Широківський район	Жовті Води	Кам'янське -1 (Правий бер.)	Солонянський район	Павлоград
Кривий Ріг-2	П'ятихатський район	Магдалинівський район	Марганець	Першотравенськ
	Софіївський район	Новомосковськ-1	Нікополь	Петропавлівський район
	Криничанський район	Перещепино		Синельниково
		Петриківський район		Тернівка
		Царичанський район		Юріївка
				Токмаківка
				Васильківка

Джерело: розраховано автором

2.5 Розв'язання задачі комівояжера для побудованих кластерів.

Для розрахунку відстані для доставки вантажу до кожного з побудованих кластерів розв'яжемо задачу комівояжера.

Для розрахунку відстаней між об'єктами використано дані табл. 2.5

Таблиця 2.5

Відстані між населеними пунктами Дніпропетровської області

	Петропавл івський район	П'ятихат ський район	Синел ьнико во	Солонян ський район	Софіївс ький район	Тер нівк а	Царичан ський район	Широків ський район
Нікополь	196	152	149	95,1	84	220	185	108
Новомоско вськ-1	50	146	52,2	67,3	134	73	81	203
Покров	269	123	177	123	65,2	220	193	80
Павлоград	48,3	195	39	113	83	24	141	253
Перещепи но	94	191	93,2	112	179	117	80	247
Першотра венськ	49	274	88,2	161	232	49	190	302
Петриківс ький район	154	117	105	81,6	115	128	32,3	186
Петропавл івський район	0	302	84,5	84	102	24	113	15,8
П'ятихатсь кий район	302	0	161	108	48,5	210	146	102
Синельник ово	84,5	161	0	83,4	155	60	139	225

Солонянський район	84	108	83,4	0	102	133	113	16
Софіївський район	102	48,5	155	102	0	204	146	70,1
Тернівка	24	210	60	133	204	0	162	274
Царичанський район	113	146	139	113	146	162	0	210

Для розв'язку задачі комівояжора використано метод меж та гілок.

Розглянемо розв'язок задачі на прикладі 5^{го} кластеру:

Візьмемо як початковий довільний маршрут:

$X_0 = (1,2);(2,3);(3,4);(4,5);(5,6);(6,7);(7,8);(8,9);(9,10);(10,1)$

Тоді $F(X_0) = 75.2 + 49 + 49 + 84.5 + 60 + 33.2 + 75 + 44 + 62.5 + 200 = 732.4$ км

Для визначення нижньої межі множини скористаємося операцією редукції або приведення матриці по рядках, для чого необхідно в кожному рядку матриці D знайти мінімальний елемент.

$$d_i = \min(j) d_{ij}$$

i j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	d_i
1	M	75.2	124	121	50.1	107	87	97	162	200	50.1
2	75.2	M	49	48.3	39	24	48	46	88.7	76	24
3	124	49	M	49	88.2	49	43	53	41	63	41
4	121	48.3	49	M	84.5	24	31	56	44.1	80	24
5	50.1	39	88.2	84.5	M	60	53	52	121	83	39
6	107	24	49	24	60	M	33.2	60	74	85.5	24
7	87	48	43	31	53	33.2	M	75	71	30	30
8	97	46	53	56	52	60	75	M	44	38	38
9	162	88.7	41	44.1	121	74	71	44	M	62.5	41
10	200	76	63	80	83	85.5	30	38	62.5	M	30

Потім віднімаємо d_i з елементів розглянутого рядка. У зв'язку з цим у знову отриманої матриці в кожному рядку буде як мінімум один нуль.

ij	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	M	25.1	73.9	70.9	0	56.9	36.9	46.9	111.9	149.9
2	51.2	M	25	24.3	15	0	24	22	64.7	52
3	83	8	M	8	47.2	8	2	12	0	22
4	97	24.3	25	M	60.5	0	7	32	20.1	56
5	11.1	0	49.2	45.5	M	21	14	13	82	44
6	83	0	25	0	36	M	9.2	36	50	61.5
7	57	18	13	1	23	3.2	M	45	41	0
8	59	8	15	18	14	22	37	M	6	0
9	121	47.7	0	3.1	80	33	30	3	M	21.5
10	170	46	33	50	53	55.5	0	8	32.5	M

Таку ж операцію редукції проводимо за стовпцями, для чого в кожному стовпці знаходимо мінімальний елемент: $d_j = \min(i) d_{ij}$

ij	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	M	25.1	73.9	70.9	0	56.9	36.9	46.9	111.9	149.9
2	51.2	M	25	24.3	15	0	24	22	64.7	52
3	83	8	M	8	47.2	8	2	12	0	22
4	97	24.3	25	M	60.5	0	7	32	20.1	56
5	11.1	0	49.2	45.5	M	21	14	13	82	44
6	83	0	25	0	36	M	9.2	36	50	61.5
7	57	18	13	1	23	3.2	M	45	41	0
8	59	8	15	18	14	22	37	M	6	0
9	121	47.7	0	3.1	80	33	30	3	M	21.5
10	170	46	33	50	53	55.5	0	8	32.5	M
dj	11.1	0	0	0	0	0	0	3	0	0

Після вирахування мінімальних елементів отримуємо повністю редуцировану матрицю, де величини d_i і d_j називаються константами приведення.

i j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	M	25.1	73.9	70.9	0	56.9	36.9	43.9	111.9	149.9
2	40.1	M	25	24.3	15	0	24	19	64.7	52
3	71.9	8	M	8	47.2	8	2	9	0	22
4	85.9	24.3	25	M	60.5	0	7	29	20.1	56
5	0	0	49.2	45.5	M	21	14	10	82	44
6	71.9	0	25	0	36	M	9.2	33	50	61.5
7	45.9	18	13	1	23	3.2	M	42	41	0
8	47.9	8	15	18	14	22	37	M	6	0
9	109.9	47.7	0	3.1	80	33	30	0	M	21.5
10	158.9	46	33	50	53	55.5	0	5	32.5	M

Сума констант приведення визначає нижню межу H :

$$H = \sum d_i + \sum d_j$$

$$H = 50.1 + 24 + 41 + 24 + 39 + 24 + 30 + 38 + 41 + 30 + 11.1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 3 + 0 + 0 = 355.2$$

Елементи матриці d_{ij} відповідають відстані від пункту i до пункту j .

Кожен допустимий маршрут являє собою цикл, за яким комівояжер відвідує місто тільки один раз і повертається у вихідний місто.

Довжина маршруту визначається виразом:

$$F(Mk) = \sum d_{ij}$$

Причому кожен рядок і стовпець входять в маршрут тільки один раз з елементом d_{ij} .

Крок №1.

Визначаємо ребро розгалуження і розіб'ємо всю множину маршрутів щодо цього ребра на дві підмножини (i, j) і (i^*, j^*) .

Нижня межа гамільтонових циклів цього підмножини:

$$H(5^*, 1^*) = 355.2 + 40.1 = 395.3$$

Включення ребра (5,1) проводиться шляхом виключення всіх елементів п'ятого рядка і 1-го колонки, в якій елемент d_{51} замінюємо на М, для виключення утворення негамільтонова циклу.

В результаті отримуємо іншу скорочену матрицю (9 x 9), яка підлягає операції приведення.

Після операції приведення скорочена матриця буде мати вигляд:

i j	2	3	4	5	6	7	8	9	10	d_i
1	25.1	73.9	70.9	М	56.9	36.9	43.9	111.9	149.9	25.1
2	М	25	24.3	15	0	24	19	64.7	52	0
3	8	М	8	47.2	8	2	9	0	22	0
4	24.3	25	М	60.5	0	7	29	20.1	56	0
6	0	25	0	36	М	9.2	33	50	61.5	0
7	18	13	1	23	3.2	М	42	41	0	0
8	8	15	18	14	22	37	М	6	0	0
9	47.7	0	3.1	80	33	30	0	М	21.5	0
10	46	33	50	53	55.5	0	5	32.5	М	0
d_j	0	0	0	14	0	0	0	0	0	39.1

Операція редукції

i j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	М	25.1	73.9	70.9	0	56.9	36.9	43.9	111.9	149.9
2	0	М	25	24.3	15	0	24	19	64.7	52
3	31.8	8	М	8	47.2	8	2	9	0	22
4	45.8	24.3	25	М	60.5	0	7	29	20.1	56
5	М	0	49.2	45.5	М	21	14	10	82	44
6	31.8	0	25	0	36	М	9.2	33	50	61.5
7	5.8	18	13	1	23	3.2	М	42	41	0
8	7.8	8	15	18	14	22	37	М	6	0
9	69.8	47.7	0	3.1	80	33	30	0	М	21.5
10	118.8	46	33	50	53	55.5	0	5	32.5	М

Крок №1.

Визначаємо ребро розгалуження і розіб'ємо множину маршрутів щодо цього ребра на дві підмножини (i, j) і (i^*, j^*) .

З цією метою для всіх клітин матриці з нульовими елементами замінюємо черзі нулі на М (нескінченність) і визначаємо для них суму утворилися константприведення, вони наведені в дужках.

$i j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	d_i
1	М	25.1	73.9	70.9	0(39.1)	56.9	36.9	43.9	111.9	149.9	25.1
2	0(5.8)	М	25	24.3	15	0(0)	24	19	64.7	52	0
3	31.8	8	М	8	47.2	8	2	9	0(8)	22	2
4	45.8	24.3	25	М	60.5	0(7)	7	29	20.1	56	7
5	М	0(10)	49.2	45.5	М	21	14	10	82	44	10
6	31.8	0(0)	25	0(1)	36	М	9.2	33	50	61.5	0
7	5.8	18	13	1	23	3.2	М	42	41	0(1)	1
8	7.8	8	15	18	14	22	37	М	6	0(6)	6
9	69.8	47.7	0(13)	3.1	80	33	30	0(5)	М	21.5	0
10	118.8	46	33	50	53	55.5	0(7)	5	32.5	М	5
d_j	5.8	0	13	1	14	0	2	5	6	0	0

$d(1,5) = 25.1 + 14 = 39.1$; $d(2,1) = 0 + 5.8 = 5.8$; $d(2,6) = 0 + 0 = 0$; $d(3,9) = 2 + 6 = 8$; $d(4,6) = 7 + 0 = 7$; $d(5,2) = 10 + 0 = 10$; $d(6,2) = 0 + 0 = 0$; $d(6,4) = 0 + 1 = 1$; $d(7,10) = 1 + 0 = 1$; $d(8,10) = 6 + 0 = 6$; $d(9,3) = 0 + 13 = 13$; $d(9,8) = 0 + 5 = 5$; $d(10,7) = 5 + 2 = 7$;

Найбільша сума констант приведення дорівнює $(25.1 + 14) = 39.1$ для ребра $(1,5)$, отже, множина розбивається на дві підмножини $(1,5)$ і $(1^*,5^*)$.

Виняток ребра $(1,5)$ проводимо шляхом заміни елемента $d_{15} = 0$ на М, після чого здійснюємо чергове приведення матриці відстаней для утворившоїся підмножини $(1^*,5^*)$, в результаті отримаємо редуцировану матрицю.

i j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	d_i
1	M	25.1	73.9	70.9	M	56.9	36.9	43.9	111.9	149.9	25.1
2	0	M	25	24.3	15	0	24	19	64.7	52	0
3	31.8	8	M	8	47.2	8	2	9	0	22	0
4	45.8	24.3	25	M	60.5	0	7	29	20.1	56	0
5	M	0	49.2	45.5	M	21	14	10	82	44	0
6	31.8	0	25	0	36	M	9.2	33	50	61.5	0
7	5.8	18	13	1	23	3.2	M	42	41	0	0
8	7.8	8	15	18	14	22	37	M	6	0	0
9	69.8	47.7	0	3.1	80	33	30	0	M	21.5	0
10	118.8	46	33	50	53	55.5	0	5	32.5	M	0
d_j	0	0	0	0	14	0	0	0	0	0	39.1

Нижня межа гамільтонових циклів цієї підмножини:

$$H(1^*, 5^*) = 395.3 + 39.1 = 434.4$$

Включення ребра (1,5) проводиться шляхом виключення всіх елементів 1-го рядка і 5-го стовпця, в якій елемент d_{15} замінюємо на M, для виключення утворення негамільтонова циклу.

В результаті отримаємо іншу скорочену матрицю (8 x 8), яка підлягає операції приведення.

Після операції приведення скорочена матриця буде мати вигляд:

i j	1	2	3	4	6	7	8	9	10	d_i
2	0	M	25	24.3	0	24	19	64.7	52	0
3	31.8	8	M	8	8	2	9	0	22	0
4	45.8	24.3	25	M	0	7	29	20.1	56	0
5	M	0	49.2	45.5	21	14	10	82	44	0
6	31.8	0	25	0	M	9.2	33	50	61.5	0
7	5.8	18	13	1	3.2	M	42	41	0	0
8	7.8	8	15	18	22	37	M	6	0	0
9	69.8	47.7	0	3.1	33	30	0	M	21.5	0
10	118.8	46	33	50	55.5	0	5	32.5	M	0
d_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Сума констант приведення скороченої матриці:

$$\sum d_i + \sum d_j = 0$$

Нижня межа підмножини (1,5) дорівнює:

$$H(1,5) = 395.3 + 0 = 395.3 \leq 434.4$$

Включаємо підмножину (1,5) для подальшого вітвлення з $H = 395.3$.

Крок №2.

Визначаємо ребро розгалуження і розіб'ємо множину маршрутів щодо цього ребра на дві підмножини (i, j) і (i^*, j^*) .

З цією метою для всіх клітин матриці з нульовими елементами замінюємо черзі нулі на М (нескінченність) і визначаємо для них суму утворилися константприведення, вони наведені в дужках..

i j	1	2	3	4	6	7	8	9	10	d_i
2	0(5.8)	М	25	24.3	0(0)	24	19	64.7	52	0
3	31.8	8	М	8	8	2	9	0(8)	22	2
4	45.8	24.3	25	М	0(7)	7	29	20.1	56	7
5	М	0(10)	49.2	45.5	21	14	10	82	44	10
6	31.8	0(0)	25	0(1)	М	9.2	33	50	61.5	0
7	5.8	18	13	1	3.2	М	42	41	0(1)	1
8	7.8	8	15	18	22	37	М	6	0(6)	6
9	69.8	47.7	0(13)	3.1	33	30	0(5)	М	21.5	0
10	118.8	46	33	50	55.5	0(7)	5	32.5	М	5
d_j	5.8	0	13	1	0	2	5	6	0	0

$d(2,1) = 0 + 5.8 = 5.8$; $d(2,6) = 0 + 0 = 0$; $d(3,9) = 2 + 6 = 8$; $d(4,6) = 7 + 0 = 7$;
 $d(5,2) = 10 + 0 = 10$; $d(6,2) = 0 + 0 = 0$; $d(6,4) = 0 + 1 = 1$; $d(7,10) = 1 + 0 = 1$; $d(8,10)$
 $= 6 + 0 = 6$; $d(9,3) = 0 + 13 = 13$; $d(9,8) = 0 + 5 = 5$; $d(10,7) = 5 + 2 = 7$;

Найбільша сума констант приведення дорівнює $(0 + 13) = 13$ для ребра (9,3), отже, множину розбиваємо на дві підмножини (9,3) и $(9^*, 3^*)$.

Виняток ребра (9,3) проводимо шляхом заміни елемента $d_{93} = 0$ на М, після чого здійснюємо чергове приведення матриці відстаней для утворився підмножини $(9^*, 3^*)$, в результаті отримаємо редуцировану матрицю.

i j	1	2	3	4	6	7	8	9	10	d_i
2	0	М	25	24.3	0	24	19	64.7	52	0
3	31.8	8	М	8	8	2	9	0	22	0

4	45.8	24.3	25	M	0	7	29	20.1	56	0
5	M	0	49.2	45.5	21	14	10	82	44	0
6	31.8	0	25	0	M	9.2	33	50	61.5	0
7	5.8	18	13	1	3.2	M	42	41	0	0
8	7.8	8	15	18	22	37	M	6	0	0
9	69.8	47.7	M	3.1	33	30	0	M	21.5	0
10	118.8	46	33	50	55.5	0	5	32.5	M	0
d_j	0	0	13	0	0	0	0	0	0	13

Нижня межа гамільтонових циклів цієї підмножини:

$$H(9^*, 3^*) = 395.3 + 13 = 408.3$$

Включення ребра (1,2) проводиться шляхом виключення всіх елементів перших рядки і 2-го шпальти, в якій елемент d21 замінюємо на M, для виключення утворення негамільтонова циклу.

В результаті отримаємо іншу скорочену матриці (7 x 7), яка підлягає операції приведення.

Після операції приведення скорочена матриця буде мати вигляд::

i j	1	2	4	6	7	8	9	10	d_i
2	0	M	24.3	0	24	19	64.7	52	0
3	31.8	8	8	8	2	9	M	22	2
4	45.8	24.3	M	0	7	29	20.1	56	0
5	M	0	45.5	21	14	10	82	44	0
6	31.8	0	0	M	9.2	33	50	61.5	0
7	5.8	18	1	3.2	M	42	41	0	0
8	7.8	8	18	22	37	M	6	0	0
10	118.8	46	50	55.5	0	5	32.5	M	0
d_j	0	0	0	0	0	5	6	0	13

Сума констант приведення скороченої матриці:

$$\sum d_i + \sum d_j = 13$$

В результаті по дереву розгалужень Гамільтоном цикл утворюють ребра:
(1,5), (5,7), (7,10), (10,8), (8,9), (9,3), (3,4), (4,6), (6, 2), (2,1),

Довжина маршруту дорівнює $F(M_k) = 428.3$ км

Дніпро Синельниково Юріївка Токмаківка Васильківка Межова
Першотравенськ Петропавлівський район Тернівка Павлоград

Розрахунки для 5^{го} кластеру наведено в табл. 2.6, для інших кластерів Венгерським методом представлені в Додатку Д (1 кластер), Ж(3 кластери), З (4 кластери), І (5 кластерів)

Таблиця 2.6

Метод	№№ кластерів				
	1	2	3	4	5
Меж та гілок	381	228	334,4	298	428,3
Еволюційний алгоритм	381	308	334,4	298	452,3
Венгерський метод	370	264,2	294	194	416,2

З табл. 2.6 видно, що відстань менше за венгерським методом, але необхідний в задачі комівояжера єдиний обхід не досягається. А виходить деякий набір циклів, аж до n циклів довжини 1. Спроби звести задачу комівояжера до серії завдань, в яких штучно розмикаються цикли, відомі. Але складність алгоритму у гіршому випадку все та ж експонента, що і в методі гілок та меж, а практичні обчислювальні витрати зростають.

При порівнянні розрахованих відстаней трьома методами: меж та гілок, еволюційний алгоритм, венгерським методом, найменші відстані та замкнуті повні цикли отримано методом меж та гілок.

Висновки до розділу 2

В програмному середовищі *Matlab 10* виконано кластеризацію 29 пунктів доставки підприємства адміністративних районів Дніпропетровщини. Створено 6 кластерів методом *k*-середніх для доставки вантажу з розподільчого, що розташований у м. Дніпро. Розв'язана задача комівояжера методом меж та гілок. Для порівняння представлено розв'язок задачі комівояжера венгерським методом. Але було виявлено, що він не підходить, так як утворює замкнені цикли.

Розраховано маршрут, загальна довжина якого складає 1993,9 км. Довжина маршрутів, що використовуються підприємством - 2347 км. Тобто, при використанні схеми доставки вантажу запропонованої в роботі, можливо досягти скорочення транспортних витрат на 14,7%. В середньому транспортні витрати підприємства становлять 630 тис. грн. на рік на транспортування вантажу, то завдяки оптимізаційній задачі можливо скоротити витрати на 95 тис. грн. щомісячно, тим самим збільшився.

РОЗДІЛ 3. ПРОЕКТУВАННЯ ТА РОЗРОБКА ІНФОРМАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ

3.1. Загальна характеристика інформаційного забезпечення

Інтегрована автоматизована система управління (ІАСУ) може розглядатися як ієрархічно організований комплекс організаційних методів, технічних, програмних, алгоритмічних і інформаційних засобів, які мають модульну структуру і забезпечують наскрізне узгоджене управління матеріальними та інформаційними потоками об'єкта управління.

Сучасний етап розробки інформаційних систем в економіці країни характеризується створенням АС нового покоління, до яких належать експертні системи, системи підтримки прийняття рішень, інформаційно-пошукові системи, системи зі штучним інтелектом. Основою створення таких систем є децентралізація структури ІАСУ та організація розподільної обробки інформації.

Технічною передумовою створення таких систем є значне поширення персональних ЕОМ. Ці машини характеризуються низькою вартістю, невеликими габаритами, підвищеною надійністю, простотою в обслуговуванні та експлуатації, що дає змогу наблизити їх до місць виникнення та використання інформації, поділити їх за окремими сферами функціональної діяльності.

Організаційною передумовою виникнення таких систем стали процеси децентралізації управління, що відбуваються в країні.

Структурно вони реалізуються у вигляді мереж обчислювальних машин або мереж автоматизованих робочих місць [15].

3.2. Програмне забезпечення

Програмне забезпечення (ПЗ) являє собою сукупність програм, призначених для розв'язання завдань на комп'ютері. Програма – це впорядкований набір

команд. Програмне та апаратне забезпечення працюють взаємопов'язано і в неперервній взаємодії. Будь-який апаратний пристрій управляється програмно.

Програмне забезпечення можна поділити на три класи:

- системне
- прикладне
- інструментальне

Наведена класифікація є досить умовною. Інтеграція програмного забезпечення призвела до того, що практично будь-яка програма має риси кожного класу.

Системне ПЗ призначено для управління роботою комп'ютера, розподілу його ресурсів, підтримки діалогу з користувачами, надання їм допомоги в обслуговуванні комп'ютера, а також для часткової автоматизації розробки нових програм.

Системне ПЗ – це комплекс програм, багато з яких постачаються разом з комп'ютером та документацією до неї. Системне ПЗ можна розділити на три основні частини:

- операційні системи (ОС)
- системи програмування
- сервісні програми

Основними компонентами загальносистемного програмного забезпечення є операційні системи, які вирішують задачі взаємозв'язаного функціонування окремих компонентів.

Microsoft Excel є найбільш зручним засобом розробки інформаційних систем, тому варто розглянути його можливості.

Можливості електронних таблиць MS Excel

- Довідка і помічник для роботи з електронною таблицею.
- Зручність введення формул.
- Перегляд макета сторінки.
- Вибір типу даних у комірці.
- В електронних таблицях є засоби гіперпосилання.

- Відкриття з URL.
- Excel працює з документами HTML.
- Графічна обробка інформації.
- Інтеграція в пакети MS Office.
- Програмування в Excel.

Для даної інформаційної системи на комп'ютері повинна бути встановлена операційна система Windows XP[16] .

Розв'язання завдання по мінімізації транспортних витрат ТОВ “Делівері” виконувалося із застосуванням табличного процесора Excel.

3.3. Інструкція користувача

Вікно головного меню (рис. 3.1) містить:

- На вкладці «Головне меню» знаходяться кнопки для переходу між вкладками інформаційної системи;

- Кнопку «Аналіз активу», яка призначена для переходу до вікна, що містить інформацію про фінансовий аналіз активу балансу підприємства за 2016-2019 роки;

- Кнопку «Аналіз пасиву», яка призначена для переходу до вікна, що містить інформацію про фінансовий аналіз пасиву балансу підприємства за 2016-2019 роки;

- Кнопку «Аналіз доходів», яка призначена для переходу до вікна, що містить інформацію про фінансовий аналіз доходів підприємства за 2016-2019 роки;

- Кнопку «Кластеризація», яка призначена для переходу до вікна розбиття пунктів видачі на кластери.

- Кнопку «Задача комівояжера», яка призначена для перегляду розв'язку задачі комівояжера методом меж та гілок.

- Ви натискаєте кнопку, яка вам потрібна. Меню системи зображено на рис.3.1



Рис.3.1 Головне меню інформаційної системи .

Джерело: створено автором.

Далі користувач має наступні можливості:

1. При натисканні на кнопку «Аналіз активу» подивитися горизонтальний та вертикальний аналіз підприємства ТОВ «Делівері», та спостерігати на графіку як змінювалися витрати підприємства протягом 2016 - 2019 рр.

2. При натисканні на кнопку «5-кластерів» визначити, наскільки кластерів слід розбити адміністративні райони Дніпропетровської області.

3. Кожна сторінка має кнопку «Назад», щоб можна було повернутися до головного меню. Цей функціонал показано на прикладі кнопки «Про підприємство» (рис.3.2)

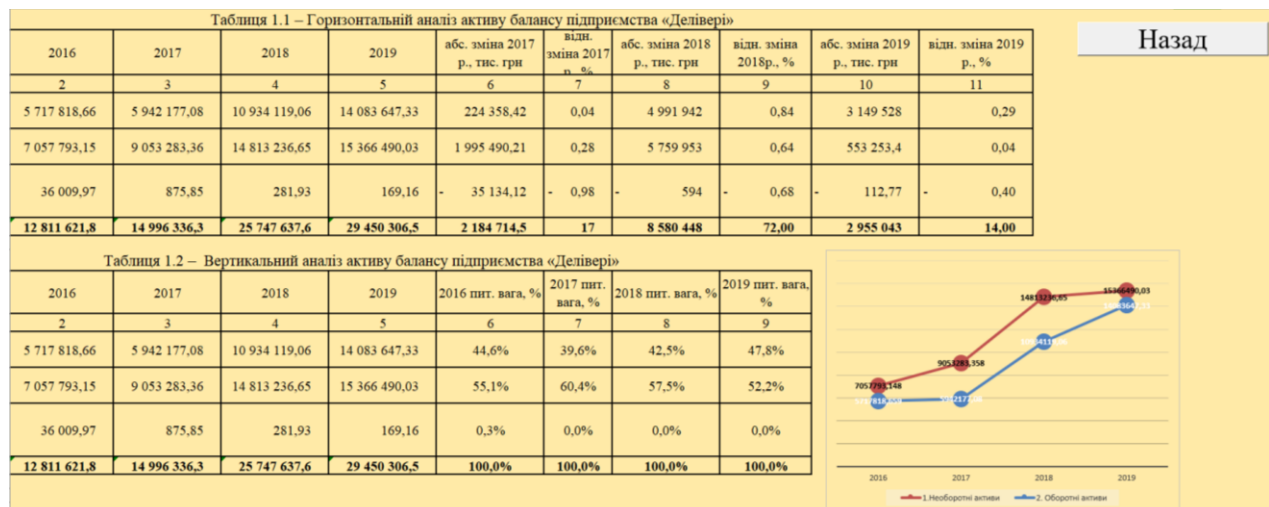


Рис.3.2 Кнопка «Назад» призначена для повернення в головне меню.

Джерело: створено автором.

Після того як Ви закінчили роботу в системі та бажаєте вийти з неї, необхідно натиснути кнопку “Вихід” на аркуші „ІС ” При цьому Вас необхідно дати відповідь на запитання "Зберегти зміни?". Якщо Ви впевнені в тому, що все зробили правильно, і Вам потрібно зберегти дану інформацію та розрахунки - потрібно натиснути "ТАК". В іншому випадку натискаєте "Ні".

Висновок до розділу 3

Для автоматизації підтримки прийняття управлінських рішень створена інформаційна система.

Для даної інформаційної системи на комп'ютері повинна бути встановлена операційна система Windows XP та MS Office 365 [16] .

Розв'язання завдання по мінімізації транспортних витрат ТОВ “Делівері” виконувалося із застосуванням табличного процесора *MS Excel* та *Matlab 10*.

ВИСНОВКИ

Тема підвищення фінансових показників підприємства є актуальною, оскільки в умовах, з одного боку, збільшення обсягу доставки вантажів до кінцевих споживачів, з іншого боку, при здорожчання паливно-мастильних ресурсів до 40% за останній рік транспортні витрати зросли на 35-40%, адже від витрат, які витрачає підприємство на паливно-мастильні ресурси, залежить фінансовий стан підприємства в цілому.

Мета дипломної роботи, що полягає в підвищенні прибутку на підприємстві за рахунок зменшення транспортних витрат підприємства на перевезення вантажу, досягнута шляхом розв'язання задача комівояжера, що дозволить зменшити транспортні витрати на 14,7%, що складе 95 тис.грн.

Проаналізовано фінансово-економічні показники діяльності підприємства ТОВ «Делівері». Виявлено, що інші операційні витрати мають тенденцію до зростання, в 2018 році вони становили – 8,8%, а в 2019 році – 11,6%, до яких належать витрати на збут, собівартість реалізованої продукції, транспортні витрати. З року в рік вони зростають (в середньому 2-7%), і зменшення їх є одним з способів знизити загальні витрати, що покращить фінансовий стан підприємства.

Для зменшення транспортних витрат шляхом зменшення відстані доставки вантажу 29 центрів видачі Дніпропетровської області було згруповано у 5 кластерів методом *k*-середніх (Евклідова відстань).

Для кожного кластера побудовано і розв'язано економіко – математичну задачу комівояжера для зменшення транспортних витрат підприємства методом меж та гілок, генетичним методом та венгерським методом.

Розраховано маршрут, загальна довжина якого складає 1993,9 км. Довжина маршрутів, що використовуються підприємством - 2347 км. Тобто, при використанні схеми доставки вантажу запропонованої в роботі, можливо досягти скорочення транспортних витрат на 14,7%. В середньому транспортні витрати підприємства на рік 630 тис. грн. на транспортування вантажу, то завдяки

оптимізаційної задачі можливо скоротити витрати на 95 тис. грн. щомісячно, тим самим покращивши фінансовий стан підприємства.

Для автоматизації розрахунків створено інформаційну систему для автоматизації розрахунків та підтримки прийняття управлінських рішень.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Models and algorithms for the Traveling Salesman Problem with Time-dependent Service times [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0377221719309580>
2. Сайт компанії «Делівері» Режим доступу: <https://www.delivery-auto.com/uk-ua/Home/IndexAuto>.
3. Roger Frock. Changing How the World Does Business: FedEx's Incredible Journey to Success // The Inside Story Hardcover. /Roger Frock. – October 15, 2016.
4. Сіменко І.В. Аналіз господарської діяльності: [Електронний ресурс] Режим доступу: http://pidruchniki.ws/1693080353656/ekonomika/analiz_finansovoyi_zvitnosti_pidpriyemstva
5. Борисова Л. А. Доходность транспортно-логистического бизнеса / Л. А. Борисова, А. И. Федоренко // Логистика сегодня. – 2014. – № 4. – С. 244-258.
6. Брагінський В. В. Розвиток транспортно-логістичної системи як форма реалізації транзитного потенціалу України [Електронний ресурс] / В. В. Брагінський. – Режим доступу : <http://www.academy.gov.ua/ej/ej14/txts/Braginskiy.pdf>.
7. Jennifer Baljko Come Together: Logistics and the Sharing Economy Jennifer Baljko January 2020 <https://www.inboundlogistics.com/cms/article/logistics-and-the-sharing-economy/>
8. J. V. Jones: Integrated Logistics Support Handbook, McGraw-Hill Logistics Series 2006
9. Shaun Rein. The End of Cheap China, Revised and Updated: Economic and Cultural Trends That Will Disrup4. Крикавський Є.В. Логістика. Для економістів: Підручник. - Львів: Видавництво Національного університету "Львівська політехніка", 2004. - 448 с.

10. <https://www.startus-insights.com/innovators-guide/logistics-industry-trends-10-innovations-that-will-impact-logistics-companies-in-2020-beyond/> the World. – 2014.
11. Котелевская Н.В. Экономическая диагностика предприятия: просто о сложном [Текст] /Н.В. Котелевская. – Харьков: Консульт, 2007. – Том 10. – 160 с.
12. Савицька Г.В. Аналіз господарської діяльності підприємства. Мн., 1999.
13. Гервіц Л.Я., Масталигіна Н.А. Фінансове планування та аналіз в бюджетних установах. // Гервіц Л.Я., Масталигіна Н.А. – М., 1974.
14. Потапов Ю.В. Использование пакета программ Statistica для анализа выборочных данных, Томск, ТГУ. 2003 г.45 с. /Потапов Ю.В. [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://www.twirpx.com/file/30208/>
15. Ананий В. Левитин Глава 3. Метод грубой силы: Задача коммивояжера // Алгоритмы: введение в разработку и анализ = Introduction to The Design and Analysis of Algorithms. — М.: «Вильямс», 2006. — С. 159-160. — [ISBN 0-201-74395-7](https://www.isbn-international.org/product/978-5-8370-0159-7)
16. Базилевич А.Л., Кутельмах Н.М. дослідження ефективності існуючих алгоритмів для розв'язання задачі комівояжера : [Електронний ресурс] –режим доступу - http://vlp.com.ua/files/special/34_0.pdf ст 236 -242
17. Пістунов І.М., Антонюк О.П., Турчанінова І.Ю. Кластерний аналіз в економіці Дніпропетровськ: Національний гірничий університет, 2008г. – 84с.
18. Воронин А.В. Использование кластерного анализа для выбора локальных стратегий: [Электронный ресурс]: Проблемы и перспективы управления экономикой и маркетингом в организации, 2001. – №1. Режим доступа : <http://perspectives.utmn.ru/No1/text02.shtml>
19. Мудров В.И. Задача о коммивояжере./ Мудров В.И. – М.: «Знание», 1999. – С. 62.
20. Пістунов М., Мінакова О.П. Інформаційні системи в економіці та державному управлінні: Навч. Посібник. // М. Пістунов, О.П. Мінакова. – Дніпропетровськ: Національний гірничий університет, 2004.-222 с.

21. Ситник В.Ф. та ін. Основи інформаційних систем: Навч. посібник. – Вид. 2-ге, перероб. і доп./ В.Ф. Ситнік, Т.А. Писаревська та ін.; За ред. В.Ф.Ситника.-К.: КНЕУ, 2001. – 420 с.

22. Варення Г.А. Аналіз і профілактика виробничого травматизму в поштовому зв'язку / Г.А. Варення. - К.: Основа. - 2001. - 464 с.

23. Paul Myerson Lean Supply Chain and Logistics Management/ Paul Myerson. 2017.- 270.

ДОДАТКИ

Розв'язок задачі комівояжера методом меж та гілок для 2 кластеру

Завдання комівояжера.

Візьмемо як довільного маршруту:

$$X_0 = (1,2); (2,3); (3,4); (4,5); (5,6); (6,1)$$

$$\text{Тоді } F(X_0) = 106 + 25 + 29 + 123 + 126 + 164 = 573$$

Для визначення ніжньої Межі безлічі скорістаємося операцією редукції або приведення матриці по рядках, для чого необхідно в шкiрному рядку матриці D найти мінімальній елемент. $d_i = \min(j) d_{ij}$

$$d_i = \min(j) d_{ij}$$

i j	1	2	3	4	5	6	d_i
1	M	106	122	149	43	164	43
2	106	M	25	54	91	82	25
3	122	25	M	29	95.1	57	25
4	149	54	29	M	123	28	28
5	43	91	95.1	123	M	126	43
6	164	82	57	28	126	M	28

Потім віднімаємо d_i з елементів розглянутої рядка. У зв'язку у отриманій матриці в кожному рядку буде як мінімум один нуль.

i j	1	2	3	4	5	6
1	M	63	79	106	0	121
2	81	M	0	29	66	57
3	97	0	M	4	70.1	32
4	121	26	1	M	95	0
5	0	48	52.1	80	M	83
6	136	54	29	0	98	M

Таку ж операцію редукції проводимо за стовпцями, для чого в кожному стовпці знаходимо мінімальній елемент:

$$d_j = \min(i) d_{ij}$$

i j	1	2	3	4	5	6
1	M	63	79	106	0	121
2	81	M	0	29	66	57
3	97	0	M	4	70.1	32
4	121	26	1	M	95	0
5	0	48	52.1	80	M	83

6	136	54	29	0	98	М
d_j	0	0	0	0	0	0

Після вирахування мінімальних елементів отримуємо повністю редуцировану матрицю, де величини d_i і d_j називаються **константами приведення**.

i j	1	2	3	4	5	6
1	М	63	79	106	0	121
2	81	М	0	29	66	57
3	97	0	М	4	70.1	32
4	121	26	1	М	95	0
5	0	48	52.1	80	М	83
6	136	54	29	0	98	М

Сума констант приведення визначає нижню межу H :

$$H = \sum d_i + \sum d_j$$

$$H = 43+25+25+28+43+28+0+0+0+0+0+0 = 192$$

Елементи матриці d_{ij} відповідають відстані від пункту i до пункту j .

Оскільки в матриці n міст, то D є матрицею $n \times n$ з невід'ємними елементами $d_{ij} \geq 0$

Кожен допустимий маршрут являє собою цикл, за яким комівояжер відвідує місто тільки один раз і повертається у вихідний місто.

Довжина маршруту визначається виразом:

$$F(M_k) = \sum d_{ij}$$

Причому кожен рядок і стовпець входять в маршрут тільки один раз з елементом d_{ij} .

Крок №1.

Визначаємо ребро розгалуження і розіб'ємо всі безліч маршрутів щодо цього ребра на два підмножини (i, j) і (i^*, j^*) .

З цією метою для всіх клітин матриці з нульовими елементами замінюємо черзі нулі на М (нескінченність) і визначаємо для них суму утворилися констант приведення, вони наведені в дужках.

i j	1	2	3	4	5	6	d_i
1	М	63	79	106	0(129)	121	63
2	81	М	0(30)	29	66	57	29
3	97	0(30)	М	4	70.1	32	4
4	121	26	1	М	95	0(33)	1
5	0(129)	48	52.1	80	М	83	48
6	136	54	29	0(33)	98	М	29
d_j	81	26	1	4	66	32	0

$$d(1,5) = 63 + 66 = 129; d(2,3) = 29 + 1 = 30; d(3,2) = 4 + 26 = 30; d(4,6) = 1 + 32 = 33; d(5,1) = 48 + 81 = 129; d(6,4) = 29 + 4 = 33;$$

Найбільша сума констант приведення дорівнює $(63 + 66) = 129$ для ребра $(1,5)$, отже, безліч розбивається на дві підмножини $(1,5)$ і $(1^*, 5^*)$.

Виняток ребра $(1,5)$ проводимо шляхом заміни елемента $d_{15} = 0$ на M , після чого здійснюємо чергове приведення матриці відстаней для утворився підмножини $(1^*, 5^*)$, в результаті отримуємо редуцировану матрицю.

i j	1	2	3	4	5	6	d_i
1	M	63	79	106	M	121	63
2	81	M	0	29	66	57	0
3	97	0	M	4	70.1	32	0
4	121	26	1	M	95	0	0
5	0	48	52.1	80	M	83	0
6	136	54	29	0	98	M	0
d_j	0	0	0	0	66	0	129

Нижня межа гамільтонових циклів цієї підмножини:

$$H(1^*, 5^*) = 192 + 129 = 321$$

Включення ребра $(1,5)$ проводиться шляхом виключення всіх елементів перших рядки і 5-го шпальти, в якій елемент d_{51} замінюємо на M , для виключення утворення негамільтонова циклу.

В результаті отримуємо іншу скорочену матрицю (5×5) , яка підлягає операції приведення.

Після операції приведення скорочена матриця буде мати вигляд:

i j	1	2	3	4	6	d_i
2	81	M	0	29	57	0
3	97	0	M	4	32	0
4	121	26	1	M	0	0
5	M	48	52.1	80	83	48
6	136	54	29	0	M	0
d_j	81	0	0	0	0	129

Сума констант приведення скороченою матриці:

$$\sum d_i + \sum d_j = 129$$

Нижня межа підмножини $(1,5)$ дорівнює:

$$H(1,5) = 192 + 129 = 321 \leq 321$$

Оскільки нижня межа цієї підмножини (1,5) менше, ніж підмножини (1*, 5*), то ребро (1,5) включаємо в маршрут з новою границею $H = 321$

Крок №2.

Визначаємо ребро розгалуження і розіб'ємо всю множину маршрутів щодо цього ребра на два підмножини (i, j) і (i *, j *).

З цією метою для всіх клітин матриці з нульовими елементами замінюємо черзі нулі на М (нескінченність) і визначаємо для них суму утворилися констант приведення, вони наведені в дужках.

i j	1	2	3	4	6	d _i
2	0(16)	М	0(1)	29	57	0
3	16	0(4)	М	4	32	4
4	40	26	1	М	0(33)	1
5	М	0(4.1)	4.1	32	35	4.1
6	55	54	29	0(33)	М	29
d _j	16	0	1	4	32	0

$$d(2,1) = 0 + 16 = 16; d(2,3) = 0 + 1 = 1; d(3,2) = 4 + 0 = 4; d(4,6) = 1 + 32 = 33;$$

$$d(5,2) = 4.1 + 0 = 4.1; d(6,4) = 29 + 4 = 33;$$

Найбільша сума констант приведення дорівнює $(1 + 32) = 33$ для ребра (4,6), отже, безліч розбивається на дві підмножини (4,6) і (4 *, 6 *).

Виняток ребра (4,6) проводимо шляхом заміни елемента $d_{46} = 0$ на М, після чого здійснюємо чергове приведення матриці відстаней для утворився підмножини (4 *, 6 *), в результаті отримуємо редуцировану матрицю.

i j	1	2	3	4	6	d _i
2	0	М	0	29	57	0
3	16	0	М	4	32	0
4	40	26	1	М	М	1
5	М	0	4.1	32	35	0
6	55	54	29	0	М	0
d _j	0	0	0	0	32	33

Нижня межа гамільтонових циклів цієї підмножини:

$$H(4 *, 6 *) = 321 + 33 = 354$$

Включення ребра (4,6) проводиться шляхом виключення всіх елементів четвертого рядка і 6-го шпальти, в якій елемент d_{64} замінюємо на M , для виключення утворення негамільтонова циклу.

В результаті отримаємо інші скорочення матрицю (4x4), яка підлягає операції приведення.

Після операції приведення скорочена матриця буде мати вигляд:

i j	1	2	3	4	d_i
2	0	M	0	29	0
3	16	0	M	4	0
5	M	0	4.1	32	0
6	55	54	29	M	29
d_j	0	0	0	4	33

Сума констант приведення скороченою матриці:

$$\sum d_i + \sum d_j = 33$$

Нижня межа підмножини (4,6) дорівнює:

$$H(4,6) = 321 + 33 = 354 \leq 354$$

Оскільки нижня межа цієї підмножини (4,6) менше, ніж підмножини $(4^*, 6^*)$, то ребро (4,6) включаємо в маршрут з новою границею $H = 354$

Крок №3.

Визначаємо ребро розгалуження і розіб'ємо всю множинумаршрутів щодо цього ребра на два підмножини (i, j) і (i^*, j^*) .

З цією метою для всіх клітин матриці з нульовими елементами замінюємо по черзі нулі на M (нескінченність) і визначаємо для них суму утворилися констант приведення, вони наведені в дужках.

i j	1	2	3	4	d_i
2	0(16)	M	0(0)	25	0
3	16	0(0)	M	0(25)	0
5	M	0(4.1)	4.1	28	4.1
6	26	25	0(25)	M	25
d_j	16	0	0	25	0

$$d(2,1) = 0 + 16 = 16; d(2,3) = 0 + 0 = 0; d(3,2) = 0 + 0 = 0; d(3,4) = 0 +$$

$$+25 = 25; d(5,2) = 4.1 + 0 = 4.1; d(6,3) = 25 + 0 = 25;$$

Найбільша сума констант приведення дорівнює $(0 + 25) = 25$ для ребра (3,4), отже, безліч розбивається на дві підмножини $(3,4)$ і $(3^*, 4^*)$.

Виняток ребра (3,4) проводимо шляхом заміни елемента $d_{34} = 0$ на M , після чого здійснюємо чергове приведення матриці відстаней для утворився підмножини $(3^*, 4^*)$, в результаті отримаємо редуцировану матрицю.

i j	1	2	3	4	d _i
2	0	M	0	25	0
3	16	0	M	M	0
5	M	0	4.1	28	0
6	26	25	0	M	0
d _j	0	0	0	25	25

Нижня межа гамільтонових циклів цієї підмножини:

$$H(3^*, 4^*) = 354 + 25 = 379$$

Включення ребра (3,4) проводиться шляхом виключення всіх елементів 3-го рядка і 4-го стовпця, в якій елемент d₄₃ замінюємо на M, для виключення утворення негамільтонова циклу.

В результаті отримуємо іншу скорочену матрицю (3 x 3), яка підлягає операції приведення.

Після операції приведення скорочена матриця буде мати вигляд:

i j	1	2	3	d _i
2	0	M	0	0
5	M	0	4.1	0
6	26	25	0	0
d _j	0	0	0	0

Сума констант приведення скороченою матриці:

$$\sum d_i + \sum d_j = 0$$

Нижня межа підмножини (3,4) дорівнює:

$$H(3,4) = 354 + 0 = 354 \leq 379$$

Щоб виключити підцикли, заборонимо такі переходи: (6,3),

Оскільки нижня межа цієї підмножини (3,4) менше, ніж підмножини (3^{*}, 4^{*}), то ребро (3,4) включаємо в маршрут з новою границею $H = 354$

Крок №4.

Визначаємо ребро розгалуження і розіб'ємо всю множинумаршрутів щодо цього ребра на два підмножини (i, j) і (i^{*}, j^{*}).

З цією метою для всіх клітин матриці з нульовими елементами замінюємо черзі нулі на M (нескінченність) і визначаємо для них суму утворилися констант приведення, вони наведені в дужках.

i j	1	2	3	d_i
2	0(1)	M	0(4.1)	0
5	M	0(4.1)	4.1	4.1
6	1	0(1)	M	1
d_j	1	0	4.1	0

$$d(2,1) = 0 + 1 = 1; d(2,3) = 0 + 4.1 = 4.1; d(5,2) = 4.1 + 0 = 4.1; d(6,2) = 1 + 0 = 1;$$

Найбільша сума констант приведення дорівнює $(0 + 4.1) = 4.1$ для ребра (2,3), отже, безліч розбивається на дві підмножини (2,3) і (2 *, 3 *).

Виняток ребра (2,3) проводимо шляхом заміни елемента $d_{23} = 0$ на M , після чого здійснюємо чергове приведення матриці відстаней для утворився підмножини (2 *, 3 *), в результаті отримаємо редуцировану матрицю.

i j	1	2	3	d_i
2	0	M	M	0
5	M	0	4.1	0
6	1	0	M	0
d_j	0	0	4.1	4.1

Нижня межа гамільтонових циклів цієї підмножини:

$$H(2 *, 3 *) = 354 + 4.1 = 358.1$$

Включення ребра (2,3) проводиться шляхом виключення всіх елементів другого рядка і 3-го стовпця, в якій елемент d_{32} замінюємо на M , для виключення утворення негамільтонова циклу.

В результаті отримаємо іншу скорочену матриці (2 x 2), яка підлягає операції приведення.

Після операції приведення скорочена матриця буде мати вигляд:

i j	1	2	d_i
5	M	0	0
6	1	0	0
d_j	1	0	1

Сума констант приведення скороченою матриці:

$$\sum d_i + \sum d_j = 1$$

Нижня межа підмножини (2,3) дорівнює:

$$H(2,3) = 354 + 1 = 355 \leq 358.1$$

Оскільки нижня межа цієї підмножини (2,3) менше, ніж підмножини

(2 *, 3 *), то ребро (2,3) включаємо в маршрут з новою границею

$$H = 355$$

Відповідно до цієї матрицею включаємо в гамільтонів маршрут ребра (5,2) і (6,1).

В результаті по дереву розгалужень гамільтонів цикл утворюють ребра:

(1,5), (5,2), (2,3), (3,4), (4,6), (6,1),

Довжина маршруту дорівнює $F(M_k) = 380$

Розв'язок задачі комівояжера методом меж та гілок для 4 кластеру

Завдання комівояжера.

Візьмемо як довільного маршруту:

$$X_0 = (1,2); (2,3); (3,4); (4,5); (5,6); (6,7); (7,8); (8,9); (9,1)$$

$$\text{Тоді } F(X_0) = 162 + 88.7 + 49 + 49 + 83 + 60 + 54 + 76 + 200 = 821.7$$

Для визначення нижньої межі безлічі скористаємося операцією редукції або приведення матриці по рядках, для чого необхідно в кожному рядку матриці D знайти мінімальний елемент.

$$d_i = \min(j) d_{ij}$$

i j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d_i
1	M	162	82	131	121	50.1	107	150	200	50.1
2	162	M	88.7	41	44.1	121	74	80	62.5	41
3	82	88.7	M	49	48.3	39	24	37	76	24
4	131	41	49	M	49	88.2	49	56	63	41
5	121	44.1	48.3	49	M	83	85.5	89	80	44.1
6	50.1	121	39	88.2	83	M	60	71	83	39
7	107	74	24	49	85.5	60	M	54	85.5	24
8	150	80	37	56	89	71	54	M	76	37
9	200	62.5	76	63	80	83	85.5	76	M	62.5

Потім віднімаємо d_i з елементів розглянутої рядка. У зв'язку з цим у знову отриманої матриці в кожному рядку буде як мінімум один нуль.

i j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	M	111.9	31.9	80.9	70.9	0	56.9	99.9	149.9
2	121	M	47.7	0	3.1	80	33	39	21.5
3	58	64.7	M	25	24.3	15	0	13	52
4	90	0	8	M	8	47.2	8	15	22
5	76.9	0	4.2	4.9	M	38.9	41.4	44.9	35.9
6	11.1	82	0	49.2	44	M	21	32	44
7	83	50	0	25	61.5	36	M	30	61.5
8	113	43	0	19	52	34	17	M	39
9	137.5	0	13.5	0.5	17.5	20.5	23	13.5	M

Таку ж операцію редукції проводимо за стовпцями, для чого в кожному стовпці знаходимо мінімальний елемент:

$$d_j = \min(i) d_{ij}$$

i j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	M	111.9	31.9	80.9	70.9	0	56.9	99.9	149.9
2	121	M	47.7	0	3.1	80	33	39	21.5
3	58	64.7	M	25	24.3	15	0	13	52
4	90	0	8	M	8	47.2	8	15	22
5	76.9	0	4.2	4.9	M	38.9	41.4	44.9	35.9
6	11.1	82	0	49.2	44	M	21	32	44
7	83	50	0	25	61.5	36	M	30	61.5
8	113	43	0	19	52	34	17	M	39
9	137.5	0	13.5	0.5	17.5	20.5	23	13.5	M
d _j	11.1	0	0	0	3.1	0	0	13	21.5

Після вирахування мінімальних елементів отримуємо повністю редуцировану матрицю, де величини d_i і d_j називаються **константами приведення**.

i j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	M	111.9	31.9	80.9	67.8	0	56.9	86.9	128.4
2	109.9	M	47.7	0	0	80	33	26	0
3	46.9	64.7	M	25	21.2	15	0	0	30.5
4	78.9	0	8	M	4.9	47.2	8	2	0.5
5	65.8	0	4.2	4.9	M	38.9	41.4	31.9	14.4
6	0	82	0	49.2	40.9	M	21	19	22.5
7	71.9	50	0	25	58.4	36	M	17	40
8	101.9	43	0	19	48.9	34	17	M	17.5
9	126.4	0	13.5	0.5	14.4	20.5	23	0.5	M

Сума констант приведення визначає нижню межу H :

$$H = \sum d_i + \sum d_j$$

$$H = 50.1 + 41 + 24 + 41 + 44.1 + 39 + 24 + 37 + 62.5 + 11.1 + 0 + 0 + 0 + 3.1 + 0 + 0 + 13 + 21.5 = 411.4$$

Елементи матриці d_{ij} відповідають відстані від пункту i до пункту j .

Оскільки в матриці n міст, то D є матрицею $n \times n$ з невід'ємними елементами $d_{ij} \geq 0$

Кожен допустимий маршрут являє собою цикл, за яким комівояжер відвідує місто тільки один раз і повертається у вихідний місто.

Довжина маршруту визначається виразом:

$$F(M_k) = \sum d_{ij}$$

Причому кожен рядок і стовпець входять в маршрут тільки один раз з елементом d_{ij} .

Крок №1.

Визначаємо ребро розгалуження і розіб'ємо всю множинумаршрутів щодо цього ребра на два підмножини (i, j) і (i^*, j^*) .

З цією метою для всіх клітин матриці з нульовими елементами замінюємо черзі нулі на M (нескінченність) і визначаємо для них суму утворилися констант приведення, вони наведені в дужках.

$i \ j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d_i
1	M	111.9	31.9	80.9	67.8	0(46.9)	56.9	86.9	128.4	31.9
2	109.9	M	47.7	0(0.5)	0(4.9)	80	33	26	0(0.5)	0
3	46.9	64.7	M	25	21.2	15	0(8)	0(0.5)	30.5	0
4	78.9	0(0.5)	8	M	4.9	47.2	8	2	0.5	0.5
5	65.8	0(4.2)	4.2	4.9	M	38.9	41.4	31.9	14.4	4.2
6	0(46.9)	82	0(0)	49.2	40.9	M	21	19	22.5	0
7	71.9	50	0(17)	25	58.4	36	M	17	40	17
8	101.9	43	0(17)	19	48.9	34	17	M	17.5	17
9	126.4	0(0.5)	13.5	0.5	14.4	20.5	23	0.5	M	0.5
d_j	46.9	0	0	0.5	4.9	15	8	0.5	0.5	0

$d(1,6) = 31.9 + 15 = 46.9$; $d(2,4) = 0 + 0.5 = 0.5$; $d(2,5) = 0 + 4.9 = 4.9$; $d(2,9) = 0 + 0.5 = 0.5$; $d(3,7) = 0 + 8 = 8$; $d(3,8) = 0 + 0.5 = 0.5$; $d(4,2) = 0.5 + 0 = 0.5$; $d(5,2) = 4.2 + 0 = 4.2$; $d(6,1) = 0 + 46.9 = 46.9$; $d(6,3) = 0 + 0 = 0$; $d(7,3) = 17 + 0 = 17$; $d(8,3) = 17 + 0 = 17$; $d(9,2) = 0.5 + 0 = 0.5$;

Найбільша сума констант приведення дорівнює $(31.9 + 15) = 46.9$ для ребра $(1,6)$, отже, безліч розбивається на дві підмножини $(1,6)$ і $(1^*, 6^*)$.

Виняток ребра $(1,6)$ проводимо шляхом заміни елемента $d_{16} = 0$ на M , після чого здійснюємо чергове приведення матриці відстаней для утворився підмножини $(1^*, 6^*)$, в результаті отримуємо редуцировану матрицю.

i j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d_i
1	M	111.9	31.9	80.9	67.8	M	56.9	86.9	128.4	31.9
2	109.9	M	47.7	0	0	80	33	26	0	0
3	46.9	64.7	M	25	21.2	15	0	0	30.5	0
4	78.9	0	8	M	4.9	47.2	8	2	0.5	0
5	65.8	0	4.2	4.9	M	38.9	41.4	31.9	14.4	0
6	0	82	0	49.2	40.9	M	21	19	22.5	0
7	71.9	50	0	25	58.4	36	M	17	40	0
8	101.9	43	0	19	48.9	34	17	M	17.5	0
9	126.4	0	13.5	0.5	14.4	20.5	23	0.5	M	0
d_j	0	0	0	0	0	15	0	0	0	46.9

Нижня межа гамільтонових циклів цієї підмножини:

$$H(1^*, 6^*) = 411.4 + 46.9 = 458.3$$

Включення ребра (1,6) проводиться шляхом виключення всіх елементів перших рядки і 6-го стовпця, в якій елемент d_{61} замінюємо на M, для виключення утворення негамільтонова циклу.

В результаті отримаємо іншу скорочену матрицю (8 x 8), яка підлягає операції приведення.

Після операції приведення скорочена матриця буде мати вигляд:

i j	1	2	3	4	5	7	8	9	d_i
2	109.9	M	47.7	0	0	33	26	0	0
3	46.9	64.7	M	25	21.2	0	0	30.5	0
4	78.9	0	8	M	4.9	8	2	0.5	0
5	65.8	0	4.2	4.9	M	41.4	31.9	14.4	0
6	M	82	0	49.2	40.9	21	19	22.5	0
7	71.9	50	0	25	58.4	M	17	40	0
8	101.9	43	0	19	48.9	17	M	17.5	0
9	126.4	0	13.5	0.5	14.4	23	0.5	M	0
d_j	46.9	0	0	0	0	0	0	0	46.9

Сума констант приведення скороченою матриці:

$$\Sigma d_i + \Sigma d_j = 46.9$$

Нижня межа підмножини (1,6) дорівнює:

$$H(1,6) = 411.4 + 46.9 = 458.3 \leq 458.3$$

Оскільки нижня межа цієї підмножини (1,6) менше, ніж підмножини

(1 *, 6 *), то ребро (1,6) включаємо в маршрут з новою границею

$$H = 458.3$$

Крок №2.

Визначаємо ребро розгалуження і розіб'ємо всю множинумаршрутів щодо цього ребра на два підмножини (i, j) і (i *, j *).

З цією метою для всіх клітин матриці з нульовими елементами замінюємо черзі нулі на М (нескінченність) і визначаємо для них суму утворилися констант приведення, вони наведені в дужках.

i j	1	2	3	4	5	7	8	9	d _i
2	63	М	47.7	0(0.5)	0(4.9)	33	26	0(0.5)	0
3	0(18.9)	64.7	М	25	21.2	0(8)	0(0.5)	30.5	0
4	32	0(0.5)	8	М	4.9	8	2	0.5	0.5
5	18.9	0(4.2)	4.2	4.9	М	41.4	31.9	14.4	4.2
6	М	82	0(19)	49.2	40.9	21	19	22.5	19
7	25	50	0(17)	25	58.4	М	17	40	17
8	55	43	0(17)	19	48.9	17	М	17.5	17
9	79.5	0(0.5)	13.5	0.5	14.4	23	0.5	М	0.5
d _j	18.9	0	0	0.5	4.9	8	0.5	0.5	0

$d(2,4) = 0 + 0.5 = 0.5$; $d(2,5) = 0 + 4.9 = 4.9$; $d(2,9) = 0 + 0.5 = 0.5$; $d(3,1) = 0 + 18.9 = 18.9$; $d(3,7) = 0 + 8 = 8$; $d(3,8) = 0 + 0.5 = 0.5$; $d(4,2) = 0.5 + 0 = 0.5$; $d(5,2) = 4.2 + 0 = 4.2$; $d(6,3) = 19 + 0 = 19$; $d(7,3) = 17 + 0 = 17$; $d(8,3) = 17 + 0 = 17$; $d(9,2) = 0.5 + 0 = 0.5$;

Найбільша сума констант приведення дорівнює $(19 + 0) = 19$ для ребра (6,3), отже, безліч розбивається на две підмножини (6,3) і (6 *, 3 *).

Виняток ребра (6,3) проводимо Шляхом заміни елемента $d_{63} = 0$ на М, Після чого Здійснюємо Чергове приведення матриці відстаней для утворівся підмножині (6 *, 3 *), в результаті отримаємо редуцировану матрицю.

i j	1	2	3	4	5	7	8	9	d_i
2	63	М	47.7	0	0	33	26	0	0
3	0	64.7	М	25	21.2	0	0	30.5	0
4	32	0	8	М	4.9	8	2	0.5	0
5	18.9	0	4.2	4.9	М	41.4	31.9	14.4	0
6	М	82	М	49.2	40.9	21	19	22.5	19
7	25	50	0	25	58.4	М	17	40	0
8	55	43	0	19	48.9	17	М	17.5	0
9	79.5	0	13.5	0.5	14.4	23	0.5	М	0
d_j	0	0	0	0	0	0	0	0	19

Нижня межа гамільтонових циклів цієї підмножині:

$$H(6 *, 3 *) = 458.3 + 19 = 477.3$$

Включення ребра (6,3) проводиться Шляхом виключення всіх елементів іншого рядка и 3-го Шпальт, в Якій елемент d_{36} замінюємо на М, для виключення Утворення негамільтонова циклу.

В результаті отримаємо іншу скороченню матриці (7 x 7), яка підлягає операції приведення.

Після операції приведення скорочена матриця буде мати вигляд:

i j	1	2	4	5	7	8	9	d_i
2	63	М	0	0	33	26	0	0
3	0	64.7	25	21.2	0	0	30.5	0
4	32	0	М	4.9	8	2	0.5	0
5	18.9	0	4.9	М	41.4	31.9	14.4	0
7	25	50	25	58.4	М	17	40	17
8	55	43	19	48.9	17	М	17.5	17
9	79.5	0	0.5	14.4	23	0.5	М	0
d_j	0	0	0	0	0	0	0	34

Сума констант приведення скороченою матриці:

$$\Sigma d_i + \Sigma d_j = 34$$

Нижня межа підмножини (6,3) дорівнює:

$$H(6,3) = 458.3 + 34 = 492.3 > 477.3$$

Оскільки нижня межа цієї підмножини (6,3) більше, ніж підмножини (6*, 3*), то ребро (6,3) поки не включаємо в маршрут.

Крок №3.

Визначаємо ребро розгалуження і розіб'ємо всю множинумаршрутів щодо цього ребра на два підмножини (i, j) і (i*, j*).

З цією метою для всіх клітин матриці з нульовими елементами замінюємо черзі нулі на М (нескінченність) і визначаємо для них суму утворилися констант приведення, вони наведені в дужках.

i j	1	2	3	4	5	7	8	9	d _i
2	63	М	47.7	0(0.5)	0(4.9)	33	26	0(0.5)	0
3	0(18.9)	64.7	М	25	21.2	0(8)	0(0.5)	30.5	0
4	32	0(0.5)	8	М	4.9	8	2	0.5	0.5
5	18.9	0(4.2)	4.2	4.9	М	41.4	31.9	14.4	4.2
6	М	82	0(19)	49.2	40.9	21	19	22.5	19
7	25	50	0(17)	25	58.4	М	17	40	17
8	55	43	0(17)	19	48.9	17	М	17.5	17
9	79.5	0(0.5)	13.5	0.5	14.4	23	0.5	М	0.5
d _j	18.9	0	0	0.5	4.9	8	0.5	0.5	0

$d(2,4) = 0 + 0.5 = 0.5$; $d(2,5) = 0 + 4.9 = 4.9$; $d(2,9) = 0 + 0.5 = 0.5$; $d(3,1) = 0 + 18.9 = 18.9$; $d(3,7) = 0 + 8 = 8$; $d(3,8) = 0 + 0.5 = 0.5$; $d(4,2) = 0.5 + 0 = 0.5$; $d(5,2) = 4.2 + 0 = 4.2$; $d(6,3) = 19 + 0 = 19$; $d(7,3) = 17 + 0 = 17$; $d(8,3) = 17 + 0 = 17$; $d(9,2) = 0.5 + 0 = 0.5$;

Найбільша сума констант приведення дорівнює $(0 + 18.9) = 18.9$ для ребра (3,1), отже, множина розбивається на дві підмножини (3,1) і (3*, 1*).

Виняток ребра (3,1) проводимо шляхом заміни елемента $d_{31} = 0$ на M , після чого здійснюємо чергове приведення матриці відстаней для утворився підмножини $(3^*, 1^*)$, в результаті отримуємо редуцировану матрицю.

i j	1	2	3	4	5	7	8	9	d_i
2	63	M	47.7	0	0	33	26	0	0
3	M	64.7	M	25	21.2	0	0	30.5	0
4	32	0	8	M	4.9	8	2	0.5	0
5	18.9	0	4.2	4.9	M	41.4	31.9	14.4	0
6	M	82	0	49.2	40.9	21	19	22.5	0
7	25	50	0	25	58.4	M	17	40	0
8	55	43	0	19	48.9	17	M	17.5	0
9	79.5	0	13.5	0.5	14.4	23	0.5	M	0
d_j	18.9	0	0	0	0	0	0	0	18.9

Нижня межа гамільтонових циклів цієї підмножини:

$$H(3^*, 1^*) = 458.3 + 18.9 = 477.2$$

Включення ребра (3,1) проводиться шляхом виключення всіх елементів 3-го рядка і 1-го стовпця, в якій елемент d_{13} замінюємо на M , для виключення утворення негамільтонова циклу.

В результаті отримуємо іншу скорочену матрицю (7 x 7), яка підлягає операції приведення.

Після операції приведення скорочена матриця

i j	2	3	4	5	7	8	9	d_i
2	M	47.7	0	0	33	26	0	0
4	0	8	M	4.9	8	2	0.5	0
5	0	4.2	4.9	M	41.4	31.9	14.4	0
6	82	0	49.2	40.9	21	19	22.5	0
7	50	0	25	58.4	M	17	40	0
8	43	0	19	48.9	17	M	17.5	0
9	0	13.5	0.5	14.4	23	0.5	M	0
d_j	0	0	0	0	8	0.5	0	8.5

Сума констант приведення скороченою матриці:

$$\Sigma d_i + \Sigma d_j = 8.5$$

Нижня межа підмножини (3,1) дорівнює:

$$H(3,1) = 458.3 + 8.5 = 466.8 \leq 477.2$$

Щоб виключити підцикли, заборонимо такі переходи: (6,3),

Оскільки нижня межа цієї підмножини (3,1) менше, ніж підмножини

(3 *, 1 *), то ребро (3,1) включаємо в маршрут з новою границею $H = 466.8$

Крок №4.

Визначаємо ребро розгалуження і розіб'ємо всю множинумаршрутів щодо цього ребра на два підмножини (i, j) і (i *, j *).

З цією метою для всіх клітин матриці з нульовими елементами замінюємо черзі нулі на М (нескінченність) і визначаємо для них суму утворилися констант приведення, вони наведені в дужках.

i j	2	3	4	5	7	8	9	d _i
2	М	47.7	0(0.5)	0(4.9)	25	25.5	0(0.5)	0
4	0(0)	8	М	4.9	0(0)	1.5	0.5	0
5	0(4.2)	4.2	4.9	М	33.4	31.4	14.4	4.2
6	69	М	36.2	27.9	0(5.5)	5.5	9.5	5.5
7	50	0(16.5)	25	58.4	М	16.5	40	16.5
8	43	0(9)	19	48.9	9	М	17.5	9
9	0(0)	13.5	0.5	14.4	15	0(1.5)	М	0
d _j	0	0	0.5	4.9	0	1.5	0.5	0

$d(2,4) = 0 + 0.5 = 0.5$; $d(2,5) = 0 + 4.9 = 4.9$; $d(2,9) = 0 + 0.5 = 0.5$; $d(4,2) = 0 + 0 = 0$; $d(4,7) = 0 + 0 = 0$; $d(5,2) = 4.2 + 0 = 4.2$; $d(6,7) = 5.5 + 0 = 5.5$; $d(7,3) = 16.5 + 0 = 16.5$; $d(8,3) = 9 + 0 = 9$; $d(9,2) = 0 + 0 = 0$; $d(9,8) = 0 + 1.5 = 1.5$;

Найбільша сума констант приведення дорівнює $(16.5 + 0) = 16.5$ для ребра (7,3), отже, безліч розбивається на дві підмножини (7,3) і (7 *, 3 *).

Виняток ребра (7,3) проводимо шляхом заміни елемента $d_{73} = 0$ на M , після чого здійснюємо чергове приведення матриці відстаней для утворився підмножини $(7^*, 3^*)$, в результаті отримуємо редуцировану матрицю.

i j	2	3	4	5	7	8	9	d_i
2	M	47.7	0	0	25	25.5	0	0
4	0	8	M	4.9	0	1.5	0.5	0
5	0	4.2	4.9	M	33.4	31.4	14.4	0
6	69	M	36.2	27.9	0	5.5	9.5	0
7	50	M	25	58.4	M	16.5	40	16.5
8	43	0	19	48.9	9	M	17.5	0
9	0	13.5	0.5	14.4	15	0	M	0
d_j	0	0	0	0	0	0	0	16.5

Нижня межа гамільтонових циклів цієї підмножини:

$$H(7^*, 3^*) = 466.8 + 16.5 = 483.3$$

Включення ребра (7,3) проводиться шляхом виключення всіх елементів сьомий рядки і 3-го стовпця, в якій елемент d_{37} замінюємо на M , для виключення утворення негамільтонова циклу.

В результаті отримуємо іншу скорочену матрицю (6 x 6), яка підлягає операції приведення.

Після операції приведення скорочена матриця буде мати вигляд:

i j	2	4	5	7	8	9	d_i
2	M	0	0	25	25.5	0	0
4	0	M	4.9	0	1.5	0.5	0
5	0	4.9	M	33.4	31.4	14.4	0
6	69	36.2	27.9	0	5.5	9.5	0
8	43	19	48.9	9	M	17.5	9
9	0	0.5	14.4	15	0	M	0
d_j	0	0	0	0	0	0	9

Сума констант приведення скороченою матриці:

$$\Sigma d_i + \Sigma d_j = 9$$

Нижня межа підмножини (7,3) дорівнює:

$$H(7,3) = 466.8 + 9 = 475.8 \leq 483.3$$

Щоб виключити підцикли, заборонимо такі переходи: (6,3), (6,7),

Оскільки нижня межа цієї підмножини (7,3) менше, ніж підмножини (7*, 3*), то ребро (7,3) включаємо в маршрут з новою границею $H = 475.8$

Крок №5.

Визначаємо ребро розгалуження і розбіємо всю множинумаршрутів щодо цього ребра на два підмножини (i, j) і (i*, j*).

З цією метою для всіх клітин матриці з нульовими елементами замінюємо черзі нулі на М (нескінченність) і визначаємо для них суму утворилися констант приведення, вони наведені в дужках.

i j	2	4	5	7	8	9	d _i
2	M	0(0.5)	0(4.9)	25	25.5	0(0.5)	0
4	0(0)	M	4.9	0(0)	1.5	0.5	0
5	0(4.9)	4.9	M	33.4	31.4	14.4	4.9
6	63.5	30.7	22.4	M	0(4)	4	4
8	34	10	39.9	0(8.5)	M	8.5	8.5
9	0(0)	0.5	14.4	15	0(0)	M	0
d _j	0	0.5	4.9	0	0	0.5	0

$$d(2,4) = 0 + 0.5 = 0.5; d(2,5) = 0 + 4.9 = 4.9; d(2,9) = 0 + 0.5 = 0.5; d(4,2) = 0 + 0 = 0; d(4,7) = 0 + 0 = 0; d(5,2) = 4.9 + 0 = 4.9; d(6,8) = 4 + 0 = 4; d(8,7) = 8.5 + 0 = 8.5; d(9,2) = 0 + 0 = 0; d(9,8) = 0 + 0 = 0;$$

Найбільша сума констант приведення дорівнює $(8.5 + 0) = 8.5$ для ребра (8,7), отже, безліч розбивається на дві підмножини (8,7) і (8*, 7*).

Виняток ребра (8,7) проводимо шляхом заміни елемента $d_{87} = 0$ на M , після чого здійснюємо чергове приведення матриці відстаней для утворився підмножини $(8^*, 7^*)$, в результаті отримуємо редуцировану матрицю.

i j	2	4	5	7	8	9	d_i
2	M	0	0	25	25.5	0	0
4	0	M	4.9	0	1.5	0.5	0
5	0	4.9	M	33.4	31.4	14.4	0
6	63.5	30.7	22.4	M	0	4	0
8	34	10	39.9	M	M	8.5	8.5
9	0	0.5	14.4	15	0	M	0
d_j	0	0	0	0	0	0	8.5

Нижня межа гамільтонових циклів цієї підмножини:

$$N(8^*, 7^*) = 475.8 + 8.5 = 484.3$$

Включення ребра (8,7) проводиться шляхом виключення всіх елементів восьмого рядка і 7-го стовпця, в якій елемент d_{78} замінюємо на M , для виключення утворення негамільтонова циклу.

В результаті отримуємо іншу скорочену матрицю (5 x 5), яка підлягає операції приведення.

Після операції приведення скорочена матриця буде мати вигляд:

i j	2	4	5	8	9	d_i
2	M	0	0	25.5	0	0
4	0	M	4.9	1.5	0.5	0
5	0	4.9	M	31.4	14.4	0
6	63.5	30.7	22.4	0	4	0
9	0	0.5	14.4	0	M	0
d_j	0	0	0	0	0	0

Сума констант приведення скороченою матриці:

$$\sum d_i + \sum d_j = 0$$

Нижня межа підмножини $(8,7)$ дорівнює:

$$N(8,7) = 475.8 + 0 = 475.8 \leq 484.3$$

Щоб виключити підцикли, заборонимо такі переходи: (6,3), (6,7), (6,8),
Оскільки нижня межа цієї підмножини (8,7) менше, ніж підмножини
(8 *, 7 *), то ребро (8,7) включаємо в маршрут з новою границею
 $H = 475.8$

Крок №6.

Визначаємо ребро розгалуження і розіб'ємо всю множинумаршрутів щодо цього ребра на два підмножини (i, j) і (i *, j *).

З цією метою для всіх клітин матриці з нульовими елементами замінюємо черзі нулі на М (нескінченність) і визначаємо для них суму утворилися констант приведення, вони наведені в дужках.

i j	2	4	5	8	9	d _i
2	M	0(0.5)	0(4.9)	25.5	0(0)	0
4	0(0.5)	M	4.9	1.5	0.5	0.5
5	0(4.9)	4.9	M	31.4	14.4	4.9
6	59.5	26.7	18.4	M	0(18.4)	18.4
9	0(0)	0.5	14.4	0(1.5)	M	0
d _j	0	0.5	4.9	1.5	0	0

$d(2,4) = 0 + 0.5 = 0.5$; $d(2,5) = 0 + 4.9 = 4.9$; $d(2,9) = 0 + 0 = 0$; $d(4,2) = 0.5 + 0 = 0.5$; $d(5,2) = 4.9 + 0 = 4.9$; $d(6,9) = 18.4 + 0 = 18.4$; $d(9,2) = 0 + 0 = 0$; $d(9,8) = 0 + 1.5 = 1.5$;

Найбільша сума констант приведення дорівнює $(18.4 + 0) = 18.4$ для ребра (6,9), отже, безліч розбивається на дві підмножини (6,9) і (6 *, 9 *).

Виняток ребра (6,9) проводимо шляхом заміни елемента $d_{69} = 0$ на М, після чого здійснюємо чергове приведення матриці відстаней для утворився підмножини (6 *, 9 *), в результаті отримаємо редуцировану матрицю.

i j	2	4	5	8	9	d _i
2	M	0(0.5)	0(4.9)	25.5	0(0)	0
4	0(0.5)	M	4.9	1.5	0.5	0.5
5	0(4.9)	4.9	M	31.4	14.4	4.9
6	59.5	26.7	18.4	M	0(18.4)	18.4
9	0(0)	0.5	14.4	0(1.5)	M	0
d _j	0	0.5	4.9	1.5	0	0

2	M	0	0	25.5	0	0
4	0	M	4.9	1.5	0.5	0
5	0	4.9	M	31.4	14.4	0
6	59.5	26.7	18.4	M	M	18.4
9	0	0.5	14.4	0	M	0
d_j	0	0	0	0	0	18.4

Нижня межа гамільтонових циклів цієї підмножини:

$$H(6^*, 9^*) = 475.8 + 18.4 = 494.2$$

Включення ребра (6,9) проводиться шляхом виключення всіх елементів другого рядка і 9-го стовпця, в якій елемент d_{96} замінюємо на M, для виключення утворення негамільтонова циклу.

В результаті отримаємо інші скорочення матрицю (4 x 4), яка підлягає операції приведення.

Після операції приведення скорочена матриця буде мати вигляд:

i j	2	4	5	8	d_i
2	M	0	0	25.5	0
4	0	M	4.9	1.5	0
5	0	4.9	M	31.4	0
9	0	0.5	14.4	0	0
d_j	0	0	0	0	0

Сума констант приведення скороченою матриці:

$$\sum d_i + \sum d_j = 0$$

Нижня межа підмножини (6,9) дорівнює:

$$H(6,9) = 475.8 + 0 = 475.8 \leq 494.2$$

Щоб виключити підцикли, заборонимо такі переходи: (9,1), (9,3), (9,7), (9,8),

Оскільки нижня межа цієї підмножини (6,9) менше, ніж підмножини

(6*, 9*), то ребро (6,9) включаємо в маршрут з новою границею

$$H = 475.8$$

Крок №7.

Визначаємо ребро розгалуження і розіб'ємо всю множинумаршрутів щодо цього ребра на два підмножини (i, j) і (i^*, j^*) .

З цією метою для всіх клітин матриці з нульовими елементами замінюємо черзі нулі на M (нескінченність) і визначаємо для них суму утворилися констант приведення, вони наведені в дужках.

i j	2	4	5	8	d_i
2	M	0(0.5)	0(4.9)	24	0
4	0(0)	M	4.9	0(24)	0
5	0(4.9)	4.9	M	29.9	4.9
9	0(0.5)	0.5	14.4	M	0.5
d_j	0	0.5	4.9	24	0

$d(2,4) = 0 + 0.5 = 0.5$; $d(2,5) = 0 + 4.9 = 4.9$; $d(4,2) = 0 + 0 = 0$; $d(4,8) = 0 + 24 = 24$; $d(5,2) = 4.9 + 0 = 4.9$; $d(9,2) = 0.5 + 0 = 0.5$;

Найбільша сума констант приведення дорівнює $(0 + 24) = 24$ для ребра $(4,8)$, отже, безліч розбивається на дві підмножини $(4,8)$ і $(4^*, 8^*)$.

Виняток ребра $(4,8)$ проводимо шляхом заміни елемента $d_{48} = 0$ на M , після чого здійснюємо чергове приведення матриці відстаней для утворився підмножини $(4^*, 8^*)$, в результаті отримаємо редуцировану матрицю.

i j	2	4	5	8	d_i
2	M	0	0	24	0
4	0	M	4.9	M	0
5	0	4.9	M	29.9	0
9	0	0.5	14.4	M	0
d_j	0	0	0	24	24

Нижня межа гамільтонових циклів цієї підмножини:

$$H(4^*, 8^*) = 475.8 + 24 = 499.8$$

Включення ребра $(4,8)$ проводиться шляхом виключення всіх елементів четвертого рядка і 8-го стовпця, в якій елемент d_{84} замінюємо на M , для виключення утворення негамільтонова циклу.

В результаті отримаємо іншу скорочену матрицю (3 x 3), яка підлягає операції приведення.

Після операції приведення скорочена матриця буде мати вигляд

i j	2	4	5	d_i
2	M	0	0	0
5	0	4.9	M	0
9	0	0.5	14.4	0
d_j	0	0	0	0

Сума констант приведення скороченою матриці:

$$\Sigma d_i + \Sigma d_j = 0$$

Нижня межа підмножини (4,8) дорівнює:

$$H(4,8) = 475.8 + 0 = 475.8 \leq 499.8$$

Щоб виключити підцикли, заборонимо такі переходи: (9,1), (9,3), (9,7), (9,8), (9,4),

Оскільки нижня межа цієї підмножини (4,8) менше, ніж підмножини

(4 *, 8 *), то ребро (4,8) включаємо в маршрут з новою границею

$$H = 475.8$$

Крок №8.

Визначаємо ребро розгалуження і розіб'ємо всю множинумаршрутів щодо цього ребра на два підмножини (i, j) і (i *, j *).

З цією метою для всіх клітин матриці з нульовими елементами замінюємо черзі нулі на M (нескінченність) і визначаємо для них суму утворилися констант приведення, вони наведені в дужках.

i j	2	4	5	d_i
2	M	0(4.9)	0(14.4)	0
5	0(4.9)	4.9	M	4.9
9	0(14.4)	M	14.4	14.4
d_j	0	4.9	14.4	0

$d(2,4) = 0 + 4.9 = 4.9$; $d(2,5) = 0 + 14.4 = 14.4$; $d(5,2) = 4.9 + 0 = 4.9$; $d(9,2) = 14.4 + 0 = 14.4$; Найбільша сума констант приведення дорівнює $(0 + 14.4) = 14.4$ для ребра $(2,5)$, отже, безліч розбивається на дві підмножини $(2,5)$ і $(2^*, 5^*)$.

Виняток ребра $(2,5)$ проводимо шляхом заміни елемента $d_{25} = 0$ на M , після чого здійснюємо чергове приведення матриці відстаней для утворився підмножини $(2^*, 5^*)$, в результаті отримуємо редуцировану матрицю.

i j	2	4	5	d_i
2	M	0	M	0
5	0	4.9	M	0
9	0	M	14.4	0
d_j	0	0	14.4	14.4

Нижня межа гамільтонових циклів цієї підмножини:

$$H(2^*, 5^*) = 475.8 + 14.4 = 490.2$$

Включення ребра $(2,5)$ проводиться шляхом виключення всіх елементів другого рядка і 5-го стовпця, в якій елемент d_{52} замінюємо на M , для виключення утворення негамільтонова циклу.

В результаті отримуємо іншу скорочену матриці (2×2) , яка підлягає операції приведення.

Після операції приведення скорочена матриця буде мати вигляд:

i j	2	4	d_i
5	M	4.9	4.9
9	0	M	0
d_j	0	4.9	9.8

Сума констант приведення скороченою матриці:

$$\sum d_i + \sum d_j = 9.8$$

Нижня межа підмножини $(2,5)$ дорівнює:

$$H(2,5) = 475.8 + 9.8 = 485.6 \leq 490.2$$

Оскільки нижня межа цієї підмножини $(2,5)$ менше, ніж підмножини

$(2^*, 5^*)$, то ребро $(2,5)$ включаємо в маршрут з новою границею $H = 485.6$

Відповідно до цієї матрицею включаємо в гамільтонів маршрут ребра $(5,4)$ і $(9,2)$. В результаті по дереву розгалужень гамільтонів цикл утворюють ребра:

$(1,6), (6,9), (9,2), (2,5), (5,4), (4,8), (8,7), (7,3), (3, 1)$,

Довжина маршруту дорівнює $F(M_k) = 504.7$

Розв'язок задачі комівояжера методом меж та гілок для 5 кластеру

Завдання комівояжера.

Візьмемо як довільного маршруту:

$$X_0 = (1,2); (2,3); (3,4); (4,5); (5,6); (6,7); (7,1)$$

$$\text{Тоді } F(X_0) = 104 + 53 + 63 + 74 + 49 + 70.1 + 175 = 588.1$$

Для визначення нижньої межі безлічі скористаємося операцією редукції або приведення матриці по рядках, для чого необхідно в кожному рядку матриці D знайти мінімальний елемент.

$$d_i = \min(j) d_{ij}$$

i j	1	2	3	4	5	6	7	d_i
1	M	104	131	140	120	105	175	104
2	104	M	53	94	42	70	134	42
3	131	53	M	63	11	59	93	11
4	140	94	63	M	74	41	30	30
5	120	42	11	74	M	49	102	11
6	105	70	59	41	49	M	70.1	41
7	175	134	93	30	102	70.1	M	30

Потім віднімаємо d_i з елементів розглянутої рядка. У зв'язку з цим у знову отриманої матриці в кожному рядку буде як мінімум один нуль.

i j	1	2	3	4	5	6	7
1	M	0	27	36	16	1	71
2	62	M	11	52	0	28	92
3	120	42	M	52	0	48	82
4	110	64	33	M	44	11	0
5	109	31	0	63	M	38	91
6	64	29	18	0	8	M	29.1
7	145	104	63	0	72	40.1	M

Таку ж операцію редукції проводимо за стовпцями, для чого в кожному стовпці знаходимо мінімальний елемент:

$$d_j = \min(i) d_{ij}$$

i j	1	2	3	4	5	6	7
1	M	0	27	36	16	1	71
2	62	M	11	52	0	28	92
3	120	42	M	52	0	48	82

4	110	64	33	M	44	11	0
5	109	31	0	63	M	38	91
6	64	29	18	0	8	M	29.1
7	145	104	63	0	72	40.1	M
d _j	62	0	0	0	0	1	0

Після вирахування мінімальних елементів отримуємо повністю редуцировану матрицю, де величини d_i і d_j називаються **константами приведення**.

i j	1	2	3	4	5	6	7
1	M	0	27	36	16	0	71
2	0	M	11	52	0	27	92
3	58	42	M	52	0	47	82
4	48	64	33	M	44	10	0
5	47	31	0	63	M	37	91
6	2	29	18	0	8	M	29.1
7	83	104	63	0	72	39.1	M

Сума констант приведення визначає нижню межу H :

$$H = \sum d_i + \sum d_j$$

$$H = 104 + 42 + 11 + 30 + 11 + 41 + 30 + 62 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 = 332$$

Елементи матриці d_{ij} відповідають відстані від пункту i до пункту j .

Оскільки в матриці n міст, то D є матрицею $n \times n$ з невід'ємними елементами $d_{ij} \geq 0$

Кожен допустимий маршрут являє собою цикл, за яким комівояжер відвідує місто тільки один раз і повертається у вихідний місто.

Довжина маршруту визначається виразом:

$$F(M_k) = \sum d_{ij}$$

Причому кожен рядок і стовпець входять в маршрут тільки один раз з елементом d_{ij} .

Крок №1.

Визначаємо ребро розгалуження і розіб'ємо всю множинумаршрутів щодо цього ребра на два підмножини (i, j) і (i^*, j^*) .

З цією метою для всіх клітин матриці з нульовими елементами замінюємо черзі нулі на M (нескінченність) і визначаємо для них суму утворилися констант приведення, вони наведені в дужках.

i j	1	2	3	4	5	6	7	d _i
1	M	0(29)	27	36	16	0(10)	71	0
2	0(2)	M	11	52	0(0)	27	92	0
3	58	42	M	52	0(42)	47	82	42
4	48	64	33	M	44	10	0(39.1)	10
5	47	31	0(42)	63	M	37	91	31
6	2	29	18	0(2)	8	M	29.1	2
7	83	104	63	0(39.1)	72	39.1	M	39.1
d _j	2	29	11	0	0	10	29.1	0

$d(1,2) = 0 + 29 = 29$; $d(1,6) = 0 + 10 = 10$; $d(2,1) = 0 + 2 = 2$; $d(2,5) = 0 + 0 = 0$;
 $d(3,5) = 42 + 0 = 42$; $d(4,7) = 10 + 29.1 = 39.1$; $d(5,3) = 31 + 11 = 42$; $d(6,4) = 2 + 0 = 2$;
 $d(7,4) = 39.1 + 0 = 39.1$;

Найбільша сума констант приведення дорівнює $(42 + 0) = 42$ для ребра $(3,5)$, отже, безліч розбивається на дві підмножини $(3,5)$ і $(3^*, 5^*)$.

Вияток ребра (3,5) проводимо шляхом заміни елемента $d_{35} = 0$ на M , після чого здійснюємо чергове приведення матриці відстаней для утворився підмножини $(3^*, 5^*)$, в результаті отримуємо редуцировану матрицю.

i j	1	2	3	4	5	6	7	d_i
1	M	0	27	36	16	0	71	0
2	0	M	11	52	0	27	92	0
3	58	42	M	52	M	47	82	42
4	48	64	33	M	44	10	0	0
5	47	31	0	63	M	37	91	0
6	2	29	18	0	8	M	29.1	0
7	83	104	63	0	72	39.1	M	0
d_j	0	0	0	0	0	0	0	42

Нижня межа гамільтонових циклів цього підмножини:

$$H(3^*, 5^*) = 332 + 42 = 374$$

Включення ребра (3,5) проводиться шляхом виключення всіх елементів 3-го рядка і 5-го стовпця, в якій елемент d_{53} замінюємо на M , для виключення утворення негамільтонова циклу.

В результаті отримуємо іншу скорочену матрицю (6 x 6), яка підлягає операції приведення.

Після операції приведення скорочена матриця буде мати вигляд:

i j	1	2	3	4	6	7	d_i
1	M	0	27	36	0	71	0
2	0	M	11	52	27	92	0
4	48	64	33	M	10	0	0
5	47	31	M	63	37	91	31
6	2	29	18	0	M	29.1	0
7	83	104	63	0	39.1	M	0
d_j	0	0	11	0	0	0	42

Сума констант приведення скороченою матриці:

$$\sum d_i + \sum d_j = 42$$

Нижня межа підмножини $(3,5)$ дорівнює:

$$H(3,5) = 332 + 42 = 374 \leq 374$$

Оскільки нижня межа цієї підмножини $(3,5)$ менше, ніж підмножини

$(3^*, 5^*)$, то ребро $(3,5)$ включаємо в маршрут з новою границею $H = 374$

Крок №2.

Визначаємо ребро розгалуження і розіб'ємо всю множинумаршрутів щодо цього ребра на два підмножини (i, j) і (i^*, j^*) .

З цією метою для всіх клітин матриці з нульовими елементами замінюємо черзі нулі на M (нескінченність) і визначаємо для них суму утворилися констант приведення, вони наведені в дужках.

i j	1	2	3	4	6	7	d_i
1	M	0(0)	16	36	0(6)	71	0
2	0(2)	M	0(7)	52	27	92	0
4	48	64	22	M	10	0(39.1)	10

)	
5	16	0(6)	M	32	6	60	6
6	2	29	7	0(2)	M	29.1	2
7	83	104	52	0(39.1)	39.1	M	39.1
)			
d_j	2	0	7	0	6	29.1	0

$d(1,2) = 0 + 0 = 0$; $d(1,6) = 0 + 6 = 6$; $d(2,1) = 0 + 2 = 2$; $d(2,3) = 0 + 7 = 7$; $d(4,7) = 10 + 29.1 = 39.1$; $d(5,2) = 6 + 0 = 6$; $d(6,4) = 2 + 0 = 2$; $d(7,4) = 39.1 + 0 = 39.1$;

Найбільша сума констант приведення дорівнює $(10 + 29.1) = 39.1$ для ребра (4,7), отже, безліч розбивається на дві підмножини (4,7) і (4*, 7*).

Вияток ребра (4,7) проводимо шляхом заміни елемента $d_{47} = 0$ на M, після чого здійснюємо чергове приведення матриці відстаней для утворився підмножини (4*, 7*), в результаті отримаємо редуцировану матрицю.

i j	1	2	3	4	6	7	d_i
1	M	0	16	36	0	71	0
2	0	M	0	52	27	92	0
4	48	64	22	M	10	M	10
5	16	0	M	32	6	60	0
6	2	29	7	0	M	29.1	0
7	83	104	52	0	39.1	M	0
d_j	0	0	0	0	0	29.1	39.1

Нижня межа гамільтонових циклів цього підмножини:

$$H(4^*, 7^*) = 374 + 39.1 = 413.1$$

Включення ребра (4,7) проводиться шляхом виключення всіх елементів четвертого рядка і 7-го стовпця, в якій елемент d_{74} замінюємо на M, для виключення утворення негамільтонова циклу.

В результаті отримаємо іншу скорочену матрицю (5 x 5), яка підлягає операції приведення.

Після операції приведення скорочена матриця буде мати вигляд:

i j	1	2	3	4	6	d_i
1	M	0	16	36	0	0
2	0	M	0	52	27	0
5	16	0	M	32	6	0
6	2	29	7	0	M	0
7	83	104	52	M	39.1	39.1
d_j	0	0	0	0	0	39.1

Сума констант приведення скороченою матриці:

$$\sum d_i + \sum d_j = 39.1$$

Нижня межа підмножини (4,7) дорівнює:

$$H(4,7) = 374 + 39.1 = 413.1 \leq 413.1$$

Оскільки нижня межа цієї підмножини (4,7) менше, ніж підмножини (4*, 7*), то ребро (4,7) включаємо в маршрут з новою границею

$$H = 413.1$$

Крок №3.

Визначаємо ребро розгалуження і розіб'ємо всю множинумаршрутів щодо цього ребра на два підмножини (i, j) і (i^*, j^*) .

З цією метою для всіх клітин матриці з нульовими елементами замінюємо черзі нулі на М (нескінченність) і визначаємо для них суму утворилися констант приведення, вони наведені в дужках.

i j	1	2	3	4	6	d_i
1	М	0(0)	16	36	0(0)	0
2	0(2)	М	0(7)	52	27	0
5	16	0(6)	М	32	6	6
6	2	29	7	0(34)	М	2
7	43.9	64.9	12.9	М	0(12.9)	12.9
d_j	2	0	7	32	0	0

$d(1,2) = 0 + 0 = 0$; $d(1,6) = 0 + 0 = 0$; $d(2,1) = 0 + 2 = 2$; $d(2,3) = 0 + 7 = 7$; $d(5,2) = 6 + 0 = 6$; $d(6,4) = 2 + 32 = 34$; $d(7,6) = 12.9 + 0 = 12.9$;

Найбільша сума констант приведення дорівнює $(2 + 32) = 34$ для ребра $(6,4)$, отже, безліч розбивається на дві підмножини $(6,4)$ і $(6^*, 4^*)$.

Виняток ребра $(6,4)$ проводимо шляхом заміни елемента $d_{64} = 0$ на М, після чого здійснюємо чергове приведення матриці відстаней для утворився підмножини $(6^*, 4^*)$, в результаті отримаємо редуцировану матрицю:

i j	1	2	3	4	6	d_i
1	М	0	16	36	0	0
2	0	М	0	52	27	0
5	16	0	М	32	6	0
6	2	29	7	М	М	2
7	43.9	64.9	12.9	М	0	0
d_j	0	0	0	32	0	34

Нижня межа гамільтонових циклів цього підмножини:

$$H(6^*, 4^*) = 413.1 + 34 = 447.1$$

Включення ребра $(6,4)$ проводиться шляхом виключення всіх елементів другого рядка і 4-го стовпця, в якій елемент d_{46} замінюємо на М, для виключення утворення негамільтонова циклу.

В результаті отримаємо інші скорочення матрицю (4×4) , яка підлягає операції приведення.

Після операції приведення скорочена матриця буде мати вигляд:

i j	1	2	3	6	d_i
1	М	0	16	0	0
2	0	М	0	27	0

5	16	0	M	6	0
7	43.9	64.9	12.9	0	0
d_i	0	0	0	0	0

Сума констант приведення скороченою матриці:

$$\Sigma d_i + \Sigma d_j = 0$$

Нижня межа підмножини (6,4) дорівнює:

$$H(6,4) = 413.1 + 0 = 413.1 \leq 447.1$$

Щоб виключити підцикли, заборонимо такі переходи: (7,6),

Оскільки нижня межа цієї підмножини (6,4) менше, ніж підмножини

(6*, 4*), то ребро (6,4) включаємо в маршрут з новою границею

$$H = 413.1$$

Крок №4.

Визначаємо ребро розгалуження і розіб'ємо всю множинумаршрутів щодо цього ребра на два підмножини (i, j) і (i*, j*).

З цією метою для всіх клітин матриці з нульовими елементами замінюємо черзі нулі на M (нескінченність) і визначаємо для них суму утворилися констант приведення, вони наведені в дужках.

i j	1	2	3	6	d_i
1	M	0(0)	16	0(6)	0
2	0(16)	M	0(0)	27	0
5	16	0(6)	M	6	6
7	31	52	0(31)	M	31
d_j	16	0	0	6	0

$$d(1,2) = 0 + 0 = 0; d(1,6) = 0 + 6 = 6; d(2,1) = 0 + 16 = 16; d(2,3) = 0 + 0 = 0; \\ d(5,2) = 6 + 0 = 6; d(7,3) = 31 + 0 = 31;$$

Найбільша сума констант приведення дорівнює $(31 + 0) = 31$ для ребра (7,3), отже, безліч розбивається на дві підмножини (7,3) і (7*, 3*).

Виняток ребра (7,3) проводимо шляхом заміни елемента $d_{73} = 0$ на M, після чого здійснюємо чергове приведення матриці відстаней для утворився підмножини (7*, 3*), в результаті отримаємо редуцировану матрицю.

i j	1	2	3	6	d_i
1	M	0	16	0	0
2	0	M	0	27	0
5	16	0	M	6	0
7	31	52	M	M	31
d_j	0	0	0	0	31

Нижня межа гамільтонових циклів цього підмножини:

$$H(7^*, 3^*) = 413.1 + 31 = 444.1$$

Включення ребра (7,3) проводиться шляхом виключення всіх елементів сьомий рядки і 3-го стовпця, в якій елемент d_{37} замінюємо на M , для виключення утворення негамільтонова циклу.

В результаті отримаємо іншу скорочену матрицю (3 x 3), яка підлягає операції приведення.

Після операції приведення скорочена матриця буде мати вигляд:

i j	1	2	6	d_i
1	M	0	0	0
2	0	M	27	0
5	16	0	6	0
d_j	0	0	0	0

Сума констант приведення скороченою матриці:

$$\sum d_i + \sum d_j = 0$$

Нижня межа підмножини (7,3) дорівнює:

$$H(7,3) = 413.1 + 0 = 413.1 \leq 444.1$$

Щоб виключити підцикли, заборонимо такі переходи: (5,4), (5,6), (5,7),

Оскільки нижня межа цієї підмножини (7,3) менше, ніж підмножини (7*, 3*), то ребро (7,3) включаємо в маршрут з новою границею

$$H = 413.1$$

Крок №5.

Визначаємо ребро розгалуження і розіб'ємо всю множинумаршрутів щодо цього ребра на два підмножини (i, j) і (i^*, j^*) .

З цією метою для всіх клітин матриці з нульовими елементами замінюємо черзі нулі на M (нескінченність) і визначаємо для них суму утворилися констант приведення, вони наведені в дужках.

i j	1	2	6	d_i
1	M	0(0)	0(27)	0
2	0(43)	M	27	27
5	16	0(16)	M	16
d_j	16	0	27	0

$$d(1,2) = 0 + 0 = 0; d(1,6) = 0 + 27 = 27; d(2,1) = 27 + 16 = 43; d(5,2) = 16 + 0 =$$

16;

Найбільша сума констант приведення дорівнює $(27 + 16) = 43$ для ребра $(2,1)$, отже, безліч розбивається на дві підмножини $(2,1)$ і $(2^*, 1^*)$.

Виняток ребра $(2,1)$ проводимо шляхом заміни елемента $d_{21} = 0$ на M , після чого здійснюємо чергове приведення матриці відстаней для утворився підмножини $(2^*, 1^*)$, в результаті отримуємо редуцировану матрицю.

i j	1	2	6	d_i
1	M	0	0	0
2	M	M	27	27
5	16	0	M	0
d_j	16	0	0	43

Нижня межа гамільтонових циклів цього підмножини:

$$H(2^*, 1^*) = 413.1 + 43 = 456.1$$

Включення ребра $(2,1)$ проводиться шляхом виключення всіх елементів другого рядка і 1-го стовпця, в якій елемент d_{12} замінюємо на M , для виключення утворення негамільтонова циклу.

В результаті отримуємо іншу скорочену матрицю (2×2) , яка підлягає операції приведення.

Після операції приведення скорочена матриця буде мати вигляд:

i j	2	6	d_i
1	M	0	0
5	0	M	0
d_j	0	0	0

Сума констант приведення скороченою матриці:

$$\sum d_i + \sum d_j = 0$$

Нижня межа підмножини $(2,1)$ дорівнює:

$$H(2,1) = 413.1 + 0 = 413.1 \leq 456.1$$

Оскільки нижня межа цієї підмножини $(2,1)$ менше, ніж підмножини $(2, 1^*)$, то ребро $(2,1)$ включаємо в маршрут з новою границею $H = 413.1$

Відповідно до цієї матрицею включаємо в гамільтонів маршрут ребра $(1,6)$ і $(5,2)$.

В результаті по дереву розгалужень гамільтонів цикл утворюють ребра:

$(3,5), (5,2), (2,1), (1,6), (6,4), (4,7), (7,3),$

Довжина маршруту дорівнює $F(M_k) = 4$

Додаток Д

Розв'язок задачі комівояжера Венгеським методом для 1 кластеру

Вихідна матриця має вигляд:

М	164	140	175
164	М	71	47
140	71	М	30
175	47	30	М

Крок №1.

1. **Проводимо редукцію матриці по рядках.** У зв'язку з цим у знову отриманої матриці в кожному рядку буде як мінімум один нуль.

М	24	0	35	140
117	М	24	0	47
110	41	М	0	30
145	17	0	М	30

Потім таку ж операцію редукції проводимо за стовпцями, для чого в кожному стовпці знаходимо мінімальний елемент:

М	7	0	35
7	М	24	0
0	24	М	0
35	0	0	М
110	17	0	0

Після вирахування мінімальних елементів отримуємо повністю редуцировану матрицю.

2. Методом спроб і помилок проводимо пошук допустимого рішення, для якого всі призначення мають нульову вартість.

Фіксуємо нульове значення в клітці (1, 3). Інші нулі у рядку 1 і стовпці 3 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (2, 4). Інші нулі у рядку 2 і стовпці 4 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (3, 1). Інші нулі у рядку 3 і стовпці 1 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (4, 2). Інші нулі у рядку 4 і стовпці 2 викреслюємо.

У підсумку отримуємо наступну матрицю:

М	7	[0]	35
7	М	24	[0]

[0]	24	M	[-0-]
35	[0]	[-0-]	M

Кількість знайдених нулів одно $k = 4$. В результаті отримуємо еквівалентну матрицю C_e :

M	7	0	35
7	M	24	0
0	24	M	0
35	0	0	M

4. Методом проб і помилок визначаємо матрицю призначення X , яка дозволяє по аналогічно розташованих елементах вихідної матриці (в квадратах) обчислити мінімальну вартість призначення.

M	7	[0]	35
7	M	24	[0]
[0]	24	M	[-0-]
35	[0]	[-0-]	M

$$C_{\min} = 140 + 47 + 140 + 47 = 374$$

Шлях: (1;3), (3;4), (4;2), (2;1)

Розв'язок задачі комівояжера Венгеським методом для 3 кластеру
Вихідна матриця має вигляд:

М	106	122	149	43
106	М	25	54	91
122	25	М	29	95.1
149	54	29	М	95
43	91	95.1	95	М

Крок №1.

1. Проводимо редукцію матриці по рядках. У зв'язку з цим у знову отриманої матриці в кожному рядку буде як мінімум один нуль.

М	63	79	106	0	43
81	М	0	29	66	25
97	0	М	4	70.1	25
120	25	0	М	66	29
0	48	52.1	52	М	43

Потім таку ж операцію редукції проводимо за стовпцями, для чого в кожному стовпці знаходимо мінімальний елемент:

М	63	79	102	0
81	М	0	25	66
97	0	М	0	70.1
120	25	0	М	66
0	48	52.1	48	М
0	0	0	4	0

Після вирахування мінімальних елементів отримуємо повністю редуцировану матрицю.

2. Методом спроб і помилок проводимо пошук допустимого рішення, для якого всі призначення мають нульову вартість.

Фіксуємо нульове значення в клітці (1, 5). Інші нулі у рядку 1 і стовпці 5 викреслюємо. Для даної клітини викреслюємо нулі в клітинах (3, 2).

Фіксуємо нульове значення в клітці (2, 3). Інші нулі у рядку 2 і стовпці 3 викреслюємо. Для даної клітини викреслюємо нулі в клітинах (3, 2).

Фіксуємо нульове значення в клітці (3, 4). Інші нулі у рядку 3 і стовпці 4 викреслюємо. Для даної клітини викреслюємо нулі в клітинах (3, 2).

У підсумку отримуємо наступну матрицю:

М	63	79	102	[0]
81	М	[0]	25	66
97	[-0-]	М	[0]	70.1
120	25	[-0-]	М	66
0	48	52.1	48	М

Оскільки розташування нульових елементів в матриці не дозволяє утворити систему з 5-х незалежних нулів (в матриці їх тільки 3), то рішення неприпустиме.

3. Проводимо модифікацію матриці. Викреслюємо рядки і стовпці з можливо великою кількістю нульових елементів:

рядок 3, стовець 3, рядок 1, стовець 1

Отримуємо скорочену матрицю (елементи виділені):

M	63	79	102	0
81	M	0	25	66
97	0	M	0	70.1
120	25	0	M	66
0	48	52.1	48	M
0	48	52.1	48	M

Мінімальний елемент скороченої матриці ($\min(M, 25, 66, 25, M, 66, 48, 48, M) = 25$) вычитаем из всех ее элементов:

M	63	79	102	0
81	M	0	0	41
97	0	M	0	70.1
120	0	0	M	41
0	23	52.1	23	M

Потім складаємо мінімальний елемент з елементами, розташованими на перетинах викреслених рядків і стовпців:

M	63	104	102	0
81	M	0	0	41
122	0	M	0	70.1
120	0	0	M	41
0	23	52.1	23	M

Крок №2.

1. Проводимо редукцію матриці по рядках. У зв'язку з цим у знову отриманої матриці в кожному рядку буде як мінімум один нуль.

Потім таку ж операцію редукції проводимо за стовпцями, для чого в кожному стовпці знаходимо мінімальний елемент:

Після вирахування мінімальних елементів отримуємо повністю редуцировану матрицю.

2. Методом проб і помилок проводимо пошук допустимого рішення, для якого всі призначення мають нульову вартість.

Фіксуємо нульове значення в клітці (1, 5). Інші нулі у рядку 1 і стовпці 5 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (2, 3). Інші нулі у рядку 2 і стовпці 3 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (3, 4). Інші нулі у рядку 3 і стовпці 4 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (4, 2). Інші нулі у рядку 4 і стовпці 2 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (5, 1). Інші нулі у рядку 5 і стовпці 1 викреслюємо.

У підсумку отримуємо наступну матрицю:

М	63	104	102	[0]
81	М	[0]	[-0-]	41
122	[-0-]	М	[0]	70.1
120	[0]	[-0-]	М	41
[0]	23	52.1	23	М

Кількість знайдених нулів одно $k = 5$. В результаті отримуємо еквівалентну матрицю C_e :

М	63	104	102	0
81	М	0	0	41
122	0	М	0	70.1
120	0	0	М	41
0	23	52.1	23	М

4. Методом спроб і помилок визначаємо матрицю призначення X , яка дозволяє по аналогічно розташованих елементах вихідної матриці (в квадратах) обчислити мінімальну вартість призначення.

М	63	104	102	[0]
81	М	[-0-]	[0]	41
122	[0]	М	[-0-]	70.1
120	[-0-]	[0]	М	41
[0]	23	52.1	23	М

$$C_{\min} = 54 + 43 + 25 + 29 + 43 = 194$$

Шлях: (2; 4), (1; 5), (3, 2), (4, 3), (5; 1)

Альтернативний варіант №2.

М	63	104	102	[0]
81	М	[0]	[-0-]	41
122	[-0-]	М	[0]	70.1
120	[0]	[-0-]	М	41
[0]	23	52.1	23	М

$$C_{\min} = 29 + 43 + 25 + 54 + 43 = 194$$

Шлях: (3, 4), (1; 5), (2, 3), (4, 2), (5; 1)

Додаток К

Розв'язок задачі комівояжера Венгеським методом для 4 кластеру

Вихідна матриця має вигляд:

М	77	37	58	36	78	30	83
77	М	34	77.6	103	148	66.1	87
37	34	М	58.3	70	112	52.3	63
58	77.6	58.3	М	45	45	36	40
36	103	70	45	М	44	58	81
78	148	112	45	44	М	99	80
30	66.1	52.3	36	58	99	М	32.3
83	87	63	40	81	80	32.3	М

Крок №1.

1. Проводимо редукцію матриці по рядках. У зв'язку з цим у знову отриманої матриці в кожному рядку буде як мінімум один нуль.

М	47	7	28	6	48	0	53	30
43	М	0	43.6	69	114	32.1	53	34
3	0	М	24.3	36	78	18.3	29	34
22	41.6	22.3	М	9	9	0	4	36
0	67	34	9	М	8	22	45	36
34	104	68	1	0	М	55	36	44
0	36.1	22.3	6	28	69	М	2.3	30
50.7	54.7	30.7	7.7	48.7	47.7	0	М	32.3

Потім таку ж операцію редукції проводимо за стовпцями, для чого в кожному стовпці знаходимо мінімальний елемент:

М	47	7	27	6	40	0	50.7
43	М	0	42.6	69	106	32.1	50.7
3	0	М	23.3	36	70	18.3	26.7
22	41.6	22.3	М	9	1	0	1.7
0	67	34	8	М	0	22	42.7
34	104	68	0	0	М	55	33.7
0	36.1	22.3	5	28	61	М	0
50.7	54.7	30.7	6.7	48.7	39.7	0	М
0	0	0	1	0	8	0	2.3

Після вирахування мінімальних елементів отримуємо повністю редуцировану матрицю.

2. Методом спроб і помилок проводимо пошук допустимого рішення, для якого всі призначення мають нульову вартість.

Фіксуємо нульове значення в клітці (1, 7). Інші нулі у рядку 1 і стовпці 7 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (2, 3). Інші нулі у рядку 2 і стовпці 3 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (3, 2). Інші нулі у рядку 3 і стовпці 2 викреслюємо.

У підсумку отримуємо наступну матрицю:

М	47	7	27	6	40	[0]	50.7
43	М	[0]	42.6	69	106	32.1	50.7
3	[0]	М	23.3	36	70	18.3	26.7
22	41.6	22.3	М	9	1	[-0-]	1.7
0	67	34	8	М	0	22	42.7
34	104	68	0	0	М	55	33.7
0	36.1	22.3	5	28	61	М	0
50.7	54.7	30.7	6.7	48.7	39.7	[-0-]	М

Оскільки розташування нульових елементів в матриці не дозволяє утворити систему з 8-х незалежних нулів (в матриці їх тільки 3), то рішення неприпустиме.

3. Проводимо модифікацію матриці. Викреслюємо рядки і стовпці з можливо великою кількістю нульових елементів:

стовпець 7, рядок 5, рядок 6, рядок 7, стовпець 2, стовпець 3

Отримуємо скорочену матрицю (елементи виділені):

М	47	7	27	6	40	0	50.7
43	М	0	42.6	69	106	32.1	50.7
3	0	М	23.3	36	70	18.3	26.7
22	41.6	22.3	М	9	1	0	1.7
0	67	34	8	М	0	22	42.7
34	104	68	0	0	М	55	33.7
0	36.1	22.3	5	28	61	М	0
50.7	54.7	30.7	6.7	48.7	39.7	0	М

Мінімальний елемент скороченою матриці ($\min (М, 27, 6, 40, 50.7, 43, 42.6, 69, 106, 50.7, 3, 23.3, 36, 70, 26.7, 22, М, 9, 1, 1.7, 50.7, 6.7, 48.7, 39.7, М) = 1$) віднімаємо з усіх її елементів:

М	47	7	26	5	39	0	49.7
42	М	0	41.6	68	105	32.1	49.7
2	0	М	22.3	35	69	18.3	25.7
21	41.6	22.3	М	8	0	0	0.7
0	67	34	8	М	0	22	42.7
34	104	68	0	0	М	55	33.7
0	36.1	22.3	5	28	61	М	0
49.7	54.7	30.7	5.7	47.7	38.7	0	М

Потім складаємо мінімальний елемент з елементами, розташованими на перетинах викреслених рядків і стовпців:

М	47	7	26	5	39	0	49.7
42	М	0	41.6	68	105	32.1	49.7
2	0	М	22.3	35	69	18.3	25.7
21	41.6	22.3	М	8	0	0	0.7
0	68	35	8	М	0	23	42.7
34	105	69	0	0	М	56	33.7
0	37.1	23.3	5	28	61	М	0
49.7	54.7	30.7	5.7	47.7	38.7	0	М

Крок №2.

1. Проводимо редукцію матриці по рядках. У зв'язку з цим у знову отриманої матриці в кожному рядку буде як мінімум один нуль.

Потім таку ж операцію редукції проводимо за стовпцями, для чого в кожному стовпці знаходимо мінімальний елемент:

Після вирахування мінімальних елементів отримуємо повністю редуцировану матрицю.

2. Методом проб і помилок проводимо пошук допустимого рішення, для якого всі призначення мають нульову вартість.

Фіксуємо нульове значення в клітці (1, 7). Інші нулі у рядку 1 і стовпці 7 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (2, 3). Інші нулі у рядку 2 і стовпці 3 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (3, 2). Інші нулі у рядку 3 і стовпці 2 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (4, 6). Інші нулі у рядку 4 і стовпці 6 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (5, 1). Інші нулі у рядку 5 і стовпці 1 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (6, 5). Інші нулі у рядку 6 і стовпці 5 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (7, 8). Інші нулі у рядку 7 і стовпці 8 викреслюємо.

У підсумку отримуємо наступну матрицю:

М	47	7	26	5	39	[0]	49.7
42	М	[0]	41.6	68	105	32.1	49.7
2	[0]	М	22.3	35	69	18.3	25.7
21	41.6	22.3	М	8	[0]	[-0-]	0.7
[0]	68	35	8	М	[-0-]	23	42.7
34	105	69	[-0-]	[0]	М	56	33.7
[-0-]	37.1	23.3	5	28	61	М	[0]
49.7	54.7	30.7	5.7	47.7	38.7	[-0-]	М

Оскільки розташування нульових елементів в матриці не дозволяє утворити систему з 8-х незалежних нулів (в матриці їх тільки 7), то рішення неприпустиме.

3. Проводимо модифікацію матриці. Викреслюємо рядки і стовпці з можливо великою кількістю нульових елементів:

стовпець 7, рядок 5, рядок 6, рядок 7, стовпець 2, стовпець 3, рядок 4

Отримуємо скорочену матрицю (елементи виділені):

М	47	7	26	5	39	0	49.7
42	М	0	41.6	68	105	32.1	49.7
2	0	М	22.3	35	69	18.3	25.7
21	41.6	22.3	М	8	0	0	0.7
0	68	35	8	М	0	23	42.7
34	105	69	0	0	М	56	33.7
0	37.1	23.3	5	28	61	М	0
49.7	54.7	30.7	5.7	47.7	38.7	0	М

Мінімальний елемент скороченою матриці ($\min(M, 26, 5, 39, 49.7, 42, 41.6, 68, 105, 49.7, 2, 22.3, 35, 69, 25.7, 49.7, 5.7, 47.7, 38.7, M) = 2$) віднімаємо з усіх її елементів:

М	47	7	24	3	37	0	47.7
40	М	0	39.6	66	103	32.1	47.7
0	0	М	20.3	33	67	18.3	23.7
21	41.6	22.3	М	8	0	0	0.7
0	68	35	8	М	0	23	42.7
34	105	69	0	0	М	56	33.7
0	37.1	23.3	5	28	61	М	0
47.7	54.7	30.7	3.7	45.7	36.7	0	М

Потім складаємо мінімальний елемент з елементами, розташованими на перетинах викреслених рядків і стовпців:

М	47	7	24	3	37	0	47.7
40	М	0	39.6	66	103	32.1	47.7
0	0	М	20.3	33	67	18.3	23.7
21	43.6	24.3	М	8	0	2	0.7
0	70	37	8	М	0	25	42.7
34	107	71	0	0	М	58	33.7

0	39.1	25.3	5	28	61	M	0
47.7	54.7	30.7	3.7	45.7	36.7	0	M

Крок №3.

1. Проводимо редукцію матриці по рядках. У зв'язку з цим у знову отриманої матриці в кожному рядку буде як мінімум один нуль.

Потім таку ж операцію редукції проводимо за стовпцями, для чого в кожному стовпці знаходимо мінімальний елемент:

Після вирахування мінімальних елементів отримуємо повністю редуцировану матрицю.

2. Методом спроб і помилок проводимо пошук допустимого рішення, для якого всі призначення мають нульову вартість.

Фіксуємо нульове значення в клітці (1, 7). Інші нулі у рядку 1 і стовпці 7 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (2, 3). Інші нулі у рядку 2 і стовпці 3 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (3, 2). Інші нулі у рядку 3 і стовпці 2 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (4, 6). Інші нулі у рядку 4 і стовпці 6 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (5, 1). Інші нулі у рядку 5 і стовпці 1 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (6, 5). Інші нулі у рядку 6 і стовпці 5 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (7, 8). Інші нулі у рядку 7 і стовпці 8 викреслюємо.

У підсумку отримуємо наступну матрицю:

M	47	7	24	3	37	[0]	47.7
40	M	[0]	39.6	66	103	32.1	47.7

[-0-]	[0]	M	20.3	33	67	18.3	23.7
21	43.6	24.3	M	8	[0]	2	0.7
[0]	70	37	8	M	[-0-]	25	42.7
34	107	71	[-0-]	[0]	M	58	33.7
[-0-]	39.1	25.3	5	28	61	M	[0]
47.7	54.7	30.7	3.7	45.7	36.7	[-0-]	M

Оскільки розташування нульових елементів в матриці не дозволяє утворити систему з 8-х незалежних нулів (в матриці їх тільки 7), то рішення неприпустиме.

3. Проводимо модифікацію матриці. Викреслюємо рядки і стовпці з можливо великою кількістю нульових елементів:

стовпець 1, рядок 6, стовпець 6, стовпець 7, рядок 2, рядок 3, рядок 7

Отримуємо скорочену матрицю (елементи виділені):

M	47	7	24	3	37	0	47.7
40	M	0	39.6	66	103	32.1	47.7
0	0	M	20.3	33	67	18.3	23.7
21	43.6	24.3	M	8	0	2	0.7
0	70	37	8	M	0	25	42.7
34	107	71	0	0	M	58	33.7
0	39.1	25.3	5	28	61	M	0
47.7	54.7	30.7	3.7	45.7	36.7	0	M

Мінімальний елемент скороченою матриці ($\min(47, 7, 24, 3, 47.7, 43.6, 24.3, M, 8, 0.7, 70, 37, 8, M, 42.7, 54.7, 30.7, 3.7, 45.7, M) = 0.7$) віднімаємо з усіх її елементів:

M	46.3	6.3	23.3	2.3	37	0	47
40	M	0	39.6	66	103	32.1	47.7
0	0	M	20.3	33	67	18.3	23.7
21	42.9	23.6	M	7.3	0	2	0
0	69.3	36.3	7.3	M	0	25	42
34	107	71	0	0	M	58	33.7
0	39.1	25.3	5	28	61	M	0
47.7	54	30	3	45	36.7	0	M

Потім складаємо мінімальний елемент з елементами, розташованими на перетинах викреслених рядків і стовпців:

M	46.3	6.3	23.3	2.3	37	0	47
40.7	M	0	39.6	66	103.7	32.8	47.7
0.7	0	M	20.3	33	67.7	19	23.7
21	42.9	23.6	M	7.3	0	2	0
0	69.3	36.3	7.3	M	0	25	42
34.7	107	71	0	0	M	58.7	33.7
0.7	39.1	25.3	5	28	61.7	M	0
47.7	54	30	3	45	36.7	0	M

Крок №4.

1. Проводимо редукцію матриці по рядках. У зв'язку з цим у знову отриманої матриці в кожному рядку буде як мінімум один нуль.

Потім таку ж операцію редукції проводимо за стовпцями, для чого в кожному стовпці знаходимо мінімальний елемент:

Після вирахування мінімальних елементів отримуємо повністю редуцировану матрицю.

2. Методом спроб і помилок проводимо пошук допустимого рішення, для якого всі призначення мають нульову вартість.

Фіксуємо нульове значення в клітці (1, 7). Інші нулі у рядку 1 і стовпці 7 викреслюємо. Для даної клітини викреслюємо нулі в клітинах (6; 4).

Фіксуємо нульове значення в клітці (2, 3). Інші нулі у рядку 2 і стовпці 3 викреслюємо. Для даної клітини викреслюємо нулі в клітинах (6; 4).

Фіксуємо нульове значення в клітці (3, 2). Інші нулі у рядку 3 і стовпці 2 викреслюємо. Для даної клітини викреслюємо нулі в клітинах (6; 4).

Фіксуємо нульове значення в клітці (4, 8). Інші нулі у рядку 4 і стовпці 8 викреслюємо. Для даної клітини викреслюємо нулі в клітинах (6; 4).

Фіксуємо нульове значення в клітці (5, 6). Інші нулі у рядку 5 і стовпці 6 викреслюємо. Для даної клітини викреслюємо нулі в клітинах (6; 4).

Фіксуємо нульове значення в клітці (6, 5). Інші нулі у рядку 6 і стовпці 5 викреслюємо. Для даної клітини викреслюємо нулі в клітинах (6; 4).

У підсумку отримуємо наступну матрицю:

М	46.3	6.3	23.3	2.3	37	[0]	47
40.7	М	[0]	39.6	66	103.7	32.8	47.7
0.7	[0]	М	20.3	33	67.7	19	23.7
21	42.9	23.6	М	7.3	[-0-]	2	[0]
[-0-]	69.3	36.3	7.3	М	[0]	25	42
34.7	107	71	[-0-]	[0]	М	58.7	33.7
0.7	39.1	25.3	5	28	61.7	М	[-0-]
47.7	54	30	3	45	36.7	[-0-]	М

Оскільки розташування нульових елементів в матриці не дозволяє утворити систему з 8-х незалежних нулів (в матриці їх тільки 6), то рішення неприпустиме.

3. Проводимо модифікацію матриці. Викреслюємо рядки і стовпці з можливо великою кількістю нульових елементів:

рядок 4, стовпець 7, рядок 5, рядок 6, стовпець 2, стовпець 3, рядок 7

Отримуємо скорочену матрицю (елементи виділені):

M	46.3	6.3	23.3	2.3	37	0	47
40.7	M	0	39.6	66	103.7	32.8	47.7
0.7	0	M	20.3	33	67.7	19	23.7
21	42.9	23.6	M	7.3	0	2	0
0	69.3	36.3	7.3	M	0	25	42
34.7	107	71	0	0	M	58.7	33.7
0.7	39.1	25.3	5	28	61.7	M	0
47.7	54	30	3	45	36.7	0	M

Мінімальний елемент скороченою матриці ($\min(M, 23.3, 2.3, 37, 47, 40.7, 39.6, 66, 103.7, 47.7, 0.7, 20.3, 33, 67.7, 23.7, 47.7, 3, 45, 36.7, M) = 0.7$) віднімаємо з усіх її елементів:

M	46.3	6.3	22.6	1.6	36.3	0	46.3
40	M	0	38.9	65.3	103	32.8	47
0	0	M	19.6	32.3	67	19	23
21	42.9	23.6	M	7.3	0	2	0
0	69.3	36.3	7.3	M	0	25	42
34.7	107	71	0	0	M	58.7	33.7
0.7	39.1	25.3	5	28	61.7	M	0
47	54	30	2.3	44.3	36	0	M

Потім складаємо мінімальний елемент з елементами, розташованими на перетинах викреслених рядків і стовпців:

M	46.3	6.3	22.6	1.6	36.3	0	46.3
40	M	0	38.9	65.3	103	32.8	47
0	0	M	19.6	32.3	67	19	23
21	43.6	24.3	M	7.3	0	2.7	0
0	70	37	7.3	M	0	25.7	42
34.7	107.7	71.7	0	0	M	59.4	33.7
0.7	39.8	26	5	28	61.7	M	0
47	54	30	2.3	44.3	36	0	M

Крок №5.

1. Проводимо редукцію матриці по рядках. У зв'язку з цим у знову отриманої матриці в кожному рядку буде як мінімум один нуль.

Потім таку ж операцію редукції проводимо за стовпцями, для чого в кожному стовпці знаходимо мінімальний елемент:

Після вирахування мінімальних елементів отримуємо повністю редуцировану матрицю.

2. Методом спроб і помилок проводимо пошук допустимого рішення, для якого всі призначення мають нульову вартість.

Фіксуємо нульове значення в клітці (1, 7). Інші нулі у рядку 1 і стовпці 7 викреслюємо. Для даної клітини викреслюємо нулі в клітинах (6; 4).

Фіксуємо нульове значення в клітці (2, 3). Інші нулі у рядку 2 і стовпці 3 викреслюємо. Для даної клітини викреслюємо нулі в клітинах (6; 4).

Фіксуємо нульове значення в клітці (3, 2). Інші нулі у рядку 3 і стовпці 2 викреслюємо. Для даної клітини викреслюємо нулі в клітинах (6; 4).

Фіксуємо нульове значення в клітці (4, 8). Інші нулі у рядку 4 і стовпці 8 викреслюємо. Для даної клітини викреслюємо нулі в клітинах (6; 4).

Фіксуємо нульове значення в клітці (5, 6). Інші нулі у рядку 5 і стовпці 6 викреслюємо. Для даної клітини викреслюємо нулі в клітинах (6; 4).

Фіксуємо нульове значення в клітці (6, 5). Інші нулі у рядку 6 і стовпці 5 викреслюємо. Для даної клітини викреслюємо нулі в клітинах (6; 4).

У підсумку отримуємо наступну матрицю:

М	46.3	6.3	22.6	1.6	36.3	[0]	46.3
40	М	[0]	38.9	65.3	103	32.8	47
[-0-]	[0]	М	19.6	32.3	67	19	23
21	43.6	24.3	М	7.3	[-0-]	2.7	[0]
[-0-]	70	37	7.3	М	[0]	25.7	42
34.7	107.7	71.7	[-0-]	[0]	М	59.4	33.7
0.7	39.8	26	5	28	61.7	М	[-0-]
47	54	30	2.3	44.3	36	[-0-]	М

Оскільки розташування нульових елементів в матриці не дозволяє утворити систему з 8-х незалежних нулів (в матриці їх тільки 6), то рішення неприпустиме.

3. Проводимо модифікацію матриці. Викреслюємо рядки і стовпці з можливо великою кількістю нульових елементів:

рядок 3, стовпець 6, рядок 6, стовпець 7, стовпець 8, рядок 2, рядок 5

Отримуємо скорочену матрицю (елементи виділені):

М	46.3	6.3	22.6	1.6	36.3	0	46.3
40	М	0	38.9	65.3	103	32.8	47
0	0	М	19.6	32.3	67	19	23
21	43.6	24.3	М	7.3	0	2.7	0
0	70	37	7.3	М	0	25.7	42
34.7	107.7	71.7	0	0	М	59.4	33.7
0.7	39.8	26	5	28	61.7	М	0

47	54	30	2.3	44.3	36	0	M
----	----	----	-----	------	----	---	---

Мінімальний елемент скороченою матриці ($\min (M, 46.3, 6.3, 22.6, 1.6, 21, 43.6, 24.3, M, 7.3, 0.7, 39.8, 26, 5, 28, 47, 54, 30, 2.3, 44.3) = 0.7$) віднімаємо з усіх її елементів:

M	45.6	5.6	21.9	0.8999 99999 99999	36.3	0	46.3
40	M	0	38.9	65.3	103	32.8	47
0	0	M	19.6	32.3	67	19	23
20.3	42.9	23.6	M	6.6	0	2.7	0
0	70	37	7.3	M	0	25.7	42
34.7	107.7	71.7	0	0	M	59.4	33.7
0	39.1	25.3	4.3	27.3	61.7	M	0
46.3	53.3	29.3	1.6	43.6	36	0	M

Потім складаємо мінімальний елемент з елементами, розташованими на перетинах викреслених рядків і стовпців:

M	45.6	5.6	21.9	0.9	36.3	0	46.3
40	M	0	38.9	65.3	103.7	33.5	47.7
0	0	M	19.6	32.3	67.7	19.7	23.7
20.3	42.9	23.6	M	6.6	0	2.7	0
0	70	37	7.3	M	0.7	26.4	42.7
34.7	107.7	71.7	0	0	M	60.1	34.4
0	39.1	25.3	4.3	27.3	61.7	M	0
46.3	53.3	29.3	1.6	43.6	36	0	M

Крок №6.

1. Проводимо редукцію матриці по рядках. У зв'язку з цим у знову отриманої матриці в кожному рядку буде як мінімум один нуль.

Потім таку ж операцію редукції проводимо за стовпцями, для чого в кожному стовпці знаходимо мінімальний елемент:

Після вирахування мінімальних елементів отримуємо повністю редуцировану матрицю.

2. Методом спроб і помилок проводимо пошук допустимого рішення, для якого всі призначення мають нульову вартість.

Фіксуємо нульове значення в клітці (1, 7). Інші нулі у рядку 1 і стовпці 7 викреслюємо. Для даної клітини викреслюємо нулі в клітинах (6; 4).

Фіксуємо нульове значення в клітці (2, 3). Інші нулі у рядку 2 і стовпці 3 викреслюємо. Для даної клітини викреслюємо нулі в клітинах (6; 4).

Фіксуємо нульове значення в клітці (3, 2). Інші нулі у рядку 3 і стовпці 2 викреслюємо. Для даної клітини викреслюємо нулі в клітинах (6; 4).

Фіксуємо нульове значення в клітці (4, 8). Інші нулі у рядку 4 і стовпці 8 викреслюємо. Для даної клітини викреслюємо нулі в клітинах (6; 4).

Фіксуємо нульове значення в клітці (5, 1). Інші нулі у рядку 5 і стовпці 1 викреслюємо. Для даної клітини викреслюємо нулі в клітинах (6; 4).

Фіксуємо нульове значення в клітці (6, 5). Інші нулі у рядку 6 і стовпці 5 викреслюємо. Для даної клітини викреслюємо нулі в клітинах (6; 4).

У підсумку отримуємо наступну матрицю:

М	45.6	5.6	21.9	0.9	36.3	[0]	46.3
40	М	[0]	38.9	65.3	103.7	33.5	47.7
[-0-]	[0]	М	19.6	32.3	67.7	19.7	23.7
20.3	42.9	23.6	М	6.6	[-0-]	2.7	[0]
[0]	70	37	7.3	М	0.7	26.4	42.7
34.7	107.7	71.7	[-0-]	[0]	М	60.1	34.4
[-0-]	39.1	25.3	4.3	27.3	61.7	М	[-0-]
46.3	53.3	29.3	1.6	43.6	36	[-0-]	М

Оскільки розташування нульових елементів в матриці не дозволяє утворити систему з 8-х незалежних нулів (в матриці їх тільки 6), то рішення неприпустиме.

3. Проводимо модифікацію матриці. Викреслюємо рядки і стовпці з можливо великою кількістю нульових елементів:

стовпець 1, рядок 4, рядок 6, стовпець 7, рядок 2, стовпець 2, рядок 7

Отримуємо скорочену матрицю (елементи виділені):

М	45.6	5.6	21.9	0.8999999999999999	36.3	0	46.3
40	М	0	38.9	65.3	103.7	33.5	47.7
0	0	М	19.6	32.3	67.7	19.7	23.7
20.3	42.9	23.6	М	6.6	0	2.7	0
0	70	37	7.3	М	0.7	26.4	42.7
34.7	107.7	71.7	0	0	М	60.1	34.4
0	39.1	25.3	4.3	27.3	61.7	М	0
46.3	53.3	29.3	1.6	43.6	36	0	М

Мінімальний елемент скороченою матриці ($\min(5.6, 21.9, 0.8999999999999999, 36.3, 46.3, М, 19.6, 32.3, 67.7, 23.7, 37, 7.3, М, 0.7, 42.7, 29.3, 1.6, 43.6, 36, М) = 0.7$) віднімаємо з усіх її елементів:

М	45.6	4.9	21.2	0.1999999999999999	35.6	0	45.6
---	------	------------	-------------	---------------------------	-------------	---	-------------

40	M	0	38.9	65.3	103.7	33.5	47.7
0	0	M	18.9	31.6	67	19.7	23
20.3	42.9	23.6	M	6.6	0	2.7	0
0	70	36.3	6.6	M	0	26.4	42
34.7	107.7	71.7	0	0	M	60.1	34.4
0	39.1	25.3	4.3	27.3	61.7	M	0
46.3	53.3	28.6	0.89	42.9	35.3	0	M

Потім складаємо мінімальний елемент з елементами, розташованими на перетинах викреслених рядків і стовпців:

M	45.6	4.9	21.2	0.2	35.6	0	45.6
40.7	M	0	38.9	65.3	103.7	34.2	47.7
0	0	M	18.9	31.6	67	19.7	23
21	43.6	23.6	M	6.6	0	3.4	0
0	70	36.3	6.6	M	0	26.4	42
35.4	108.4	71.7	0	0	M	60.8	34.4
0.7	39.8	25.3	4.3	27.3	61.7	M	0
46.3	53.3	28.6	0.9	42.9	35.3	0	M

Крок №7.

1. Проводимо редукцію матриці по рядках. У зв'язку з цим у знову отриманої матриці в кожному рядку буде як мінімум один нуль.

Потім таку ж операцію редукції проводимо за стовпцями, для чого в кожному стовпці знаходимо мінімальний елемент.

Після вирахування мінімальних елементів отримуємо повністю редуцировану матрицю.

2. Методом проб і помилок проводимо пошук допустимого рішення, для якого всі призначення мають нульову вартість.

Фіксуємо нульове значення в клітці (1, 7). Інші нулі у рядку 1 і стовпці 7 викреслюємо. Для даної клітини викреслюємо нулі в клітинах (6; 4).

Фіксуємо нульове значення в клітці (2, 3). Інші нулі у рядку 2 і стовпці 3 викреслюємо. Для даної клітини викреслюємо нулі в клітинах (6; 4).

Фіксуємо нульове значення в клітці (3, 2). Інші нулі у рядку 3 і стовпці 2 викреслюємо. Для даної клітини викреслюємо нулі в клітинах (6; 4).

Фіксуємо нульове значення в клітці (4, 8). Інші нулі у рядку 4 і стовпці 8 викреслюємо. Для даної клітини викреслюємо нулі в клітинах (6; 4).

Фіксуємо нульове значення в клітці (5, 6). Інші нулі у рядку 5 і стовпці 6 викреслюємо. Для даної клітини викреслюємо нулі в клітинах (6; 4).

Фіксуємо нульове значення в клітці (6, 5). Інші нулі у рядку 6 і стовпці 5 викреслюємо. Для даної клітини викреслюємо нулі в клітинах (6; 4).

У підсумку отримуємо наступну матрицю:

М	45.6	4.9	21.2	0.2	35.6	[0]	45.6
40.7	М	[0]	38.9	65.3	103.7	34.2	47.7
[-0-]	[0]	М	18.9	31.6	67	19.7	23
21	43.6	23.6	М	6.6	[-0-]	3.4	[0]
[-0-]	70	36.3	6.6	М	[0]	26.4	42
35.4	108.4	71.7	[-0-]	[0]	М	60.8	34.4
0.7	39.8	25.3	4.3	27.3	61.7	М	[-0-]
46.3	53.3	28.6	0.9	42.9	35.3	[-0-]	М

Оскільки розташування нульових елементів в матриці не дозволяє утворити систему з 8-х незалежних нулів (в матриці їх тільки 6), то рішення неприпустиме.

3. Проводимо модифікацію матриці. Викреслюємо рядки і стовпці з можливо великою кількістю нульових елементів:

рядок 3, стовпець 6, рядок 6, стовпець 7, стовпець 8, рядок 2, рядок 5

Отримуємо скорочену матрицю (елементи виділені):

М	45.6	4.9	21.2	0.199	35.6	0	45.6
40.7	М	0	38.9	65.3	103.7	34.2	47.7
0	0	М	18.9	31.6	67	19.7	23
21	43.6	23.6	М	6.6	0	3.4	0
0	70	36.3	6.6	М	0	26.4	42
35.4	108.4	71.7	0	0	М	60.8	34.4
0.7	39.8	25.3	4.3	27.3	61.7	М	0
46.3	53.3	28.6	0.8999	42.9	35.3	0	М

Мінімальний елемент скороченою матриці ($\min(\text{М}, 45.6, 4.9, 21.2, 0.2, 21, 43.6, 23.6, \text{М}, 6.6, 0.7, 39.8, 25.3, 4.3, 27.3, 46.3, 53.3, 28.6, 0.9, 42.9) = 0.2$) віднімаємо з усіх її елементів:

М	45.4	4.7	21	0	35.6	0	45.6
40.7	М	0	38.9	65.3	103.7	34.2	47.7
0	0	М	18.9	31.6	67	19.7	23
20.8	43.4	23.4	М	6.4	0	3.4	0
0	70	36.3	6.6	М	0	26.4	42
35.4	108.4	71.7	0	0	М	60.8	34.4
0.500	39.6	25.1	4.1	27.1	61.7	М	0
46.1	53.1	28.4	0.7	42.7	35.3	0	М

Потім складаємо мінімальний елемент з елементами, розташованими на перетинах викреслених рядків і стовпців:

М	45.4	4.7	21	0	35.6	0	45.6
40.7	М	0	38.9	65.3	103.9	34.4	47.9
0	0	М	18.9	31.6	67.2	19.9	23.2
20.8	43.4	23.4	М	6.4	0	3.4	0
0	70	36.3	6.6	М	0.19	26.6	42.2
35.4	108.4	71.7	0	0	М	61	34.6
0.5	39.6	25.1	4.1	27.1	61.7	М	0
46.1	53.1	28.4	0.7	42.7	35.3	0	М

Крок №8.

1. Проводимо редукцію матриці по рядках. У зв'язку з цим у знову отриманої матриці в кожному рядку буде як мінімум один нуль.

Потім таку ж операцію редукції проводимо за стовпцями, для чого в кожному стовпці знаходимо мінімальний елемент:

Після вирахування мінімальних елементів отримуємо повністю редуцировану матрицю.

2. Методом проб і помилок проводимо пошук допустимого рішення, для якого всі призначення мають нульову вартість.

Фіксуємо нульове значення в клітці (1, 5). Інші нулі у рядку 1 і стовпці 5 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (2, 3). Інші нулі у рядку 2 і стовпці 3 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (3, 2). Інші нулі у рядку 3 і стовпці 2 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (4, 6). Інші нулі у рядку 4 і стовпці 6 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (5, 1). Інші нулі у рядку 5 і стовпці 1 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (6, 4). Інші нулі у рядку 6 і стовпці 4 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (7, 8). Інші нулі у рядку 7 і стовпці 8 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (8, 7). Інші нулі у рядку 8 та стовпці 7 викреслюємо.

У підсумку отримуємо наступну матрицю:

М	45.4	4.7	21	[0]	35.6	[-0-]	45.6
40.7	М	[0]	38.9	65.3	103.9	34.4	47.9

[-0-]	[0]	M	18.9	31.6	67.2	19.9	23.2
20.8	43.4	23.4	M	6.4	[0]	3.4	[-0-]
[0]	70	36.3	6.6	M	0.2	26.6	42.2
35.4	108.4	71.7	[0]	[-0-]	M	61	34.6
0.5	39.6	25.1	4.1	27.1	61.7	M	[0]
46.1	53.1	28.4	0.7	42.7	35.3	[0]	M

Кількість знайдених нулів одно $k = 8$. В результаті отримуємо еквівалентну матрицю C_e :

M	45.4	4.7	21	0	35.6	0	45.6
40.7	M	0	38.9	65.3	103.9	34.4	47.9
0	0	M	18.9	31.6	67.2	19.9	23.2
20.8	43.4	23.4	M	6.4	0	3.4	0
0	70	36.3	6.6	M	0.2	26.6	42.2
35.4	108.4	71.7	0	0	M	61	34.6
0.5	39.6	25.1	4.1	27.1	61.7	M	0
46.1	53.1	28.4	0.7	42.7	35.3	0	M

4. Методом спроб і помилок визначаємо матрицю призначення X , яка дозволяє по аналогічно розташованих елементах вихідної матриці (в квадратах) обчислити мінімальну вартість призначення.

M	45.4	4.7	21	[0]	35.6	[-0-]	45.6
40.7	M	[0]	38.9	65.3	103.9	34.4	47.9
[-0-]	[0]	M	18.9	31.6	67.2	19.9	23.2
20.8	43.4	23.4	M	6.4	[0]	3.4	[-0-]
[0]	70	36.3	6.6	M	0.2	26.6	42.2
35.4	108.4	71.7	[0]	[-0-]	M	61	34.6
0.5	39.6	25.1	4.1	27.1	61.7	M	[0]
46.1	53.1	28.4	0.7	42.7	35.3	[0]	M

$$C_{\min} = 34 + 36 + 34 + 45 + 36 + 45 + 32.3 + 32.3 = 294.6$$

Шлях: (3;2), (1;5), (2;3), (4;6), (5;1), (6;4), (7;8), (8;7)

Додаток Л

Розв'язок задачі комівояжера Венгерським методом для 5 кластер
Вихідна матриця має вигляд:

M	75.2	124	121	50.1	107	87	97
75.2	M	49	48.3	39	24	48	46
124	49	M	49	88.2	49	43	53
121	48.3	49	M	84.5	24	31	56
50.1	39	88.2	84.5	M	60	53	52
107	24	49	24	60	M	33.2	60
87	48	43	31	53	33.2	M	75
97	46	53	56	52	60	75	M

Крок №1.

1. Проводимо редукцію матриці по рядках. У зв'язку з цим у знову отриманої матриці в кожному рядку буде як мінімум один нуль.

М	25.1	73.9	70.9	0	56.9	36.9	46.9	50.1
51.2	М	25	24.3	15	0	24	22	24
81	6	М	6	45.2	6	0	10	43
97	24.3	25	М	60.5	0	7	32	24
11.1	0	49.2	45.5	М	21	14	13	39
83	0	25	0	36	М	9.2	36	24
56	17	12	0	22	2.2	М	44	31
51	0	7	10	6	14	29	М	46

Потім таку ж операцію редукції проводимо за стовпцями, для чого в кожному стовпці знаходимо мінімальний елемент:

М	25.1	66.9	70.9	0	56.9	36.9	36.9
40.1	М	18	24.3	15	0	24	12
69.9	6	М	6	45.2	6	0	0
85.9	24.3	18	М	60.5	0	7	22
0	0	42.2	45.5	М	21	14	3
71.9	0	18	0	36	М	9.2	26
44.9	17	5	0	22	2.2	М	34
39.9	0	0	10	6	14	29	М
11.1	0	7	0	0	0	0	10

Після вирахування мінімальних елементів отримуємо повністю редуцировану матрицю.

2. Методом проб і помилок проводимо пошук допустимого рішення, для якого всі призначення мають нульову вартість.

Фіксуємо нульове значення в клітці (1, 5). Інші нулі у рядку 1 і стовпці 5 викреслюємо. Для даної клітини викреслюємо нулі в клітинах (3; 7).

Фіксуємо нульове значення в клітці (2, 6). Інші нулі у рядку 2 і стовпці 6 викреслюємо. Для даної клітини викреслюємо нулі в клітинах (3; 7).

Фіксуємо нульове значення в клітці (3, 8). Інші нулі у рядку 3 і стовпці 8 викреслюємо. Для даної клітини викреслюємо нулі в клітинах (3; 7).

У підсумку отримуємо наступну матрицю:

М	25.1	66.9	70.9	[0]	56.9	36.9	36.9
40.1	М	18	24.3	15	[0]	24	12
69.9	6	М	6	45.2	6	[-0-]	[0]
85.9	24.3	18	М	60.5	[-0-]	7	22
0	0	42.2	45.5	М	21	14	3
71.9	0	18	0	36	М	9.2	26
44.9	17	5	0	22	2.2	М	34

39.9	0	0	10	6	14	29	М
------	---	---	----	---	----	----	---

Оскільки розташування нульових елементів в матриці не дозволяє утворити систему з 8-х незалежних нулів (в матриці їх тільки 3), то рішення неприпустиме.

3. Проводимо модифікацію матриці. Викреслюємо рядки і стовпці з можливо великою кількістю нульових елементів:

стовпець 2, рядок 3, стовпець 4, стовпець 6, рядок 1, рядок 5, рядок 8

Отримуємо скорочену матрицю (елементи виділені):

М	25.1	66.9	70.9	0	56.9	36.9	36.9
40.1	М	18	24.3	15	0	24	12
69.9	6	М	6	45.2	6	0	0
85.9	24.3	18	М	60.5	0	7	22
0	0	42.2	45.5	М	21	14	3
71.9	0	18	0	36	М	9.2	26
44.9	17	5	0	22	2.2	М	34
39.9	0	0	10	6	14	29	М

Мінімальний елемент скороченою матриці ($\min(40.1, 18, 15, 24, 12, 85.9, 18, 60.5, 7, 22, 71.9, 18, 36, 9.2, 26, 44.9, 5, 22, \text{М}, 34) = 5$) віднімаємо з усіх її елементів:

М	25.1	66.9	70.9	0	56.9	36.9	36.9
35.1	М	13	24.3	10	0	19	7
69.9	6	М	6	45.2	6	0	0
80.9	24.3	13	М	55.5	0	2	17
0	0	42.2	45.5	М	21	14	3
66.9	0	13	0	31	М	4.2	21
39.9	17	0	0	17	2.2	М	29
39.9	0	0	10	6	14	29	М

Потім складаємо мінімальний елемент з елементами, розташованими на перетинах викреслених рядків і стовпців:

М	30.1	66.9	75.9	0	61.9	36.9	36.9
35.1	М	13	24.3	10	0	19	7
69.9	11	М	11	45.2	11	0	0
80.9	24.3	13	М	55.5	0	2	17
0	5	42.2	50.5	М	26	14	3
66.9	0	13	0	31	М	4.2	21
39.9	17	0	0	17	2.2	М	29
39.9	5	0	15	6	19	29	М

Крок №2.

1. Проводимо редукцію матриці по рядках. У зв'язку з цим у знову отриманої матриці в кожному рядку буде як мінімум один нуль.

Потім таку ж операцію редукції проводимо за стовпцями, для чого в кожному стовпці знаходимо мінімальний елемент:

Після вирахування мінімальних елементів отримуємо повністю редуцировану матрицю.

2. Методом спроб і помилок проводимо пошук допустимого рішення, для якого всі призначення мають нульову вартість.

Фіксуємо нульове значення в клітці (1, 5). Інші нулі у рядку 1 і стовпці 5 викреслюємо. Для даної клітини викреслюємо нулі в клітинах (3; 7).

Фіксуємо нульове значення в клітці (2, 6). Інші нулі у рядку 2 і стовпці 6 викреслюємо. Для даної клітини викреслюємо нулі в клітинах (3; 7).

Фіксуємо нульове значення в клітці (3, 8). Інші нулі у рядку 3 і стовпці 8 викреслюємо. Для даної клітини викреслюємо нулі в клітинах (3; 7). В итоге получаем наступеу матрицю:

М	30.1	66.9	75.9	[0]	61.9	36.9	36.9
35.1	М	13	24.3	10	[0]	19	7
69.9	11	М	11	45.2	11	[-0-]	[0]
80.9	24.3	13	М	55.5	[-0-]	2	17
0	5	42.2	50.5	М	26	14	3
66.9	0	13	0	31	М	4.2	21
39.9	17	0	0	17	2.2	М	29
39.9	5	0	15	6	19	29	М

Оскільки розташування нульових елементів в матриці не дозволяє утворити систему з 8-х незалежних нулів (в матриці їх тільки 3), то рішення неприпустиме.

3. Проводимо модифікацію матриці. Викреслюємо рядки і стовпці з можливо великою кількістю нульових елементів:

рядок 3, стовпець 3, рядок 6, стовпець 6, рядок 1, стовпець 1, рядок 7

Отримуємо скорочену матрицю (елементи виділені):

М	30.1	66.9	75.9	0	61.9	36.9	36.9
35.1	М	13	24.3	10	0	19	7
69.9	11	М	11	45.2	11	0	0
80.9	24.3	13	М	55.5	0	2	17
0	5	42.2	50.5	М	26	14	3
66.9	0	13	0	31	М	4.2	21
39.9	17	0	0	17	2.2	М	29
39.9	5	0	15	6	19	29	М

Мінімальний елемент скороченою матриці ($\min (M, 24.3, 10, 19, 7, 24.3, M, 55.5, 2, 17, 5, 50.5, M, 14, 3, 5, 15, 6, 29, M) = 2$) віднімаємо з усіх її елементів:

M	30.1	66.9	75.9	0	61.9	36.9	36.9
35.1	M	13	22.3	8	0	17	5
69.9	11	M	11	45.2	11	0	0
80.9	22.3	13	M	53.5	0	0	15
0	3	42.2	48.5	M	26	12	1
66.9	0	13	0	31	M	4.2	21
39.9	17	0	0	17	2.2	M	29
39.9	3	0	13	4	19	27	M

Потім складаємо мінімальний елемент з елементами, розташованими на перетинах викреслених рядків і стовпців:

M	30.1	68.9	75.9	0	63.9	36.9	36.9
35.1	M	13	22.3	8	0	17	5
71.9	11	M	11	45.2	13	0	0
80.9	22.3	13	M	53.5	0	0	15
0	3	42.2	48.5	M	26	12	1
68.9	0	15	0	31	M	4.2	21
41.9	17	2	0	17	4.2	M	29
39.9	3	0	13	4	19	27	M

Крок №3.

1. Проводимо редукцію матриці по рядках. У зв'язку з цим у знову отриманої матриці в кожному рядку буде як мінімум один нуль.

Потім таку ж операцію редукції проводимо за стовпцями, для чого в кожному стовпці знаходимо мінімальний елемент:

Після вирахування мінімальних елементів отримуємо повністю редуцировану матрицю.

2. Методом спроб і помилок проводимо пошук допустимого рішення, для якого всі призначення мають нульову вартість.

Фіксуємо нульове значення в клітці (1, 5). Інші нулі у рядку 1 і стовпці 5 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (2, 6). Інші нулі у рядку 2 і стовпці 6 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (3, 8). Інші нулі у рядку 3 і стовпці 8 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (4, 7). Інші нулі у рядку 4 і стовпці 7 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (5, 1). Інші нулі у рядку 5 і стовпці 1 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (6, 2). Інші нулі у рядку 6 і стовпці 2 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (7, 4). Інші нулі у рядку 7 і стовпці 4 викреслюємо.

Фіксуємо нульове значення в клітці (8, 3). Інші нулі у рядку 8 та стовпці 3 викреслюємо.

У підсумку отримуємо наступну матрицю:

М	30.1	68.9	75.9	[0]	63.9	36.9	36.9
35.1	М	13	22.3	8	[0]	17	5
71.9	11	М	11	45.2	13	[-0-]	[0]
80.9	22.3	13	М	53.5	[-0-]	[0]	15
[0]	3	42.2	48.5	М	26	12	1
68.9	[0]	15	[-0-]	31	М	4.2	21
41.9	17	2	[0]	17	4.2	М	29
39.9	3	[0]	13	4	19	27	М

Кількість знайдених нулів одно $k = 8$. В результаті отримуємо еквівалентну матрицю C_e :

М	30.1	68.9	75.9	0	63.9	36.9	36.9
35.1	М	13	22.3	8	0	17	5
71.9	11	М	11	45.2	13	0	0
80.9	22.3	13	М	53.5	0	0	15
0	3	42.2	48.5	М	26	12	1
68.9	0	15	0	31	М	4.2	21
41.9	17	2	0	17	4.2	М	29
39.9	3	0	13	4	19	27	М

4. Методом спроб і помилок визначаємо матрицю призначення X , яка дозволяє по аналогічно розташованих елементах вихідної матриці (в квадратах) обчислити мінімальну вартість призначення.

М	30.1	68.9	75.9	[0]	63.9	36.9	36.9
35.1	М	13	22.3	8	[0]	17	5
71.9	11	М	11	45.2	13	[-0-]	[0]
80.9	22.3	13	М	53.5	[-0-]	[0]	15
[0]	3	42.2	48.5	М	26	12	1

68.9	[0]	15	[-0-]	31	М	4.2	21
41.9	17	2	[0]	17	4.2	М	29
39.9	3	[0]	13	4	19	27	М

$$C_{\min} = 53 + 50.1 + 24 + 31 + 50.1 + 24 + 31 + 53 = 316.2$$

Шлях: (3;8), (1;5), (2;6), (4;7), (5;1), (6;2), (7;4), (8;3)