

известных коэффициентов $c_n^{(s)(0)}$ ($s=1,2$), в нулевой итерации которого полагается $\tilde{C}_n^{(s)} = 0$ ($s=1,2$).

После нахождения искомым коэффициентов разложения, определяются дополнительные напряжения на всех контурах по формулам:

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(1)} &= \operatorname{Re} \left\{ \varphi_1'(z) - e^{2i\theta} \left[(\bar{z} - z)\varphi_1'(z) - z'\varphi_1'(z) + \chi_1'(z) \right] \right\} \\ \sigma_\theta^{(1)} &= \operatorname{Re} \left\{ e^{2i\theta} \left[(\bar{z} - z)\varphi_1'(z) - z'\varphi_1'(z) + \chi_1'(z) \right] + 2\varphi_1'(z) \right\} \\ \tau_{r\theta}^{(1)} &= \operatorname{Im} \left\{ e^{2i\theta} \left[(\bar{z} - z)\varphi_1''(z) - z'\varphi_1'(z) + \chi_1'(z) \right] \right\}\end{aligned}$$

Найденные дополнительные напряжения суммируются с соответствующими начальными напряжениями.

На основе полученного решения разработан полный алгоритм, и в настоящее время составляется программное обеспечение.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мусхелишвили И.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
2. Шерман Д.И. Об одном методе решения некоторых задач теории упругости для двухсвязных областей. – «ДАН СССР», 1947.
3. Фотиева Н.Н., Козлов А.Н. Расчет крепи параллельных выработок в сейсмических районах. – М.: Недра, 1992.

УДК 622.28

Саммаль С.А. Тульский государственный университет. Россия

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ОБДЕЛОК ТОННЕЛЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

С целью математического моделирования напряженного состояния обделок тоннелей произвольного поперечного сечения при динамических воздействиях рассматривается плоская стационарная динамическая задача теории упругости о распространении плоской продольной волны сжатия или сдвига в однородной изотропной линейно - деформируемой среде, ослабленной отверстием произвольной формы, подкрепленным кольцом из другого материала. Предполагается, что падающая волна является гармонической, имеет круговую частоту $\tilde{\omega}_0$ и

распространяется по оси Ox' , составляющей произвольный угол β с вертикальной осью Ox (рис. 1).

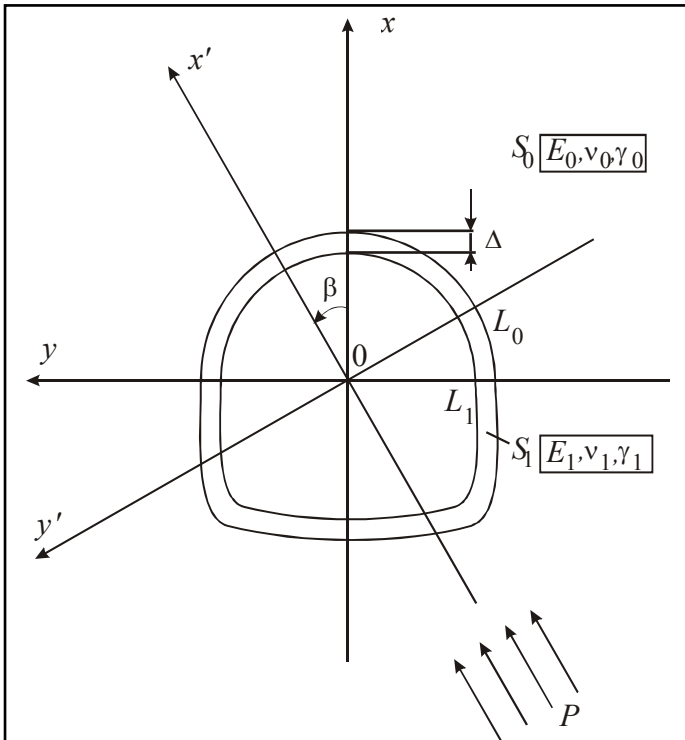


Рис. 1. Расчетная схема

Здесь однородная изотропная среда S_0 , обладающая удельным весом γ_0 и деформационными характеристиками – модулем деформации E_0 и коэффициентом Пуассона ν_0 моделирует массив пород. Кольцо S_1 толщиной Δ , ограниченное контурами L_0 и L_1 , материал которого имеет удельный вес γ_1 и деформационные характеристики E_1, ν_1 , моделирует обделку тоннеля.

Кольцо S_1 и среда S_0 деформируются совместно, то есть на линии контакта L_0 выполняются условия непрерывности векторов смещений и напряжений. Внут-

ренний контур кольца L_1 свободен от внешних сил.

Таким образом, граничные условия имеют вид:

на L_0

$$\bar{U}^{(1)} = \bar{U}^{(0)}; \quad (1)$$

$$\sigma_n^{(1)} = \sigma_n^{(0)}, \tau_{ns}^{(1)} = \tau_{ns}^{(0)}, \quad (2)$$

- на L_1

$$\sigma_n^{(1)} = 0, \tau_{ns}^{(1)} = 0 \quad (3)$$

где $\bar{U}^{(j)}(U_r, U_\theta)$ - векторы смещений соответствующих граничных точек, принадлежащих контактирующим областям S_j ($j = 0, 1$); $\sigma_n^{(j)}, \tau_{ns}^{(j)}$ - соответственно нормальные и касательные напряжения.

Для решения поставленных динамических задач теории упругости вводятся потенциалы $\tilde{\varphi}^{(j)}$ и $\tilde{\psi}^{(j)}$, связанные с напряжениями и смещениями областей S_j ($j = 0, 1$), которые должны удовлетворять волновым уравнениям Гельмгольца:

$$(\nabla^2 + \omega_j^2 \xi_j^2) \tilde{\varphi}^{(j)} = 0; \quad (\nabla^2 + \omega_j^2) \tilde{\psi}^{(j)} = 0 \quad (4)$$

где ∇^2 - оператор Лапласа, ξ_j ($j=0, 1$) - отношение скоростей распространения волн сдвига $c_2^{(j)}$ и сжатия $c_1^{(j)}$ в среде S_0 ($j=0$) и области S_1 ($j=1$), выражающееся формулой ($j=0, 1$):

$$\xi_j = \sqrt{\frac{1-2\nu_j}{2(1-\nu_j)}}; \quad (5)$$

здесь ω_j - безразмерная частота колебаний частиц в области S_j ($j=0, 1$), определяющаяся формулой $\omega_j = \tilde{R}\tilde{\omega}/c_2^{(j)}$.

Как известно, решение уравнений (4), имеющее физический смысл, получается после умножения найденных из них потенциалов $\tilde{\varphi}^{(j)}$, $\tilde{\psi}^{(j)}$ на $e^{-i\tilde{\omega}t}$ (t - время, с) и выделения действительной части.

Полные напряжения и смещения в среде S_0 представляются как суммы напряжений $\sigma^{(0)(0)}$ и смещений $U^{(0)(0)}$ в падающей волне (в среде без подкрепленного отверстия) и дополнительных напряжений $\tilde{\sigma}^{(0)}$ и смещений $\tilde{U}^{(0)}$, вызванных распространением волн, отраженных от границы L_0 , то есть

$$\sigma^{(0)} = \sigma^{(0)(0)} + \tilde{\sigma}^{(0)}; \quad U^{(0)} = U^{(0)(0)} + \tilde{U}^{(0)}, \quad (6)$$

здесь символом σ обозначены все компоненты тензора напряжений, а символом U - составляющие вектора смещений.

Таким образом, полным напряжениям и смещениям в среде S_0 в окрестности кольца S_1 соответствуют суммы потенциалов падающей и отраженных волн т.е.

$$\varphi^{(0)} = \varphi^{(0)(0)} + \tilde{\varphi}^{(0)}, \quad \psi^{(0)} = \psi^{(0)(0)} + \tilde{\psi}^{(0)}. \quad (7)$$

Далее, вводя для сохранения общности записи обозначения

$$\varphi^{(1)} = \tilde{\varphi}^{(1)}; \quad \psi^{(1)} = \tilde{\psi}^{(1)}, \quad (8)$$

удается воспользоваться известными формулами для напряжений и смещений в областях S_j ($j=0, 1$) в полярной системе координат r, θ (r - безразмерный радиус $r = \tilde{r}/\tilde{R}$).

После перехода к полярной системе координат с помощью известных формул преобразования напряжений условия (1), (2) могут быть представлены вы-

ражениями вида ($j = 0, 1$):

$$\sum_{m=j}^1 (-1)^{m+1} (\sigma_r^{(m)} + \tilde{C}_j (\sigma_r^{(m)} - \sigma_\theta^{(m)}) + 2\tilde{S}_j \tau_{r\theta}^{(m)}) = 0;$$

$$\sum_{m=j}^1 (-1)^{m+1} (\tau_{r\theta}^{(1)} - \tilde{S}_j (\sigma_r^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)}) + 2\tilde{C}_j \tau_{r\theta}^{(1)}) = 0; \quad (9)$$

где $\tilde{C}_j = \frac{1}{2}(\cos 2\alpha_j - 1)$, $\tilde{S}_j = \frac{1}{2} \sin 2\alpha_j$, α_j - соответствующий угол между радиальным направлением и направлением внешней нормали к контуру L_j ($j = 0, 1$).

Далее, для решения поставленных динамических задач применен метод возмущения формы границы. С этой целью с помощью рациональной функции $\tilde{\omega}(\zeta)$ производится конформное отображение внешности круга радиуса $R_1 < 1$ в плоскости переменного ζ ($\zeta = re^{i\gamma}$) на внешность контура L_1 в плоскости z таким образом, чтобы контуру L_0 заданной формы в плоскости z ($z = re^{i\theta}$) соответствовала окружность единичного радиуса $R_0 = 1$.

Отображающая функция представляется в виде

$$\Omega(\zeta) = \frac{\tilde{\omega}(\zeta)}{\tilde{R}} = \zeta + \varepsilon f(\zeta), \quad (10)$$

где

$$f(\zeta) = \sum_{v=1}^k \eta_v \zeta^{1-v},$$

ε - малый вещественный параметр, изменяющийся в интервале $0 < \varepsilon < 1$, характеризующий степень отклонения формы внутреннего контура кольца от круговой, k - число членов ряда отображающей функции, необходимое для обеспечения требуемой точности конформного преобразования (ранее было показано, что для достижения приемлемой точности достаточно принимать $k = 5$).

С помощью формулы (10) переменные r и θ , а также все используемые при решении задачи функции этих переменных можно представить в виде рядов по степеням ε

$$x = \sum_{n=0s=-kn}^{\infty} \sum_{s=-kn}^{kn} x_{n,s} e^{is\gamma} \varepsilon^n, \quad (11)$$

где величина x задается своими коэффициентами разложения $x_{n,s}$, причем $x_{0,0}$ принимает значения либо 0, либо 1.

Представление вида (11) позволяет производить все основные операции с

рассматриваемыми величинами: умножение, деление, сложение и т.д.

С целью облегчения дальнейших преобразований на первом этапе решения искомые потенциалы (7), (8) представляются в форме разложений (11) по степеням $e^{i\theta}$.

Так, потенциалы падающей волны представляются в общем (для обеих рассмотренных задач) виде

$$\begin{aligned}\varphi^{(0)(0)}(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \varepsilon^n \varphi_{n,s}^{(1)(0)} J_s(\omega_0 \xi_0 r) e^{is\theta}, \\ \psi^{(0)(0)}(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \varepsilon^n \psi_{n,s}^{(1)(0)} J_s(\omega_0 r) e^{is\theta},\end{aligned}\quad (12)$$

где $\varphi_{n,s}^{(1)(0)}$, $\psi_{n,s}^{(1)(0)}$ - коэффициенты, задаваемые в каждом n -ном приближении.

В свою очередь, потенциалы в отраженной волне записываются в форме

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}^{(0)}(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \varepsilon^n \varphi_{n,s}^{(2)(0)} H_s(\omega_0 \xi_0 r) e^{is\theta}, \\ \tilde{\psi}^{(0)}(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \varepsilon^n \psi_{n,s}^{(2)(0)} H_s(\omega_0 r) e^{is\theta},\end{aligned}\quad (13)$$

где $\varphi_{n,s}^{(2)(0)}$, $\psi_{n,s}^{(2)(0)}$ - неизвестные коэффициенты n -ного приближения, подлежащие определению.

Наконец, принимая во внимание, что $H_n(z) = J_n(z) + iY_n(z)$, выражения для потенциалов в среде S_0 ($j = 0$) и в кольце S_1 ($j = 1$) представляются в виде

$$\varphi^{(j)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=-N}^N \varphi_{n,s}^{(1)(j)} J_s(\omega_j \xi_j r) e^{is\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \varepsilon^n \varphi_{n,s}^{(2)(j)} H_s(\omega_j \xi_j r) e^{is\theta},\quad (14)$$

$$\psi^{(j)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=-N}^N \psi_{n,s}^{(1)(j)} J_s(\omega_j r) e^{is\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \varepsilon^n \psi_{n,s}^{(2)(j)} H_s(\omega_j r) e^{is\theta}.$$

Далее на основании (10), (11) вводятся следующие функции ($j = 0, 1$):

$$a^{(j)} = \left[\frac{\Omega(\zeta)}{\zeta} - 1 \right] \Big|_{\zeta=R_j\sigma} = \left[\frac{\Omega(R_j\sigma)}{R_j\sigma} - 1 \right] = \sum_{s=-k}^{-1} \varepsilon \eta_{-s} R_j^s e^{is\gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=-kn}^{kn} \varepsilon^n a_{n,s}^{(j)} e^{is\gamma},$$

$$b^{(j)} = [\Omega'(\zeta)]_{\zeta=R_j\sigma} - 1 = \Omega'(R_j\sigma) - 1 = \sum_{s=-k}^{-1} \varepsilon(1+s)\eta_{-s} R_j^s e^{s\gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=-kn}^{kn} \varepsilon^n b_{n,s}^{(j)} e^{is\gamma},$$

где коэффициенты $a_{n,s}^{(j)}, b_{n,s}^{(j)}$ определяются выражениями:

$$a_{n,s}^{(j)} = \begin{cases} R_j^s \eta_{-s} & \text{при } n=1; -k \leq s < 0 \\ 0 & \text{при остальных значениях } n, s \end{cases},$$

$$b_{n,s}^{(j)} = \begin{cases} (s+1)R_j^s \eta_{-s} & \text{при } n=1; -k \leq s < 0 \\ 0 & \text{при остальных значениях } n, s \end{cases},$$

В результате, используя представления

$$r_j = |\Omega(\zeta)|_{\rho=R_j} = R_j \sqrt{1 + a^{(j)} + \bar{a}^{(j)} + a^{(j)} \bar{a}^{(j)}}, \quad (15)$$

$$\theta_j = \gamma_j + \frac{1}{2i} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-\bar{a}^{(j)})^{\nu} - (-a^{(j)})^{\nu}}{\nu}$$

удаётся воспользоваться известным приемом разложения произвольной функции $\Phi(r, \theta)$ в ряд Тейлора:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[(r - \rho) \frac{\partial}{\partial \rho} + (\theta - \gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} \right]^n \Phi(\rho, \gamma). \quad (16)$$

Таким образом, следуя методу возмущения формы границы, построение разрешающих уравнений относительно величин $\varphi_{n,s}^{(m)(j)}, \psi_{n,s}^{(m)(j)}$ (при этом учитывается, что, как было указано выше, величины $\varphi_{n,s}^{(1)(0)}, \psi_{n,s}^{(1)(0)}$ являются известными) осуществляется путем последовательной подстановки представлений (12)-(14) в известные формулы для напряжений и смещений, а затем - в условия (9). Далее, в результате использования приема разложения полученных выражений в ряды (16) при $\rho = R_q$ ($q = 0, 1$) и последующего приравнивания в правых и левых частях образованных равенств коэффициентов при одинаковых степенях параметров $\varepsilon, e^{i\gamma}$, удаётся построить итерационный процесс, в каждом n -ном приближении которого составляется и решается s независимых систем размерностью 6×6 линейных алгебраических уравнений относительно искоемых коэффициентов $\varphi_{n,s}^{(2)(0)}, \psi_{n,s}^{(2)(0)}, \varphi_{n,s}^{(r)(1)}, \psi_{n,s}^{(r)(1)}$ ($r = 1, 2$) с правыми частями, уточняемыми на основе предыдущих итераций.

Найденные коэффициенты разложения потенциалов позволяют перейти к определению напряженно-деформированного состояния областей S_j ($j = 0,1$).

Таким образом, существенным преимуществом описанного решения является то, что, будучи основанным на получении рекуррентных соотношений, оно позволяет построить итерационный процесс вычисления искомых коэффициентов разложения потенциалов, рассматривая любое количество приближений, обеспечивая необходимую точность расчета.

Описанное решение реализовано в виде компьютерного программного комплекса, позволяющего производить эффективные расчеты с целью определения максимальных по абсолютной величине динамических напряжений, возникающих в обделке за все время прохождения волны.

УДК 622.28

Масленников С.А., ассистент каф. ППГС и СМ, ШИ (Ф) ЮРГТУ (НПИ)

ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ БЕТОНОВ С ПОВЫШЕННЫМ МОДУЛЕМ ДЕФОРМАЦИИ В ЧУГУННО-БЕТОННОЙ КРЕПИ ВЕРТИКАЛЬНЫХ СТВОЛОВ

Рассмотрен вопрос экономической эффективности применения при строительстве вертикальных стволов, закрепляемых чугунно-бетонной крепью, бетонов с повышенным модулем деформации.

Для оценки экономической эффективности применения в комбинированной чугунно-бетонной крепи бетонов с повышенным модулем деформации были выделены наиболее распространённые условия сооружения стволов с указанной крепью, и для них выполнен соответствующий расчёт. Сравнивались варианты замены обычного бетона с толщиной слоя 0,5; 0,6; 0,7 м, на, дающий при применении равную или большую суммарную несущую способность крепи, высокомодульный, с толщиной слоя соответственно, - 0,3, 0,35, 0,4 м, при диаметре стволов в свету от 6 до 9 м, проходимых в породах прочностью по шкале проф. Протодьяконова $f=2-3$; 4-6; 7-9. При расчёте предполагалось, что экономия средств будет происходить за счёт уменьшения:

1. объёма используемых материалов (бетона);
2. объёмов выполнения работ (по разрушению породы, бурению, погрузке);
3. сроков строительства.

Изучая экономический эффект от внедрения предлагаемых конструктивных и технологических решений, в указанном выше порядке, были получены следующие результаты.

1. Экономия средств от сокращения объёма бетона с толщиной слоя в пределах от 0,5 до 0,7 м для обычных и 0,25 до 0,35 м для высокомодульных (с учё-