

1. ВЕРТИКАЛЬНАЯ РАСПРЕДЕЛЕННАЯ НАГРУЗКА

В настоящем разделе изложены материалы исследований, направленных на построение общего и частных решений задачи об определении напряженно-деформированного состояния грунтового основания, внутри которого приложена осесимметричная вертикальная распределенная нагрузка.

Материалы исследований изложены в такой последовательности.

Вначале было получено решение для произвольной осесимметричной вертикальной нагрузки. После этого рассмотрены законы изменения нагрузки по степенному закону и по закону функции Бесселя первого рода с нулевым индексом.

Далее была выполнена апробация полученных таким образом результатов.

1.1. Постановка задачи. Граничные условия

Задача исследований была сформулирована так. Внутри линейного упругого изотропного полупространства [4, 5] на глубине h от его дневной поверхности приложена распределенная осесимметричная нагрузка $q(r)$ (рис. 1). Нагрузка распределена по площади круга радиуса R , а закон ее изменения подчиняется либо зависимости вида

$$q(r) = \begin{cases} q_0 \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^n & \text{при } r \leq R, \\ 0 & \text{при } r > R \end{cases} \quad (1)$$

либо зависимости вида

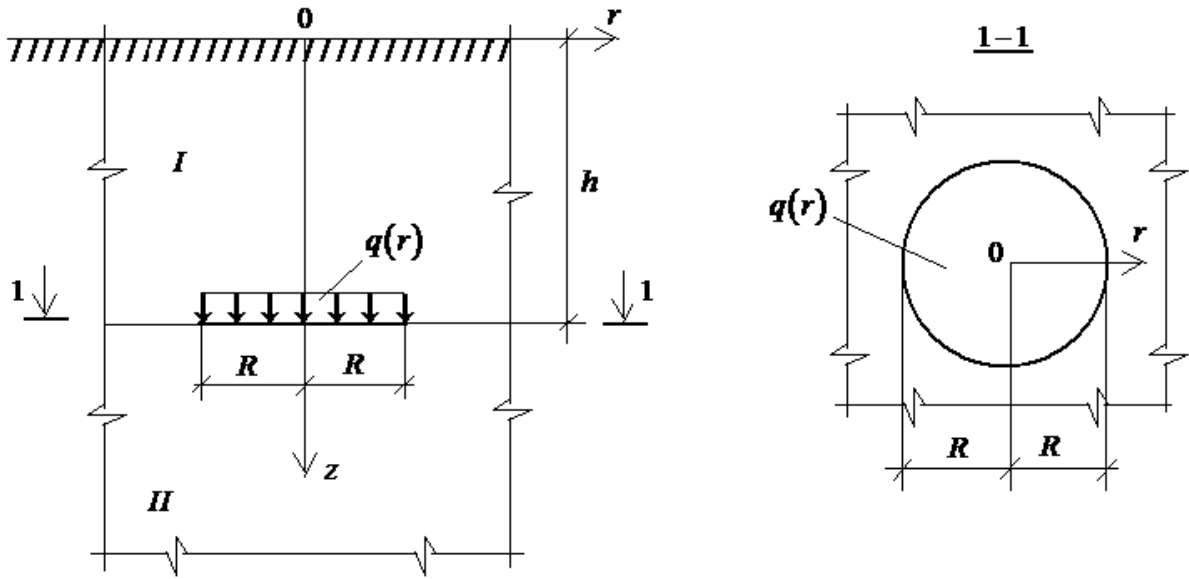


Рис. 1. К определению напряженно-деформированного состояния полупространства, находящегося под воздействием распределенной вертикальной нагрузки:

I – область основания, расположенная выше отметки приложения нагрузки; *II* – то же, ниже отметки приложения нагрузки

$$q(r) = \begin{cases} q_0 \cdot J_0\left(\mu_i \cdot \frac{r}{R}\right) \text{ при } r \leq R \\ 0 \text{ при } r > R \end{cases} . \quad (2)$$

Здесь $q(r)$ – зависимость от радиальной координаты приложенной внутри полупространства на глубине $z = h$ распределенной нагрузки (рис. 1); q_0 – коэффициент пропорциональности (имеет размерность МПа); r – текущая координата; R – радиус приложенной внутри основания распределенной нагрузки (рис. 1); $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ – показатель степени (целое число); $J_0(x)$ – функция Бесселя первого рода с нулевым индексом; μ_i – i -тый нуль функции Бесселя [3].

Требуется определить напряженно-деформированное состояние

полупространства, находящегося под воздействием распределенной в соответствии с формулами (1) и (2) нагрузки.

Из схемы на рисунке 1 вытекает, что верхняя граница основания свободна от напряжений. В этой связи имеем такие граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz}(0, r) &= 0; \\ \tau_{rz}(0, r) &= 0. \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

Здесь σ_{zz} – нормальное вертикальное напряжение; τ_{rz} – касательное напряжение.

Из условий непрерывности напряжений и перемещений на границе контакта областей *I* и *II* (т.е. при $z = h$) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\sigma_{zz}(h - \varepsilon, r) - \sigma_{zz}(h + \varepsilon, r)] &= q(r); \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\tau_{rz}(h - \varepsilon, r) - \tau_{rz}(h + \varepsilon, r)] &= 0; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [U(h - \varepsilon, r) - U(h + \varepsilon, r)] &= 0; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [W(h - \varepsilon, r) - W(h + \varepsilon, r)] &= 0. \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

Здесь U – перемещение в радиальном направлении; W – то же, в вертикальном; ε – некоторое имеющее размерность длины весьма малое число.

Кроме того, поскольку находящаяся под воздействием внешней нагрузки область основания имеет ограниченные размеры, все напряжения и перемещения при неограниченном возрастании радиуса r и глубины z должны тождественно равняться нулю.

1.2. Алгоритм построения и результаты общего решения задачи

Для построения общего решения используем изложенный в работах [4, 6, 7, 8, 9] алгоритм.

Для определения напряженно-деформированного состояния области I введем в рассмотрение функцию вида:

$$F_1 = \int_0^{\infty} J_0(\alpha \cdot r) \cdot \begin{bmatrix} a_1 \cdot e^{(\alpha \cdot z)} + a_2 \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} + \\ + a_3 \cdot z \cdot e^{(\alpha \cdot z)} + a_4 \cdot z \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} \end{bmatrix} \cdot d\alpha, \quad (5)$$

где a_1, a_2, a_3 и a_4 – подлежащие определению путем удовлетворения граничным условиям коэффициенты, параметрически зависящие от параметра α .

При этом для определения напряженно-деформированного состояния области II введем в рассмотрение функцию вида:

$$F_2 = \int_0^{\infty} J_0(\alpha \cdot r) \cdot \left[a_5 \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} + a_6 \cdot z \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} \right] \cdot d\alpha, \quad (6)$$

где a_5 и a_6 – подлежащие определению путем удовлетворения граничным условиям коэффициенты, параметрически зависящие от параметра α .

Эти функции и их производные по переменной r принимают нулевые значения при $r \rightarrow \infty$. При этом функция F_2 и ее производные принимают нулевые значения при неограниченном возрастании глубины z .

Для удовлетворения граничным условиям (3) и (4) необходимо знать вертикальное нормальное напряжение σ_{zz} , касательное напряжение τ_{rz} , а также радиальное перемещение U и вертикальное перемещение W .

Согласно [9] перемещения и напряжения в основании найдем с использованием формул вида:

$$\sigma_{rr}^{1,2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \cdot \Delta F_{1,2} - \frac{\partial^2 F_{1,2}}{\partial r^2} \right);$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{1,2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \cdot \Delta F_{1,2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F_{1,2}}{\partial r} \right);$$

$$\sigma_{zz}^{1,2} = \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \nu) \cdot \Delta F_{1,2} - \frac{\partial^2 F_{1,2}}{\partial z^2} \right];$$

$$\tau_{rz}^{1,2} = \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - \nu) \cdot \Delta F_{1,2} - \frac{\partial^2 F_{1,2}}{\partial z^2} \right];$$

$$U^{1,2} = -\frac{1}{2 \cdot G} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \cdot F_{1,2};$$

$$W^{1,2} = \frac{1}{2 \cdot G} \cdot \left[2 \cdot (1 - \nu) \cdot \Delta F_{1,2} - \frac{\partial^2 F_{1,2}}{\partial z^2} \right]; \quad (7)$$

Здесь G – модуль сдвига основания [4]; ν – коэффициент Пуассона основания [4]; σ_{rr} – радиальное нормальное напряжение; $\sigma_{\theta\theta}$ – то же, тангенциальное; σ_{zz} – то же, вертикальное; τ_{rz} – то же, касательное; U – радиальное напряжение; W – то же, вертикальное. При этом индексами "1" и "2" обозначены напряжения и перемещения, соответствующие I и II областям основания (см. рис. 1).

Далее с использованием равенств (5) и (7) найдем необходимые для удовлетворения граничных условий (3) и (4) напряжения и перемещения. Для области I с использованием формул (5), (6) и (7) найдем:

$$U^1 = -\frac{1}{2 \cdot G} \cdot \int_0^{\infty} J_1(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot \begin{bmatrix} -a_1 \cdot \alpha \cdot e^{(\alpha \cdot z)} + a_2 \cdot \alpha \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} - \\ -a_3 \cdot e^{(\alpha \cdot z)} - a_3 \cdot z \cdot \alpha \cdot e^{(\alpha \cdot z)} - \\ -a_4 \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} + a_4 \cdot z \cdot \alpha \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} \end{bmatrix} \cdot d\alpha;$$

$$W^1 = -\frac{1}{2 \cdot G} \cdot \int_0^{\infty} J_0(\alpha r) \cdot \alpha \cdot \begin{bmatrix} -4 \cdot k_1 \cdot a_3 \cdot e^{(\alpha \cdot z)} + 4 \cdot k_1 \cdot a_4 \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} \\ + a_1 \cdot \alpha \cdot e^{(\alpha \cdot z)} + a_2 \cdot \alpha \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} + \\ + 2 \cdot a_3 \cdot e^{(\alpha \cdot z)} + a_3 \cdot z \cdot \alpha \cdot e^{(\alpha \cdot z)} - \\ - 2 \cdot a_4 \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} + a_4 \cdot z \cdot \alpha \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} \end{bmatrix} \cdot d\alpha;$$

$$\sigma_{zz}^1 = \int_0^{\infty} \alpha^2 \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot k_2 \cdot a_3 \cdot e^{(\alpha \cdot z)} + 2 \cdot k_2 \cdot a_4 \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} - \\ - a_1 \cdot \alpha \cdot e^{(\alpha \cdot z)} + a_2 \cdot \alpha \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} - \\ - 3 \cdot a_3 \cdot e^{(\alpha \cdot z)} - a_3 \cdot z \cdot \alpha \cdot e^{(\alpha \cdot z)} - \\ - 3 \cdot a_4 \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} + a_4 \cdot z \cdot \alpha \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} \end{bmatrix} \cdot d\alpha; \quad (8)$$

$$\tau_{rz}^1 = \int_0^{\infty} \alpha^2 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot \left[\begin{array}{l} -2 \cdot k_1 \cdot a_3 \cdot e^{(\alpha \cdot z)} + 2 \cdot k_1 \cdot a_4 \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} + \\ + a_1 \cdot \alpha \cdot e^{(\alpha \cdot z)} + a_2 \cdot \alpha \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} + \\ + 2 \cdot a_3 \cdot e^{(\alpha \cdot z)} + a_3 \cdot z \cdot \alpha \cdot e^{(\alpha \cdot z)} - \\ - 2 \cdot a_4 \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} + a_4 \cdot z \cdot \alpha \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} \end{array} \right] \cdot d\alpha. \quad (8)$$

Здесь $k_1 = 1 - \nu$ и $k_2 = 2 - \nu$.

Далее для области основания II с использованием формул (5), (6) и (7) найдем:

$$U^2 = \frac{1}{2 \cdot G} \cdot \int_0^{\infty} J_1(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} \cdot [a_5 \cdot \alpha - a_6 + a_6 \cdot z \cdot \alpha] \cdot d\alpha$$

$$W^2 = \frac{1}{2 \cdot G} \cdot \int_0^{\infty} J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} \cdot \left[\begin{array}{l} 4 \cdot k_1 \cdot a_6 + a_5 \cdot \alpha - \\ - 2 \cdot a_6 + a_6 \cdot z \cdot \alpha \end{array} \right] \cdot d\alpha$$

$$\sigma_{zz}^2 = \int_0^{\infty} \alpha^2 \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \left[\begin{array}{l} 2 \cdot k_2 \cdot a_6 + a_5 \cdot \alpha - \\ - 3 \cdot a_6 + a_6 \cdot z \cdot \alpha \end{array} \right] \cdot d\alpha$$

$$\tau_{rz,2} = \int_0^{\infty} \alpha^2 \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot \left[\begin{array}{l} 2 \cdot k_1 \cdot a_6 + a_5 \cdot \alpha - \\ - 2 \cdot a_6 + a_6 \cdot z \cdot \alpha \end{array} \right] \cdot d\alpha. \quad (9)$$

Далее подставим (8) и (9) в граничные условия (3) и (4) и найдем коэффициенты a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 и a_6 . Имеем:

$$a_1 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{[1 + \alpha \cdot h] \cdot P(\alpha) \cdot e^{(-\alpha \cdot h)}}{(-1 + k_2) \cdot \alpha^2}; \quad a_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{A(\alpha) \cdot e^{(-\alpha \cdot h)}}{\alpha \cdot (-1 + k_2)};$$

$$a_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{\begin{bmatrix} -6 \cdot k_2 + 8 \cdot k_1 \cdot k_2 + 2 \cdot k_2 \cdot \alpha \cdot h + \\ + 7 - 5 \cdot \alpha \cdot h - 10 \cdot k_1 + 2 \cdot k_1 \cdot \alpha \cdot h \end{bmatrix} \cdot A(\alpha) \cdot e^{(-\alpha \cdot h)}}{(-1 + k_2) \cdot (2 \cdot k_1 + 1 - 2 \cdot k_2) \cdot \alpha^2};$$

$$a_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{A(\alpha) \cdot e^{(-\alpha \cdot h)} \cdot (-3 + 2 \cdot \alpha \cdot h + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_1)}{\alpha \cdot (-2 \cdot k_2^2 + 2 \cdot k_1 \cdot k_2 + 3 \cdot k_2 - 2 \cdot k_1 - 1)};$$

$$a_5 = \frac{e^{(\alpha \cdot h)} \cdot A(\alpha)}{4 \cdot (-1 + k_2) \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot k_1 + \\ + 1 - 2 \cdot k_2 \end{bmatrix} \cdot \alpha^2} \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot k_2 \cdot \alpha \cdot h - 2 \cdot k_2 + 2 \cdot h \cdot \alpha \cdot e^{(-\alpha \cdot h)} \cdot k_2 + \\ + 8 \cdot k_2 \cdot k_1 \cdot e^{(-2 \cdot \alpha \cdot h)} - 6 \cdot k_2 \cdot e^{-2 \cdot \alpha \cdot h} - \\ - 5 \cdot h \cdot \alpha \cdot e^{(-2 \cdot \alpha \cdot h)} - 2 \cdot k_1 \cdot \alpha \cdot h + \\ - 2 \cdot h \cdot \alpha \cdot e^{(-2 \cdot \alpha \cdot h)} \cdot k_1 + 2 \cdot k_1 + 1 + \\ + 7 \cdot e^{(-2 \cdot \alpha \cdot h)} - 10 \cdot k_1 \cdot e^{(-2 \cdot \alpha \cdot h)} - \alpha \cdot h \end{bmatrix};$$

$$a_6 = \frac{A(\alpha) \cdot e^{(\alpha \cdot h)}}{4 \cdot \begin{bmatrix} -2 \cdot k_2^2 + \\ + 2 \cdot k_1 \cdot k_2 + \\ - 3 \cdot k_2 - \\ - 2 \cdot k_1 - 1 \end{bmatrix} \cdot \alpha} \cdot \begin{bmatrix} -3 \cdot e^{(-2 \cdot \alpha \cdot h)} - 2 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + \\ 2 \cdot k_1 \cdot e^{(-2 \cdot \alpha \cdot h)} + 2 \cdot k_2 \cdot e^{(-2 \cdot \alpha \cdot h)} + \\ + 2 \cdot h \cdot \alpha \cdot e^{(-2 \cdot \alpha \cdot h)} - 1 \end{bmatrix}$$

(10)

Здесь

$$\left. \begin{aligned} A(\alpha) &= \int_0^R q(r) \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot r \cdot dr; \\ u \\ q(r) &= \int_0^\infty A(\alpha) \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot d\alpha; \end{aligned} \right\}, \quad (11)$$

где $q(r)$ – внешняя нагрузка (см. рис. 1).

Далее с использованием (7), (10) и (11) найдем напряжения и перемещения в грунтовом основании. Имеем:

$$W^1 = \int_0^\infty \frac{J_0(\alpha \cdot r) \cdot A(\alpha)}{8 \cdot G \cdot (1-\nu)} \cdot \left\{ \begin{aligned} &e^{\alpha \cdot (-h+z)} \cdot \alpha \cdot h - e^{\alpha \cdot (-h+z)} \cdot z \cdot \alpha + \\ &+ 3 \cdot e^{\alpha \cdot (-h+z)} - 4 \cdot e^{\alpha \cdot (-h+z)} \cdot \nu + \\ &+ 3 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha - 12 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \nu - \\ &- 4 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \alpha \cdot h \cdot \nu + \\ &+ 3 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \alpha \cdot h + \\ &+ 8 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \nu^2 + 5 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} + \\ &+ 2 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha^2 \cdot h - \\ &- 4 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha \cdot \nu \end{aligned} \right\} d\alpha; \quad (12)$$

$$W^2 = \int_0^{\infty} \frac{A(\alpha) \cdot J_0(\alpha r)}{8 \cdot G \cdot (1-\nu)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot e^{-\alpha \cdot (-h+z)} - 4 \cdot \nu \cdot e^{-\alpha \cdot (-h+z)} + \\ + z \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot (-h+z)} - \alpha \cdot h \cdot e^{-\alpha \cdot (-h+z)} + \\ + 3 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha - 12 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \nu - \\ - 4 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \alpha \cdot h \cdot \nu + 3 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \alpha \cdot h + \\ + 8 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \nu^2 + 5 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} + \\ + 2 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha^2 \cdot h - 4 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha \cdot \nu \end{array} \right\} d\alpha;$$

$$U^1 = - \int_0^{\infty} \frac{A(\alpha) \cdot J_1(\alpha \cdot r)}{8 \cdot G \cdot (1-\nu)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} -e^{\alpha \cdot (-h+z)} \cdot \alpha \cdot h + \\ + e^{\alpha \cdot (-h+z)} \cdot z \cdot \alpha - \\ - 3 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \alpha \cdot h - \\ - 8 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \nu^2 + \\ + 12 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \nu - \\ - 4 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} + \\ + 2 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha^2 \cdot h - \\ - 4 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha \cdot \nu + \end{array} \right\} \cdot d\alpha \quad (12)$$

$$-\int_0^{\infty} \frac{A(\alpha) \cdot J_1(\alpha \cdot r)}{8 \cdot G \cdot (1-\nu)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} +4 \cdot e^{-\alpha(h+z)} \cdot \alpha \cdot h \cdot \nu + \\ +3 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha \end{array} \right\} \cdot d\alpha;$$

$$U^2 = -\int_0^{\infty} \frac{A(\alpha) \cdot J_1(\alpha \cdot r)}{8 \cdot G \cdot (1-\nu)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} -\alpha \cdot h \cdot e^{-\alpha \cdot (-h+z)} \cdot + \\ +z \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot (-h+z)} \cdot - \\ -3 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \alpha \cdot h - \\ -8 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \nu^2 + \\ +12 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \nu - \\ -4 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot + \\ +2 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha^2 \cdot h - \\ -4 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha \cdot \nu + \\ +4 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \alpha \cdot h \cdot \nu + \\ +3 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha \end{array} \right\} \cdot d\alpha; \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}^1 = & - \int_0^{\infty} \frac{A(\alpha) \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha}{4 \cdot (1-\nu)} \cdot \left\{ \begin{aligned} & 2 \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]_+} + e^{[-\alpha \cdot (h+z)]_-} \cdot \alpha \cdot h - \\ & * 2 \cdot e^{[\alpha \cdot (-h+z)]_-} \\ & - e^{[\alpha \cdot (-h+z)]_-} \cdot \alpha \cdot h + \\ & + 2 \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]_-} \cdot z \cdot \alpha^2 \cdot h + \\ & - e^{[\alpha \cdot (-h+z)]_-} \cdot z \cdot \alpha + \\ & + 3 \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]_-} \cdot z \cdot \alpha - \\ & - 4 \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]_-} \cdot z \cdot \alpha \cdot \nu - \\ & - 2 \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]_-} \cdot \nu + \\ & + 2 \cdot e^{[\alpha \cdot (-h+z)]_-} \cdot \nu \end{aligned} \right\} \cdot d\alpha; \\
\sigma_{zz}^2 = & - \int_0^{\infty} \frac{A(\alpha) \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha}{4 \cdot (1-\nu)} \cdot \left\{ \begin{aligned} & 2 \cdot e^{[-\alpha \cdot (-h+z)]_-} \\ & - \alpha \cdot h \cdot e^{[-\alpha \cdot (-h+z)]_-} \\ & - 2 \cdot \nu \cdot e^{[-\alpha \cdot (-h+z)]_+} \\ & + z \cdot \alpha \cdot e^{[-\alpha \cdot (-h+z)]_+} \\ & + 2 \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]_+} \end{aligned} \right\} \cdot d\alpha - \tag{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{\infty} \frac{A(\alpha) \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha}{4 \cdot (1-\nu)} \left\{ \begin{array}{l} +e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \alpha \cdot h + \\ +3 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha - \\ -4 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha \cdot \nu + \\ +2 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha^2 \cdot h - \\ +2 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \nu \end{array} \right\} \cdot d\alpha; \\
\tau_{rz}^1 = & \int_0^{\infty} \frac{A(\alpha) \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot \alpha}{4 \cdot (1-\nu)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot e^{\alpha \cdot (-h+z)} \cdot \nu - \\ -e^{\alpha \cdot (-h+z)} \cdot \alpha \cdot h + \\ +e^{\alpha \cdot (-h+z)} \cdot z \cdot \alpha - \\ -e^{\alpha \cdot (-h+z)} \cdot \nu - \\ -3 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha + \\ +4 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha \cdot \nu + \\ +e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \nu + \\ +e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \alpha \cdot h - \\ -2 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \nu - \\ -2 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha^2 \cdot h \end{array} \right\} \cdot d\alpha; \tag{12}
\end{aligned}$$

$$\tau_{rz}^2 = - \int_0^{\infty} \frac{A(\alpha) \cdot J_1(\alpha r) \cdot \alpha}{4 \cdot (1-\nu)} \left\{ \begin{array}{l} -2 \cdot \nu \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (-h+z) \right]}_- \\ -\alpha \cdot h \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (-h+z) \right]}_+ \\ +e^{\left[-\alpha \cdot (-h+z) \right]}_+ \\ +z \cdot \alpha \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (-h+z) \right]}_+ \\ +3 \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h+z) \right]} \cdot z \cdot \alpha_- \\ -4 \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h+z) \right]} \cdot z \cdot \alpha \cdot \nu_- \\ -e^{\left[-\alpha \cdot (h+z) \right]}_- \\ -e^{\left[-\alpha \cdot (h+z) \right]} \cdot \alpha \cdot h_+ \\ +2 \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h+z) \right]}_{\nu+} \\ +2 \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h+z) \right]} \cdot z \cdot \alpha^2 \cdot h \end{array} \right\} \cdot d\alpha;$$

$$\sigma_{\theta\theta}^1 = \int_0^{\infty} \frac{A(\alpha)}{4 \cdot r \cdot (1-\nu)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{\left[\alpha \cdot (-h+z) \right]} \cdot z \cdot \alpha_+ \\ +2 \cdot \nu \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot e^{\left[\alpha \cdot (-h+z) \right]}_- \\ -J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{\left[\alpha \cdot (-h+z) \right]} \cdot \alpha \cdot h_- \\ -3 \cdot J_1(\alpha \cdot r) e^{\left[-\alpha \cdot (h+z) \right]} \cdot \alpha \cdot h_+ \end{array} \right\} \cdot d\alpha + \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{\infty} \frac{A(\alpha)}{4 \cdot r \cdot (1-\nu)} \cdot \left\{ \begin{aligned}
& +3 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} \cdot z \cdot \alpha - \\
& -8 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} \cdot \nu^2 - \\
& -4 \cdot \nu \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha^2 \cdot r \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} \cdot h + \\
& +2 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} \cdot z \cdot \alpha^2 \cdot h - \\
& -6 \cdot \nu \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot r \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} + \\
& +8 \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot r \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} \cdot \nu^2 + \\
& +12 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} \cdot \nu + \\
& +4 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} \cdot \alpha \cdot h \cdot \nu - \\
& -4 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} \cdot z \cdot \alpha \cdot \nu - \\
& -4 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]}
\end{aligned} \right\} \cdot d\alpha;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta}^2 = \int_0^{\infty} \frac{A(\alpha)}{4 \cdot r \cdot (1-\nu)} \cdot \left\{ \begin{aligned}
& J_1(\alpha \cdot r) \cdot z \cdot \alpha \cdot e^{[-\alpha \cdot (-h+z)]} - \\
& -J_1(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot h \cdot e^{[-\alpha \cdot (-h+z)]} - \\
& -2 \cdot \nu \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot e^{[-\alpha \cdot (-h+z)]} \cdot r - \\
& -3 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} \cdot \alpha \cdot h +
\end{aligned} \right\} \cdot d\alpha + \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{\infty} \frac{A(\alpha)}{4 \cdot r \cdot (1-\nu)} \cdot \left\{ \begin{array}{l}
+3 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha - \\
-8 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \nu^2 - \\
-4 \cdot \nu \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha^2 \cdot r \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot h + \\
+2 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha^2 \cdot h - \\
-6 \cdot \nu \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot r \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} + \\
+8 \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot r \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \nu \cdot 2 + \\
+12 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \nu + \\
+4 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \alpha \cdot h \cdot \nu - \\
-4 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha \cdot \nu - \\
-4 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)}
\end{array} \right\} \cdot d\alpha; \\
\sigma_{rr}^1 = \int_0^{\infty} \frac{A(\alpha)}{4 \cdot r \cdot (1-\nu)} \cdot \left\{ \begin{array}{l}
J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{\alpha \cdot (-h+z)} \cdot \alpha \cdot h - \\
-J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{\alpha \cdot (-h+z)} \cdot z \cdot \alpha + \\
+2 \cdot \nu \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot r \cdot e^{\alpha \cdot (-h+z)} - \\
-J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha^2 \cdot r \cdot e^{\alpha \cdot (-h+z)} \cdot h +
\end{array} \right\} \cdot d\alpha + \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
& +J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha^2 \cdot r \cdot e^{\left[\alpha \cdot (-h+z)\right]} \cdot z + \\
& +3 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h+z)\right]} \cdot \alpha \cdot h - \\
& -3 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h+z)\right]} \cdot z \cdot \alpha - \\
& -2 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h+z)\right]} \cdot z \cdot \alpha^2 \cdot h + \\
& +3 \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha^2 \cdot r \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h+z)\right]} \cdot z + \\
& +4 \cdot J_1(\alpha \cdot r) e^{\left[-\alpha \cdot (h+z)\right]} - \\
& -4 \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha^2 \cdot r \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (-h+z)\right]} \cdot z \cdot v + \\
& +2 \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha^3 \cdot r \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h+z)\right]} \cdot z \cdot h - \\
& -3 \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha^2 \cdot r \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h+z)\right]} \cdot h + \\
& +6 \cdot v \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot r \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h+z)\right]} + \\
& +8 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h+z)\right]} \cdot v^2 - \\
& -12 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h+z)\right]} \cdot v - \\
& -4 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h+z)\right]} \cdot \alpha \cdot h \cdot v + \\
& +4 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h+z)\right]} \cdot z \cdot \alpha \cdot v -
\end{aligned} \right\} \cdot d\alpha + \quad (12)$$

$$+ \int_0^{\infty} \frac{A(\alpha)}{4 \cdot r \cdot (1-\nu)} \cdot \left\{ -4 \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot r \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} \right\} d\alpha;$$

$$\sigma_{rr}^2 = \int_0^{\infty} \frac{A(\alpha)}{4 \cdot r \cdot (1-\nu)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} -J_1(\alpha \cdot r) \cdot z \cdot \alpha \cdot e^{[-\alpha \cdot (-h+z)]} \cdot - \\ -J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha^2 \cdot h \cdot e^{[-\alpha \cdot (-h+z)]} \cdot r \cdot - \\ -2 \cdot \nu \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot e^{[-\alpha \cdot (-h+z)]} \cdot r \cdot + \\ +J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha^2 \cdot z \cdot e^{[-\alpha \cdot (-h+z)]} \cdot r \cdot + \\ +J_1(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot h \cdot e^{[-\alpha \cdot (-h+z)]} \cdot + \\ +3 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} \cdot \alpha \cdot h \cdot - \\ -3 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} \cdot z \cdot \alpha \cdot - \\ -2 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} \cdot z \cdot \alpha^2 \cdot h \cdot + \\ +3 \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha^2 \cdot r \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} \cdot z \cdot + \\ +4 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} \cdot - \\ -4 \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha^2 \cdot r \cdot e^{[-\alpha \cdot (-h+z)]} \cdot z \cdot \nu \cdot + \\ +2 \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha^3 \cdot r \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} \cdot z \cdot h \cdot - \end{array} \right\} \cdot d\alpha +$$

$$+\int_0^{\infty} \frac{A(\alpha)}{4 \cdot r \cdot (1-\nu)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} -3 \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha^2 \cdot r \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} \cdot h + \\ +6 \cdot \nu \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot r \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} + \\ +8 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} \cdot \nu^2 - \\ -12 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} \cdot \nu - \\ -4 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} \cdot \alpha \cdot h \cdot \nu + \\ +4 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} \cdot z \cdot \alpha \cdot \nu - \\ -4 \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot r \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} \end{array} \right\} \cdot d\alpha. \quad (12)$$

Далее с использованием верхнего равенства (11) найдем значения функции $A(\alpha)$.

Если внутри основания приложена сосредоточенная сила, то согласно [9] следует положить

$$q(r) = P_0 \cdot \frac{\delta(r)}{2 \cdot \pi \cdot r}, \quad (13)$$

где P_0 , а $\delta(r)$ – дельта- функция Дирака [10]. Имеем:

$$A(\alpha) = \int_0^R q(r) \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot r \cdot dr = \frac{P_0}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^R \delta(r) \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot dr = \frac{P_0}{2 \cdot \pi}. \quad (14)$$

Решения (12) с учетом (14) позволяют полностью описать напряженно-

деформированное состояние грунтового основания, находящегося под воздействием вертикальной сосредоточенной силы P_0 , приложенной на некоторой глубине h . Решение этой задачи другим методом было получено ранее Р. Миндлиным [1, 2, 5].

1.3. Частные решения. Распределение внешней нагрузки по закону степенной функции

Далее найдем значения коэффициента $A(\alpha)$ для степенного закона распределения приложенной внутри полупространства распределенной нагрузки (1).

При $n = 0$ равенство (1) примет вид:

$$q(r) = \begin{cases} q_0 & \text{при } r \leq R; \\ 0 & \text{при } r > R. \end{cases} \quad (15)$$

В этом случае

$$A(\alpha) = \int_0^R q(r) \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot r \cdot dr = \frac{q_0 \cdot R}{\alpha} \cdot J_1(R \cdot \alpha), \quad (16)$$

где $J_1(x)$ – функция Бесселя первого рода с единичным индексом [3].

При $n = 1$ равенство (1) примет вид:

$$q(r) = \begin{cases} q_0 \cdot \left(\frac{r}{R}\right) & \text{при } r \leq R; \\ 0 & \text{при } r > R. \end{cases} \quad (17)$$

В этом случае

$$\begin{aligned}
 A(\alpha) &= \int_0^R q(r) \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot r \cdot dr = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{q_0}{\alpha^2} \cdot \left[\begin{array}{l} 2 \cdot R \cdot \alpha \cdot J_1(R \cdot \alpha) + \pi \cdot J_0(R \cdot \alpha) \cdot H_1 \cdot (R \cdot \alpha) - \\ - \pi \cdot J_1(R \cdot \alpha) \cdot H_0(R \cdot \alpha) \end{array} \right], \quad (18)
 \end{aligned}$$

где $H_0(x)$ и $H_1(x)$ – функции Струве соответственно с нулевым и единичным индексами [11].

При $n = 2$ равенство (1) примет вид:

$$q(r) = \begin{cases} q_0 \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^2 & \text{при } r \leq R; \\ 0 & \text{при } r > R. \end{cases} \quad (19)$$

В этом случае

$$\begin{aligned}
 A(\alpha) &= \int_0^R q(r) \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot r \cdot dr = \\
 &= \frac{q_0}{\alpha^3 \cdot R} \cdot \left[\begin{array}{l} 2 \cdot R \cdot \alpha \cdot J_0(R \cdot \alpha) - \\ - 4 \cdot J_1(R \cdot \alpha) + R^2 \cdot \alpha^2 \cdot J_1(R \cdot \alpha) \end{array} \right]. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Далее полагая $n = 3, 4, 5, \dots, 11$ найдем последовательно:

– при $n = 3$

$$A(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \frac{q_0}{\alpha^4 \cdot R^2} \cdot \left[6 \cdot R^2 \cdot \alpha^2 \cdot J_0(R \cdot \alpha) - 18 \cdot R \cdot \alpha \cdot J_1(R \cdot \alpha) \right] + \quad (21)$$

$$+\frac{1}{2} \cdot \frac{q_0}{\alpha^4 \cdot R^2} \cdot \left[\begin{array}{l} +2 \cdot R^3 \cdot \alpha^3 \cdot J_1(R \cdot \alpha) - 9 \cdot \pi \cdot J_0(R \cdot \alpha) \cdot H_1(R \cdot \alpha) + \\ +9 \cdot \pi \cdot J_1(R \cdot \alpha) \cdot H_0(R \cdot \alpha) \end{array} \right]; \quad (21)$$

– при $n=4$

$$A(\alpha) = \frac{q_0}{\alpha^5 \cdot R^3} \cdot \left[\begin{array}{l} -32 \cdot R \cdot \alpha \cdot J_0(R \cdot \alpha) + \\ +4 \cdot R^3 \cdot \alpha^3 \cdot J_0(R \cdot \alpha) - \\ -164 \cdot R^2 \cdot \alpha^2 \cdot J_1(R \cdot \alpha) + \\ +64 \cdot J_1(R \cdot \alpha) + J_1(R \cdot \alpha) R^4 \cdot \alpha^4 \end{array} \right]; \quad (22)$$

– при $n=5$

$$A(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \frac{q_0}{\alpha^6 \cdot R^4} \cdot \left[\begin{array}{l} -150 \cdot R^2 \cdot \alpha^2 \cdot J_0(R \cdot \alpha) + \\ +10 \cdot R^4 \cdot \alpha^4 \cdot J_0(R \cdot \alpha) - \\ -50 \cdot R^3 \cdot \alpha^3 \cdot J_1(R \cdot \alpha) + \\ +450 \cdot R \cdot \alpha J_1(R \cdot \alpha) + \\ +2 \cdot R^5 \cdot \alpha^5 \cdot J_1(R \cdot \alpha) + \\ +225 \cdot \pi \cdot J_0(R \cdot \alpha) \cdot H_1(R \cdot \alpha) - \\ -225 \cdot \pi \cdot J_1(R \cdot \alpha) \cdot H_0(R \cdot \alpha) \end{array} \right]; \quad (23)$$

– при $n = 6$

$$A(\alpha) = \frac{q_0}{\alpha^7 \cdot R^5} \cdot \left[\begin{aligned} &1152 \cdot R \cdot \alpha \cdot J_0(R \cdot \alpha) - 144 \cdot R^3 \cdot \alpha^3 \cdot J_0(R \cdot \alpha) + \\ &+ 6 \cdot R^5 \cdot \alpha^5 \cdot J_0(R \cdot \alpha) + 576 \cdot R^2 \cdot \alpha^2 \cdot J_1(R \cdot \alpha) - \\ &+ 36 \cdot J_1(R \cdot \alpha) \cdot R^4 \cdot \alpha^4 - 2304 \cdot J_1(R \cdot \alpha) + \\ &+ J_1(R \cdot \alpha) \cdot R^6 \cdot \alpha^6 \end{aligned} \right]; \quad (24)$$

– при $n = 7$

$$A(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \frac{q_0}{\alpha^8 \cdot R^6} \cdot \left[\begin{aligned} &-490 \cdot R^4 \cdot \alpha^4 \cdot J_0(R \cdot \alpha) + \\ &+ 14 \cdot R^6 \cdot \alpha^6 \cdot J_0(R \cdot \alpha) + \\ &+ 7350 \cdot R^2 \cdot \alpha^2 \cdot J_0(R \cdot \alpha) - \\ &- 98 \cdot R^5 \cdot \alpha^5 \cdot J_1(R \cdot \alpha) + \\ &+ 2450 \cdot R^3 \cdot \alpha^3 \cdot J_1(R \cdot \alpha) - \\ &- 22050 \cdot R \cdot \alpha \cdot J_1(R \cdot \alpha) + \\ &+ 2 \cdot R^7 \cdot \alpha^7 \cdot J_1(R \cdot \alpha) - \\ &- 11025 \cdot \pi \cdot J_0(R \cdot \alpha) \cdot H_1(R \cdot \alpha) + \\ &+ 11025 \cdot \pi \cdot J_1(R \cdot \alpha) \cdot H_0(R \cdot \alpha) \end{aligned} \right]; \quad (25)$$

– при $n = 8$

$$A(\alpha) = \frac{q_0}{\alpha^9 \cdot R^7} \cdot \left[\begin{aligned} &9216 \cdot R^3 \cdot \alpha^3 \cdot J_0(R \cdot \alpha) - 384 \cdot R^5 \cdot \alpha^5 \cdot J_0(R \cdot \alpha) + \\ &+ 8 \cdot R^7 \cdot \alpha^7 \cdot J_0(R \cdot \alpha) - 73728 \cdot R \cdot \alpha \cdot J_0(R \cdot \alpha) + \\ &+ 2304 \cdot R^4 \cdot \alpha^4 \cdot J_1(R \cdot \alpha) - 64 \cdot R^6 \cdot \alpha^6 \cdot J_1(R \cdot \alpha) - \\ &- 36864 \cdot R^6 \cdot \alpha^6 \cdot J_1(R \cdot \alpha) + 147456 \cdot J_1(R \cdot \alpha) + \\ &+ J_1(R \cdot \alpha) \cdot R^8 \cdot \alpha^8 \end{aligned} \right]; \quad (26)$$

– при $n = 9$

$$A(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \frac{q_0}{\alpha^{10} \cdot R^8} \cdot \left[\begin{aligned} &-1134 \cdot R^6 \cdot \alpha^6 \cdot J_0(R \cdot \alpha) + \\ &+ 39690 \cdot R^4 \cdot \alpha^4 \cdot J_0(R \cdot \alpha) + \\ &18 \cdot R^8 \cdot \alpha^8 \cdot J_0(R \cdot \alpha) - \\ &- 595350 \cdot R^2 \cdot \alpha^2 \cdot J_0(R \cdot \alpha) + \\ &+ 7938 \cdot R^5 \cdot \alpha^5 \cdot J_1(R \cdot \alpha) - \\ &- 198450 \cdot R^3 \cdot \alpha^3 \cdot J_1(R \cdot \alpha) - \\ &- 162 \cdot R^7 \cdot \alpha^7 \cdot J_1(R \cdot \alpha) + \\ &+ 1786050 \cdot R \cdot \alpha \cdot J_1(R \cdot \alpha) + \\ &+ 2 \cdot R^9 \cdot \alpha^9 \cdot J_1(R \cdot \alpha) + \end{aligned} \right] + \quad (27)$$

$$+\frac{1}{2} \cdot \frac{q_0}{\alpha^{10} \cdot R^8} \cdot \left[\begin{array}{l} +893025 \cdot \pi \cdot J_0(R \cdot \alpha) \cdot H_1(R \cdot \alpha) - \\ -893025 \cdot \pi \cdot J_1(R \cdot \alpha) \cdot H_0(R \cdot \alpha) \end{array} \right]; \quad (27)$$

– при $n = 10$

$$A(\alpha) = \frac{q_0}{\alpha^{11} \cdot R^9} \cdot \left[\begin{array}{l} 38400 \cdot R^5 \cdot \alpha^5 \cdot J_0(R \cdot \alpha) - \\ -800 \cdot R^7 \cdot \alpha^7 \cdot J_0(R \cdot \alpha) - \\ -921600 \cdot R^3 \cdot \alpha^3 \cdot J_0(R \cdot \alpha) + \\ +10 \cdot R^9 \cdot \alpha^9 \cdot J_0(R \cdot \alpha) + \\ +7372800 \cdot R \cdot \alpha \cdot J_0(R \cdot \alpha) + \\ +6400 \cdot R^6 \cdot \alpha^6 \cdot J_1(R \cdot \alpha) - \\ -100 \cdot R^8 \cdot \alpha^8 \cdot J_1(R \cdot \alpha) - \\ -230400 \cdot R^4 \cdot \alpha^4 \cdot J_1(R \cdot \alpha) + \\ +3686400 \cdot J_1(R \cdot \alpha) \cdot R^2 \cdot \alpha^2 - \\ -14745600 \cdot J_1(R \cdot \alpha) + \\ +J_1(R \cdot \alpha) \cdot R^{10} \cdot \alpha^{10} \end{array} \right]. \quad (28)$$

При подстановке $A(\alpha)$ рассчитанных с использованием формул (16), (18), (20),..., (28) функций в формулы (12) и использовании принципа суперпозиции мы можем определять напряженно-деформированное состояние основания для более сложных законов изменения внешней нагрузки, чем это позволяет делать использование каждой из перечисленных формул в отдельности. Такой подход, в частности, используется при решении ряда задач теории упругости [4].

1.4. Распределения внешней нагрузки по закону функций Бесселя первого рода с нулевым индексом. Частные решения

С использованием функций Бесселя первого рода с нулевым индексом на интервале $r \in (0, R)$ мы можем аппроксимировать достаточно широкий класс зависимостей приложенной внутри полупространства нагрузки от координаты [3]. В частности, с их использованием можно аппроксимировать все представленные в разделе (1.3) степенные зависимости. Поэтому определение коэффициентов $A(\alpha)$ для данного класса функций очень важно для решения многих практических задач.

Далее найдем значения коэффициента $A(\alpha)$ для закона распределения приложенной внутри полупространства распределенной нагрузки в соответствии с формулами (2). Имеем:

$$\begin{aligned}
 A_i(\alpha) &= q_0 \cdot \int_0^R J_0\left(\mu_i \cdot \frac{r}{R}\right) \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot r \cdot dr = \\
 &= -q_0 \cdot R^2 \cdot \frac{\mu_i \cdot J_0(\alpha \cdot R) \cdot J_1(\mu_i)}{(\alpha \cdot R)^2 - \mu_i^2}.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Здесь μ_i – нули функций Бесселя первого рода с нулевым индексом $J_0(x)$ (табл.1).

Таблица 1

Первые десять нулей функций Бесселя первого рода с нулевым и единичным индексами

№ пп.	μ_i для $J_0(x)$	μ_i для $J_1(x)$
1	2,4048	3,8317
2	5,5201	7,0156
3	8,6537	10,1735
4	11,7915	13,3237
5	14,9309	16,4706
6	18,7011	19,6159
7	21,2116	22,7601
8	24,3525	25,9037
9	27,4935	29,0468
10	30,6346	32,1897

Кроме того, при $n > 10$ с точностью до сотых долей единицы нули функций Бесселя могут быть установлены путем решения трансцендентных уравнений вида

$$\left. \begin{array}{l} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{ для } J_0(x) \\ \text{и} \\ \cos\left(x - \frac{3 \cdot \pi}{4}\right) = 0 \text{ для } J_1(x). \end{array} \right\} \quad (30)$$

Далее исследуем область применения полученных в разделах 1.3 и 1.4 результатов. Эти данные представлены в разделе 1.5.

1.5. Область применения результатов исследований

При использовании формул (16), (18), (20),..., (29) для практических расчетов с использованием численных методов важно знать, какая погрешность имеет место между фактической зависимостью (1) и вычисленным с использованием численными методами несобственным интегралом вида $q(r) = \int_0^{\infty} A(\alpha) \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot d\alpha$ (нижнее равенство (11)).

В ходе численного эксперимента несобственный интеграл (11) вычислялся методом трапеций на интервале $\alpha \in (0; 10000)$. Шаг интегрирования равнялся 0,1. Результаты численного эксперимента представлены на рисунках 2...13.

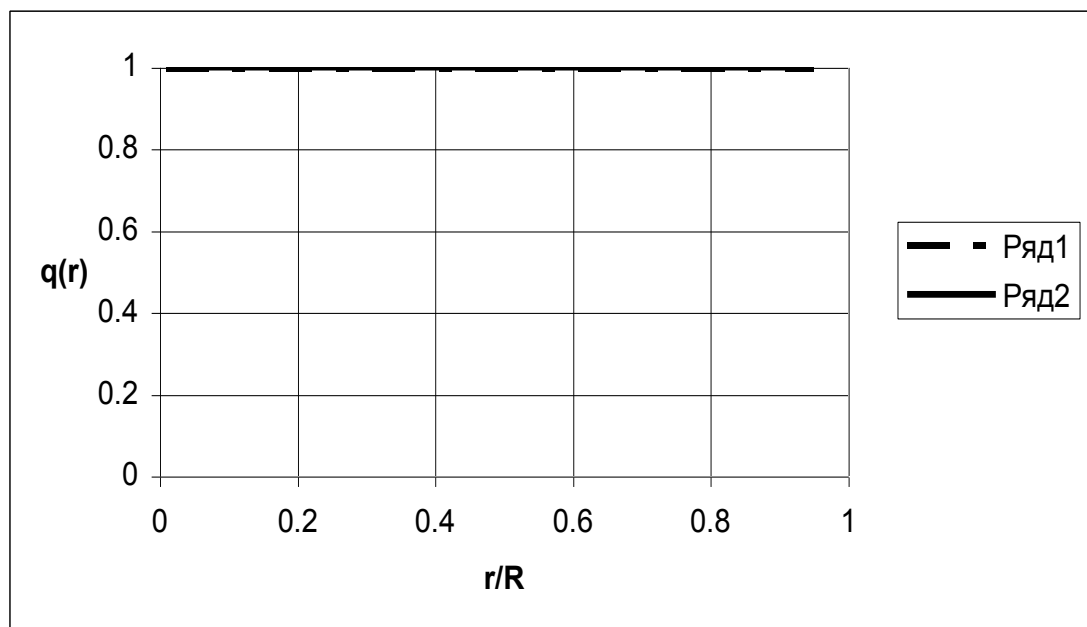


Рис. 2. Зависимость $q(r) = 1$. Ряд 1 – фактическая зависимость; ряд 2 – то же, рассчитанная по нижней формуле (11). Кривые совпадают

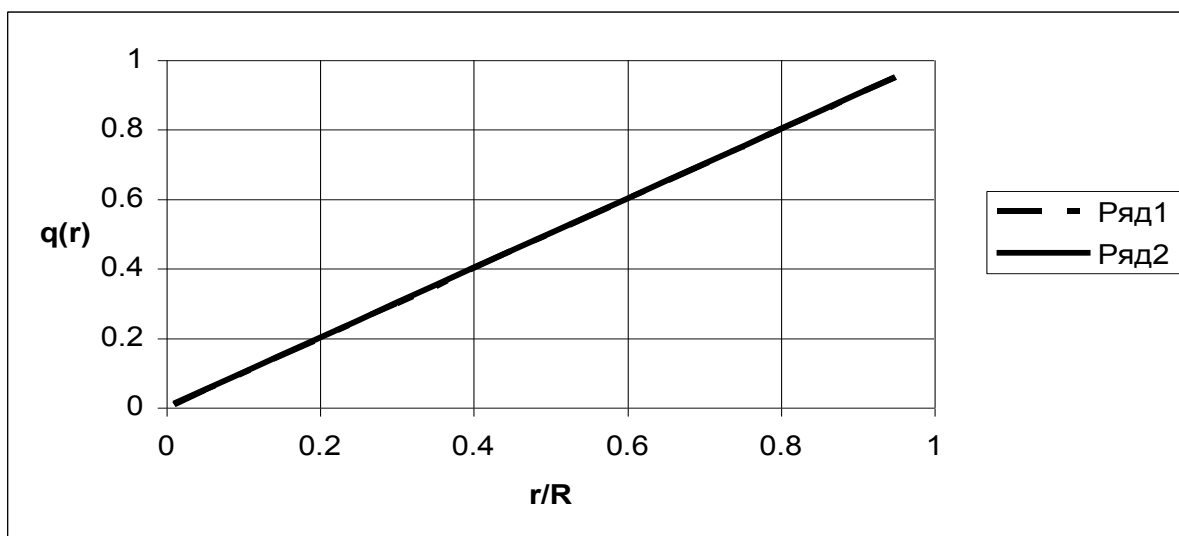


Рис. 3. Зависимость $q(r) = \frac{r}{R}$. Ряд 1– фактическая зависимость; ряд 2– то же, рассчитанная по нижней формуле (11). Кривые совпадают

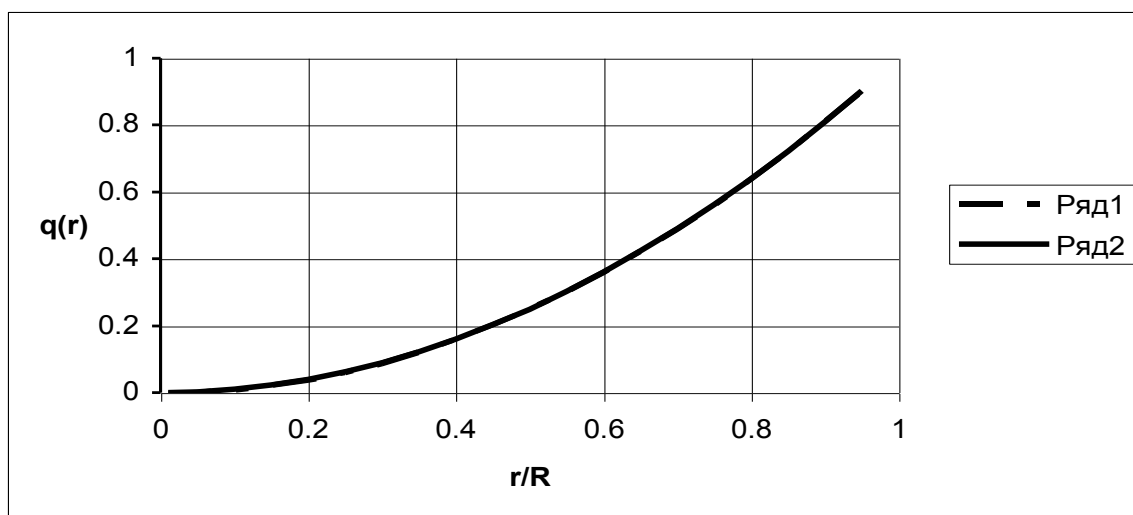


Рис. 4. Зависимость $q(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^2$. Ряд 1– фактическая зависимость; ряд 2– то же, рассчитанная по нижней формуле (11). Кривые совпадают

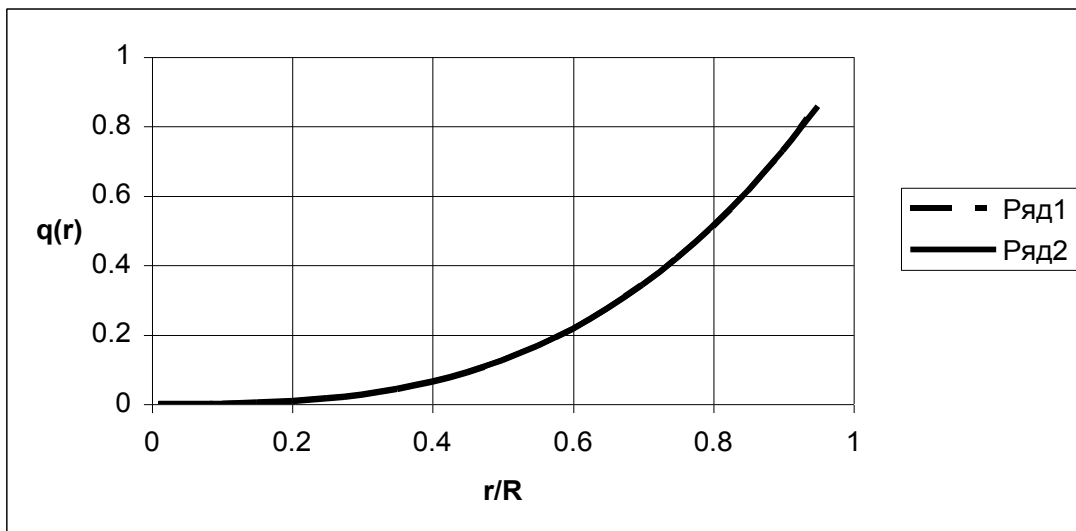


Рис. 5. Зависимость $q(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^3$. Ряд 1– фактическая зависимость; ряд 2– то же, рассчитанная по нижней формуле (11). Кривые совпадают

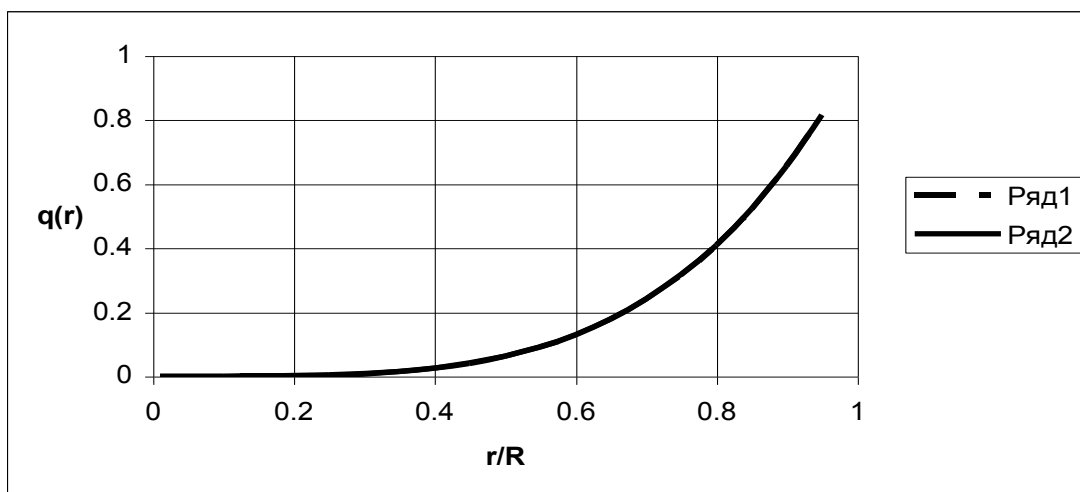


Рис. 6. Зависимость $q(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^4$. Ряд 1– фактическая зависимость; ряд 2– то же, рассчитанная по нижней формуле (11). Кривые совпадают

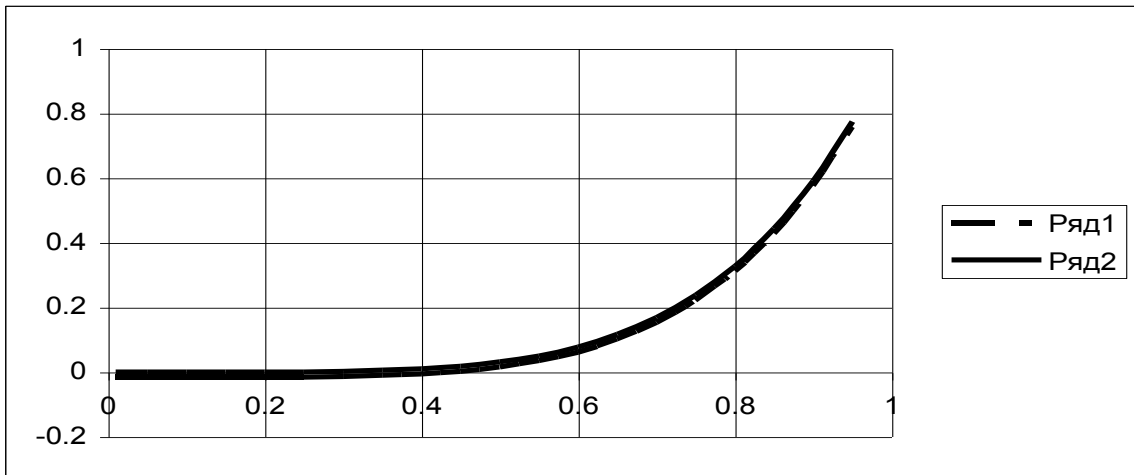


Рис. 7. Зависимость $q(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^5$. Ряд 1– фактическая зависимость; ряд 2– то же, рассчитанная по нижней формуле (11)

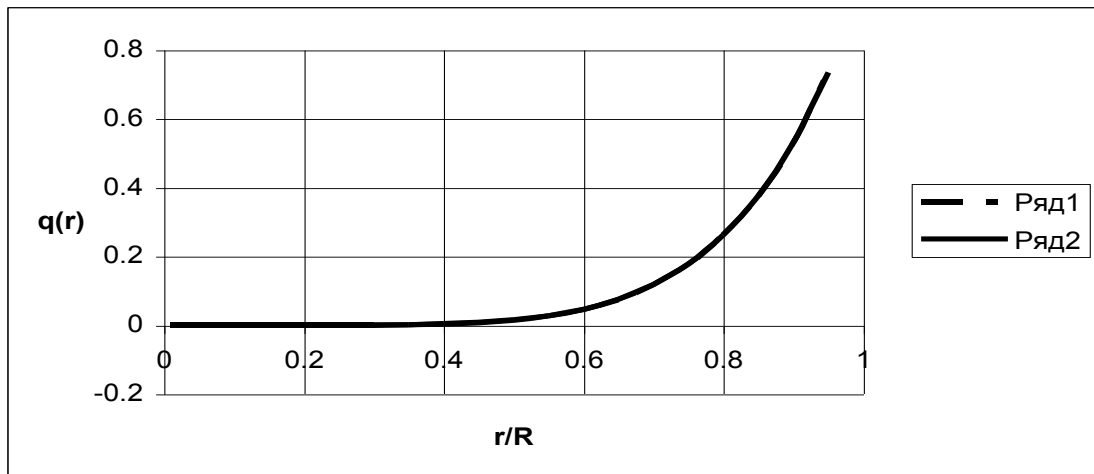


Рис. 8. Зависимость $q(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^6$. Ряд 1– фактическая зависимость; ряд 2– то же, рассчитанная по нижней формуле (11). Кривые совпадают

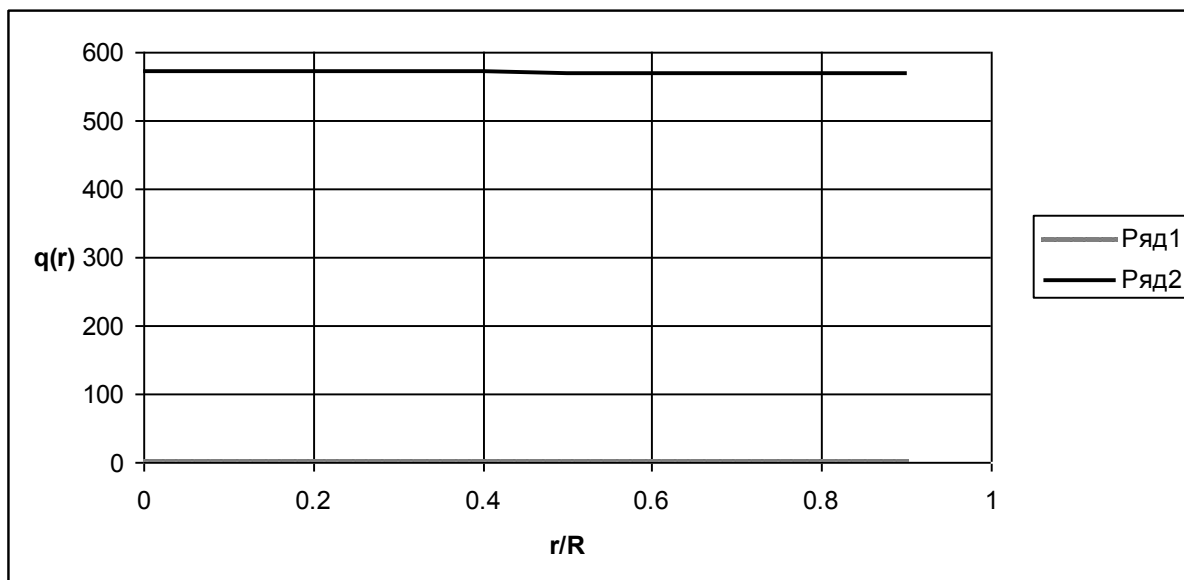


Рис. 9. Зависимость $q(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^7$. Ряд 1– фактическая зависимость; ряд 2–

то же, рассчитанная по нижней формуле (11). Расхождение между кривыми составляет несколько десятичных порядков

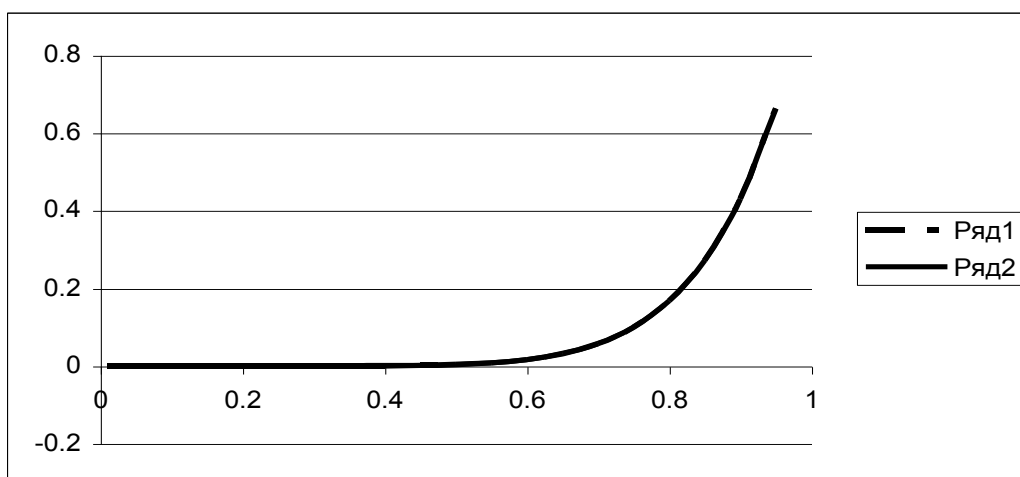


Рис. 10. Зависимость $q(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^8$. Ряд 1– фактическая зависимость; ряд 2–

то же, рассчитанная по нижней формуле (11). Кривые совпадают

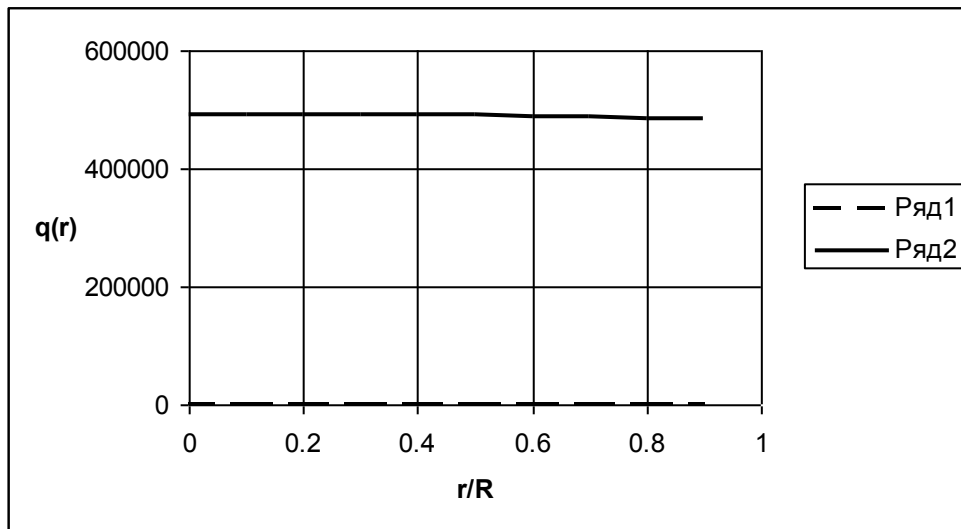


Рис. 11. Зависимость $q(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^9$. Ряд 1– фактическая зависимость; ряд 2– то же, рассчитанная по нижней формуле (11). Расхождение между кривыми составляет несколько десятичных порядков

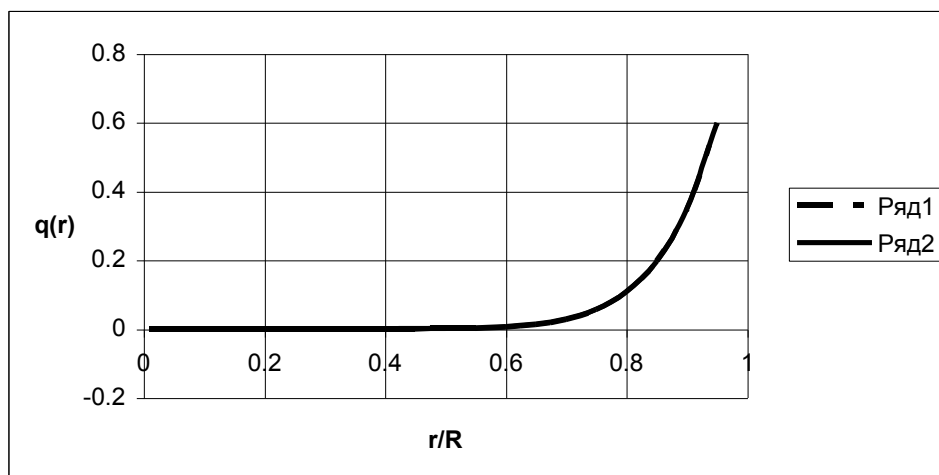


Рис. 12. Зависимости $q(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^{10}$. Ряд 1– фактическая зависимость; ряд 2– то же, рассчитанная по нижней формуле (11). Кривые совпадают

На рисунках 2...12 представлены фактические и рассчитанные с использованием формулы (11) зависимости.

Их анализ позволил нам сделать такие выводы.

1. Из-за явления Гиббса [12] рассчитанные с использованием (11) зависимости $q(r)$ охватывают не весь интервал $\left(\frac{r}{R}\right) \in (0;1)$.

2. Для нечетных степеней n расхождение между фактическими и расчетными кривыми имеет место, начиная с $n = 5$. При этом для четных степеней n полное совпадение между кривыми имеет место на всем рассмотренном интервале изменения показателя степени.

Далее определим зависимости $J_0(\mu_i \cdot r)$, установленные с использованием (11) и (39). Они представлены на рисунке 13.

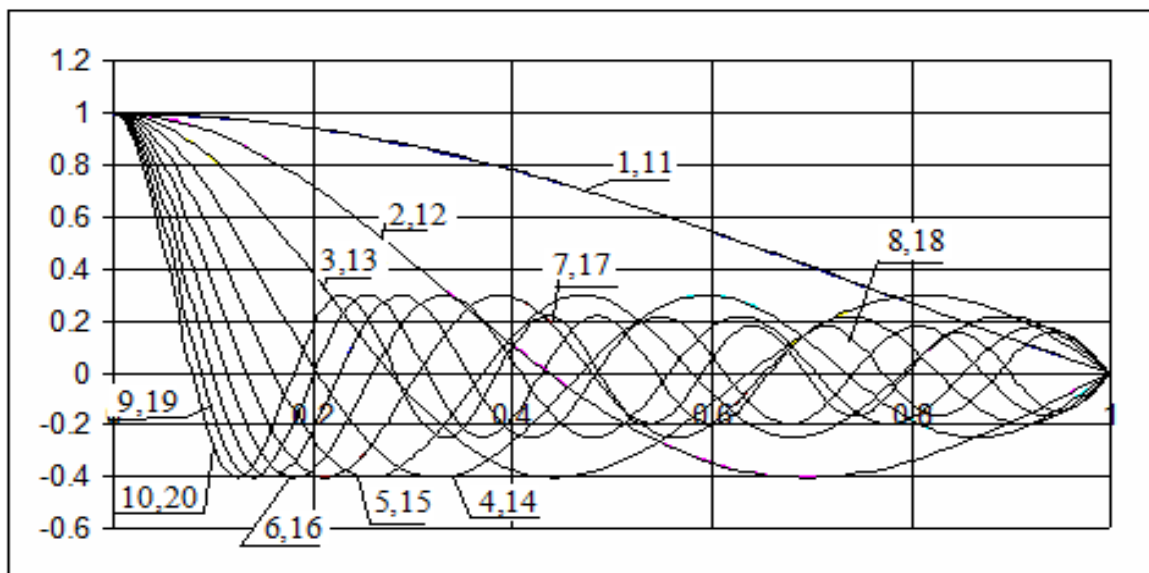


Рис. 13. Зависимости $q(r) = J_0(\mu_i \cdot r)$. 1,...,10– расчет; 11,...,20– факт. 1 и 11– $\mu = \mu_1$, 2 и 12– $\mu = \mu_2$, ..., 10 и 20– $\mu = \mu_{10}$ (см. табл. 1).

Кривые совпадают

Анализ представленных на рисунке 13 графических зависимостей позволил нам сделать вывод о том, что расчетные и фактические кривые полностью совпадают. В этой связи при решении практических задач в формулах (16), (18), (20),..., (28) целесообразно принимать функции $A(\alpha)$ в виде (29), а граничное условие на глубине h целесообразно аппроксимировать с использованием формул (2).