

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ УПЛОТНЕНИЯ ВОДОНАСЫЩЕННЫХ ГРУНТОВЫХ ОСНОВАНИЙ.

Необходимость выполнения изложенных в настоящем разделе исследований обусловлена тем, что принятые в настоящее время различными авторами уравнения движения, состояния и порового давления находящегося под воздействием динамической нагрузки водонасыщенного грунта существенно отличаются друг от друга [15, 29, 51] и от уравнений близкой (в математическом смысле) классической теории взаимосвязанной термоупругости [33]. При этом открытыми также остаются вопросы учета анизотропии деформационных и фильтрационных свойств грунта, а также математической формализации процессов накопления деформаций при загрузке-разгрузке в случае пространственного напряженно-деформированного состояния.

Ниже приведены результаты исследований, направленных на получение уравнений движения, состояния и порового давления водонасыщенного грунтового основания. При их выводе для случая упругой водонасыщенной среды использованы фундаментальные законы термодинамики необратимых процессов [2].

В ходе исследований преследовалась цель получить по возможности наиболее общие результаты. В этой связи рассматривались обладающие анизотропией (как деформационной, так и фильтрационной) основания и учитывались динамические эффекты.

1.1. УПЛОТНЕНИЕ ГРУНТОВОГО ВОДОНАСЫЩЕННОГО ОСНОВАНИЯ КАК ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС

В настоящем разделе выводятся соотношения динамической задачи теории фильтрационной консолидации для анизотропного водонасыщенного

основания. Для этой цели нами использованы фундаментальные законы феноменологической термодинамики и полученные в последнее время соотношения термодинамики необратимых процессов [2, 33].

Рассмотрим ограниченный поверхностью LA объём грунтового основания ΔV , который состоит из большого числа образующих термодинамическую систему материальных частиц. Состояние этой системы характеризуется некоторыми макроскопическими величинами, которые называются параметрами или переменными состояния.

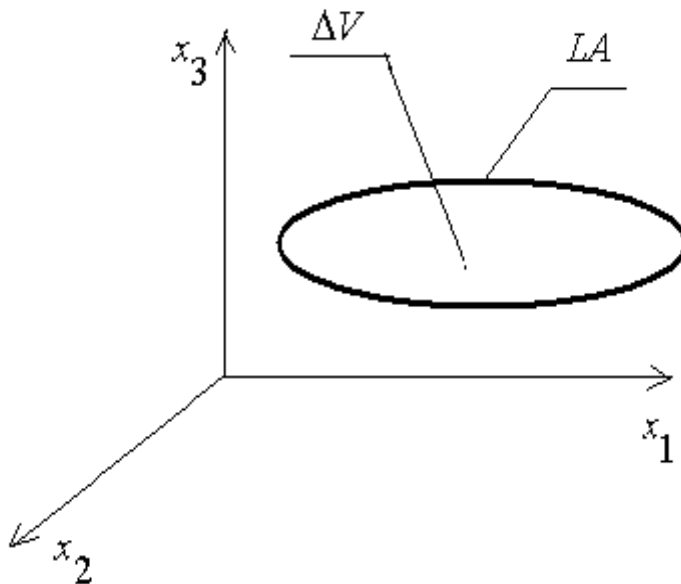


Рис. 1.1.1. К выводу уравнений состояния водонасыщенного основания.

Ввиду специфики рассматриваемой термодинамической системы в качестве параметров приняты внутренняя и свободная энергия \vec{U} и \vec{F} , энтропия \vec{S} , перемещения U_i , деформации $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(U_{j,i} + U_{i,j})$, напряжения σ_{ij} , температура T , поровое давление P и объём V . Здесь $U_{j,i} = \frac{\partial U_j}{\partial x_i}$

и $U_{i,j} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$. Согласно [2] приращение энтропии равно

$$d\Delta\vec{S} = de\Delta\vec{S} + d_i\Delta\vec{S}, \quad (1.1.1)$$

где $de\Delta\vec{S}$ - приращение энтропии за счет обмена с окружающей средой;
 $d_i\Delta\vec{S}$ - производство энтропии внутри системы. При этом для необратимых процессов справедливо неравенство

$$d_i\Delta\vec{S} > 0. \quad (1.1.2)$$

Для вывода уравнений состояния воспользуемся вторым законом термодинамики:

$$\left. \begin{aligned} dF &= \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \sigma_{ij} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} - g_{i,i}; \\ T \frac{d\vec{S}}{dt} &= -g_{i,i}, \end{aligned} \right\} \quad (1.1.3)$$

где t - время; $g_{i,i}$ - источники энтропии.

В уравнения (1.1.3) входят четыре термодинамических параметра: внутренняя энергия \vec{U} , энтропия \vec{S} , деформации $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(U_{j,i} + U_{i,j})$, напряжения σ_{ij} , температура T . При этом, согласно правилу фаз Гиббса, число независимых термодинамических параметров N равно

$$N = n - \vec{\varphi} + 2 = 2 - 2 + 2 = 2,$$

где n - число компонентов системы (порозая жидкость и грунтовой скелет); $\bar{\varphi}$ - число фаз в системе (твердая и жидкая). В качестве независимых параметров примем порозое давление P и деформации ε_{ij} и перейдем к этим переменным в соотношениях (1.1.3). Для этой цели используем уравнение состояния системы [2, 33, 55]

$$P = F(T, V), \quad (1.1.4)$$

которое в линеаризованной форме имеет вид

$$K \cdot P = T, \quad (1.1.5)$$

где $K > 0$ - коэффициент пропорциональности. Иногда для этой цели используется уравнение Менделеева - Клапейрона [2].

$$\frac{V_{\mu}}{R_{\mu}} P = T, \quad (1.1.6)$$

где V_{μ} и R_{μ} - соответственно объём одного моля вещества и универсальная газовая постоянная.

Соотношение (1.1.6) справедливо для идеальных газов. Для реальных газов и тем более жидкостей и твердых тел R_{μ} и V_{μ} являются функциями давления и температуры, в силу чего $k \neq V_{\mu} / R_{\mu}$. С учетом изложенного (1.1.3) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} d\vec{F} &= \frac{dU}{dt} = \sigma_{ij} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} - g_{i,i}; \\ KP \frac{d\vec{S}}{dt} &= -g_{i,i}. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.7)$$

Для вывода уравнения фильтрационной консолидации анизотропного основания рассмотрим объём грунта V , ограниченный поверхностью A . Обусловленная приращением порового давления скорость изменения энтропии в объеме V равна:

$$\frac{d\Delta\vec{S}}{dt} = K \int \frac{d\vec{S}}{dt} dV = - \int \frac{g_{i,i}}{P} dV, \text{ откуда } \frac{Kd\Delta\vec{S}}{dt} = - \int_A \frac{g_i \cdot n_i}{P} dA - \int_V \frac{g_i P_{,i}}{P^2} dV, (1.1.8)$$

где $g_i n_i$ - вектор источников энтропии на границе A объема V .

Первое слагаемое правой части (1.1.8) характеризует процесс обмена с окружающей средой и принимает как положительные, так и отрицательные значения. Второе слагаемое (1.1.8) называют интенсивностью источника энтропии θ . Ввиду необратимости процесса (см. (1.1.2)), параметр θ будет строго положительным, т.е.

$$\theta = - \frac{g_i P_{,i}}{P^2} > 0 \quad (1.1.9)$$

В термодинамике необратимых процессов принято оперировать с термодинамическими потоками g_i (поток тепла, массы и т.д.) и силами \vec{F}_i [2]. Термодинамические силы позволяют установить взаимосвязь между причинами возникновения необратимых процессов и источниками энтропии. В этой связи имеем:

$$\theta = - \frac{g_i P_{,i}}{P^2} \text{ и } \theta = g_i \cdot F_i, \text{ откуда } F_i = - \frac{P_{,i}}{P^2} \quad (1.1.10)$$

или

$$F = -\frac{1}{P^2} \text{grad}(P). \quad (1.1.11)$$

Соотношение (1.1.11) означает, что в водонасыщенном грунтовом основании производство энтропии возникает за счет изменения давления в поровой жидкости. С другой стороны, в силу постулата Онзагера о линейных соотношениях между термодинамическими потоками и силами справедливо соотношение

$$\left. \begin{aligned} g_i &= L_{ij} \cdot F_j; \\ i, j &= 1, 2, 3, \end{aligned} \right\}, \quad (1.1.12)$$

где L_{ij} - коэффициенты пропорциональности. С другой стороны, согласно соотношениям взаимности Онзагера также имеют место соотношения

$$\left. \begin{aligned} L_{ij} &= L_{ji}; \\ L_{ij} &\geq 0; \\ L_{ii} \cdot L_{jj} &\geq 0,25(L_{ij} + L_{ji})^2; \\ i, j &= 1, 2, 3. \end{aligned} \right\}, \quad (1.1.13)$$

в которых не следует выполнять суммирование по индексам i и j .

С учетом (1.1.10) и (1.1.12) выражение (1.1.9) примет вид:

$$\theta = L_{ij} F_i \cdot F_j = L_{ij} \frac{P_{,i} \cdot P_{,j}}{P^4}. \quad (1.1.14)$$

Коэффициенты L_{ij} следует выбрать таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:

- движущие силы должны иметь размерность $\frac{H}{m \cdot c}$;
- отношение суммы движущих сил к поровому давлению должно подчиняться закону Дарси для пористой среды;
- коэффициенты L_{ij} должны учитывать характер взаимодействия грунтового скелета с поровой жидкостью.

Ввиду изложенного следует принять $L_{ij} = \frac{k_{ij}^{\phi}}{\beta_{ij} \gamma_w} \cdot P^3$, откуда с учетом

(1.1.8) имеем:

$$g_i = -P \cdot \frac{k_{ij}^{\phi}}{\gamma_w \cdot \beta_{ij}} \cdot P, j;$$

$$K \cdot P \cdot \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{\beta_{ij}} \left(\frac{k_{ij}^{\phi}}{\gamma_w} \cdot P \cdot P, j \right), i;$$

$$i, j = 1, 2, 3. \quad (1.1.15)$$

Здесь k_{ij}^{ϕ} - коэффициенты фильтрации по направлениям; γ_w - удельный вес поровой жидкости; β_{ij} - коэффициенты порового давления по направлениям [14, 15].

Для вывода уравнений состояния введем в рассмотрение свободную энергию:

$$\vec{F} = U - \vec{S} \cdot T = U - K \cdot \vec{S} \cdot P. \quad (1.1.16)$$

В этом случае первое уравнение (1.1.7) примет вид

$$d\vec{F} = \sigma_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij} - K \cdot \vec{S} \cdot dP. \quad (1.1.17)$$

С другой стороны,

$$d\vec{F} = \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_P d\varepsilon_{ij} + \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial P} \right)_{\varepsilon_{ij}} dP. \quad (1.1.18)$$

Из сопоставления (1.1.17) и (1.1.18) вытекает, что

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_P \quad \text{и} \quad \vec{S} = -\frac{1}{K} \cdot \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial P} \right)_{\varepsilon_{ij}}. \quad (1.1.19)$$

Далее разложим функцию $F(\varepsilon, P)$ вблизи естественного состояния в окрестности точек $\varepsilon_{ij} = 0$ и $P = P_0$ в ряд Тейлора. Имеем:

$$\begin{aligned} \vec{F} \approx & \vec{F}(0, P_0) + \frac{\partial \vec{F}(0, P_0)}{\partial \varepsilon_{ij}} \cdot \varepsilon_{ij} + \frac{\partial \vec{F}(0, P_0)}{\partial P} \cdot (P - P_0) + \\ & + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial^2 \vec{F}(0, P_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{KL}} \cdot \varepsilon_{ij} \cdot \varepsilon_{KL} + 2 \frac{\partial^2 \vec{F}(0, P_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial P} \cdot (P - P_0) \cdot \varepsilon_{ij} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 \vec{F}(0, P_0)}{\partial P^2} \cdot (P - P_0)^2 \right] + \dots \end{aligned} \quad (1.1.20)$$

С учетом (1.1.20) представим (1.1.19) в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{\partial \vec{F}(0, P_0)}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial^2 \vec{F}(0, P_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{KL}} \cdot \varepsilon_{KL} + \frac{\partial^2 \vec{F}(0, P_0)}{\partial P \partial \varepsilon_{ij}} \cdot (P - P_0); \\ K\vec{S} &= \left[\frac{\partial \vec{F}(0, P_0)}{\partial P} + \frac{\partial^2 \vec{F}(0, P_0)}{\partial P \partial \varepsilon_{ij}} \cdot \varepsilon_{ij} + \frac{\partial^2 \vec{F}(0, P_0)}{\partial P^2} \cdot (P - P_0) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.21)$$

Принимая за начало отсчета естественное состояние, найдем, что

$$\vec{F}(0, P_0) = 0 \text{ и } \frac{\partial \vec{F}(0, P_0)}{\partial P} = -\vec{S}(0, P_0) = 0.$$

Введём обозначения: $P^* = P - P_0$, $c_{ijkl} = \frac{\partial^2 \vec{F}(0, P_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{KL}}$ и

$$\frac{\partial^2 \vec{F}(0, P_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial P} = -\frac{1}{\beta_{ij}}.$$

Обозначим сумму всех зависящих только лишь от порового давления слагаемых как $\varphi(P)$. В этом случае соотношения (1.1.20) и (1.1.21) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \vec{F} &= \frac{1}{2} c_{ijkl} \cdot \varepsilon_{ij} \cdot \varepsilon_{KL} - \frac{1}{\beta_{ij}} \varepsilon_{ij} \cdot P^* + \varphi(P); \\ \sigma_{ij} &= c_{ijkl} \cdot \varepsilon_{KL} - \frac{1}{\beta_{ij}} P^*; \\ \vec{S} &= \frac{1}{K \cdot \beta_{ij}} \varepsilon_{ij} - \frac{1}{K} \frac{\partial \varphi(P^*)}{\partial P}. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.22)$$

Второе уравнение (1.1.22) является уравнением состояния для водонасыщенного основания и по форме совпадает с используемыми в теории термоупругости соотношениями Дюгамеля – Неймана [33].

Для определения функции $\varphi(P)$ найдем полный дифференциал энтропии:

$$\left. \begin{aligned} d\bar{S} &= \left(\frac{d\bar{S}}{d\varepsilon_{ij}} \right)_P \cdot d\varepsilon_{ij} + \left(\frac{d\bar{S}}{dP} \right)_{\varepsilon_{ij}} \cdot dP; \\ d\bar{S} &= \frac{1}{\beta_{ij} \cdot K} \cdot d\varepsilon_{ij} - \frac{1}{K} \cdot \frac{\partial \varphi(P^*)}{\partial P^2} \cdot dP. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.23)$$

Вычтем нижнее уравнение (1.1.23) из верхнего. Имеем:

$$\left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial P} \right)_{\varepsilon_{ij}} dP + \frac{1}{K} \frac{\partial^2 \varphi(P^*)}{\partial P^2} dP = 0 \quad \text{или} \quad \frac{P}{K} = \frac{\partial^2 \varphi(P^*)}{\partial P^2} = T \cdot \left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial T} \right)_{\varepsilon_{ij}} = c_V, \quad (1.1.24)$$

где c_V - теплоемкость грунта при постоянной деформации (здесь было использовано равенство (1.1.5)). Поскольку изменение температуры в грунтовом основании за счет приращения порового давления весьма мало, следует положить

$$\varphi(P^*) \equiv 0. \quad (1.1.25)$$

С учетом (1.1.25) уравнения (1.1.22) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \vec{F} &= \frac{1}{2} c_{ijkl} \cdot \varepsilon_{ij} \cdot \varepsilon_{kl} - \frac{1}{\beta_{ij}} \varepsilon_{ij} \cdot P^* ; \\ \sigma_{ij} &= c_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} - \frac{1}{\beta_{ij}} P^* ; \\ K \cdot \vec{S} &= \frac{1}{\beta_{ij}} \cdot \varepsilon_{ij} . \end{aligned} \right\} \quad (1.1.26)$$

Для вывода уравнения порового давления продифференцируем последнее равенство (1.1.26) по времени t и умножим на поровое давление P .
Имеем:

$$K \cdot P \cdot \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{P}{\beta_{ij}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cdot \varepsilon_{ij} \quad (1.1.27)$$

Сопоставив (1.1.27) с (1.1.15), найдем

$$\left. \begin{aligned} P \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} &= \frac{k_{ij}^{\phi}}{\gamma_w} (P \cdot P, j), i ; \\ i, j &= 1, 2, 3. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.28)$$

Таким образом, уравнение порового давления (1.1.28) имеет нелинейный вид. При его линеаризации учтем, что $P = P_0 + P^*$ и $|P_0| \gg |P^*|$, P_0 – поровое давление в естественном состоянии, а P^* - приращение порового давления. В этом случае равенство (1.1.28) примет вид:

$$P_0 \cdot \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} = \frac{k_{ij}^{\phi}}{\gamma_w} P_0 \cdot P_{,ji}^* + \frac{k_{ij}^{\phi}}{\gamma_w} \cdot P_{,i}^* \cdot P_{,j}^* \quad (1.1.29)$$

Поскольку $\left| P_{,i} \cdot P_{,j} \right| \ll \left| P_0 \cdot P_{,ji} \right|$, имеем окончательно
линеаризированное уравнение порового давления для анизотропного
грунтового основания в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} &= \frac{k_{ij}^{\phi}}{\gamma_w} \cdot P_{,ij}; \\ i, j &= 1, 2, 3. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.30)$$

Если грунт не обладает свойством анизотропии, мы придём к
обычному уравнению порового давления [14, 15]. Следует также отметить,
что на практике уравнение (1.1.28) априори принимается линейным, а
входящие в него параметры – кусочно-линейными в различных диапазонах
давлений.

Для вывода уравнений равновесия рассмотрим уравнения состояния
(второе уравнение (1.1.26)) и уравнения движения [15, 16, 33, 36, 47, ..., 52] в
виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= \rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} - \gamma \gamma_i; \\ i, j &= 1, 2, 3. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.31)$$

где $\sigma_{ij,j}$ и $z z_i$ - проекции на координатные оси действующих в некоторой точке основания напряжений и объемных сил, ρ - плотность основания.

Поскольку деформации в точке ε_{ij} и приращение порового давления P^* равны соответственно $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot (U_{i,j} + U_{j,i})$ и $P^* = P - P_0$, то справедливы такие равенства

$$P^*_{,i} = P_{,i}; \quad P^*_{,j} = P_{,j}; \quad \frac{\partial P^*}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (1.1.32)$$

где U_i - перемещения в направлении координатных осей. С учетом изложенного найдем окончательно

$$\left. \begin{aligned} c_{ijkl} \cdot U_{k,lj} &= \rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} + \frac{1}{\beta_{ij}} P_{,j} z_i; \\ \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} &= \frac{k_{ij}^{\Phi}}{\gamma_W} P_{,ji}; \\ \sigma_{ij} &= c_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} - \frac{1}{\beta_{ij}} P; \\ i, j, k, l &= 1, 2, 3. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.33)$$

Следует отметить, что при соответствующей замене материальных констант система уравнений (1.1.33) полностью совпадает с системой уравнений, описывающей движение анизотропной термоупругой среды [33].

Представляет интерес вопрос о максимальном значении числа линейно - независимых материальных констант в (1.1.33) c_{ijkl} , $\frac{1}{\beta_{ij}}$ и k_{ij}^{ϕ} для

различных условий симметрии. Детально этот вопрос исследован в работах, посвященных физике кристаллов. При этом, поскольку проблема имеет чисто геометрическую суть, вопрос о физической природе материальных констант не является первостепенным.

В связи с изложенным ниже представлены адаптированные к грунтовому основанию уже известные в других областях механики твердого тела результаты. При этом сохранена принятая в физике кристаллов терминология и опущены известные очевидные выкладки.

Из (1.1.33) вытекает, что максимальное значение материальных констант в тензоре четвертого ранга c_{ijkl} равно 81, а в тензорах второго ранга $\frac{1}{\beta_{ij}}$ и k_{ij}^{ϕ} - девяти. При этом нас интересует максимальное число линейно-независимых материальных констант в той или иной системе симметрии.

Если грунтовое основание таково, что имеет место центральная симметрия (т.е. симметричны тензоры σ_{ij} и ε_{kl}), то справедливы равенства

$$c_{ijkl} = c_{jikl}, c_{ijkl} = c_{ijlk}, c_{ijkl} = c_{klij}, \frac{1}{\beta_{ij}} = \frac{1}{\beta_{ji}} \text{ и } k_{ij}^{\phi} = k_{ji}^{\phi}.$$

Ввиду изложенного тензоры материальных констант имеют вид:

$$[c_{ijKL}] = \begin{vmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1123} & c_{1131} & c_{1112} \\ & c_{2222} & c_{2233} & c_{2223} & c_{2231} & c_{2212} \\ & & c_{3333} & c_{3323} & c_{3331} & c_{3312} \\ & & & c_{2323} & c_{2331} & c_{2312} \\ & & & & c_{3131} & c_{3112} \\ & & & & & c_{1212} \end{vmatrix}, \quad (1.1.34)$$

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{1}{\beta_{ij}} \right] &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ & 1 & 1 \\ & \beta_{22} & \beta_{23} \\ & & 1 \\ & & \beta_{33} \end{vmatrix}; & \left[k_{ij}^{\Phi} \right] &= \begin{vmatrix} k_{11}^{\Phi} & k_{12}^{\Phi} & k_{13}^{\Phi} \\ & k_{22}^{\Phi} & k_{23}^{\Phi} \\ & & k_{33}^{\Phi} \end{vmatrix} \end{aligned} \right\}. \quad (1.1.34)$$

В соотношениях (1.1.34 ÷ 1.1.38) выписаны только верхние части матриц, поскольку их нижние части симметричны относительно главной диагонали. Матрицы (1.1.34) соответствуют триклинной структуре основания, которая содержит 21 линейно-независимый коэффициент c_{ijkl} и 6 линейно-независимых коэффициентов $\frac{1}{\beta_{ij}}$ и k_{ij}^{Φ} . Следует также отметить,

что указанное число линейно-независимых материальных констант является максимально возможным для реальных твердых тел.

Если одна из осей (например, ось x_3) является двукратной осью симметрии, мы приходим к основанию, соответствующему моноклинной структуре основания. В этом случае

$$\begin{aligned}
 [k_{ij}^{\Phi}] &= \begin{vmatrix} k_{11}^{\Phi} & k_{12}^{\Phi} & 0 \\ & k_{22}^{\Phi} & 0 \\ & & k_{33}^{\Phi} \end{vmatrix}; \\
 [c_{ijkl}] &= \begin{vmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & c_{1112} \\ & c_{2222} & c_{2233} & 0 & 0 & c_{2212} \\ & & c_{3333} & 0 & 0 & c_{3312} \\ & & & c_{2323} & c_{2331} & 0 \\ & & & & c_{3131} & 0 \\ & & & & & c_{1212} \end{vmatrix}, \quad (1.1.35)
 \end{aligned}$$

$$\text{и} \quad \left[\frac{1}{\beta_{ij}} \right] = \begin{vmatrix} \frac{1}{\beta_{11}} & \frac{1}{\beta_{12}} & 0 \\ & \frac{1}{\beta_{22}} & 0 \\ & & \frac{1}{\beta_{33}} \end{vmatrix}. \quad (1.1.35)$$

Из (1.1.35) вытекает, что у моноклинной системы число линейно-независимых констант c_{ijkl} равно 13, а $\frac{1}{\beta_{ij}}$ и k_{ij}^{Φ} - четырем.

Если основание характеризуется двумя взаимно ортогональными осями симметрии, мы придем к ромбической структуре. В этом случае

$$[c_{ijkl}] = \begin{vmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{2222} & c_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{2323} & 0 & 0 \\ & & & & c_{3131} & 0 \\ & & & & & c_{1212} \end{vmatrix};$$

$$\left. \left[\frac{1}{\beta_{ij}} \right] = \begin{vmatrix} \frac{1}{\beta_{11}} & 0 & 0 \\ & \frac{1}{\beta_{22}} & 0 \\ & & \frac{1}{\beta_{33}} \end{vmatrix}; \quad \left[k_{ij}^{\Phi} \right] = \begin{vmatrix} k_{11}^{\Phi} & 0 & 0 \\ & k_{22}^{\Phi} & 0 \\ & & k_{33}^{\Phi} \end{vmatrix} \right\}. \quad (1.1.36)$$

Из (1.1.36) вытекает, что ромбической структуре соответствуют 9 линейно - независимых постоянных c_{ijKL} и по 3 линейно - независимых

постоянных $\frac{1}{\beta_{ij}}$ и k_{ij}^{Φ} . Структуру, описываемую набором материальных констант вида (1.1.36), также принято называть ортотропной.

Если свойства тела не изменяются при повороте системы координат относительно оси x_3 , мы придем к гексагональной структуре основания. В этом случае

$$\left. \left[c_{ijKL} \right] = \begin{vmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{1111} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{1313} & 0 & 0 \\ & & & & c_{1313} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}(c_{1111} - c_{2211}) \end{vmatrix}; \quad \left[\frac{1}{\beta_{ij}} \right] = \begin{vmatrix} \frac{1}{\beta_{11}} & 0 & 0 \\ & \frac{1}{\beta_{11}} & 0 \\ & & \frac{1}{\beta_{33}} \end{vmatrix}; \quad \left[k_{ij}^{\Phi} \right] = \begin{vmatrix} k_{11}^{\Phi} & 0 & 0 \\ & k_{11}^{\Phi} & 0 \\ & & k_{33}^{\Phi} \end{vmatrix} \right\}. \quad (1.1.37)$$

Из (1.1.37) вытекает, что для гексагональной системы симметрии число линейно-независимых коэффициентов c_{ijKL} равно шести, а число линейно-независимых коэффициентов $\frac{1}{\beta_{ij}}$ и k_{ij}^{Φ} - двум.

Наконец, если основание характеризуется гексагональной симметрией относительно двух взаимно перпендикулярных осей, мы приходим к изотропной среде:

$$\left. \begin{aligned} [c_{ijKL}] &= \begin{vmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ & & & G & 0 & 0 \\ & & & & G & 0 \\ & & & & & G \end{vmatrix}; \\ \left[\frac{1}{\beta_{ij}} \right] &= \begin{vmatrix} \frac{1}{\beta} & 0 & 0 \\ & \frac{1}{\beta} & 0 \\ & & \frac{1}{\beta} \end{vmatrix}; \quad [k_{ij}^{\Phi}] = \begin{vmatrix} k^{\Phi} & 0 & 0 \\ & k^{\Phi} & 0 \\ & & k^{\Phi} \end{vmatrix} \end{aligned} \right\}, \quad (1.1.38)$$

где $\lambda = c_{1122}$ и $G = 0.5(c_{1111} - c_{1122})$ - константы Ламе;

$\beta_{11} = \beta_{22} = \beta_{33} = \beta$ - коэффициент порового давления;

$k_{11}^{\Phi} = k_{22}^{\Phi} = k_{33}^{\Phi} = k^{\Phi}$ - коэффициент фильтрации.

Изложенные в настоящем разделе материалы исследований позволили сделать такие выводы.

1. Получены уравнения движения, состояния и порового давления для несжимаемого водонасыщенного грунтового анизотропного основания.
2. Для вывода этих уравнений использованы соотношения феноменологической термодинамики.
3. Рассмотрены различные структуры грунтового основания, в том числе триклинная, моноклинная, ромбическая (ортотропная), гексагональная и изотропная.
4. Показано, что при соответствующей замене физических констант полученные нами уравнения для водонасыщенного грунтового основания соответствуют уравнениям теории взаимосвязанной термоупругости.

1.2. Уравнения движения изотропного водонасыщенного грунта.

1.2.1. Декартова система координат

Для вывода уравнений движения водонасыщенного грунта при учете инерционных свойств основания рассмотрим систему уравнений (1.1.33), положив в ней упругие константы равными:

$$\left. \begin{aligned} C_{ijKL} &= G \cdot (\delta_{ik} \cdot \delta_{ji} + \delta_{ij} \cdot \delta_{jk}) + \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot \delta_{KL}; \\ k_{ij}^{\Phi} &= \delta_{ij} \cdot k^{\Phi}; \\ \frac{1}{\beta_{ij}} &= \frac{\delta_{ij}}{\beta}; \\ i, j, K, L &= 1, 2, 3. \end{aligned} \right\}, \quad (1.2.1)$$

где δ_{ij} - символ Кронекера, а также перейдем от переменных x_1, x_2 и x_3 к переменным x, y и z . Кроме того, положим $U_1=U$; $U_2=V$ и $U_3=W$. В этом случае в декартовой системе координат уравнения движения грунта примут вид:

$$G\Delta U + (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial P}{\partial x};$$

$$G\Delta V + (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial P}{\partial y};$$

$$G\Delta W + (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial P}{\partial z}; \quad (1.2.2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \alpha} = c_v \Delta P - \frac{\beta}{3} \frac{\partial}{\partial \alpha} \sigma_{kk};$$

$$\sigma_{xx} = 2G\varepsilon_x + \lambda e - \frac{1}{\beta} P;$$

$$\sigma_{yy} = 2G\varepsilon_y + \lambda e - \frac{1}{\beta} P;$$

$$\sigma_{zz} = 2G\varepsilon_z + \lambda e - \frac{1}{\beta} P;$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = G \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} \right);$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = G \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x} \right);$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = G \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial y} \right);$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z};$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y};$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x};$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial y};$$

(1.2.2)

$$e = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\sigma_{kk} = (3\lambda + 2G)e - \frac{3}{\beta}P. \quad (1.2.2)$$

где U , V и W - перемещения в направлении координатных осей x , y и z соответственно; λ и G - константы Ламе; e - объемное расширение; σ_{xx} , σ_{yy} и σ_{zz} - нормальные напряжения, действующие в направлении координатных осей x , y и z ; τ_{xy} , τ_{xz} и τ_{yz} - то же касательные, действующие соответственно в плоскостях xy , xz и yz ; ρ - плотность основания; P - поровое давление; c_v - коэффициент пространственной консолидации; β - коэффициент порового давления; ε_x , ε_y и ε_z - нормальные деформации в направлении осей x , y и z ; γ_{xy} , γ_{xz} и γ_{yz} - деформации сдвига соответственно в плоскостях xy , xz и yz ; σ_{kk} - шаровой тензор напряжений; t - время; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа в декартовой системе координат.

Положив в (1.2.2) поровое давление $P = 0$, мы придем к известным уравнениям, описывающим движение несжимаемого неводонасыщенного основания:

$$G\Delta U + (\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2};$$

$$G\Delta V + (\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2};$$

$$G\Delta W + (\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}; \quad (1.2.3)$$

$$\sigma_{xx} = 2G\varepsilon_x + \lambda e;$$

$$\sigma_{yy} = 2G\varepsilon_y + \lambda e;$$

$$\sigma_{zz} = 2G\varepsilon_z;$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = G\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\right);$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = G\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}\right);$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = G\left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}\right);$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y};$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x};$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y};$$

$$e = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\sigma_{kk} = (3\lambda + 2G)e. \tag{1.2.3}$$

Положив в (1.2.2) плотность грунта $\rho = 0$, мы приходим к известным уравнениям движения водонасыщенного основания в квазистатической постановке:

$$G\Delta U + (\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial x} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial P}{\partial x};$$

$$G\Delta V + (\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial y} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial P}{\partial y};$$

$$G\Delta W + (\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial z} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial P}{\partial z};$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = c_v\Delta P - \frac{\beta}{3}\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{kk};$$

$$\sigma_{xx} = 2G\varepsilon_x + \lambda e - \frac{1}{\beta}P;$$

$$\sigma_{yy} = 2G\varepsilon_y + \lambda e - \frac{1}{\beta}P;$$

$$\sigma_{zz} = 2G\varepsilon_z + \lambda e - \frac{1}{\beta}P;$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = G\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\right);$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = G\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}\right);$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = G\left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}\right); \quad (1.2.4)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y};$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x};$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y};$$

$$e = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\sigma_{kk} = (3\tilde{\lambda} + 2\tilde{G})e - \frac{3}{\beta}P. \quad (1.2.4)$$

Полагая в (1.2.4) поровое давление $P = 0$, мы приходим к известной системе уравнений, описывающих движение неводонасыщенного основания:

$$\tilde{G}\Delta U + (\tilde{\lambda} + \tilde{G})\frac{\partial e}{\partial x} = 0;$$

$$\tilde{G}\Delta V + (\tilde{\lambda} + \tilde{G})\frac{\partial e}{\partial y} = 0;$$

$$\tilde{G}\Delta W + (\tilde{\lambda} + \tilde{G})\frac{\partial e}{\partial z} = 0;$$

$$\sigma_{xx} = 2\tilde{G}\varepsilon_x + \tilde{\lambda}e; \quad (1.2.5)$$

$$\sigma_{yy} = 2\tilde{G}\varepsilon_y + \tilde{\lambda}e;$$

$$\sigma_{zz} = 2\tilde{G}\varepsilon_z + \tilde{\lambda}e;$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tilde{G}\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\right);$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tilde{G}\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}\right);$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tilde{G}\left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}\right);$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y};$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x};$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y};$$

$$e = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\sigma_{kk} = (3\tilde{\lambda} + 2\tilde{G})e. \tag{1.2.5}$$

В заключение отметим, что между упругими константами Ламе, коэффициентом консолидации при компрессии, коэффициентом

пространственной консолидации и коэффициентом фильтрации грунта существует такая взаимосвязь [14, 15, 50, 51, 55]:

$$\left. \begin{aligned} c_v &= \frac{1}{3} \frac{3\lambda + 2G}{\lambda + 2G} c_k; \\ c_k &= \frac{k_\phi \beta (\lambda + 2G)}{\gamma_W} \end{aligned} \right\}, \quad (1.2.6)$$

где c_k - коэффициент консолидации при компрессии, c_v - коэффициент пространственной консолидации, а K_ϕ - коэффициент фильтрации основания.

1.2.2. Цилиндрическая система координат

В цилиндрической системе координат при осевой симметрии уравнения движения (1.2.2) при учете динамических сил (т.е. в рамках модели весомого основания) имеют вид

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial e}{\partial r} + 2G \frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial P}{\partial r} + \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2};$$

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{2G}{r} \frac{\partial(\omega \cdot r)}{\partial r} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial P}{\partial z} + \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = c_v \Delta P - \frac{\beta}{3} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{kk}; \quad (1.2.7)$$

$$\sigma_{zz} = 2G\varepsilon_z + \lambda e - \frac{1}{\beta} P;$$

$$\sigma_{rr} = 2G\varepsilon_r + \lambda e - \frac{1}{\beta} P;$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G\varepsilon_\theta + \lambda e - \frac{1}{\beta} P;$$

$$\tau_{rz} = G\gamma_{rz};$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U}{\partial r}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{U}{r};$$

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial r} \right);$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r};$$

$$e = \varepsilon_r + \varepsilon_z + \varepsilon_\theta;$$

$$\sigma_{kk} = \sigma_{zz} + \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}, \quad (1.2.7)$$

где U и W - перемещения соответственно в направлении координатных осей

Or и Oz ; ω - вращение; r и z - координаты; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор

Лапласа в цилиндрической системе координат при осевой симметрии; σ_{zz} , σ_{rr} ,

$\sigma_{\theta\theta}$ - нормальные напряжения; τ_{rz} - то же, касательное; $\varepsilon_z, \varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ - нормальные деформации; γ_{rz} - то же, касательная.

Для того чтобы получить уравнения движения неводонасыщенного грунта в квазистатической постановке, в (1.2.7) следует положить поровое давление $P = 0$. Имеем:

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial e}{\partial r} + 2G \frac{\partial \omega}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2};$$

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{2G}{r} \frac{\partial(\omega \cdot r)}{\partial r} = \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2};$$

$$\sigma_{zz} = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_z + \lambda \cdot e;$$

$$\sigma_{rr} = 2G\varepsilon_r + \lambda e;$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G\varepsilon_\theta + \lambda e;$$

$$\tau_{rz} = G\gamma_{rz};$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U}{\partial r}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{U}{r};$$

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial r} \right);$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r};$$

$$e = \varepsilon_r + \varepsilon_z + \varepsilon_\theta;$$

$$\sigma_{kk} = \sigma_{zz} + \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}. \quad (1.2.8)$$

Для того, чтобы получить уравнения движения водонасыщенного грунта в квазистатической постановке, в (1.2.7) следует положить плотность основания $\rho = 0$.

В этом случае имеем

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial e}{\partial r} + 2G \frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial P}{\partial r};$$

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{2G}{r} \frac{\partial(\omega \cdot r)}{\partial r} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial P}{\partial z};$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = c_v \Delta P - \frac{\beta}{3} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{kk};$$

$$\sigma_{zz} = 2G \varepsilon_z + \lambda e - \frac{1}{\beta} P;$$

$$\sigma_{rr} = 2G \varepsilon_r + \lambda e - \frac{1}{\beta} P;$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G \varepsilon_\theta + \lambda e - \frac{1}{\beta} P;$$

$$\tau_{rz} = G \gamma_{rz}; \quad (1.2.9)$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U}{\partial r}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{U}{r};$$

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial r} \right);$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r};$$

$$e = \varepsilon_r + \varepsilon_z + \varepsilon_\theta;$$

$$\sigma_{kk} = \sigma_{zz} + \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}. \quad (1.2.9)$$

Наконец, для неводонасыщенного невесомого основания уравнения движения имеют вид (для их вывода в (1.2.9) следует положить поровое давление P равным нулю):

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial e}{\partial r} + 2G \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0;$$

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{2G}{r} \frac{\partial(\omega \cdot r)}{\partial r} = 0;$$

$$\sigma_{zz} = 2G\varepsilon_z + \lambda e;$$

$$\sigma_{rr} = 2G\varepsilon_r + \lambda e;$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G\varepsilon_\theta + \lambda e; \quad (1.2.10)$$

$$\tau_{rz} = G\gamma_{rz};$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U}{\partial r}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{U}{r};$$

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial r} \right);$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r};$$

$$e = \varepsilon_r + \varepsilon_z + \varepsilon_\theta;$$

$$\sigma_{kk} = \sigma_{zz} + \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}. \quad (1.2.10)$$

Для построения частных решений конкретных задач к системам уравнений (1.2.2 ÷ 1.2.5) и (1.2.7 ÷ 1.2.10) следует присоединить начальные и граничные условия. Кроме того, если основание имеет слоистую структуру, на контакте слоев следует обеспечить условия “склейки”. Подробно эти вопросы освещены в разделе 1.3.

Следует также отметить, что уравнения (1.2.3), (1.2.5), (1.2.8) и (1.2.10) были получены ранее и широко используются при решении задач теории упругости [33, 50], уравнения (1.2.4) и (1.2.8) были получены Ю. К. Зарецким [14, 15] иным, чем в настоящей работе, путем, а системы уравнений (1.2.2) и (1.2.7) по форме полностью совпадают с уравнениями теории взаимосвязанной термоупругости [33] (различаются только материальные константы). При этом системы уравнений (1.2.2) и (1.2.7) отличаются от

приведенных в [15] уравнений движения водонасыщенного основания. Детально этот вопрос исследован в разделе 1.4.

В целом, изложенные в настоящем разделе материалы исследований позволили нам сделать такие выводы.

1. В декартовой системе координат получены уравнения движения весомого водонасыщенного основания.

2. Эти результаты обобщены на случай моделей неводонасыщенного основания (динамическая задача) и водонасыщенного основания в квазистатической постановке.

3. Аналогичные результаты получены для случая цилиндрической системы координат при осевой симметрии.

4. Полученные нами уравнения движения основания по форме полностью совпадают с классическими уравнениями тепло – массопереноса [33] (отличаются только материальные константы), с уравнениями фильтрационной консолидации при квазистатической нагрузке [14, 15] и уравнениями движения неводонасыщенной среды [33, 47]. При этом полученные нами уравнения движения водонасыщенного основания в рамках динамической задачи теории взаимосвязанной фильтрационной консолидации отличаются от полученных авторами [15, 29, 51]. Этот вопрос исследован в разделе 1.4.

1.3. Начальные и граничные условия

Для построения частных решений конкретных задач к представленным в разделе 1.2 уравнениям движения и состояния грунтового основания следует присоединить начальные и граничные условия. Ввиду многообразия инженерных задач в настоящем разделе рассмотрены лишь те из них, которые, на наш взгляд, имеют наибольшую практическую ценность.

1.3.1. Цилиндрическая система координат.

В рамках расчетной схемы грунтового полупространства при квазистатической нагрузке на основание граничные и начальные условия в цилиндрической системе координат при осевой симметрии имеют вид (рис. 1.3.1):

$$\left. \begin{aligned} U(r, z, 0) &= \tilde{U}(r, z); \\ W(r, z, 0) &= \tilde{W}(r, z); \\ P(r, z, 0) &= \tilde{P}(r, z); \\ \sigma_{zz}(r, 0, t) &= \tilde{\sigma}_{zz}(r, t); \\ \tau_{rz}(r, 0, t) &= \tilde{\tau}_{rz}(r, t); \\ P(r, 0, t) &= 0 \text{ (проницаемая граница) или} \\ \left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=0} &= 0 \text{ (непроницаемая граница)} \end{aligned} \right\}, \quad (1.3.1)$$

где $\tilde{U}(r, z)$, $\tilde{W}(r, z)$, $\tilde{P}(r, z)$, $\tilde{\sigma}_{zz}(r, t)$, $\tilde{\tau}_{rz}(r, t)$ - некоторые заранее известные функции времени и координат, имеющие физический смысл перемещений,

порового давления и напряжений. При этом перемещения, напряжения и поровое давление при $r \rightarrow \infty$ и $z \rightarrow \infty$ следует положить равными нулю.

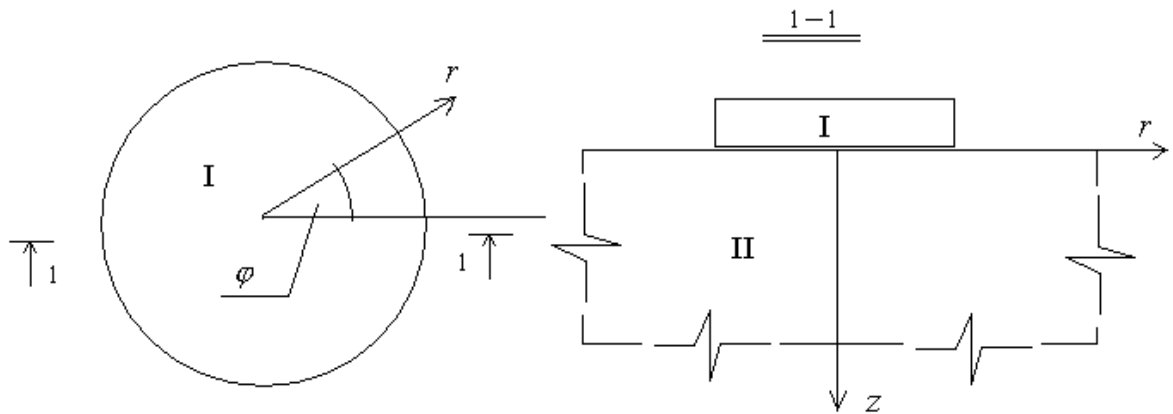


Рис. 1.3.1 К определению граничных условий в цилиндрической системе координат (осевая симметрия). Расчетная схема основания – полупространство. r, z, φ - координаты; I - фундамент; II – основание.

Если заранее известны перемещения верхней границы основания (такая ситуация имеет место при решении контактных задач), то граничные условия (1.3.1) примут вид:

$$\left. \begin{aligned}
 U(r, z, 0) &= \tilde{U}(r, z); \\
 W(r, z, 0) &= \tilde{W}(r, z); \\
 P(r, z, 0) &= \tilde{P}(r, z); \\
 U(r, 0, t) &= U^*(r, t); \\
 W(r, 0, t) &= W^*(r, t); \\
 P(r, 0, t) &= 0 \text{ (проницаемая граница) или} \\
 \left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=0} &= 0 \text{ (непроницаемая граница)}
 \end{aligned} \right\}, \quad (1.3.2)$$

где $U^*(r,t)$, $W^*(r,t)$ - заранее известные перемещения верхней границы основания (в общем случае это функции некоторые времени и координаты r).

Для динамической задачи (модель несомого водонасыщенного основания) в цилиндрической системе координат при осевой симметрии начальные и граничные условия имеют вид:

$$\left. \begin{aligned}
 U(r,z,0) &= \tilde{U}(r,z); \\
 \frac{\partial U(r,z,0)}{\partial t} &= \tilde{U}'(r,z); \\
 W(r,z,0) &= \tilde{W}(r,z); \\
 \frac{\partial W(r,z,0)}{\partial t} &= \tilde{W}'(r,z); \\
 P(r,z,0) &= \tilde{P}(r,z); \\
 \sigma_{zz}(r,0,t) &= \tilde{\sigma}_{zz}(r,t); \\
 \tau_{rz}(r,0,t) &= \tilde{\tau}_{rz}(r,t); \\
 P(r,0,t) &= 0 \text{ (проницаемая граница) или} \\
 \left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=0} &= 0 \text{ (непроницаемая граница)}
 \end{aligned} \right\} \quad (1.3.3)$$

где $\tilde{U}'(r,z)$, $\tilde{W}'(r,z)$ - некоторые заранее известные функции координат.

Если заранее известны перемещения верхней границы основания (такая ситуация имеет место при решении контактных задач), то граничные условия (1.3.3) примут вид:

$$\left. \begin{aligned}
 U(r, z, 0) &= \tilde{U}(r, z); \\
 \frac{\partial U(r, z, 0)}{\partial t} &= \tilde{U}'(r, z); \\
 W(r, z, 0) &= \tilde{W}(r, z); \\
 \frac{\partial W(r, z, 0)}{\partial t} &= \tilde{W}'(r, z); \\
 P(r, z, 0) &= \tilde{P}(r, z); \\
 U(r, 0, t) &= U^*(r, t); \\
 W(r, z, 0) &= W^*(r, t); \\
 P(r, 0, t) &= 0 \text{ (проницаемая граница) или} \\
 \left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=0} &= 0 \text{ (непроницаемая граница)}.
 \end{aligned} \right\} \quad (1.3.4)$$

При использовании в качестве расчетной схемы грунтового слоя конечной толщины в цилиндрической системе координат при осевой симметрии и приложенной к основанию квазистатической нагрузке (рис. 1.3.2) начальные и граничные условия имеют следующий вид.

1. Если нет проскальзывания на контакте подошвы грунтового слоя и подстилающего жесткого основания:

$$\left. \begin{aligned}
 U(r, z, 0) &= \tilde{U}(r, z); \\
 W(r, z, 0) &= \tilde{W}(r, z); \\
 P(r, z, 0) &= \tilde{P}(r, z); \\
 \sigma_{zz}(r, 0, t) &= \tilde{\sigma}_{zz}(r, t); \\
 \tau_{rz}(r, 0, t) &= \tilde{\tau}_{rz}(r, t);
 \end{aligned} \right\} \quad (1.3.5)$$

$$\left. \begin{aligned}
 &P(r,0,t)=0 \text{ (проницаемая верхняя граница) или} \\
 &\left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \text{ (непроницаемая верхняя граница);} \\
 &P(r,H,t)=0 \text{ (проницаемая нижняя граница) или} \\
 &\left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=H} = 0 \text{ (непроницаемая нижняя граница);} \\
 &U(r,z,H)=0; \\
 &W(r,z,H)=0.
 \end{aligned} \right\} (1.3.5)$$

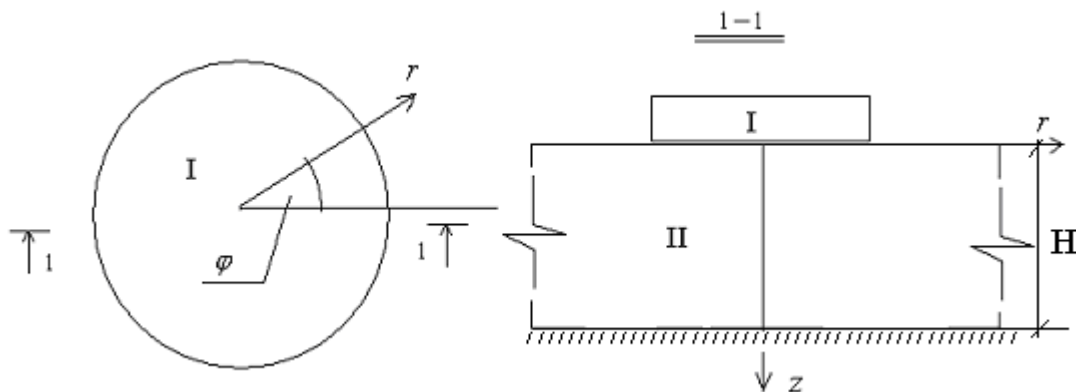


Рис. 1.3.2. К определению граничных условий в цилиндрической системе координат (осевая симметрия). Расчетная схема основания – слой конечной толщины. r, z, φ - координаты; I - фундамент; II – основание.

2. Если имеет место проскальзывание на контакте подошвы грунтового слоя и подстилающего жесткого основания (например, по пластичному подслою грунта):

$$\left. \begin{aligned}
 U(r, z, 0) &= \tilde{U}(r, z); \\
 W(r, z, 0) &= \tilde{W}(r, z); \\
 P(r, z, 0) &= \tilde{P}(r, z); \\
 \sigma_{zz}(r, 0, t) &= \tilde{\sigma}_{zz}(r, t) \\
 \tau_{rz}(r, 0, t) &= \tilde{\tau}_{rz}(r, t); \\
 P(r, 0, t) &= 0 \text{ (проницаемая верхняя граница) или} \\
 \left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=0} &= 0 \text{ (непроницаемая верхняя граница);} \\
 P(r, H, t) &= 0 \text{ (проницаемая нижняя граница) или} \\
 \left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=H} &= 0 \text{ (непроницаемая нижняя граница);} \\
 \tau_{rz}(r, 0, t) &= 0; \\
 W(r, z, H) &= 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (1.3.6)$$

Если заранее известны перемещения верхней границы основания, то в (1.3.5) и (1.3.6) вместо условий

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{zz}(r, 0, t) &= \tilde{\sigma}_{zz}(r, t); \\
 \tau_{rz}(r, 0, t) &= \tilde{\tau}_{rz}(r, t).
 \end{aligned} \right\} \text{ следует положить} \quad \left. \begin{aligned}
 U(r, z, 0) &= U^*(r, t); \\
 W(r, 0, t) &= W^*(r, t).
 \end{aligned} \right\} \quad (1.3.7)$$

Для динамической задачи (модель весоного водонасыщенного основания) в цилиндрической системе координат при осевой симметрии для слоя к системам уравнений (1.3.5) и (1.3.6) следует присоединить начальные условия для скоростей перемещений вида:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U(r,z,0)}{\partial t} &= \tilde{U}'(r,z); \\ \frac{\partial W(r,z,0)}{\partial t} &= \tilde{W}'(r,z). \end{aligned} \right\} \quad (1.3.8)$$

В практике проектирования также приходится сталкиваться со слоистыми грунтовыми основаниями (рис. 1.3.3).

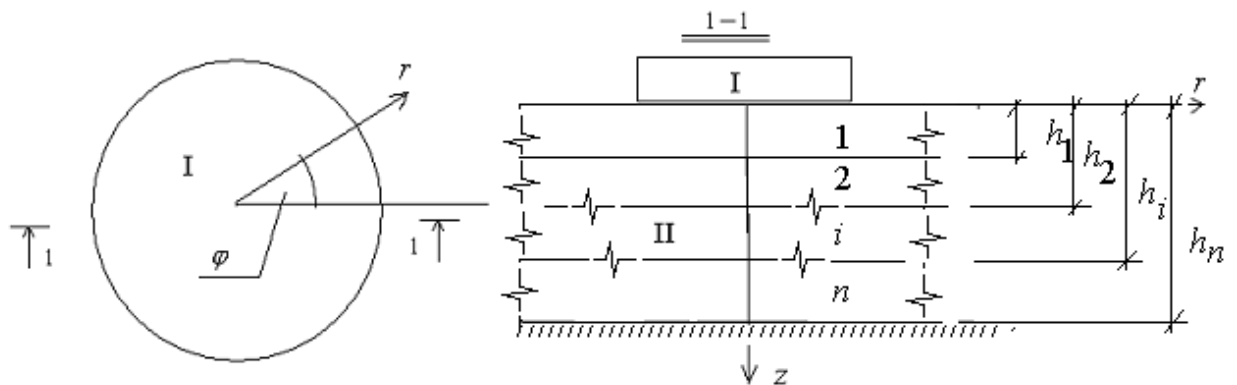


Рис. 1.3.3. К определению условий «склейки» в цилиндрической системе координат (осевая симметрия). Расчетная схема – слоистое основание. r, z, φ – координаты; I – фундамент; II – основание; $1, 2, \dots, i, \dots, n$ – номера грунтовых слоев; h_1, h_2, h_i, h_n – расстояния от начала координат до контакта грунтовых слоев.

Для расчета их напряженно-деформированного состояния к соотношениям (1.3.1 ÷ 1.3.8) следует присоединить условия «склейки», которые в случае горизонтального (параллельно дневной поверхности) расположения грунтовых слоев и их идеального контакта имеют вид:

$$\left. \begin{aligned}
 U^i(r, h_i, t) - U^{i+1}(r, h_i, t) &= 0; \\
 W^i(r, h_i, t) - W^{i+1}(r, h_i, t) &= 0; \\
 \sigma_{zz}^i(r, h_i, t) - \sigma_{zz}^{i+1}(r, h_i, t) &= 0; \\
 \tau_{rz}^i(r, h_i, t) - \tau_{rz}^{i+1}(r, h_i, t) &= 0; \\
 P^i(r, h_i, t) - P^{i+1}(r, h_i, t) &= 0; \\
 k_{\Phi}^i \frac{\partial P^i(r, h_i, t)}{\partial z} - k_{\Phi}^{i+1} \frac{\partial P^{i+1}(r, h_i, t)}{\partial z} &= 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (1.3.9)$$

где i - номер слоя; h_i - расстояние от начала оси Oz до контакта слоев; k_{Φ}^i коэффициент фильтрации i - того слоя.

С физической точки зрения система уравнений (1.3.9) аналогична утверждению о том, что:

- перемещения i того и $i+1$ - го слоев на их контакте равны между собой;
- вертикальные нормальные и касательные напряжения в плоскости $or\phi$ на контакте i того и $i+1$ - го слоев равны между собой;
- поровые давления на контакте i того и $i+1$ - го слоев равны между собой;
- скорости движения поровой жидкости в вертикальном направлении на контакте i того и $i+1$ - го слоев равны между собой.

1.3.2. Декартова система координат.

В декартовой системе координат (рис. 1.3.4) соотношения (1.3.1) примут вид:

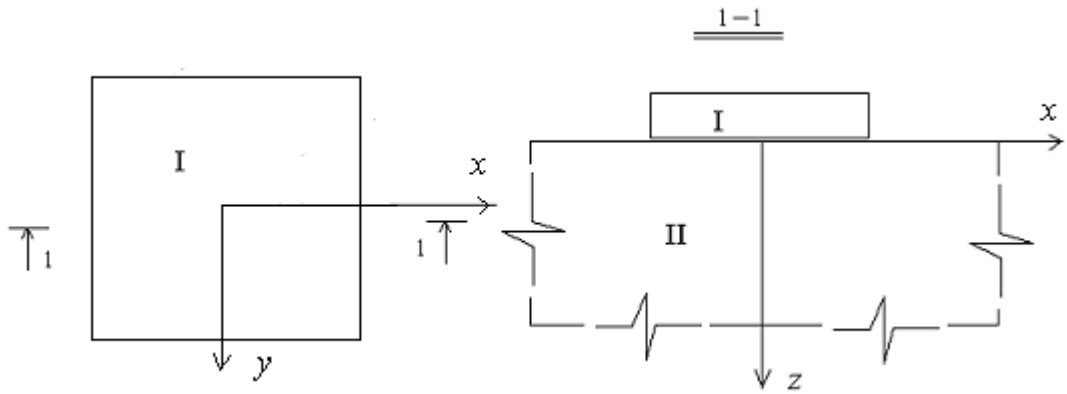


Рис. 1.3.4. К определению граничных условий в декартовой системе координат. Расчетная схема основания – слой конечной полупространство. x, y, z - координаты; I фундамент; II – основание.

$$\left. \begin{aligned}
 U(x, y, z, 0) &= \tilde{U}(x, y, z); \\
 V(x, y, z, 0) &= \tilde{V}(x, y, z); \\
 W(x, y, z, 0) &= \tilde{W}(x, y, z); \\
 P(x, y, z, 0) &= \tilde{P}(x, y, z); \\
 \sigma_{zz}(x, y, 0, t) &= \tilde{\sigma}_{zz}(x, y, t); \\
 \tau_{xz}(x, y, 0, t) &= \tilde{\tau}_{xz}(x, y, t); \\
 \tau_{yz}(x, y, 0, t) &= \tilde{\tau}_{yz}(x, y, t); \\
 P(r, 0, t) &= 0 \text{ (проницаемая верхняя граница) или} \\
 \left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=0} &= 0 \text{ (непроницаемая верхняя граница)}
 \end{aligned} \right\} \cdot \quad (1.3.10)$$

Если на границе полупространства граничные условия заданы в перемещениях, в (1.3.10) вместо условий

$$\sigma_{zz}(x, y, 0, t) = \tilde{\sigma}_{zz}(x, y, t); \tau_{xz}(x, y, 0, t) = \tilde{\tau}_{xz}(x, y, t); \tau_{yz}(x, y, 0, t) = \tilde{\tau}_{yz}(x, y, t);$$

следует положить

$$\left. \begin{aligned} U(x, y, 0, t) &= U^*(x, y, t); \\ V(x, y, 0, t) &= V^*(x, y, t); \\ W(x, y, 0, t) &= W^*(x, y, t). \end{aligned} \right\}, \quad (1.3.11)$$

где $U^*(x, y, t)$; $V^*(x, y, t)$; $W^*(x, y, t)$ - некоторые наперед заданные функции координат (x, y) и времени t , имеющие физический смысл перемещений.

Если рассматривается модель водонасыщенного весомого основания, то к системе уравнений (1.3.10) следует добавить начальные условия для скоростей перемещений вида

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U(x, y, z, 0)}{\partial t} &= \tilde{U}'(x, y, z); \\ \frac{\partial V(x, y, z, 0)}{\partial t} &= \tilde{V}'(x, y, z); \\ \frac{\partial W(x, y, z, 0)}{\partial t} &= \tilde{W}'(x, y, z). \end{aligned} \right\}, \quad (1.3.12)$$

где $U'(x, y, t)$; $V'(x, y, t)$; $W'(x, y, t)$ - некоторые наперед заданные функции координат (x, y) и времени t , имеющие физический смысл скоростей перемещений.

Если проскальзывание подошвы слоя конечной толщины по жесткому основанию исключено, то к граничным условиям (1.3.10) следует добавить условия на нижней границе (рис. 1.3.5):

$$\left. \begin{aligned}
 &P(r,0,t)=0 \text{ (проницаемая верхняя граница) или} \\
 &\left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \text{ (непроницаемая верхняя граница);} \\
 &P(r,H,t)=0 \text{ (проницаемая нижняя граница) или} \\
 &\left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=H} = 0 \text{ (непроницаемая нижняя граница);} \\
 &U(r,z,H)=0; \\
 &V(r,z,H)=0; \\
 &W(r,z,H)=0.
 \end{aligned} \right\} (1.3.13)$$

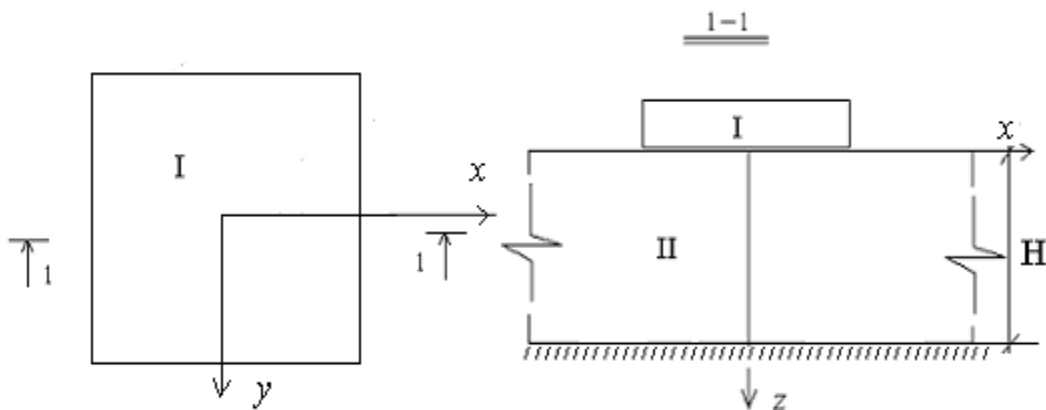


Рис. 1.3.5. К определению граничных условий в декартовой системе координат. Расчетная схема основания – слой конечной толщины. r, z, φ - координаты; I фундамент; II – основание.

Если имеет место проскальзывание подошвы слоя конечной толщины по жесткому основанию, то к граничным условиям (1.3.10) следует добавить условия на нижней границе вида (рис. 1.3.5):

$$\left. \begin{aligned}
 &P(r,0,t)=0 \text{ (проницаемая верхняя граница) или} \\
 &\left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \text{ (непроницаемая верхняя граница);} \\
 &P(r,H,t)=0 \text{ (проницаемая нижняя граница) или} \\
 &\left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=H} = 0 \text{ (непроницаемая нижняя граница);} \\
 &\tau_{xz}(r,z,H)=0; \\
 &\tau_{yz}(r,z,H)=0; \\
 &W(r,z,H)=0.
 \end{aligned} \right\} (1.3.14)$$

Наконец, если основание имеет слоистую текстуру (рис. 1.3.6), то в декартовой системе координат на контакте слоев должны выполняться такие условия:

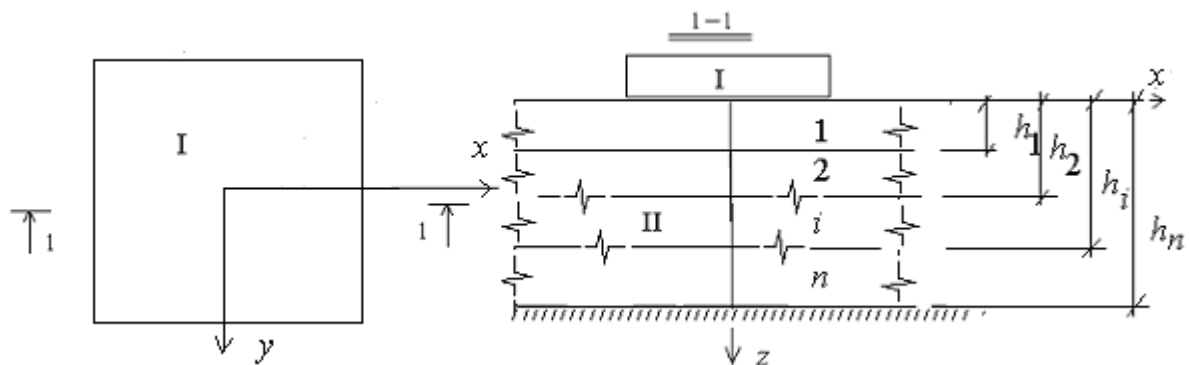


Рис. 1.3.6. К определению условий «склейки» в декартовой системе координат. Расчетная схема – слоистое основание. x, y, z – координаты; I – фундамент; II – основание; $1, 2, \dots, i, \dots, n$ – номера грунтовых слоев; h_1, h_2, h_i, h_n – расстояния от начала координат до контакта грунтовых слоев.

$$\left. \begin{aligned}
U^i(x, y, h_i, t) - U^{i+1}(x, y, h_i, t) &= 0; \\
V^i(x, y, h_i, t) - V^{i+1}(x, y, h_i, t) &= 0; \\
W^i(x, y, h_i, t) - W^{i+1}(x, y, h_i, t) &= 0 \\
; \\
\sigma_{zz}^i(x, y, h_i, t) - \sigma_{zz}^{i+1}(x, y, h_i, t) &= 0; \\
\tau_{xz}^i(x, y, h_i, t) - \tau_{xz}^{i+1}(x, y, h_i, t) &= 0; \\
\tau_{yz}^i(x, y, h_i, t) - \tau_{yz}^{i+1}(x, y, h_i, t) &= 0; \\
P^i(x, y, h_i, t) - P^{i+1}(x, y, h_i, t) &= 0; \\
k_i \Phi \frac{\partial P(x, y, h_i, t)}{\partial z} - k_{i+1} \Phi \frac{\partial P(x, y, h_i, t)}{\partial z} &= 0.
\end{aligned} \right\} \quad (1.3.15)$$

Если процесс вынужденных колебаний продолжается неограниченно долго, то начальные условия при $t \rightarrow 0$ перестают оказывать влияние на процесс движения основания. В этой связи следует положить поровое давление и перемещения (или напряжения) при $t \rightarrow 0$ равными нулю. В этом случае имеем:

- для системы (1.3.1):

$$\left. \begin{aligned}
\sigma_{zz}(r, 0, t) &= \tilde{\sigma}_{zz}(r, t); \\
\tau_{rz}(r, 0, t) &= \tilde{\tau}_{rz}(r, t); \\
P(r, 0, t) &= 0 \text{ (проницаемая граница) или } \\
\left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=0} &= 0 \text{ (непроницаемая граница)}.
\end{aligned} \right\}; \quad (1.3.16)$$

- для системы (1.3.2):

$$\left. \begin{aligned}
 U(r,0,t) &= U^*(r,t); \\
 W(r,0,t) &= W^*(r,t); \\
 P(r,0,t) &= 0 \text{ (проницаемая граница) или} \\
 \left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=0} &= 0 \text{ (непроницаемая граница)}
 \end{aligned} \right\}; \quad (1.3.17)$$

- для системы (1.3.3) – условия (1.3.16);
- для системы (1.3.4) – условия (1.3.17);
- для системы (1.3.5):

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{zz}(r,0,t) &= \tilde{\sigma}_{zz}(r,t); \\
 \tau_{rz}(r,0,t) &= \tilde{\tau}_{rz}(r,t); \\
 P(r,0,t) &= 0 \text{ (проницаемая верхняя граница) или} \\
 \left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=0} &= 0 \text{ (непроницаемая верхняя граница);} \\
 P(r,H,t) &= 0 \text{ (проницаемая нижняя граница) или} \\
 \left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=H} &= 0 \text{ (непроницаемая нижняя граница);} \\
 U(r,z,H) &= 0; \\
 W(r,z,H) &= 0.
 \end{aligned} \right\}; \quad (1.3.18)$$

- для системы (1.3.6):

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{zz}(r,0,t) &= \tilde{\sigma}_{zz}(r,t); \\
 \tau_{rz}(r,0,t) &= \tilde{\tau}_{rz}(r,t); \\
 P(r,0,t) &= 0 \text{ (проницаемая верхняя граница) или} \\
 \left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=0} &= 0 \text{ (непроницаемая верхняя граница);} \\
 P(r,H,t) &= 0 \text{ (проницаемая нижняя граница) или} \\
 \left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=H} &= 0 \text{ (непроницаемая нижняя граница);} \\
 \tau_{rz}(r,0,t) &= 0; \\
 W(r,z,H) &= 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (1.3.19)$$

- систему (1.3.8) следует исключить из рассмотрения;
- для системы (1.3.10):

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{zz}(x,y,0,t) &= \tilde{\sigma}_{zz}(x,y,t); \\
 \tau_{xz}(x,y,0,t) &= \tilde{\tau}_{xz}(x,y,t); \\
 \tau_{yz}(x,y,0,t) &= \tilde{\tau}_{yz}(x,y,t); \\
 P(r,0,t) &= 0 \text{ (проницаемая верхняя граница) или} \\
 \left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=0} &= 0 \text{ (непроницаемая верхняя граница)}
 \end{aligned} \right\} \quad (1.3.20)$$

Представленные в настоящем разделе материалы исследований позволили нам сделать такие выводы.

1. В цилиндрической и декартовой системах координат сформулированы граничные и начальные условия, необходимые для решения представленных в разделе (3.1) уравнений движения водонасыщенного основания.

2. Рассмотрены динамическая (модель весоного основания) и квазистатическая (модель невесоного основания) задачи теории взаимосвязанной фильтрационной консолидации.

3. Для слоистых оснований сформулированы условия на контакте грунтовых слоев с различными свойствами.

4. Эти результаты обобщены на случай длительно действующих вынужденных колебаний грунта.

В целом, был сделан вывод о том, что рассмотренные в настоящем разделе граничные условия вполне позволяют строить частные решения рассматриваемых в настоящей работе задач. При этом ввиду разнообразия грунтовых условий и многообразия практических проблем, они не в коей мере не могут считаться всеобъемлющими.

1.4. Анализ результатов исследований. Выводы по разделу

Выше (разделы 1.1 и 1.2) было установлено, что полученные нами для весоного водонасыщенного основания уравнения движения грунта по форме полностью совпадают с классическими уравнениями тепломассопереноса (точнее, с уравнениями движения термоупругой среды) и отличаются от приведенных в работе Ю. К. Зарецкого [15] равенств. Исследуем этот вопрос подробнее.

Согласно [15] движение водонасыщенного основания в любой момент времени t описывается системой уравнений вида:

$$\left. \begin{aligned} \rho \cdot \frac{\partial^2 U_i^{sk}}{\partial t^2} &= \frac{k\phi}{g} \cdot \frac{\partial P_{,i}^w}{\partial t} + \sigma_{ij,i}^{ef} - \delta_{ij} \cdot P_{,i}^w - \delta_{i3} \cdot \rho \cdot g; \\ \frac{\partial U_{i,i}^{sk}}{\partial t} + \frac{1-m_s}{K_w} \cdot \frac{\partial P_{,i}^w}{\partial t} &= \left(\frac{k\phi}{g \cdot \rho_w} P_{,i}^w \right)_{,i}; \\ i, j &= 1, 2, 3. \end{aligned} \right\}, \quad (1.4.1)$$

где U_i^{sk} - перемещения некоторой точки грунтового скелета в направлении координат x_1, x_2, x_2 ; ρ - плотность основания; g - ускорение свободного падения; $k\phi$ - коэффициент фильтрации; P^w - давление в поровой жидкости; σ_{ij}^{ef} - эффективные напряжения; δ_{ij} - символ Кронекера; ρ_w - плотность воды; K_w - модуль объемного сжатия воды; $m_s \leq 1$ - отношение объема, который занимают грунтовые частицы, к общему объему.

Перейдем в (1.4.1) к координатам x, y, z (декартова система координат). Обозначим $U_1^{sk} = U$; $U_2^{sk} = V$; $U_3^{sk} = W$. Учтем, что имеют место такие соотношения: $\sigma_{ij,i}^{ef} = G \cdot U_{j,ij} + G \cdot U_{i,jj} + \lambda \cdot U_{k,ki}$ и

$$U_{i,i}^{sk} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = e = \frac{3 \cdot P}{\beta \cdot (3 \cdot \lambda + 2 \cdot G)} + \frac{\sigma_{kk}}{(3 \cdot \lambda + 2 \cdot G)},$$

где e - объемная деформация. Рассмотрим процесс движения основания в окрестности естественного состояния (т.е. опустим последнее слагаемое правой части верхнего уравнения (1.4.1)). Положим $k^\phi = const$. Имеем:

$$G \cdot \Delta U + (\lambda + G) \cdot \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{k^\phi}{g} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = \rho \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial P}{\partial x};$$

$$G \cdot \Delta V + (\lambda + G) \cdot \frac{\partial e}{\partial y} + \frac{k^\phi}{g} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = \rho \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial P}{\partial y};$$

$$G \cdot \Delta W + (\lambda + G) \cdot \frac{\partial e}{\partial z} + \frac{k^\phi}{g} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = \rho \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial P}{\partial z};$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1 - m_s}{K_w} \cdot \beta \cdot \frac{3 \cdot \lambda + 2 \cdot G}{3} \frac{\partial P}{\partial t} = c_v \cdot \Delta P - \frac{\beta}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cdot \sigma_{kk}. \quad (1.4.2)$$

Далее выполним нормировку (т.е. в системе (1.4.2) перейдем к безразмерным коэффициентам). Для этого положим:

$$\begin{aligned}
 U &= U_0 \cdot U^*; \quad V = U_0 \cdot V^*; \quad W = U_0 \cdot W^*; \quad x = x_0 \cdot x^*; \quad y = x_0 \cdot y^*; \quad z = x_0 \cdot z^*; \\
 P &= P_0 \cdot P^*; \quad t = t_0 \cdot t^* = \frac{t}{\omega}; \quad \sigma_{kk} = P_0 \cdot \sigma^*_{kk},
 \end{aligned}
 \tag{1.4.3}$$

где U_0 - характерное перемещение; x_0 - характерный размер (ширина фундамента); P_0 - характерное давление в поровой жидкости; $t_0 = \frac{1}{\omega}$ - характерное времени (обычно это величина, обратная наименьшей частоте колебаний ω).

Для определенности предположим, что поровое давление полностью передается на грунтовый скелет (это предположение справедливо в том случае, если поровая жидкость не содержит пузырьков газа) [14, 15]. В этом случае коэффициент порового давления $\beta = 1$.

С учетом (1.4.3) равенства (1.4.2) примут вид:

$$\begin{aligned}
 &\frac{G \cdot U_0}{x_0^2} \cdot \Delta U^* + \frac{(\lambda + G) \cdot U_0}{x_0^2} \cdot \frac{\partial e^*}{\partial x^*} + \frac{k^\phi \cdot P_0 \cdot \omega}{g \cdot x_0} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial y^*} + \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial t^*} P^* = \\
 &\rho \cdot U_0 \cdot \omega^2 \frac{\partial^2 U^*}{\partial (t^*)^2} + \frac{P_0}{x_0} \cdot \frac{\partial P^*}{\partial x^*}; \\
 &\frac{G \cdot U_0}{x_0^2} \cdot \Delta V^* + \frac{(\lambda + G) \cdot U_0}{x_0^2} \cdot \frac{\partial e^*}{\partial y^*} + \frac{k^\phi \cdot P_0 \cdot \omega}{g \cdot x_0} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial y^*} + \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial t^*} P^* = \\
 &\rho \cdot U_0 \cdot \omega^2 \frac{\partial^2 V^*}{\partial (t^*)^2} + \frac{P_0}{x_0} \cdot \frac{\partial P^*}{\partial y^*};
 \end{aligned}
 \tag{1.4.5}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{G \cdot U_0}{x_0^2} \cdot \Delta W^* + \frac{(\lambda + G) \cdot U_0}{x_0^2} \cdot \frac{\partial e^*}{\partial z^*} + \frac{k^\phi \cdot P_0 \cdot \omega}{g \cdot x_0} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial y^*} + \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial t^*} P^* = \\
& \rho \cdot U_0 \cdot \omega^2 \frac{\partial^2 W^*}{\partial (t^*)^2} + \frac{P_0}{x_0} \cdot \frac{\partial P^*}{\partial z^*}; \\
& P_0 \cdot \omega \cdot \frac{\partial P^*}{\partial t^*} + \frac{(1 - m_s) \cdot P_0 \cdot \omega \cdot (3 \cdot \lambda + 2 \cdot G)}{3 \cdot K_w} \cdot \frac{\partial}{\partial t^*} P^* = \\
& \frac{c_v \cdot P_0}{x_0^2} \cdot \Delta P^* - \frac{P_0 \cdot \omega}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial t^*} \cdot \sigma^* k k. \tag{1.4.5}
\end{aligned}$$

Далее разделим первые три равенства (1.4.5) на множитель $\frac{P_0}{x_0}$, а последнее – на множитель $P_0 \cdot \omega$. При этом учтем, что

коэффициент консолидации равен $c_v = \frac{1}{3} \frac{3\lambda + 2G}{\lambda + 2G} c_k = \frac{1}{3} \frac{(3\lambda + 2G) \cdot k_\Phi}{\gamma_w}$.

Имеем:

$$\begin{aligned}
& \frac{G \cdot U_0}{P_0 \cdot x_0} \cdot \Delta U^* + \frac{(\lambda + G) \cdot U_0}{P_0 \cdot x_0} \cdot \frac{\partial e^*}{\partial x^*} + \frac{k^\phi \cdot \omega}{g} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial y^*} + \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial t^*} P^* = \\
& \frac{x_0}{P_0} \cdot \rho \cdot U_0 \cdot \omega^2 \frac{\partial^2 U^*}{\partial (t^*)^2} + \frac{\partial P^*}{\partial x^*};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{G \cdot U_0}{P_0 \cdot x_0} \cdot \Delta V^* + \frac{(\lambda + G) \cdot U_0}{P_0 \cdot x_0} \cdot \frac{\partial e^*}{\partial y^*} + - \cdot \frac{k^\phi \cdot \omega}{g} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial y^*} + \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial t^*} P^* = \\
& \frac{x_0}{P_0} \cdot \rho \cdot U_0 \cdot \omega^2 \frac{\partial^2 V^*}{\partial (t^*)^2} + \frac{\partial P^*}{\partial y^*}; \\
& \frac{G \cdot U_0}{P_0 \cdot x_0} \cdot \Delta W^* + \frac{(\lambda + G) \cdot U_0}{P_0 \cdot x_0} \cdot \frac{\partial e^*}{\partial z^*} + - \cdot \frac{k^\phi \cdot \omega}{g} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial y^*} + \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial t^*} P^* = \\
& \frac{x_0}{P_0} \cdot \rho \cdot U_0 \cdot \omega^2 \frac{\partial^2 W^*}{\partial (t^*)^2} + \frac{\partial P^*}{\partial z^*}; \\
& \frac{\partial P^*}{\partial t^*} + \frac{(1 - m_s) \cdot (3 \cdot \lambda + 2 \cdot G)}{3 \cdot K_w} \cdot \frac{\partial}{\partial t^*} P^* = \frac{c_v}{\omega \cdot x_0^2} \cdot \Delta P^* - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial t^*} \cdot \sigma^* k k. \quad (1.4.6)
\end{aligned}$$

Далее выполним оценку комплексов $\frac{(1 - m_s) \cdot (3 \cdot \lambda + 2 \cdot G)}{3 \cdot K_w}$ и $\frac{k^\phi \cdot \omega}{g}$.

Имеем.

1. Ускорение свободного падения $g = 9,81 \frac{m}{c^2}$.
2. Коэффициент фильтрации k^ϕ равен [15]:
 - для песков $k^\phi = 10^{-2}$ см/с (или 10^{-4} м/с);
 - для супесей $k^\phi = 10^{-2}, \dots, 10^{-3}$ см/с (или $10^{-4}, \dots, 10^{-5}$ м/с);
 - для суглинков $k^\phi = 10^{-3}, \dots, 10^{-7}$ см/с (или $10^{-5}, \dots, 10^{-9}$ м/с);
 - для глин $k^\phi = 10^{-6}, \dots, 10^{-11}$ см/с (или $10^{-8}, \dots, 10^{-13}$ м/с).

3. В качестве характерного размера x_0 примем ширину фундамента $B = 1$ м (на самом деле ширина фундамента может составлять 10 м и более). В этом случае мы несколько занижаем оценку и таким образом рассматриваем не выгоднейший случай.
4. Объемное содержание твердых частиц грунта изменяется в диапазоне $1 \geq m_s > 0$. Рассмотрим не выгоднейший случай - $m_s = 0$.
5. Объемный модуль упругости воды $K_w = 2100$ МПа.
6. Объемный модуль упругости грунта $K = 3 \cdot \lambda + 2 \cdot G = 10$ МПа.
7. Частота колебаний $f = 1 \dots 50$ Гц (этой частоте соответствует круговая частота колебаний $\omega = 6,28 \dots 314 \frac{рад}{с}$).

Имеют место такие оценки:

$$\frac{k^\phi \cdot \omega}{g} = 3,14 \cdot 10^{-3}, \dots, 1,6 \cdot 10^{-14} \text{ и } \frac{(1 - m_s) \cdot (3 \cdot \lambda + 2 \cdot G)}{3 \cdot K_w} = \cdot 10^{-3}, \dots, 5 \cdot 10^{-3}.$$

Таким образом, в системе уравнений (1.4.2) слагаемые

$$\frac{k^\phi}{g} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial t} P \text{ и } \frac{1 - m_s}{K_w} \cdot \beta \cdot \frac{3 \cdot \lambda + 2 \cdot G}{3} \frac{\partial}{\partial t} P$$

ввиду их малости. В этом случае полученные нами системы уравнений (см. разделы 3.1 и 3.2) при соответствующей замене материальных констант полностью совпадают с системами [33].

В целом, представленные в главе материалы исследований позволяют заключить следующее.

1. Получены уравнения движения водонасыщенного анизотропного грунта в рамках модели упругой водонасыщенной среды. Для их вывода использованы соотношения феноменологической теории термодинамики. Рассмотрены динамическая и квазистатическая задачи теории взаимосвязанной фильтрационной консолидации. Исследован вопрос о числе линейно - независимых материальных констант для триклинной,

моноклинной, ромбической (ортотропной), гексагональной и изотропной структур. Показано, что при квазистатической нагрузке и изотропной структуре полученные нами уравнения движения полностью совпадают с уравнениями теории фильтрационной консолидации В.А.Флорина - М.Био. При этом уравнения движения в рамках динамической задачи теории фильтрационной консолидации по форме совпадают с уравнениями теории взаимосвязанной термоупругости [33].

2. Рассмотрены наиболее часто встречающиеся в инженерной практике начальные и граничные условия, принимаемые при расчете конструкций на грунтовом основании.

3. Показано, что полученные нами системы уравнений движения несомненно водонасыщенного основания при пренебрежении величинами малого порядка ($\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}, \dots, 10^{-14}$) полностью совпадают с системами [58, 59], полученными другими авторами.