

#### **4. АЛГОРИТМЫ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ “ОСНОВАНИЕ – ФУНДАМЕНТ - СООРУЖЕНИЕ”.**

В настоящем разделе представлены результаты теоретических исследований, направленных на разработку алгоритмов расчета конструкций на грунтовом основании. Рассмотрены расчетные схемы полупространства и модели водо – и неводонасыщенного упругого основания.

При выполнении исследований основной упор был сделан на возможность интеграции их результатов в вычислительные комплексы «Лира» и «Мономах» [23, 30]. В этой связи были рассмотрены модели основания Винклера – Фусса (эта модель используется в вычислительных комплексах «Лира» и «Мономах») и модель упругого водо – и неводонасыщенного основания (эта модель используется в нормативных документах и наиболее точно отражает поведение грунтовых оснований под нагрузкой [5, 7...9, 13...15, 19,...,21, 32, 34, 40, 49...51, 53...57]).

Решение проблемы определения напряженно-деформированного состояния системы “водонасыщенное основание – фундамент - сооружение” производилось с использованием метода итерации. Это обусловлено тем, что процесс итерации обладает простотой (в смысле реализации алгоритма) и может быть достаточно просто интегрирован в вычислительные комплексы «Лира» и «Мономах» без использования исходного файла этой программы.

Для описания напряженно – деформированного состояния водонасыщенного основания во всех случаях был использован метод граничных элементов [25, 31].

Исследования выполнялись в такой последовательности.

- определение коэффициентов влияния матрицы податливости прямоугольных, треугольных, а также неправильных многоугольников граничных элементов (коэффициенты необходимы для расчета НДС системы

“основание – фундамент - сооружение”);

- формулировка алгоритма и выявление условий сходимости процесса итерации;

- решение тестовых (модельных) задач.

В качестве фундаментальных, были использованы полученные нами (см. разделы 3.2 и 3.3 настоящей работы) решения для сосредоточенной силы.

#### **4.1. Распределенная нагрузка. Граничные элементы.**

##### **Коэффициенты влияния.**

Полученные ранее (см. разделы 3.2 и 3.3) фундаментальные решения (3.2.8) (3.2.17) и (3.3.6) позволяют рассчитывать осадки любой точки поверхности основания от распределенной по площади  $D$  нагрузки  $q(x, y)$ . Для этой цели следует использовать принцип суперпозиции [25, 34, 36, 47].

Вначале рассмотрим **случай неводонасыщенного основания**.

При определении коэффициентов влияния матрицы податливости в рамках метода граничных элементов и модели неводонасыщенного основания задача исследований была сформулирована так. Граничный элемент площадью  $D$  находится на упругом основании, которое характеризуется упругими характеристиками  $G$  и  $\lambda$  [33, 36, 47]. На этот элемент действует внешняя распределенная нагрузка  $q(t)$ , которая изменяется по гармоническому закону, а процесс колебаний продолжается достаточно долго, в силу чего влияние на процесс уплотнения основания переходных процессов пренебрежимо мало.

В данном случае колебания основания в любой его точке происходят с частотой, равной частоте изменения внешней нагрузки. Кроме того, в любой момент времени амплитуда колебаний основания может быть рассчитана с использованием формулы

$$S(r, t) = S^*(r)f(t), \quad (4.1.1)$$

где  $S(r, t)$  - осадка точки основания с координатой  $r$  в момент времени  $t$ ;  $S^*(r)$  - ее амплитудное значение в точке с координатой  $r$ ;  $f(t)$  - закон изменения внешней нагрузки.

Если изменение внешней нагрузки во времени характеризуется различными частотами, то следует определить амплитудные значения осадок, соответствующие каждой из частот, а полученные таким образом результаты умножить на соответствующие функции времени  $f_i(\varpi_i, t)$  и сложить (т.е. использовать принцип суперпозиции).

В качестве базового решения примем аппроксимацию представленного в разделе 3.2 фундаментального решения задачи о сосредоточенной силе, приложенной к верхней границе неводонасыщенного полупространства:

$$S^*(r) \approx \frac{1-\nu^2}{E^*} \frac{Q}{r}, \quad (4.1.2)$$

где  $Q$  – сосредоточенная сила,  $r$ - координата;  $S^*(r)$  – амплитудное значение осадки дневной поверхности;  $E^* = f(\rho, \varpi, E, \nu)$  - приведенный модуль упругости основания, установленный в ходе аппроксимации решения задачи о приложенной к верхней границе полупространства сосредоточенной силе (см. раздел 3.2 настоящей работы);  $E$  и  $\nu$  - фактические упругие константы основания.

Для инженерных расчетов точность аппроксимации с использованием равенства (4.1.2) вполне приемлема (см. рис. 4.1.1). При этом по мере надобности она может быть значительно повышена [55].

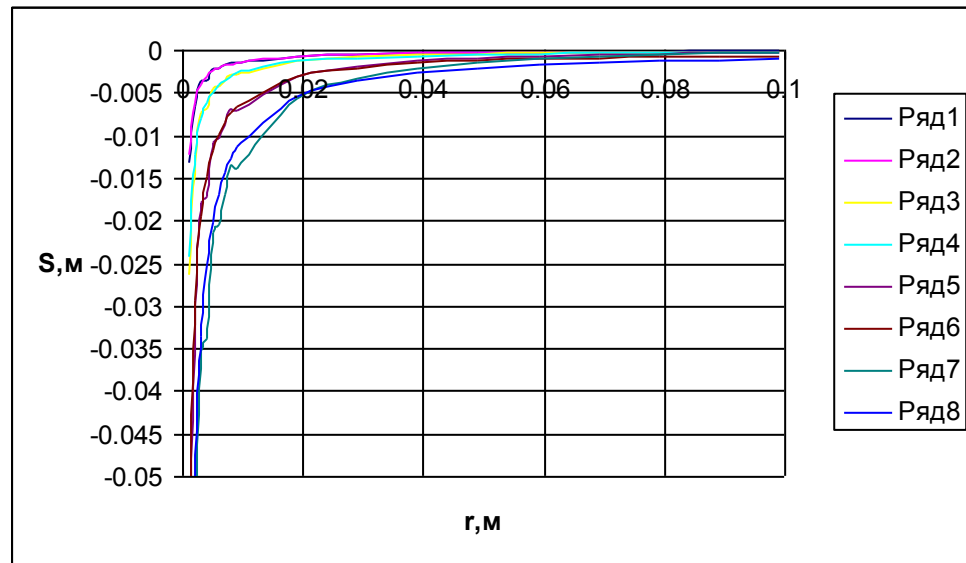


Рис. 4.1.1. Результаты аппроксимации кривых «амплитуда осадки – координата» с использованием зависимости (4.1.2). Весомое упругое неводонасыщенное полупространство. Частота изменения единичной сосредоточенной силы  $f=50$  Гц. Коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ . Удельный вес грунта  $\gamma = 18$  кН/м<sup>3</sup>. 1, 3, 5, 7 – фактические кривые; 2, 4, 6, 8 – их аппроксимация. 1,2 – модуль упругости  $E = 50$  МПа; 3,4 – то же, 25 МПа; 5,6 – то же, 10 МПа; 7,8 – 5 МПа.

Рассмотрим случай прямоугольного граничного элемента с размерами сторон  $L$  и  $B$ , на который действует распределенная нагрузка  $q(t)$  (рис. 4.1.2).

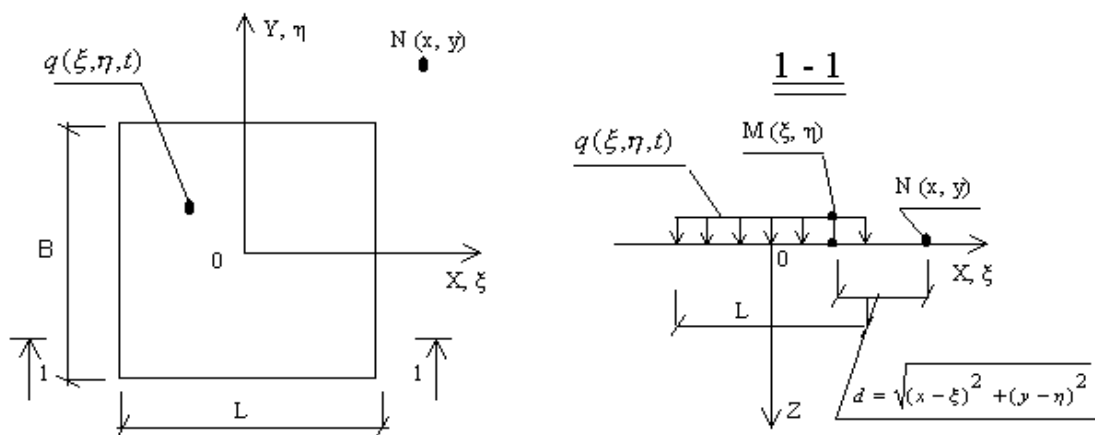


Рис. 4.1.2. К определению коэффициента влияния матрицы податливости для прямоугольного граничного элемента.

Найдем амплитудное значение осадки дневной поверхности  $S^*(x,y)$  точки основания с координатами  $(x,y)$  от элементарной нагрузки  $dQ(\xi,\eta) = q \cdot d\xi \cdot d\eta$ , приложенной в точке с координатами  $(\xi,\eta)$  (см. рис. 4.1.1). В этом случае в формуле (4.1.2) радиус следует положить равным  $r = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$ : Имеем:

$$S^*(x,y) \approx \frac{(1-\nu^2)}{E^*} \cdot q \cdot \psi(x,y), \quad (4.1.3)$$

$$\text{где } \psi(x,y) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \cdot d\xi \cdot d\eta.$$

Далее определим коэффициенты влияния матрицы податливости метода граничных элементов  $B_{ij}$  [1, 25]. В рассматриваемом случае с физической точки зрения коэффициент влияния матрицы податливости  $B_{ij}$  является амплитудой осадки точки основания с координатами  $(x_j, y_j)$ , обусловленной распределенной по площади прямоугольника с размерами сторон в плане  $b_i$  и  $L_i$  и центром в точке с координатами  $(x_i, y_i)$  единичной нагрузкой  $q$ .

Поместим центр загруженной области в точку с координатами  $(x_i, y_i)$  и найдем осадку точки с координатами  $(x_j, y_j)$ . При этом примем размеры загруженной области равными  $b_i$  и  $L_i$ , а распределенную нагрузку  $q$  равной единице. Имеем:

$$B_{ij} \approx \frac{(1-\nu^2)}{E^*} \cdot \psi(x_i, y_i, x_j, y_j), \quad (4.1.4)$$

$$\text{где } \psi(x_i, y_i, x_j, y_j) = \frac{\frac{L_i}{2} \frac{b_i}{2}}{\frac{L_i}{2} \frac{b_i}{2}} \frac{d\xi \cdot d\eta}{\sqrt{(x_j - x_i - \xi)^2 + (y_j - y_i - \eta)^2}}.$$

Интегралы (4.1.4) вычислялись методом трапеций [11, 23]. При этом первый интеграл по переменной  $\eta$  вычислялся аналитически.

В случае использования **треугольного граничного элемента** (рис. 4.1.3) коэффициент влияния матрицы податливости  $B_{ij}$  с физической точки зрения является амплитудой осадки точки основания с координатами  $(x_j, y_j)$ , которая вызвана единичной нагрузкой  $q$ , распределенной по площади треугольника с координатами вершин  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  и центром в точке с координатами  $(x_i, y_i)$ .

Техника определения коэффициентов влияния (элементов матрицы податливости) в целом такая же, как и для прямоугольного элемента.

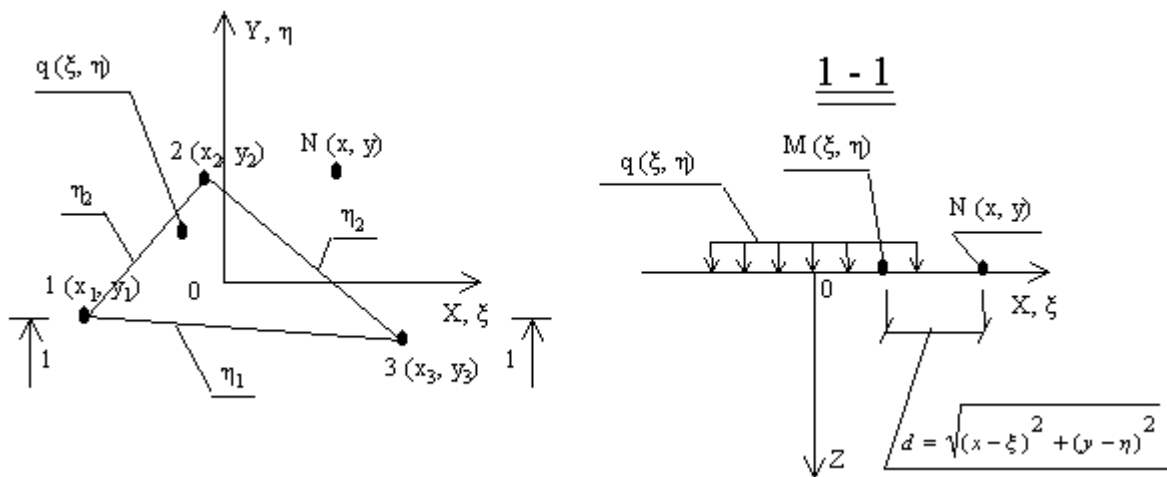


Рис. 4.1.3. К определению коэффициента влияния матрицы податливости треугольного граничного элемента.

Отличие заключается в том, что в данном случае верхний и нижний пределы интегрирования по переменной  $\eta$  являются функциями координаты  $\xi$ , т.е.

$$\eta_1 = [U(\xi - x_1) - U(\xi - x_3)] \cdot \left[ y_1 + \frac{(y_3 - y_1) \cdot (\xi - x_1)}{x_3 - x_1} \right]$$

и

$$\begin{aligned} \eta_2 = & [U(\xi - x_1) - U(\xi - x_2)] \cdot \left[ y_1 + \frac{(y_2 - y_1) \cdot (\xi - x_1)}{x_2 - x_1} \right] + \\ & + [U(\xi - x_2) - U(\xi - x_3)] \cdot \left[ y_2 + \frac{(y_3 - y_2) \cdot (\xi - x_2)}{x_3 - x_2} \right], \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

где  $U(x)$  - ступенчатая единичная функция Хевисайда [4, 23], а  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  и  $(x_3, y_3)$  - координаты вершин треугольника (т.е. загруженной области), причем  $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ .

В связи с изложенным имеем:

$$B_{ij} \approx \frac{(1 - \nu^2)}{E^*} \cdot q \cdot \psi(x_i, y_i, x_j, y_j), \quad (4.1.6)$$

$$\text{где } \psi(x_i, y_i, x_j, y_j) = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{x_1}^{x_3} \frac{d\xi \cdot d\eta}{\sqrt{(x_j - x_i - \xi)^2 + (y_j - y_i - \eta)^2}}.$$

В заключение отметим, что если  $y_2 < y_1$  (см. рис. 4.1.3), то интегралы (4.1.6) следует либо умножить на (-1) либо поменять местами пределы интегрирования  $\eta_1$  и  $\eta_2$ .

**Для граничного элемента в виде неправильного многоугольника**

(рис. 4.1.4) (такие элементы используются с вычислительных комплексах «Лира» и «Мономах» [27, 30]) коэффициенты влияния матрицы податливости  $B_{ij}$  найдем в виде:

$$B_{ij} \approx \frac{(1-\nu^2)}{E^*} \cdot q \cdot \psi(x_i, y_i, x_j, y_j), \quad (4.1.7)$$

$$\text{где } \psi(x_i, y_i, x_j, y_j) = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{x_1}^{x_3} \frac{d\xi \cdot d\eta}{\sqrt{(x_j - x_i - \xi)^2 + (y_j - y_i - \eta)^2}},$$

$$\text{где } \eta_1 = \left[ U(\xi - x_1) - U(\xi - x_4) \right] \cdot \left[ y_1 + \frac{(y_4 - y_1) \cdot (\xi - x_1)}{x_4 - x_1} \right] +$$

$$+ \left[ U(\xi - x_4) - U(\xi - x_3) \right] \cdot \left[ y_4 + \frac{(y_3 - y_4) \cdot (\xi - x_4)}{x_3 - x_4} \right],$$

$$\text{и } \eta_2 = \left[ U(\xi - x_1) - U(\xi - x_2) \right] \cdot \left[ y_1 + \frac{(y_2 - y_1) \cdot (\xi - x_1)}{x_2 - x_1} \right] +$$

$$+ \left[ U(\xi - x_2) - U(\xi - x_3) \right] \cdot \left[ y_2 + \frac{(y_3 - y_2) \cdot (\xi - x_2)}{x_3 - x_2} \right], \quad x_1 \leq x_2 \leq x_4 \leq x_3.$$

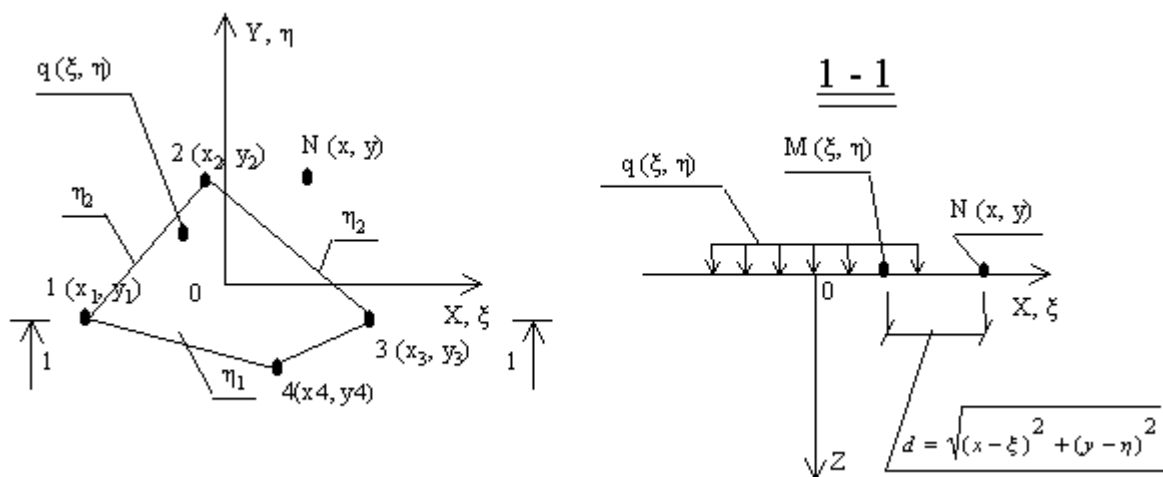


Рис. 4.1.4. К определению коэффициента влияния матрицы податливости для граничного элемента в виде неправильного многоугольника.



С физической точки зрения в рассматриваемом случае коэффициент влияния матрицы податливости  $B_{ij}$  является амплитудой осадки точки основания с координатами  $(x_j, y_j)$ , обусловленной распределенной по площади четырехугольника с координатами вершин  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$ ,  $(x_4, y_4)$  и центром в точке с координатами  $(x_i, y_i)$  единичной нагрузкой  $q$ .

#### **Рассмотрим случай водонасыщенного основания.**

При определении коэффициентов влияния матрицы податливости задачу исследований сформулируем так. Граничный элемент находится на водонасыщенном основании, которое характеризуется упругими ( $G$  и  $\lambda$ ) и реологическими ( $c_k$ ) характеристиками. Здесь  $G$  и  $\lambda$  - константы Ламе,  $c_k$  - коэффициент консолидации при компрессии [14, 15, 45, 46, 49...51, 60, 61...63]. На процесс деформирования основания ползучесть грунтового скелета оказывает незначительное влияние.

На граничный элемент с действует распределенная внешняя нагрузка  $q(t)$ , которая изменяется по гармоническому закону. Процесс колебаний продолжается достаточно долго, в силу чего влияние на процесс уплотнения основания переходных процессов пренебрежимо мало.

Техника определения коэффициентов матрицы податливости метода граничных элементов для водонасыщенного основания полностью идентична изложенной выше для неводонасыщенного основания. Различие заключается в том, что в данном случае коэффициенты аппроксимации являются функциями не только частоты изменения внешней нагрузки и жесткостных свойств основания, но и коэффициента консолидации основания  $S_k$ . При этом следует учитывать тот факт, что коэффициенты матрицы податливости в общем случае являются комплексными числами.

Представим аппроксимацию решения задачи о приложенной к водонасыщенному основанию сосредоточенной силе (3.3.6) в виде:

$$S = S_{\text{Re}} + I \cdot S_{\text{Im}} \approx \frac{(1-\nu^2)}{E_{\text{Re}}^*} \cdot q \cdot \psi(x, y) + I \cdot \frac{(1-\nu^2)}{E_{\text{Im}}^*} \cdot q \cdot \psi(x, y), \quad (4.1.8)$$

где  $\psi(x, y) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \cdot d\xi \cdot d\eta$ ,  $Q$  – сосредоточенная сила,  $r$ -

координата;  $S_{\text{Re}}$  и  $S_{\text{Im}}$  – амплитуды соответственно действительной и

мнимой частей осадки дневной поверхности;  $E_{\text{Re}}^* = f_{\text{Re}}(\rho, \varpi, E, \nu, C_k)$  и

$E_{\text{Im}}^* = f_{\text{Im}}(\rho, \varpi, E, \nu, C_k)$  – приведенные модули упругости основания,

установленные в ходе аппроксимации решения задачи о приложенной к

верхней границе весомого водонасыщенного полупространства

сосредоточенной силе (см. раздел 3.3 настоящей работы);  $E$  и  $\nu$  –

фактические упругие константы основания;  $I = \sqrt{-1}$ .

По аналогии с (4.1.4) для **прямоугольного граничного элемента** (рис. 4.1.2) имеем:

$$B_{ij} = B_{\text{Re},ij} + I \cdot B_{\text{Im},ij} \approx \left( \frac{1-\nu^2}{E_{\text{Re}}} + I \cdot \frac{1-\nu^2}{E_{\text{Im}}} \right) \cdot \psi(x_i, y_i, x_j, y_j),$$

где  $\psi(x_i, y_i, x_j, y_j) = \int_{-\frac{L_i}{2}}^{\frac{L_i}{2}} \int_{-\frac{b_i}{2}}^{\frac{b_i}{2}} \frac{d\xi \cdot d\eta}{\sqrt{(x_j - x_i - \xi)^2 + (y_j - y_i - \eta)^2}} \quad (4.1.9)$

По аналогии с (4.1.5) и (4.1.6) для **треугольного граничного элемента** (рис. 4.1.3) получим:

$$B_{ij} = B_{\text{Re},ij} + I \cdot B_{\text{Im},ij} \approx \left( \frac{1-\nu^2}{E_{\text{Re}}} + I \cdot \frac{1-\nu^2}{E_{\text{Im}}} \right) \cdot \psi(x_i, y_i, x_j, y_j), \quad (4.1.10)$$

где

$$\psi(x_i, y_i, x_j, y_j) = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{x_1}^{x_3} \frac{d\xi \cdot d\eta}{\sqrt{(x_j - x_i - \xi)^2 + (y_j - y_i - \eta)^2}},$$

$$\eta_1 = [U(\xi - x_1) - U(\xi - x_3)] \cdot \left[ y_1 + \frac{(y_3 - y_1) \cdot (\xi - x_1)}{x_3 - x_1} \right]$$

и

$$\begin{aligned} \eta_2 = & [U(\xi - x_1) - U(\xi - x_2)] \cdot \left[ y_1 + \frac{(y_2 - y_1) \cdot (\xi - x_1)}{x_2 - x_1} \right] + \\ & + [U(\xi - x_2) - U(\xi - x_3)] \cdot \left[ y_2 + \frac{(y_3 - y_2) \cdot (\xi - x_2)}{x_3 - x_2} \right], \quad x_1 \leq x_2 \leq x_3 \end{aligned}$$

По аналогии с (4.1.7) для **граничного элемента в форме неправильного четырехугольника** имеем (рис. 4.1.4):

$$B_{ij} = B_{\text{Re},ij} + I \cdot B_{\text{Im},ij} \approx \left( \frac{1-\nu^2}{E_{\text{Re}}} + I \cdot \frac{1-\nu^2}{E_{\text{Im}}} \right) \cdot \psi(x_i, y_i, x_j, y_j),$$

$$\text{где } \eta_1 = [U(\xi - x_1) - U(\xi - x_4)] \cdot \left[ y_1 + \frac{(y_4 - y_1) \cdot (\xi - x_1)}{x_4 - x_1} \right] +$$

$$+ [U(\xi - x_4) - U(\xi - x_3)] \cdot \left[ y_4 + \frac{(y_3 - y_4) \cdot (\xi - x_4)}{x_3 - x_4} \right],$$

$$\text{и } \eta_2 = [U(\xi - x_1) - U(\xi - x_2)] \cdot \left[ y_1 + \frac{(y_2 - y_1) \cdot (\xi - x_1)}{x_2 - x_1} \right] +$$

$$+ [U(\xi - x_2) - U(\xi - x_3)] \cdot \left[ y_2 + \frac{(y_3 - y_2) \cdot (\xi - x_2)}{x_3 - x_2} \right], \quad x_1 \leq x_2 \leq x_4 \leq x_3,$$

$$\psi(x_i, y_i, x_j, y_j) = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{x_1}^{x_3} \frac{d\xi \cdot d\eta}{\sqrt{(x_j - x_i - \xi)^2 + (y_j - y_i - \eta)^2}} \quad (4.1.11)$$

Полученные нами результаты (4.1.8)...(4.1.11) представляют, скорее, теоретический интерес, поскольку на практике внешняя нагрузка всегда является действительной. В этой связи в (3.3.6) рассмотрим решения для внешней нагрузки, которая изменяется по закону

$$Q(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t} \\ u \frac{1}{2} \cdot e^{-I \cdot \varpi \cdot t} \end{cases} \quad (4.1.12)$$

и используем принцип суперпозиции [23, 25, 33, 47].

В первом случае (см. 4.1.12) коэффициенты влияния имеют структуру

$$B_{ij} = 0,5 \cdot B_{\text{Re},ij} - I \cdot 0,5 \cdot B_{\text{Im},ij},$$

а во втором -

$$B_{ij} = 0,5 \cdot B_{\text{Re},ij} + I \cdot 0,5 \cdot B_{\text{Im},ij}. \quad (4.1.13)$$

Далее в соответствии с (4.1.1) умножим первое равенство (4.1.13) на первую (верхнюю) функцию (4.1.12), второе равенство (4.1.13) на вторую (нижнюю) функцию (4.1.12) а найденные таким образом результаты сложим.

При этом учтем, что  $Q(t) = \frac{1}{2} \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-I \cdot \varpi \cdot t} = \cos(\varpi \cdot t)$ . Получим:

$$\left. \begin{aligned} q(t) &= \cos(\varpi \cdot t); \\ B_{ij}(t) &= B_{\text{Re},ij}(t) \cdot \cos(\varpi \cdot t) + B_{\text{Im},ij}(t) \cdot \sin(\varpi \cdot t) \end{aligned} \right\} \quad (4.1.14)$$

Далее в соответствии с (4.1.1) умножим первое равенство (4.1.13) на первую (верхнюю) функцию (4.1.12), второе равенство (4.1.13) на вторую (нижнюю) функцию (4.1.12), найдем разность полученных таким образом результатов. Эту разность умножим на  $-I$ . При этом учтем, что  $Q(t) = I \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t} - \frac{1}{2} \cdot e^{-I \cdot \varpi \cdot t} \right) = \sin(\varpi \cdot t)$ . В итоге получим:

$$\left. \begin{aligned} q(t) &= \sin(\varpi \cdot t); \\ B_{ij}(t) &= B_{\text{Re},ij} \cdot \sin(\varpi \cdot t) - B_{\text{Im},ij}(t) \cdot \cos(\varpi \cdot t) \end{aligned} \right\} \quad (4.1.15)$$

Выражения (4.1.14) и (4.1.15) позволяют выявить структуру коэффициентов влияния матрицы податливости метода граничных элементов для случаев изменяющейся по закону косинуса (4.1.14) и синуса (4.1.15) внешней нагрузки.

В ходе численного эксперимента нами варьировались жесткостные свойства основания, значения его коэффициента фильтрации, геометрические размеры загруженной области и частота изменения внешней нагрузки.

Для **неводонасыщенного** основания на рисунках 4.1.4...4.1.9 представлены зависимости амплитуд осадок его дневной поверхности от координаты при разных значениях частоты изменения приложенной к поверхности распределенной единичной ( $q=1$  кПа) нагрузки. Зависимости представлены для линии проходящей через центр загруженной области ( $y=0,0$ ). Загруженная область представляет собой квадрат с размерами сторон

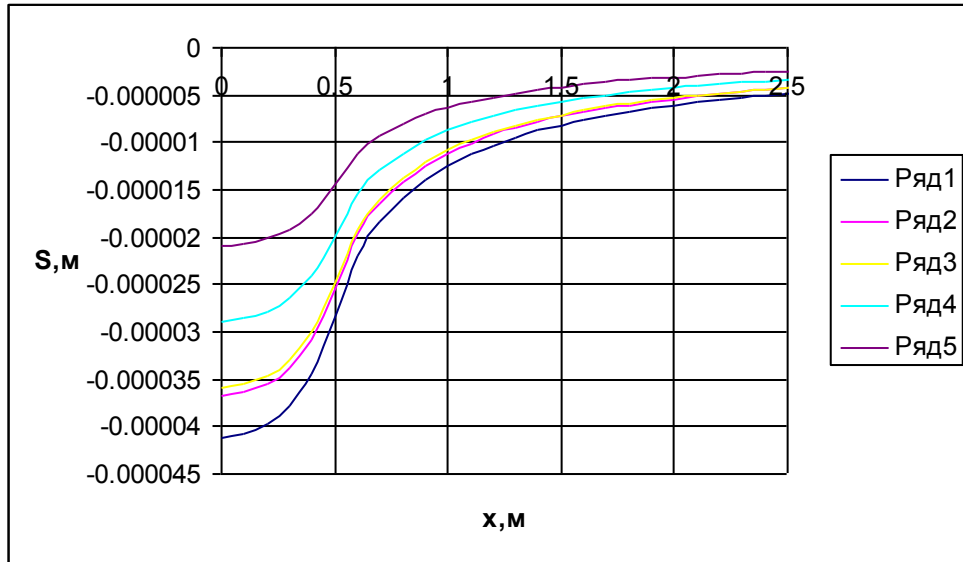


Рис. 4.1.4. Зависимость амплитуды осадки основания от координаты при  $E = 50000$  кПа.

1 –  $f = 5$  Гц; 2 –  $f = 10$  Гц; 3 –  $f = 15$  Гц; 4 –  $f = 25$  Гц; 5 –  $f = 50$  Гц.

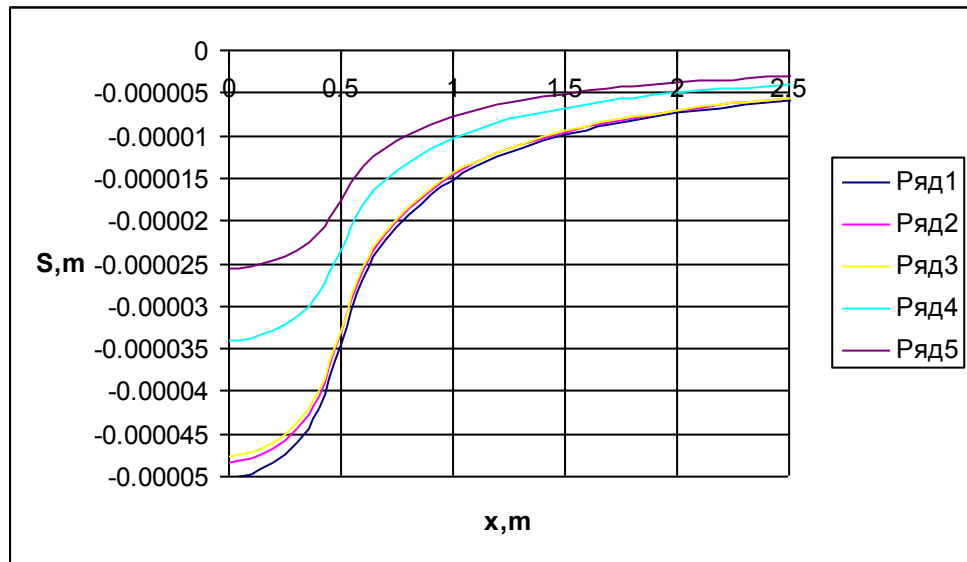


Рис. 4.1.5. Зависимость амплитуды осадки основания от координаты при  $E = 40000$  кПа.

1 –  $f = 5$  Гц; 2 –  $f = 10$  Гц; 3 –  $f = 15$  Гц; 4 –  $f = 25$  Гц; 5 –  $f = 50$  Гц.

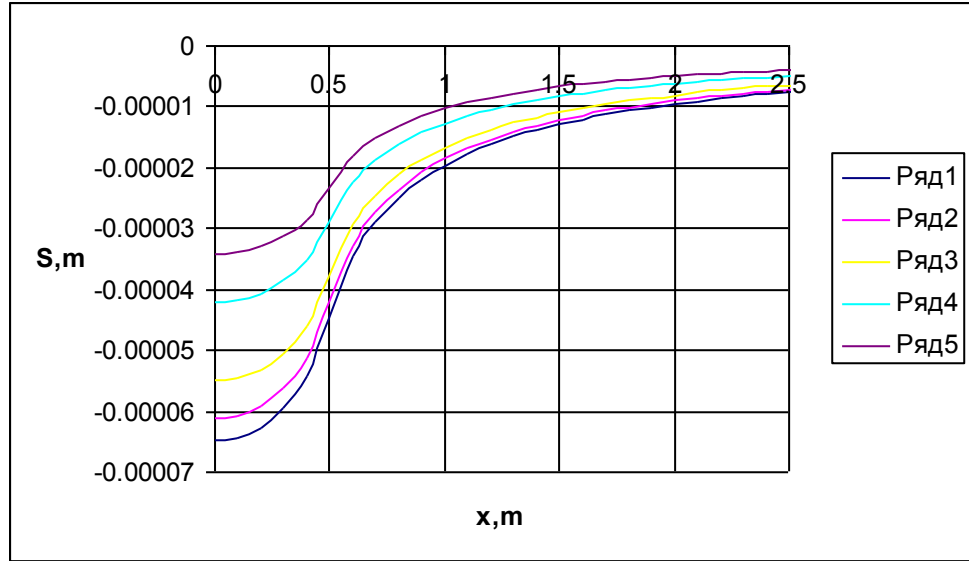


Рис. 4.1.6. Зависимость амплитуды осадки основания от координаты при  $E = 30000$  кПа.

1 –  $f = 5$  Гц; 2 –  $f = 10$  Гц; 3 –  $f = 15$  Гц; 4 –  $f = 25$  Гц; 5 –  $f = 50$  Гц.

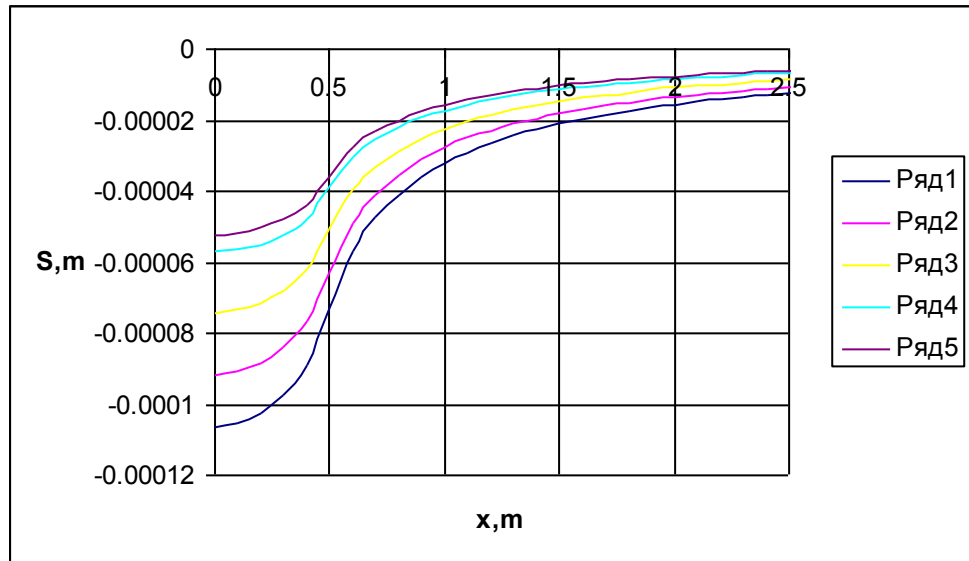


Рис. 4.1.7. Зависимость амплитуды осадки основания от координаты при  $E = 20000$  кПа.

1 –  $f = 5$  Гц; 2 –  $f = 10$  Гц; 3 –  $f = 15$  Гц; 4 –  $f = 25$  Гц; 5 –  $f = 50$  Гц.

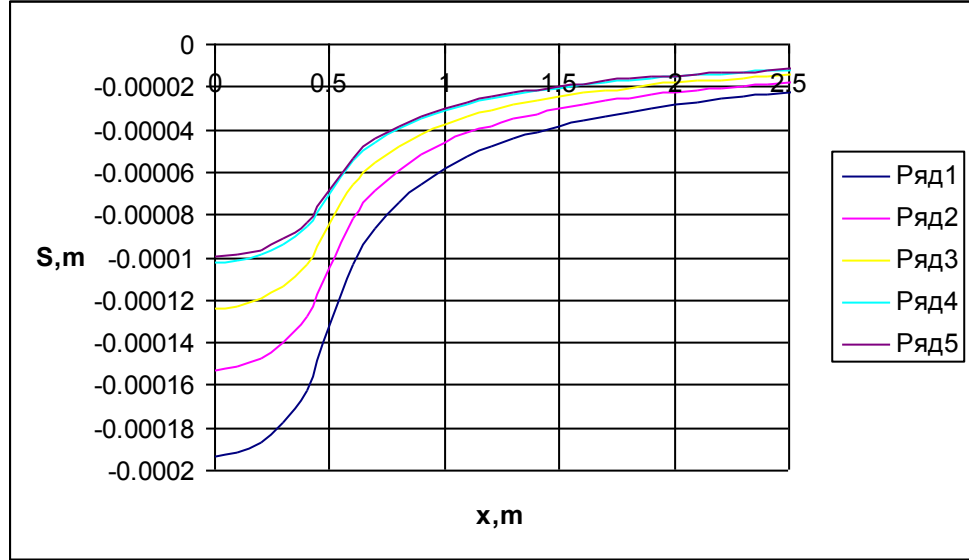


Рис. 4.1.8. Зависимость амплитуды осадки основания от координаты при  $E = 10000$  кПа.

1 –  $f = 5$  Гц; 2 –  $f = 10$  Гц; 3 –  $f = 15$  Гц; 4 –  $f = 25$  Гц; 5 –  $f = 50$  Гц.

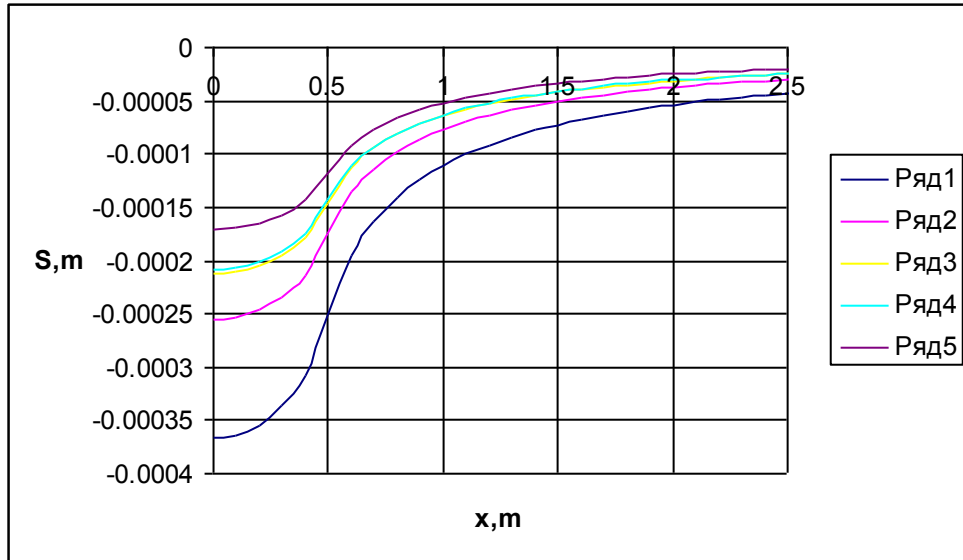


Рис. 4.1.9. Зависимость амплитуды осадки основания от координаты при  $E = 5000$  кПа.

1 –  $f = 5$  Гц; 2 –  $f = 10$  Гц; 3 –  $f = 15$  Гц; 4 –  $f = 25$  Гц; 5 –  $f = 50$  Гц.



$B = 1,0$  м,  $L=1,0$  м. Удельный вес  $\gamma$  грунта основания принимался равным  $18$  кН/м<sup>3</sup>, коэффициент Пуассона -  $0,3$ , а модуль упругости основания варьировался от  $5000$  до  $50000$  кПа.

Анализ представленных на рисунках 4.1.4...4.1.9 кривых позволил нам сделать такие выводы.

1. Упругое основание обладает распределительной способностью, поскольку колебания его дневной поверхности проявляются не только в пределах загруженной области, но и за ее границами.

2. Чем больше частота изменения внешней нагрузки, тем при прочих равных условиях меньше амплитуды осадок основания.

3. Чем больше модуль упругости, тем при прочих равных условиях меньше амплитуды осадок основания.

Результаты исследования влияния соотношения сторон загруженной области на амплитуды осадок дневной поверхности **неводонасыщенного** основания представлены на рисунке 4.1.10. Анализ показанных на нем кривых позволил нам сделать вывод о том, что чем больше длина

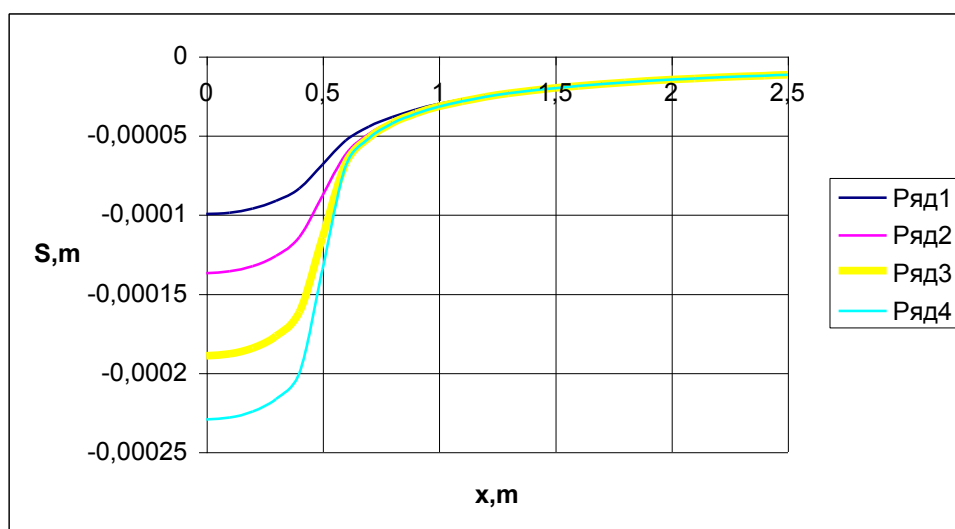


Рис. 4.1.10. Зависимость амплитуды осадки основания от координаты при  $E = 10000$  кПа,  $f = 50$  Гц,  $B = 1,0$  м.

1 –  $L = 1,0$  м; 2 –  $L = 2,0$  м; 3 –  $L = 5,0$  м; 4 –  $L = 10,0$  м.

загруженной прямоугольной области, тем при прочих равных условиях больше амплитуды осадок основания.

Для **водонасыщенного** основания исследовалось влияние коэффициента фильтрации на колебания его дневной поверхности. Загруженная область представляет собой квадрат с размерами сторон  $B = 1,0$  м,  $L=1,0$ м Модуль упругости основания принимался равным 10 МПа, удельный вес  $\gamma = 18 \text{ кН/м}^3$ , а коэффициент Пуассона - 0,3.

Кроме того, принималось что загруженная область находится под воздействием распределенной единичной ( $q=1$  кПа), которая изменяется во времени.

Результаты расчетов показаны на рисунках 4.1.11...4.1.22 для линии проходящей через центр загруженной области ( $y=0,0$ ). Для удобства интерпретации результатов расчета на рисунках 4.1.12, 4.1.14, 4.1.16, 4.1.18, 4.1.20, 4.1.22 знак амплитуд осадок был заменен на противоположный.

Анализ представленных на рисунках кривых позволил нам сделать такие выводы.

1. Водонасыщенное основание обладает распределительной способностью (т.е. осадки дневной поверхности проявляются не только в пределах загруженной области).
2. Чем больше частота изменения внешней нагрузки, тем при прочих равных условиях меньше действительная часть осадок основания.
3. Чем больше частота изменения внешней нагрузки, тем при прочих равных условиях больше мнимая часть осадок основания.
4. Мнимая часть основания значительно меньше ее действительной части. При этом чем меньше значение коэффициента фильтрации основания, тем меньше различие между действительной и мнимой частями осадок.
5. Чем больше модуль упругости, тем при прочих равных условиях меньше осадка основания.

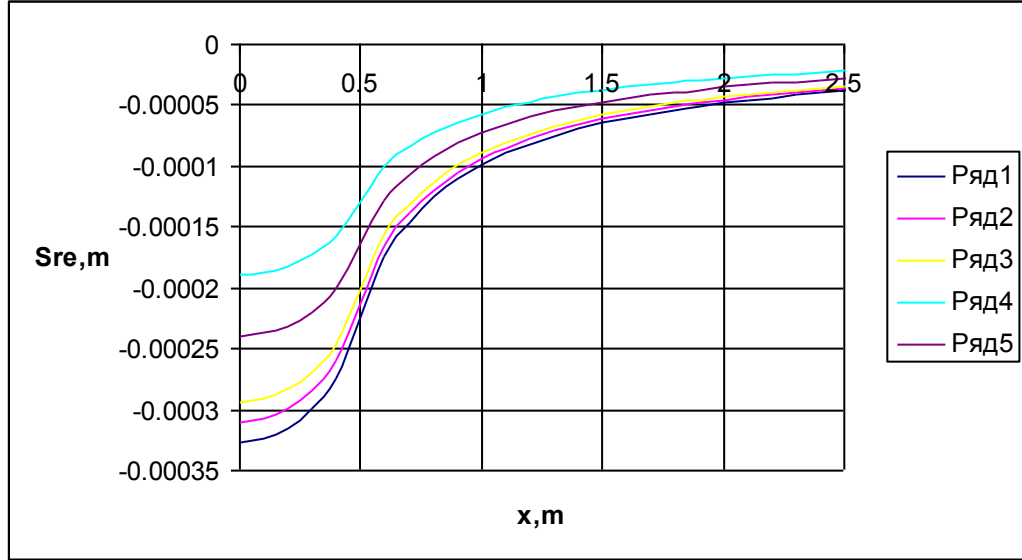


Рис. 4.1.11. Зависимость действительной части амплитуды осадки от координаты при  $K_f = 0,01$  м/с.

1 –  $f = 5$  Гц; 2 –  $f = 10$  Гц; 3 –  $f = 15$  Гц; 4 –  $f = 25$  Гц; 5 –  $f = 50$  Гц.

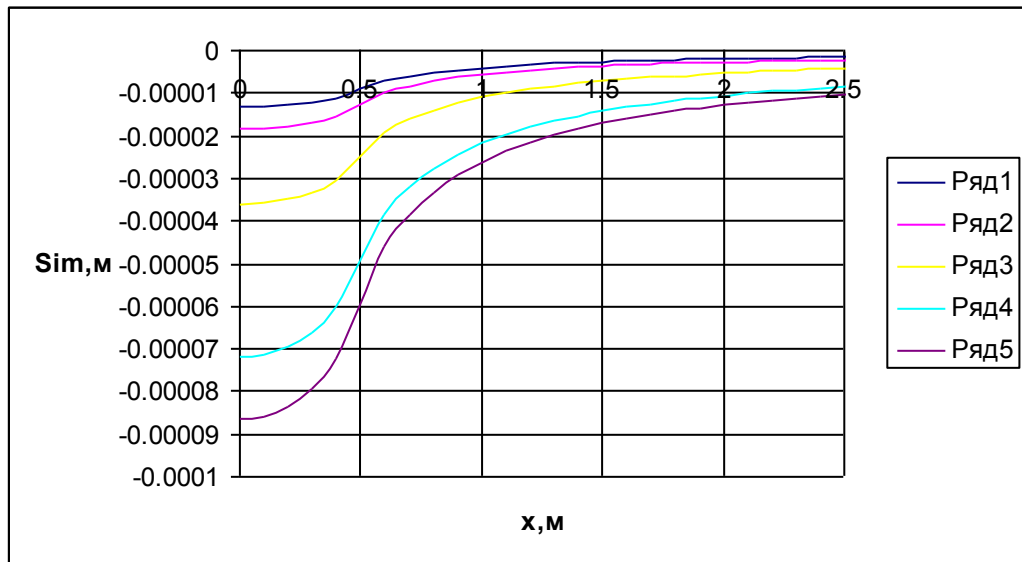


Рис. 4.1.12. Зависимость мнимой части амплитуды осадки от координаты при  $K_f = 0,01$  м/с.

1 –  $f = 5$  Гц; 2 –  $f = 10$  Гц; 3 –  $f = 15$  Гц; 4 –  $f = 25$  Гц; 5 –  $f = 50$  Гц.

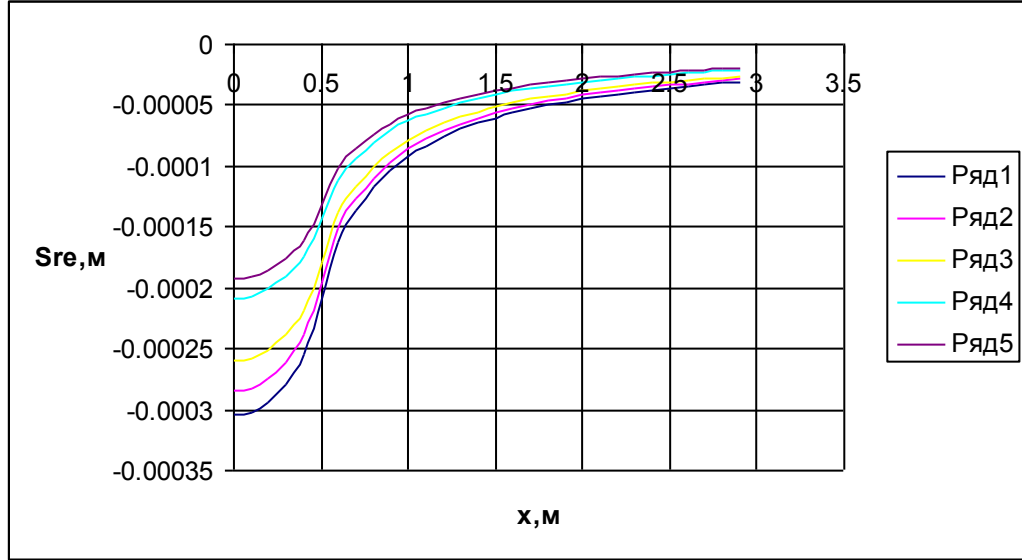


Рис. 4.1.13. Зависимость действительной части амплитуды осадки от координаты при  $K_f = 0,001$  м/с.

1 –  $f = 5$  Гц; 2 –  $f = 10$  Гц; 3 –  $f = 15$  Гц; 4 –  $f = 25$  Гц; 5 –  $f = 50$  Гц.

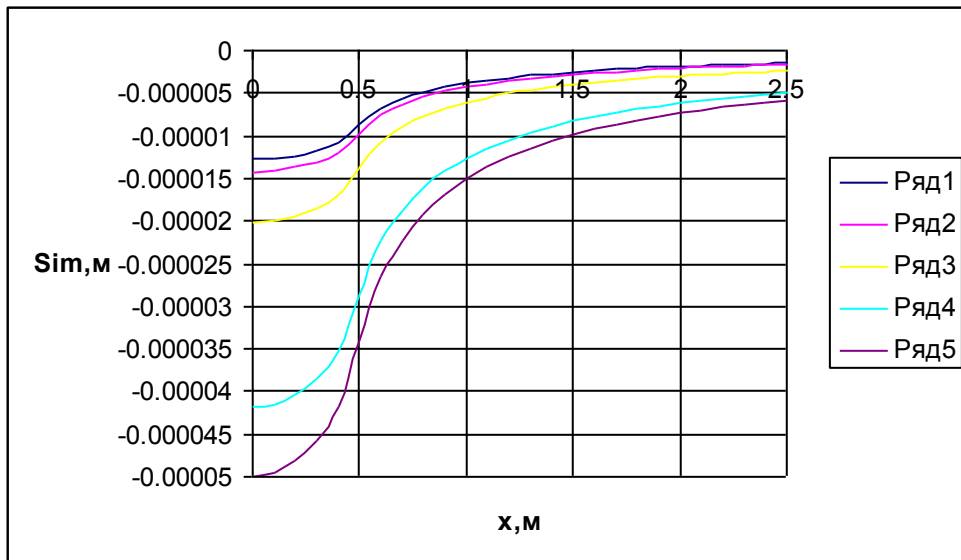


Рис. 4.1.14. Зависимость мнимой части амплитуды осадки от координаты при  $K_f = 0,001$  м/с.

1 –  $f = 5$  Гц; 2 –  $f = 10$  Гц; 3 –  $f = 15$  Гц; 4 –  $f = 25$  Гц; 5 –  $f = 50$  Гц.

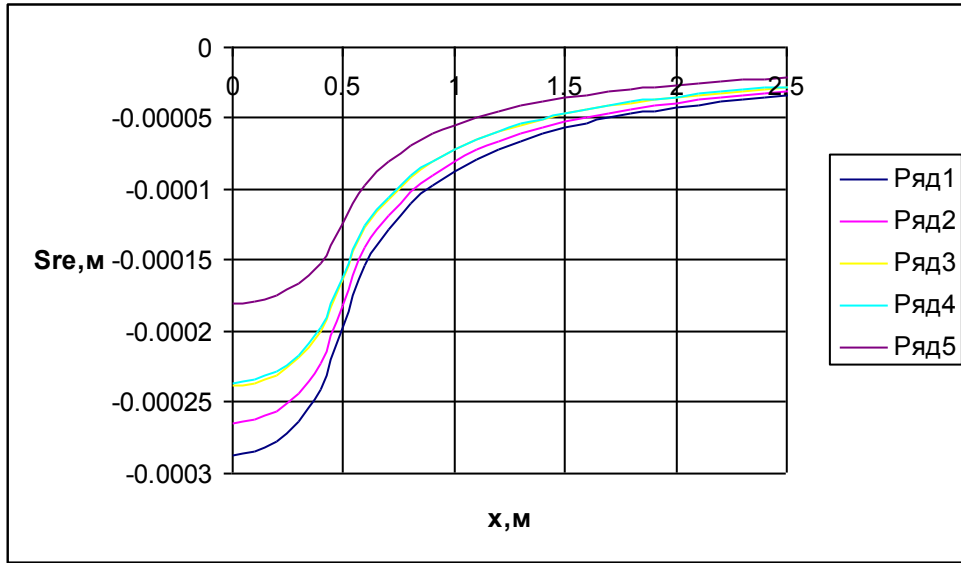


Рис. 4.1.15. Зависимость действительной части амплитуды осадки от координаты при  $K_f = 0,0001$  м/с.

1 –  $f = 5$  Гц; 2 –  $f = 10$  Гц; 3 –  $f = 15$  Гц; 4 –  $f = 25$  Гц; 5 –  $f = 50$  Гц.

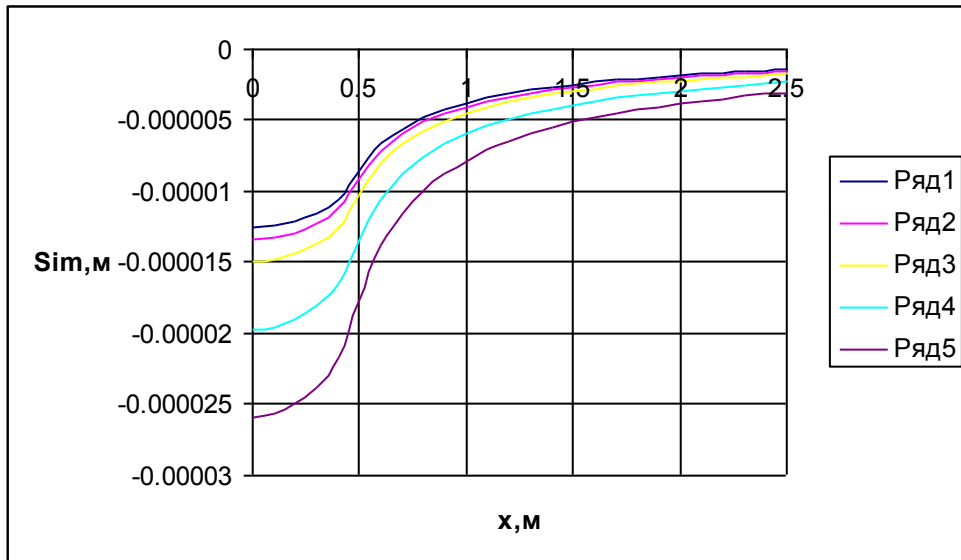


Рис. 4.1.16. Зависимость мнимой части амплитуды осадки от координаты при  $K_f = 0,0001$  м/с.

1 –  $f = 5$  Гц; 2 –  $f = 10$  Гц; 3 –  $f = 15$  Гц; 4 –  $f = 25$  Гц; 5 –  $f = 50$  Гц.

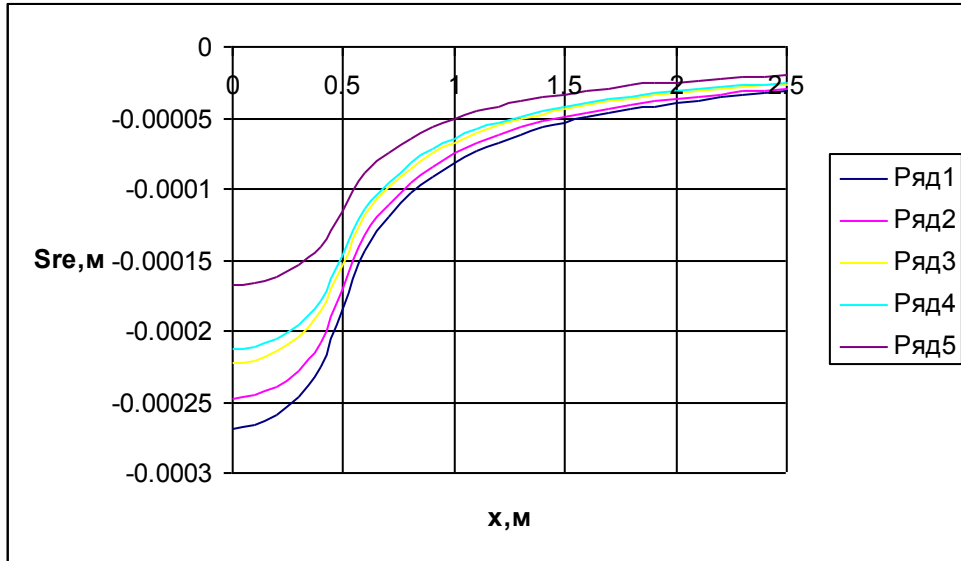


Рис. 4.1.17. Зависимость действительной части амплитуды осадки от координаты при  $K_f = 0,00001 \text{ м/с}$ .

1 –  $f = 5 \text{ Гц}$ ; 2 –  $f = 10 \text{ Гц}$ ; 3 –  $f = 15 \text{ Гц}$ ; 4 –  $f = 25 \text{ Гц}$ ; 5 –  $f = 50 \text{ Гц}$ .

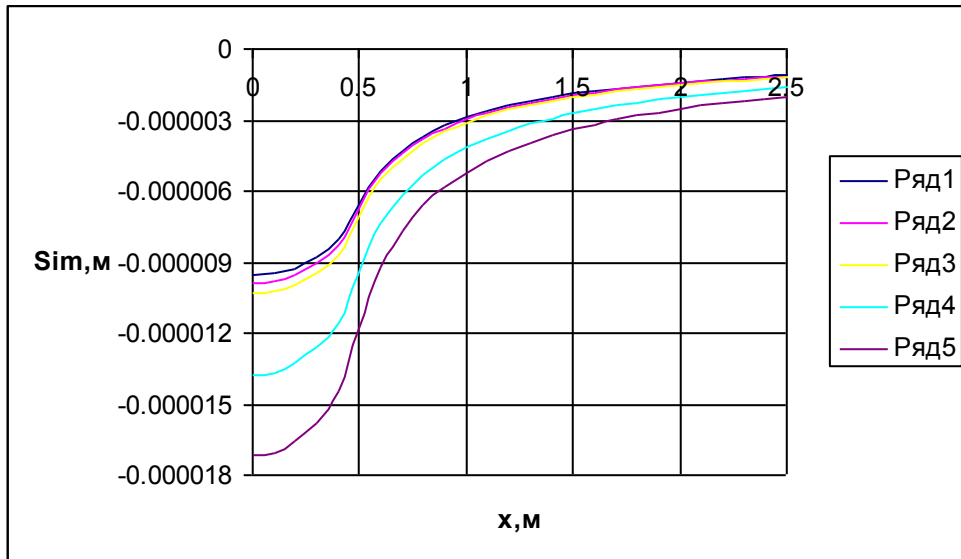


Рис. 4.1.18. Зависимость мнимой части амплитуды осадки от координаты при  $K_f = 0,00001 \text{ м/с}$ .

1 –  $f = 5 \text{ Гц}$ ; 2 –  $f = 10 \text{ Гц}$ ; 3 –  $f = 15 \text{ Гц}$ ; 4 –  $f = 25 \text{ Гц}$ ; 5 –  $f = 50 \text{ Гц}$ .

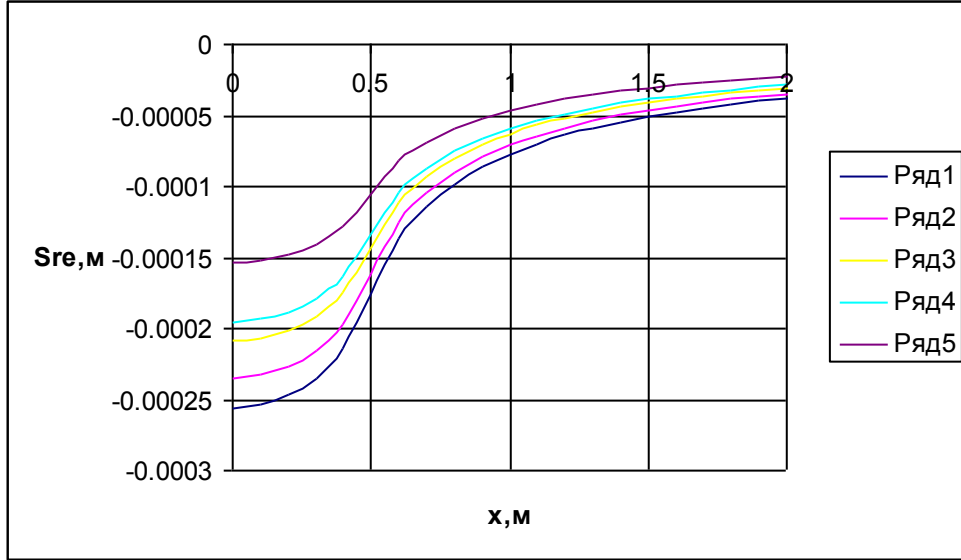


Рис. 4.1.19. Зависимость действительной части амплитуды осадки от координаты при  $K_f = 0,000001$  м/с.

1 –  $f = 5$  Гц; 2 –  $f = 10$  Гц; 3 –  $f = 15$  Гц; 4 –  $f = 25$  Гц; 5 –  $f = 50$  Гц.

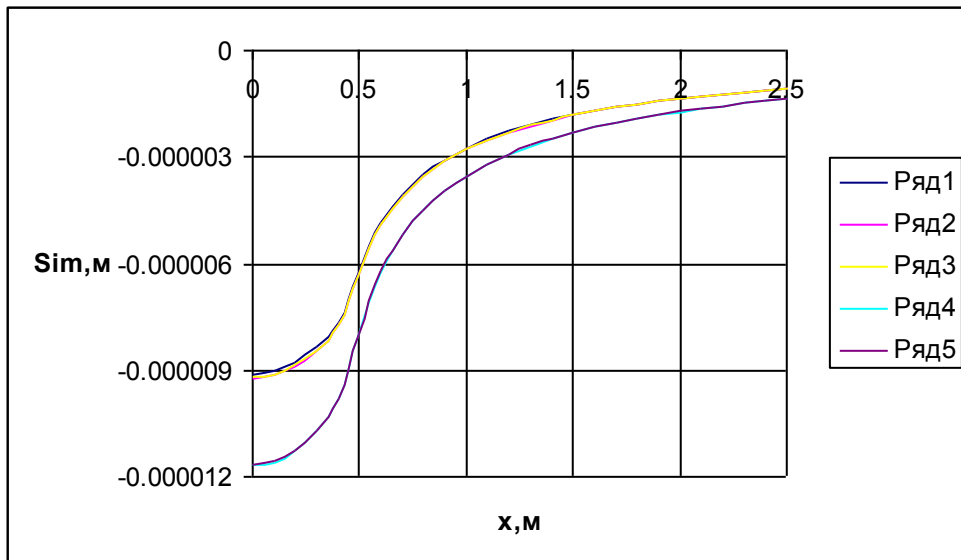


Рис. 4.1.20. Зависимость мнимой части амплитуды осадки от координаты при  $K_f = 0,000001$  м/с.

1 –  $f = 5$  Гц; 2 –  $f = 10$  Гц; 3 –  $f = 15$  Гц; 4 –  $f = 25$  Гц; 5 –  $f = 50$  Гц.

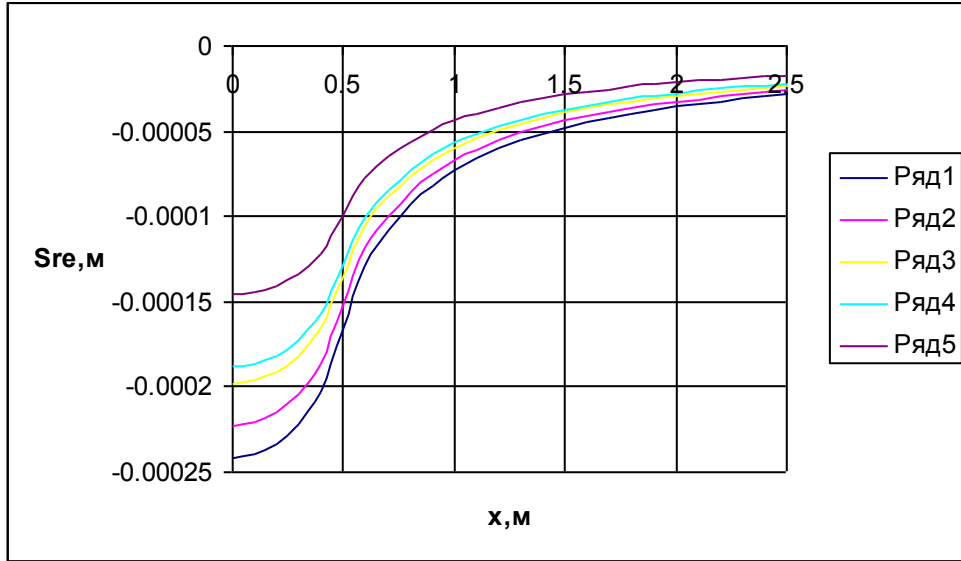


Рис. 4.1.21. Зависимость действительной части амплитуды осадки от координаты при  $K_f = 0,0000001$  м/с.

1 –  $f = 5$  Гц; 2 –  $f = 10$  Гц; 3 –  $f = 15$  Гц; 4 –  $f = 25$  Гц; 5 –  $f = 50$  Гц.

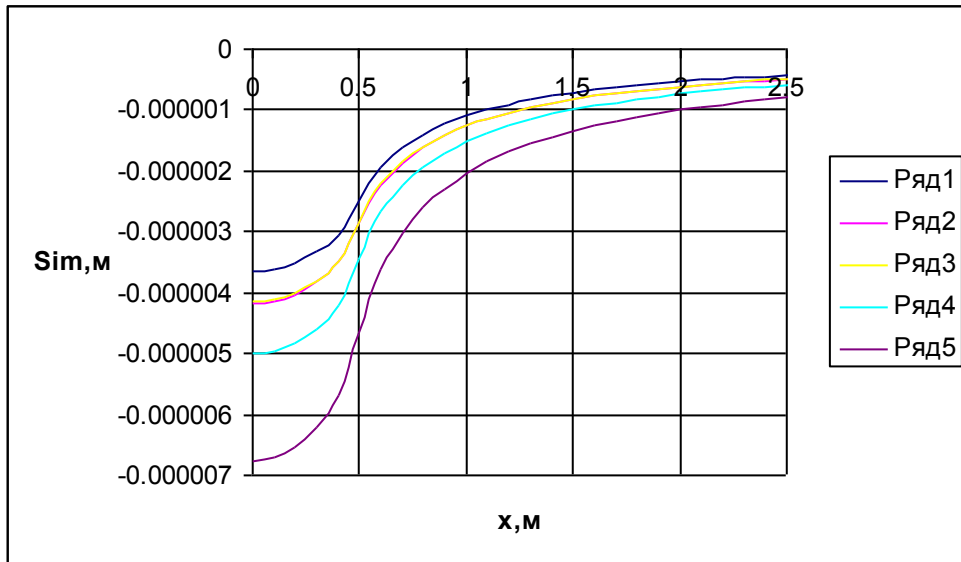


Рис. 4.1.22. Зависимость мнимой части амплитуды осадки от координаты при  $K_f = 0,0000001$  м/с.

1 –  $f = 5$  Гц; 2 –  $f = 10$  Гц; 3 –  $f = 15$  Гц; 4 –  $f = 25$  Гц; 5 –  $f = 50$  Гц.



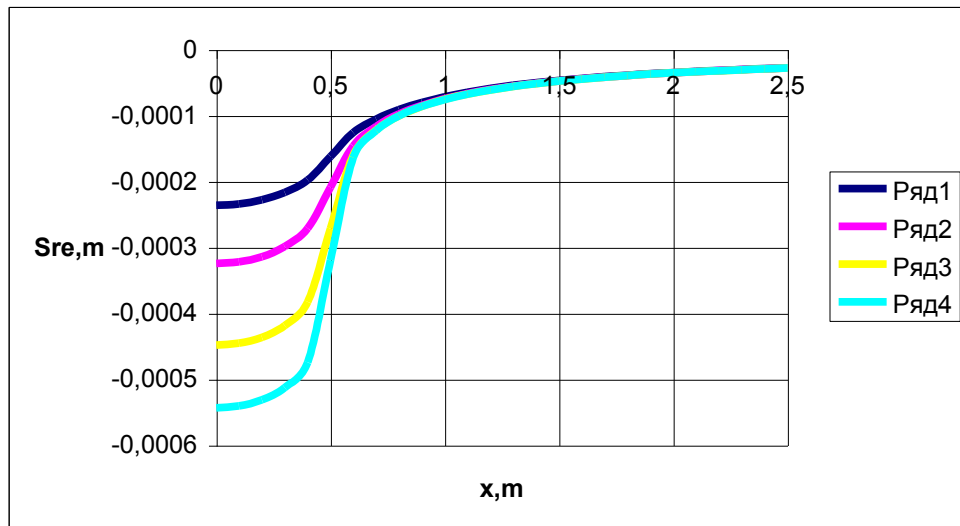


Рис. 4.1.23. Зависимость действительной части амплитуды осадки от координаты. Водонасыщенное основание.  $y=0,0$ .  $\gamma = 18 \text{ кН/м}^3$ .  $E = 10000 \text{ кПа}$ .  $\nu = 0,3$ .  $f = 50 \text{ Гц}$ .  $B = 1,0 \text{ м}$ . 1 –  $L = 1,0\text{м}$ ; 2 –  $L = 2,0\text{м}$ ; 3 –  $L = 5,0\text{м}$ ; 4 –  $L = 10,0\text{м}$ .

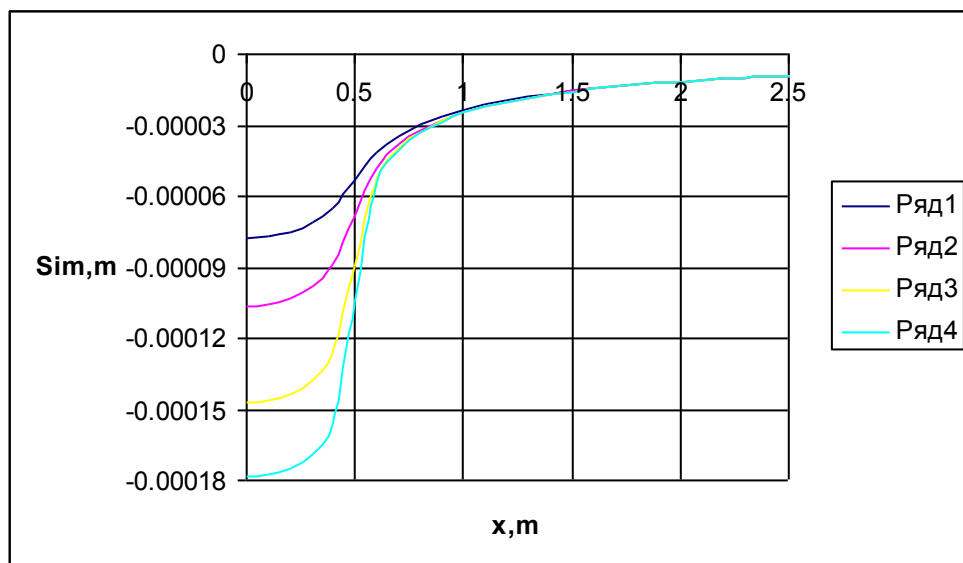


Рис. 4.1.24. Зависимость мнимой части амплитуды осадки от координаты. Водонасыщенное основание.  $y=0,0$ .  $\gamma = 18 \text{ кН/м}^3$ .  $E = 10000 \text{ кПа}$ .  $\nu = 0,3$ .  $f = 50 \text{ Гц}$ .  $B = 1,0 \text{ м}$ . 1 –  $L = 1,0\text{м}$ ; 2 –  $L = 2,0\text{м}$ ; 3 –  $L = 5,0\text{м}$ ; 4 –  $L = 10,0\text{м}$ .

Для оценки влияния соотношения сторон загруженной области на колебания поверхности водонасыщенного основания были установлены зависимости амплитуд осадок дневной поверхности от координаты. Предполагалось что загруженная область находится под воздействием распределенной единичной ( $q=1$  кПа), которая изменяется во времени.

Расчеты амплитуд осадок основания выполнялись для значения коэффициента фильтрации  $K_f = 0,0001$  м/с. Результаты расчетов представлены на рисунках 4.1.23 и 4.1.24.

Анализ представленных на них кривых позволил нам сделать вывод о том, что чем больше длина загруженной прямоугольной области, тем при прочих равных условиях больше осадки основания.

В целом, сделан вывод о том, что на амплитуды стационарных колебаний грунтового основания существенное влияние оказывают такие факторы (см. также раздел 3):

- свойства грунтового основания, в том числе его плотность, модуль упругости, коэффициент Пуассона, коэффициент фильтрации;
- частота изменения внешней нагрузки;
- размеры в плане и конфигурация загруженной области;
- и как следствие, распределительные свойства основания (этот фактор не учитывается в ныне действующих нормативных документах).

#### **4.2. ОЦЕНКА СХОДИМОСТИ ПРОЦЕССА ИТЕРАЦИИ С.Н. КЛЕПИКОВА ПРИ РАСЧЕТЕ НАПРЯЖЕННО – ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ «ОСНОВАНИЕ – ФУНДАМЕНТ – СООРУЖЕНИЕ» И СИММЕТРИЧНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА ФУНДАМЕНТ НАГРУЗКИ.**

В настоящем разделе исследована проблема сходимости предложенного

С.Н. Клепиковым для расчета напряженно – деформированного состояния (НДС) систем «основание – фундамент – сооружение» процесса итерации (последовательных приближений) [21]. Необходимость этих исследований обусловлена тем, что иногда полученные с использованием процесса итерации результаты имеют хорошее соответствие с точным решением, а иногда имеют отличие вплоть до перемены знака.

В ходе исследований рассмотрены симметричная и обратно – симметричная нагрузки на фундаменты.

Суть рассмотренной ниже версии процесса итерации заключается в следующем. Пусть требуется рассчитать НДС конструкции на грунтовом основании (в общем случае весомом, водонасыщенном и физически нелинейном), которое обладает распределительными свойствами [7...9, 13, 15, 16, 17, 18...21, 45, 46, 49...52]. В этом случае поступают так.

1. Вначале жесткость основания принимается равной бесконечности (в этом случае осадки фундаментов здания равны нулю). На этом этапе определяются реакции со стороны основания  $P(x)$  в первом приближении.

2. Затем эти реакции прикладываются к основанию, уже обладающему фактической жесткостью. На этом этапе определяются осадки основания  $S(x)$ .

3. После этого определяют коэффициент постели (жесткости) основания  $C(x)$  по формуле

$$C(x) = \frac{P(x)}{S(x)} \quad (4.2.1)$$

4. Далее полагают, что основание подчиняется гипотезе Винклера – Фусса с коэффициентом постели (жесткости)  $C(x)$  и вновь производят расчет здания. Цель расчета - определение реакций со стороны основания  $R(x)$  в новом приближении.

5. После этого вновь определяются осадки основания  $S(x)$  (см. п. 2

настоящего раздела) и коэффициент постели (см. п. 3 настоящего раздела) и т.д.

Процесс расчета считают законченным, если расхождение между установленными в ходе соседних приближений осадками и перемещениями конструкции и основания не превышает некоторой наперед заданной малой величины.

Опыт расчетов свидетельствует о том, что чем выше жесткость сооружения, и меньше жесткость основания, тем лучше сходимость процесса итерации.

Этот факт имеет простое объяснение – чем меньше жесткость сооружения, тем более система «основание – фундамент – сооружение» соответствует расчетной схеме основания, к верхней границе которого приложена нагрузка.

Поскольку коэффициент жесткости в процессе итерации С.Н. Клепикова определяется по формуле (4.2.1), то при нулевой жесткости системы «фундамент – сооружение» уже в первом приближении имеет полное соответствие между точным и приближенным решениями. При этом не выгоднейшим является случай бесконечной жесткости системы «фундамент – сооружение». Для этого случая нами и выполнены дальнейшие исследования.

Вначале рассмотрим **случай вертикальной нагрузки** на фундамент. Задача исследований была сформулирована так. В грунтовое основание (в общем случае весомое водонасыщенное) вдавливаются абсолютно – жесткий штамп, на который действует вертикальная (в общем случае переменная во времени) нагрузка. Осадки всех точек подошвы штампа равны между собой. Между деформациями и напряжениями в любой точке основания существует линейная зависимость (т.е. свойства основания описываются с использованием физически линейной модели грунта). Расчет напряженно – деформированного состояния системы «основание – фундамент» выполняется с использованием процесса итерации. Требуется определить условия сходимости процесса.

Имеет место теорема.

**Теорема 1.** Если система «основание - фундамент – сооружение» обладает такими свойствами: основание является физически - линейным, сооружение и фундамент обладают симметрией либо относительно некоторой вертикальной оси (плоская или осе симметричная задачи) либо относительно некоторой вертикальной плоскости (пространственная задача), а система «фундамент – сооружение» является абсолютно жесткой, то процесс итерации сходится при выполнении условия

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sum_{i=1}^n F_i}{\sum_{i=1}^n \delta_i^k \cdot F_i} \right] = 1, \quad (4.2.2)$$

$$\text{где } \delta_i^1 = \sum_{j=1}^n B_{ij}; \quad \delta_i^2 = \sum_{j=1}^n \frac{B_{ij}}{\delta_j^1}; \quad \delta_i^3 = \sum_{j=1}^n \left( \frac{B_{ij}}{\delta_j^1 \delta_j^2} \right); \quad \delta_i^k = \sum_{j=1}^n B_{ij} \prod_{m=1}^{k-1} \left( \frac{1}{\delta_j^m} \right);$$

$F_i$  - площадь  $i$  - того граничного элемента;  $B_{ij}$  коэффициенты влияния матрицы податливости метода граничных элементов [25, 53, 57],  $n$  – число отдельно стоящих фундаментов или участков, на которые был разбит фундамент;  $i \in (1, n); j \in (1, n)$ ; верхний индекс (т.е. 1, 2, 3, ..., k, m) соответствует номеру итерации, а нижний (т.е.  $i$  или  $j$ ) – номеру фундамента или номеру фрагмента фундамента (см. рис. 4.2.1).

**Доказательство.** Пусть  $N$ - равнодействующая всех приложенных к конструкции на уровне подошвы фундаментов сил. Тогда согласно изложенному выше (см. п. 1...5 настоящего раздела) имеем в первом приближении:

$$N_i^1 = \frac{N \cdot F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad P_i^1 = \frac{N_i^1}{F_i} = \frac{N}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad S_i^1 = \sum_{j=1}^n P_j^1 \cdot B_{ij} = \frac{N}{\sum_{i=1}^n F_i} \cdot \sum_{j=1}^n B_{ij} = \frac{N}{\sum_{i=1}^n F_i} \cdot \delta_i^1;$$

$$\delta_i^1 = \sum_{j=1}^n B_{ij}; \quad S_0^1 = \frac{\sum_{i=1}^n S_i^1 \cdot F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{N}{\left( \sum_{i=1}^n F_i \right)^2} \cdot \sum_{i=1}^n \delta_i^1 \cdot F_i;$$

$$C_i^1 = \frac{P_i^1}{S_i^1} = \frac{\frac{N}{\sum_{i=1}^n F_i}}{\frac{N}{\sum_{i=1}^n F_i} \cdot \delta_i^1} = \frac{1}{\delta_i^1}, \quad (4.2.3)$$

где  $N_i^1$  - сосредоточенная реакция со стороны основания, действующая на  $i$ -тый граничный элемент;  $P_i^1$  - то же, распределенная;  $S_i^1$  - осадка центра  $i$ -того граничного элемента;  $S_0^1$  - средняя осадка системы «фундамент – сооружение» (для абсолютно – жесткого симметричного сооружения при симметричной вертикальной нагрузке осадка  $i$ -того фундамента равна средней осадке всего сооружения);  $C_i^1$  - коэффициент жесткости основания в пределах  $i$ -ого граничного элемента, установленный в первом приближении.

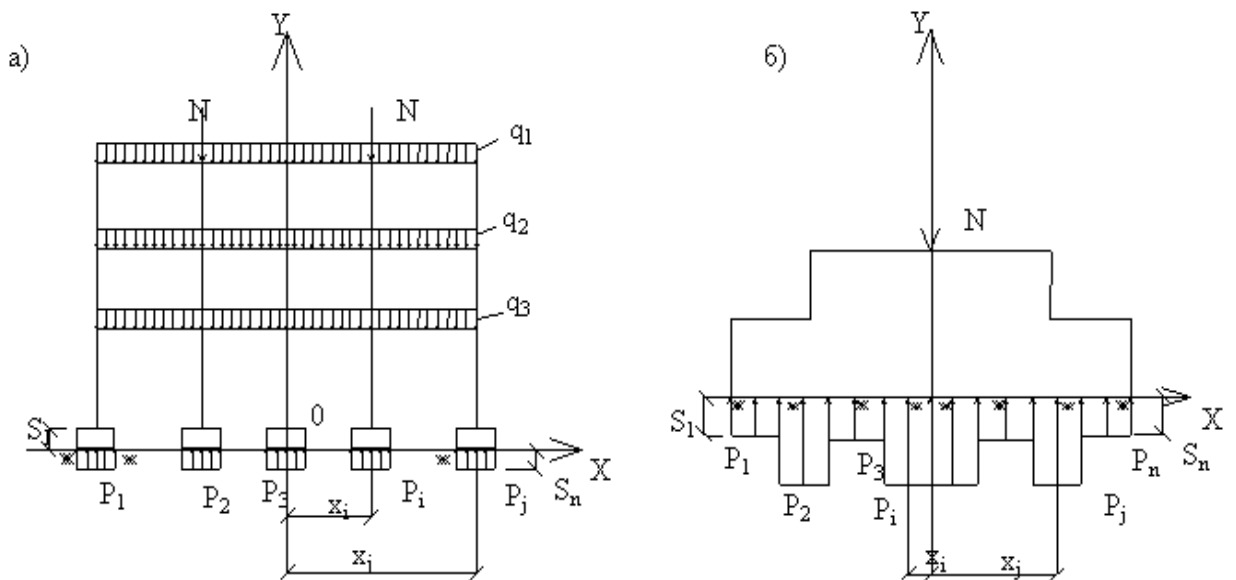


Рис. 4.2.1. К расчету НДС системы «основание - фундамент – сооружение» методом итерации.

а – сооружение на отдельно стоящих фундаментах; б – то же, на плитном фундаменте.

Во втором приближении получим:

$$\begin{aligned}
 P_i^2 &= S_0^1 \cdot C_i^1 = \frac{N}{\left(\sum_{i=1}^n F_i\right)^2} \cdot \sum_{i=1}^n \delta_i^1 \cdot F_i; \quad S_i^2 = \sum_j P_j^2 B_{ij} = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^n \delta_i^1 \cdot F_i}{\left(\sum_{i=1}^n F_i\right)^2} \cdot \sum_j \left[ \frac{B_{ij}}{\delta_j^1} \right] = \\
 &= \frac{N \cdot \sum_{i=1}^n \delta_i^1 \cdot F_i}{\left(\sum_{i=1}^n F_i\right)^2} \cdot \delta_i^2; \quad \delta_i^2 = \sum_j \left[ \frac{B_{ij}}{\delta_j^1} \right]; \quad S_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^n S_i^2 \cdot F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^n \delta_i^1 \cdot F_i}{\left(\sum_{i=1}^n F_i\right)^3} \cdot \sum_{i=1}^n \delta_i^2 \cdot F_i; \\
 C_i^2 &= \frac{P_i^2}{S_i^2} = \frac{1}{\delta_i^1 \delta_i^2}; \quad \frac{S_0^1}{S_0^2} = \frac{\frac{N}{\left(\sum_{i=1}^n F_i\right)^2} \cdot \sum_{i=1}^n \delta_i^1 \cdot F_i}{\frac{N \cdot \sum_{i=1}^n \delta_i^1 \cdot F_i}{\left(\sum_{i=1}^n F_i\right)^3} \cdot \sum_{i=1}^n \delta_i^2 \cdot F_i} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i}{\sum_{i=1}^n \delta_i^2 \cdot F_i} \quad (4.2.4)
 \end{aligned}$$

В третьем приближении имеем:

$$\begin{aligned}
 P_i^3 &= S_0^2 C_i^2 = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^n \delta_i^1 \cdot F_i \cdot \sum_{i=1}^n \delta_i^2 \cdot F_i}{\left(\sum_{i=1}^n F_i\right)^3 \cdot \delta_i^1 \cdot \delta_i^2}; \quad \delta_i^3 = \sum_j \left( \frac{B_{ij}}{\delta_j^1 \delta_j^2} \right); \\
 S_i^3 &= \sum_j P_j^3 B_{ij} = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^n \delta_i^1 \cdot F_i \cdot \sum_{i=1}^n \delta_i^2 \cdot F_i}{\left(\sum_{i=1}^n F_i\right)^3} \cdot \sum_j \left( \frac{B_{ij}}{\delta_j^1 \delta_j^2} \right) = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^n \delta_i^1 \cdot F_i \cdot \sum_{i=1}^n \delta_i^2 \cdot F_i}{\left(\sum_{i=1}^n F_i\right)^3} \cdot \delta_i^3; \\
 C_i^3 &= \frac{P_i^3}{S_i^3} = \frac{1}{\delta_i^1 \delta_i^2 \delta_i^3}; \quad S_0^3 = \frac{\sum_{i=1}^n S_i^3 \cdot F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^n \delta_i^1 \cdot F_i \cdot \sum_{i=1}^n \delta_i^2 \cdot F_i}{\left(\sum_{i=1}^n F_i\right)^4} \cdot \sum_{i=1}^n \delta_i^3 \cdot F_i;
 \end{aligned}$$

$$\frac{S_0^2}{S_0^3} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i}{\sum_{i=1}^n \delta_i^3 \cdot F_i} \quad (4.2.5)$$

По индукции [23] получим:

$$\delta_i^1 = \sum_j^n B_{ij}; \quad \delta_i^2 = \sum_j^n \frac{B_{ij}}{\delta_j^1}; \quad ; \delta_i^3 = \sum_j^n \left( \frac{B_{ij}}{\delta_j^1 \delta_j^2} \right); \dots; \delta_i^k = \sum_j^n B_{ij} \cdot \prod_{m=1}^{k-1} \left( \frac{1}{\delta_j^m} \right);$$

$$\frac{S_0^1}{S_0^2} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i}{\sum_{i=1}^n \delta_i^1 \cdot F_i}; \quad \frac{S_0^2}{S_0^3} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i}{\sum_{i=1}^n \delta_i^2 \cdot F_i}; \quad \frac{S_0^3}{S_0^4} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i}{\sum_{i=1}^n \delta_i^3 \cdot F_i}; \dots;$$

$$\frac{S_0^{k-1}}{S_0^k} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i}{\sum_{i=1}^n \delta_i^k \cdot F_i} \quad (4.2.6)$$

Из условия равенства найденных в ходе соседних приближений средних осадок  $S_0^{k-1}$  и  $S_0^k$  при неограниченном возрастании числа итераций (т.е. при

$k \rightarrow \infty$ ) имеем такую оценку:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sum_{i=1}^n F_i}{\left( \sum_{i=1}^n \delta_i^k \cdot F_i \right)} \right] = 1.$

### Теорема доказана.

Если используется модель физически нелинейного основания, а расчет производится методом последовательных нагружений [49], то полученные выше результаты допускают естественное обобщение на физически нелинейные задачи. В этом случае, однако, оценку сходимости следует выполнять на каждом шаге расчета (т.е. для каждого нагружения).

Для иллюстрации изложенного рассмотрим классическую задачу о вдавливании жесткого плоского штампа в упругую изотропную полуплоскость (рис. 4.2.2). Положим, что имеет место состояние плоской деформации [47].



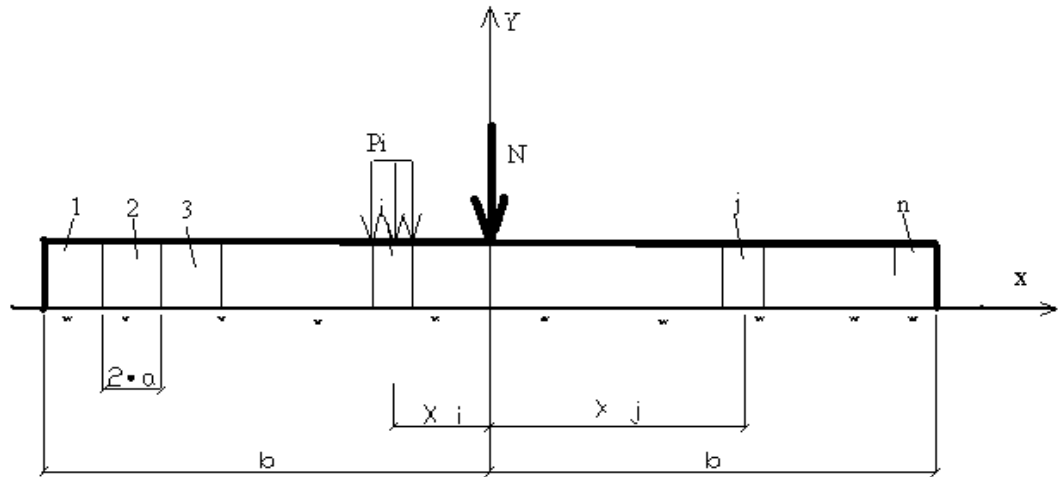


Рис. 4.2.2. К решению задачи о вдавлении жесткого штампа методом итерации.

Решение рассматриваемой задачи (точное и приближенное, методом граничных элементов) представлено в [25]. Коэффициенты влияния равны:

$$B_{ij} = -\frac{1-\nu}{\pi G} \left[ (x_i - x_j + a) \ln|x_i - x_j + a| - (x_i - x_j - a) \ln|x_i - x_j - a| + \right. \\ \left. + (L - x_j - a) \ln|L - x_j - a| - (L - x_j + a) \ln|L - x_j + a| \right], \quad (4.2.7)$$

где  $\nu$  - коэффициент Пуассона основания;  $G$  - модуль сдвига;  $L = 1,25b$ ;  $b$  - полуширина штампа;  $x_i, x_j$  и  $a$  - (см. рис. 4.2.2).

Точное решение задачи имеет вид [33, 36, 48, 50, 51].

$$P(x) = -\frac{N}{\pi} \frac{1}{\sqrt{b^2 - x^2}}. \quad (4.2.8)$$

Для удобства анализа результатов расчета положим

$$P^*(x) = -P(x) \frac{\pi}{N}, \quad P_i^* = -P_i \frac{\pi}{N} \quad \text{и} \quad x^* = \frac{x}{b}. \quad (4.2.9)$$

На рисунке 4.2.3 представлены результаты расчета эпюр вертикального нормального напряжения с использованием процесса итерации, построенные с учетом нормировки (4.2.9). Их анализ позволил нам сделать вывод о том, что даже при достаточно малом шаге разбивки подошвы фундамента на элементарные участки ( $n=10$ ) приближенный результат практически полностью совпадает с точным решением.

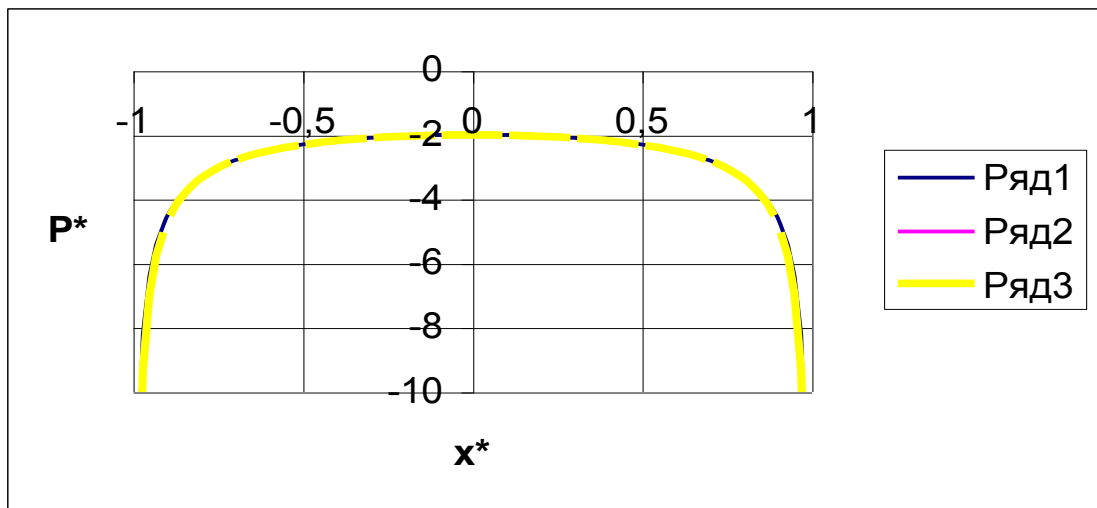


Рис. 4.2.3. Результаты решения задачи о вдавливании жесткого штампа методом итерации.

1 – точное решение; 2 – приближенное, ( $n=10$ ); 3 – то же, ( $n=100$ )

Далее была выполнена оценка сходимости процесса итерации (рис. 4.2.4). Для этой цели было использовано равенство (4.2.2), т.е.

$$\varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^n F_i}{\left( \sum_{i=1}^n \delta_i^k \cdot F_i \right)}.$$

Подошва фундамента была разбита на 10 (кривая 1), 100 (кривая 2) и 1000 участков (кривая 3).

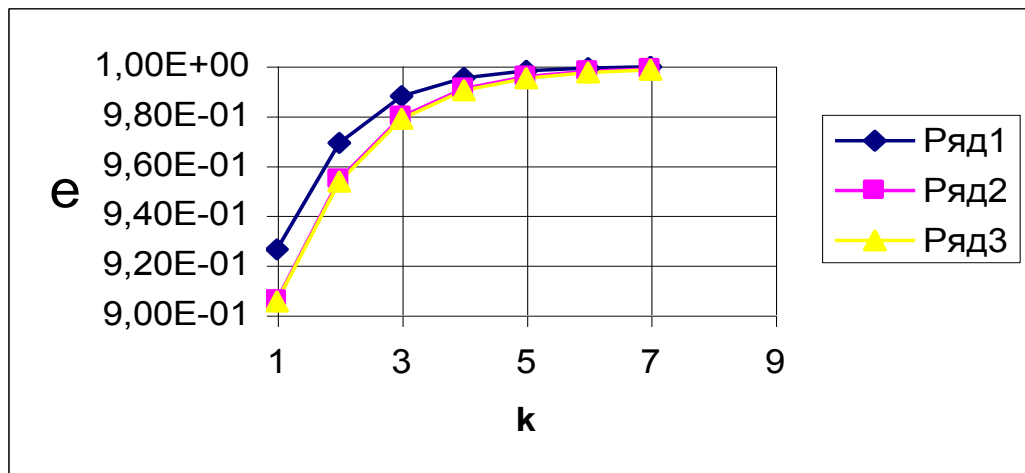


Рис. 4.2.4. К оценке сходимости процесса итерации.  
1 – n=10; 2 – n=100; 3 – n=1000.

Анализ представленных на рисунке 4.2.4 кривых позволил нам сделать вывод о том, что процесс итерации в данном конкретном случае сходится довольно быстро. При этом чем меньше число элементарных участков  $n$  (т.е. участков, на которые разбита подошва фундамента), тем быстрее сходится процесс итерации.

Выполним оценку фактической погрешности решения рассматриваемой задачи (рис. 4.2.5). В качестве критерия точности примем среднее квадратичное отклонение  $\sigma_a$  между точным и приближенным решениями задачи, которое определим по формуле

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( \frac{P_i^T - P_i^{II}}{P_i^T} \right)^2}, \quad (4.2.10)$$

где  $P_i^T$  - точное значение искомой функции в искомой точке, а  $P_i^{II}$  - приближенное.

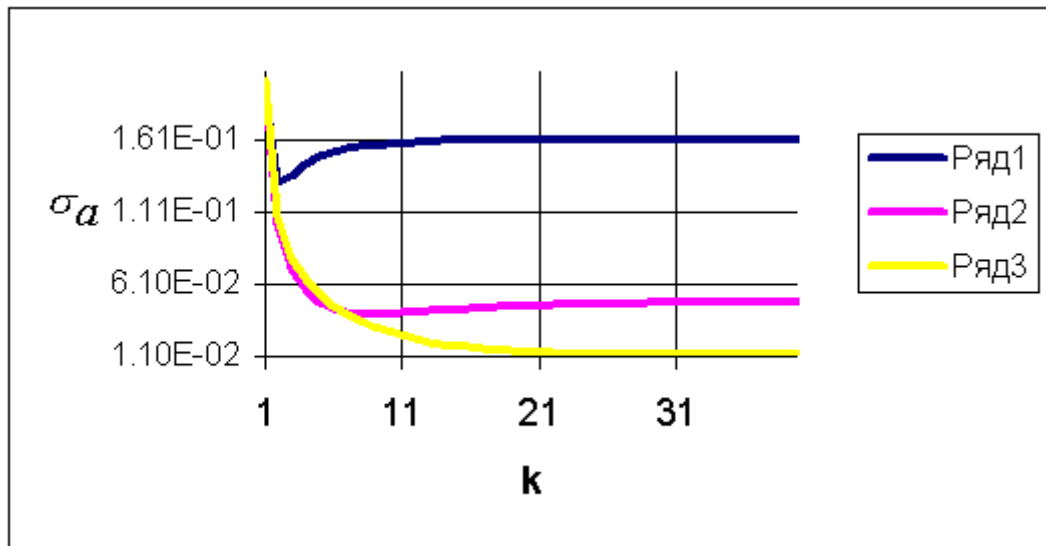


Рис. 4.2.5. К оценке фактической сходимости процесса итерации.  
1 – n=10; 2 – n=100; 3 – n=1000.

Анализ представленных на рис. 4.2.5 кривых позволил нам сделать вывод о том, что до некоторой итерации происходит уточнение результатов, после чего имеет место уменьшение точности решения. При этом сопоставление представленных на рис. 4.2.4 и 4.2.5 кривых позволяет признать полученную нами оценку (4.2.2) вполне удовлетворительной.

В целом, изложенные в настоящем разделе материалы исследований позволили нам сделать такие выводы:

- получен критерий сходимости процесса итерации С.Н. Клепикова для абсолютно – жестких сооружений;
- для оценки сходимости процесса итерации применительно к сооружениям конечной жесткости по аналогии с (4.2.2) можно рекомендовать равенство

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{S_{i-1}^{cp}}{S_i^{cp}} = 1, \quad (4.2.11)$$

где  $S_i^{cp}$  - установленная в ходе  $i$  – того приближения средняя осадка сооружения.

#### **4.3. ОЦЕНКА СХОДИМОСТИ ПРОЦЕССА ИТЕРАЦИИ С.Н. КЛЕПИКОВА ПРИ РАСЧЕТЕ НАПРЯЖЕННО – ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ «ОСНОВАНИЕ – ФУНДАМЕНТ – СООРУЖЕНИЕ» И ОБРАТНО - СИММЕТРИЧНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА ФУНДАМЕНТ НАГРУЗКИ.**

В настоящем разделе изложены материалы исследований проблемы сходимости процесса итерации при обратно – симметричной нагрузке. Задача исследований была сформулирована так. В грунтовое основание (в общем случае весомое водонасыщенное) вдавливаются абсолютно – жесткий штамп, на который действует моментная (в общем случае переменная во времени) нагрузка. Осадки всех точек подошвы штампа равны  $S(x) = k \cdot x$ , где  $x$  – координата, а  $k$  – коэффициент пропорциональности. Между деформациями и напряжениями в любой точке основания существует линейная зависимость (т.е. свойства основания описываются с использованием физически линейной модели грунта). Расчет напряженно – деформированного состояния системы «основание – фундамент» выполняется с использованием процесса итерации. Требуется определить условия сходимости процесса.

Имеет место теорема.

**Теорема 2.** Если система «основание - фундамент – сооружение» обладает такими свойствами: основание является линейным, сооружение и фундамент обладают симметрией либо относительно некоторой вертикальной оси (плоская задача) либо относительно некоторой вертикальной плоскости (пространственная задача), система «фундамент – сооружение» является абсолютно жесткой, а к этой системе приложена обратно – симметричная нагрузка, то процесс итерации сходится при выполнении условия

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \delta_i^{k-1}}{\sum_i x_i \cdot \delta_i^k} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^{k+1}}{F(i) \cdot \prod_{m=1}^{k-1} \delta_i^m}}{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^k}{F(i) \cdot \prod_{m=1}^{k-2} \delta_i^m}} = 1, \quad (4.3.1)$$

$$\text{где } \delta_i^1 = \sum_j \frac{B_{ij} \cdot x_j}{F_j}; \quad \delta_i^2 = \sum_j \frac{x_j^2 \cdot B_{ij}}{F_j \cdot \delta_j^1}; \quad \delta_i^3 = \sum_j \frac{B_{ij} \cdot x_j^3}{F_j \cdot \delta_j^1 \delta_j^2}; \dots; \quad \delta_i^k = \sum_j \frac{B_{ij} \cdot x_j^k}{F_j \cdot \prod_{m=1}^{k-1} \delta_j^m}; \quad B_{ij}$$

коэффициенты влияния [25];  $n$ —число отдельно стоящих фундаментов или участков, на которые был разбит фундамент;  $i \in (1, n)$ ;  $j \in (1, n)$ ; верхний индекс (т.е. 1, 2, 3, ...,  $k$ ,  $m$ ) соответствует номеру итерации, а нижний (т.е.  $i$  или  $j$ )—номеру фундамента или номеру фрагмента фундамента;  $x_i, x_j$  - см. рис. 4.2.1.

**Доказательство.** Пусть  $M$ - равнодействующий момент всех приложенных к конструкции на уровне подошвы фундаментов сил. Тогда имеем в первом приближении:

$$P_i^1 = \frac{M \cdot x_i}{\sum_i x_i^2}; \quad S_i^1 = \sum_j \frac{P_j^1}{F_j} \cdot B_{ij} = \frac{M}{\sum_i x_i^2} \cdot \sum_j \frac{B_{ij} \cdot x_j}{F_j} = \frac{M}{\sum_i x_i^2} \cdot \delta_i^1;$$

$$\delta_i^1 = \sum_j B_{ij} \cdot \frac{x_j}{F_j}; \quad C_i^1 = \frac{P_i^1}{S_i^1} = \frac{x_i}{\delta_i^1}; \quad I_0^1 = \frac{\sum_i x_i S_i^1}{\sum_i x_i^2} = \frac{M \sum_i x_i \delta_i^1}{(\sum_i x_i^2)^2}. \quad (4.3.2)$$

где  $P_i^1$  - реакция со стороны основания на  $i$  – тый фундамент или его фрагмент;  $S_i^1$  - осадка центра  $i$  – того фундамента или его фрагмента;  $I_0^1$  - общий крен системы «фундамент – сооружение» (для абсолютно – жесткого симметричного сооружения при обратно - симметричной вертикальной нагрузке крен  $i$  – того

фундамента равен общему крену всего сооружения);  $C_i^1$  - коэффициент жесткости основания под  $i$  - тым фундаментом или его фрагментом, установленный в первом приближении.

Во втором приближении получим:

$$P_i^2 = m^2 \cdot S_i^1 \cdot C_i^1 = m^2 \cdot I_o^1 \cdot x_i \cdot C_i^1 = m^2 \cdot I_o^1 \cdot \frac{x_i^2}{F_i \cdot \delta_i^1}; \quad m^2 = \frac{M}{I_o^1 \cdot \sum_i^n \frac{x_i^3}{F_i \cdot \delta_i^1}};$$

$$\delta_i^2 = \sum_j^n \frac{x_j^2 \cdot B_{ij}}{F_j \cdot \delta_j^1}; \quad S_i^2 = \sum_j^n P_j^2 B_{ij} = m^2 \cdot I_o^1 \cdot \delta_i^2;$$

$$C_i^2 = \frac{P_i^2}{S_i^2} = \frac{x_i^2}{F_i \cdot \delta_i^1 \cdot \delta_i^2}; \quad I_o^2 = \frac{\sum_i^n x_i \cdot S_i^2}{\sum_i^n x_i^2} = \frac{m^2 \cdot I_o^1 \cdot \sum_i^n (x_i \delta_i^2)}{(\sum_i^n x_i^2)^2} \quad (4.3.3)$$

В третьем приближении имеем:

$$P_i^3 = m^3 \cdot S_i^1 \cdot C_i^1 = m^3 \cdot I_o^2 \cdot x_i \cdot C_i^1 = m^3 \cdot I_o^1 \cdot \frac{x_i^3}{F_i \cdot \delta_i^1 \cdot \delta_i^2}; \quad m^3 = \frac{M}{I_o^2 \cdot \sum_i^n \frac{x_i^4}{F_i \cdot \delta_i^1 \cdot \delta_i^2}};$$

$$S_i^3 = \sum_j^n P_j^3 \cdot B_{ij} = m^3 \cdot I_o^2 \cdot \sum_j^n \left( \frac{B_{ij} \cdot x_j^3}{F_i \cdot \delta_j^1 \cdot \delta_j^2} \right) = m^3 \cdot I_o^2 \cdot \delta_i^3; \quad \delta_i^3 = \sum_j^n \frac{B_{ij} \cdot x_j^3}{F_i \cdot \delta_j^1 \cdot \delta_j^2};$$

$$C_i^3 = \frac{P_i^3}{S_i^3} = \frac{x_i^3}{F_i \cdot \delta_i^1 \cdot \delta_i^2 \cdot \delta_i^3}; \quad I_o^3 = \frac{\sum_i^n x_i \cdot S_i^3}{\sum_i^n x_i^2} = \frac{m^3 \cdot I_o^2 \cdot \sum_i^n (x_i \cdot \delta_i^3)}{(\sum_i^n x_i^2)^2}. \quad (4.3.4)$$

По индукции имеем [23]:

$$\delta_i^1 = \sum_j^n B_{ij} \cdot \frac{x_j}{F_j}; \quad \delta_i^2 = \sum_j^n \frac{x_j^2 \cdot B_{ij}}{F_j \cdot \delta_j^1}; \quad ; \quad \delta_i^3 = \sum_j^n \frac{B_{ij} \cdot x_j^3}{F_i \cdot \delta_j^1 \cdot \delta_j^2}; \quad \dots; \quad \delta_i^k = \sum_j^n \frac{B_{ij} \cdot x_j^k}{\prod_{L=1}^{k-1} \delta_j^L};$$

$$m^1 = 1; \quad m^2 = \frac{M}{I_0^1 \cdot \sum_i^n \frac{x_i^3}{F_i \cdot \delta_i^1}}; \quad m^3 = \frac{M}{I_0^2 \cdot \sum_i^n \frac{x_i^4}{F_i \cdot \delta_i^1 \cdot \delta_i^2}}; \quad \dots;$$

$$m^k = \frac{M}{I_0^{k-1} \cdot \sum_i^n \frac{x_i^{k+1}}{F_i} \cdot \prod_{L=1}^{k-1} \delta_i^L}; \quad (4.3.5)$$

$$\frac{I_0^1}{I_0^2} = \frac{\sum_i^n x_i \cdot \delta_i^1 \cdot \sum_i^n \frac{x_i^3}{F_i \cdot \delta_i^1}}{\sum_i^n x_i^2 \cdot \sum_i^n x_i \cdot \delta_i^2}; \quad \frac{I_0^2}{I_0^3} = \frac{\sum_i^n x_i \cdot \delta_i^2 \cdot \sum_i^n \frac{x_i^4}{F_i \cdot \delta_i^1 \cdot \delta_i^2}}{\sum_i^n x_i \cdot \delta_i^3 \cdot \sum_i^n \frac{x_i^3}{F_i \cdot \delta_i^1}}. \quad (4.3.5)$$

Из условия равенства найденных в ходе соседних приближений общих кренов  $I_0^{k-1}$  и  $I_0^k$  при неограниченном возрастании числа итераций (т.е. при

$$k \rightarrow \infty) \text{ имеем такую оценку: } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \delta_i^{k-1}}{\sum_i^n x_i \cdot \delta_i^k} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^{k+1}}{F(i) \cdot \prod_{m=1}^{k-1} \delta_i^m}}{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^k}{F(i) \cdot \prod_{m=1}^{k-2} \delta_i^m}} = 1.$$

**Теорема доказана.**

Если расчет производится методом последовательных нагружений [15, 16, 17, 21, 49], то полученные выше результаты допускают естественное обобщение на физически нелинейные задачи. В этом случае, однако, оценку сходимости следует выполнять на каждом шаге расчета (т.е. для каждого нагружения).



Для иллюстрации изложенного рассмотрим классическую задачу о вдавливании жесткого плоского штампа в упругую изотропную полуплоскость (рис. 4.3.1). Положим, что имеет место состояние плоской деформации [25, 33, 36, 47, 50, 51].

Точное решение рассматриваемой задачи представлено в [25, 47, 49].

Коэффициенты влияния равны:

$$B_{ij} = -\frac{1-\nu}{\pi G} \left[ (x_i - x_j + a) \ln |x_i - x_j + a| - (x_i - x_j - a) \ln |x_i - x_j - a| + \right. \\ \left. + (L - x_j - a) \ln |L - x_j - a| - (L - x_j + a) \ln |L - x_j + a| \right], \quad (4.3.6)$$

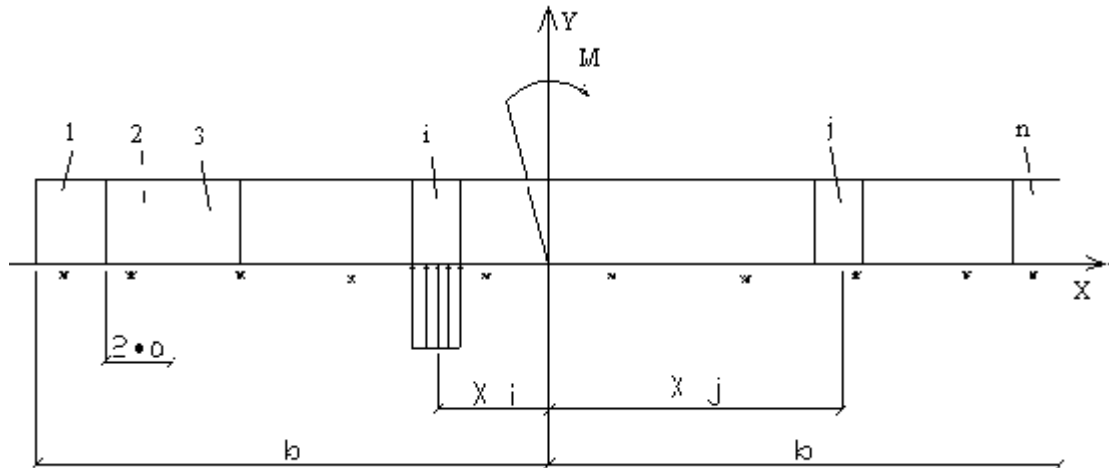


Рис. 4.3.1. К решению задачи о вдавливании жесткого штампа методом итерации.

где  $\nu$  - коэффициент Пуассона основания;  $G$  - модуль сдвига;  $L = 10^8 b$ ;  $b$  - полуширина штампа (см. рис. 4.3.1);  $x_i, x_j$  и  $a$  - см. рис. (4.3.1). Точное решение задачи имеет вид [25, 47, 49, 50].

$$P(x) = -\frac{2 \cdot M}{\pi \cdot b^2} \frac{x}{\sqrt{b^2 - x^2}}. \quad (4.3.7)$$

Для удобства анализа результатов расчета нами было принято:

$$P^*(x) = -P(x) \cdot \frac{\pi \cdot b^2}{2 \cdot M}, \quad P_i^* = -P_i \cdot \frac{\pi \cdot b^2}{2 \cdot M} \quad \text{и} \quad x^* = \frac{x}{b}. \quad (4.3.8)$$

Исследования выполнялись в такой последовательности. Вначале с

использованием равенства (4.3.1), т.е.  $\varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \delta_i^{k-1}}{\sum_i x_i \cdot \delta_i^k} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x^{k+1}}{F(i) \cdot \prod_{m=1}^{k-1} \delta_i^m}}{\sum_{i=1}^n \frac{x^k}{F(i) \cdot \prod_{m=1}^{k-2} \delta_i^m}}$  была

выполнена оценка сходимости процесса итерации (рис. 4.3.2). Подошва фундамента была разбита на 10 (кривая 1), 50 (кривая 2) и 100 участков (кривая 3). Оказалось, что процесс итерации весьма чувствителен к точности определения коэффициентов влияния  $B_{ij}$ . Об этом свидетельствуют представленные на рис 4.3.2-а и 4.3.2-б кривые (в первом случае были использованы фактические значения коэффициентов жесткости, а во втором – их значения, откорректированные с учетом обратной симметрии задачи).

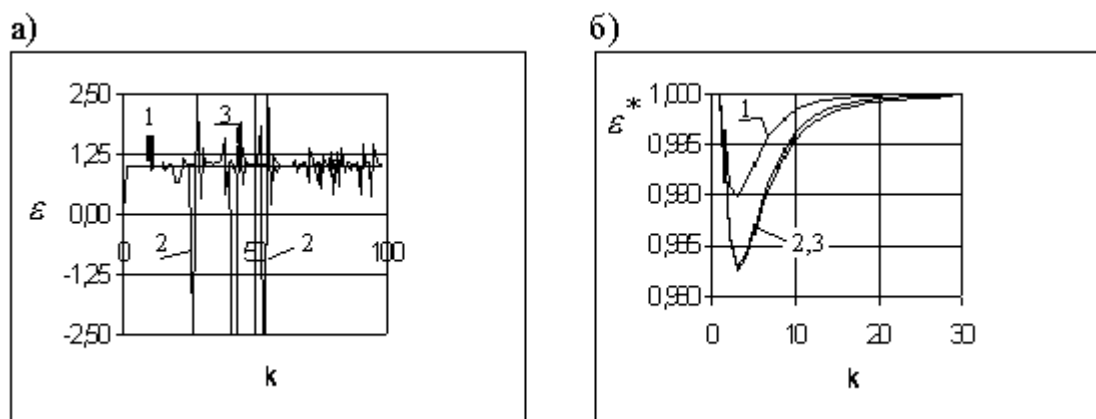


Рис. 4.3.2. К оценке сходимости процесса итерации.

а- при оценке сходимости учет обратной симметрии задачи не выполнялся; б - при оценке сходимости был выполнен учет обратной симметрии задачи.

1 – n=10; 2 – n=50; 3 – n=100.

Далее была выполнена оценка фактической погрешности решения рассматриваемой задачи (рис. 4.3.3). В качестве критерия точности было принято среднее квадратичное уклонение  $\sigma_a$  между точным и приближенным решениями задачи, которое определялось по формуле (4.2.10):

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n \left( \frac{P_i^T - P_i^{\Pi}}{P_i^T} \right)^2}, \quad (4.3.9)$$

где  $P_i^T$  - точное значение искомой функции в искомой точке, а  $P_i^{\Pi}$  - приближенное.

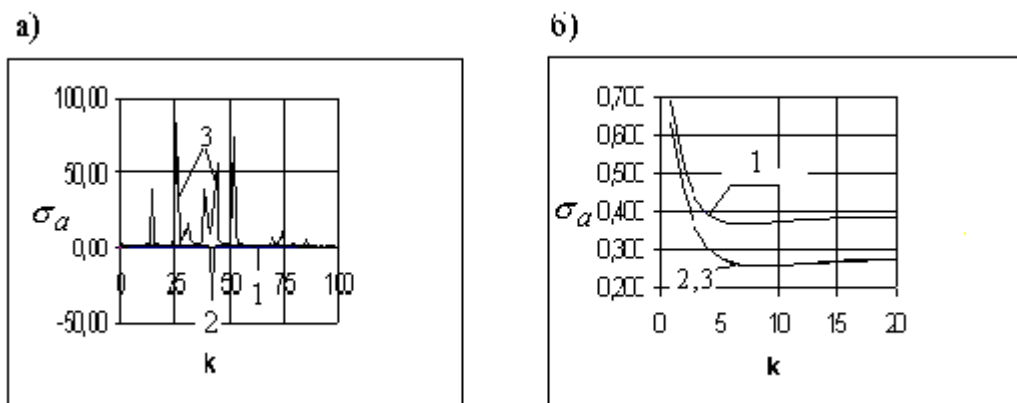


Рис. 4.3.3. К оценке фактической сходимости процесса итерации.  
 а- при оценке сходимости учет обратной симметрии задачи не выполнялся; б -  
 при оценке сходимости был выполнен учет обратной симметрии задачи.  
 1 –  $n=10$ ; 2 –  $n=50$ ; 3 –  $n=100$ .

Анализ представленных на рисунке 4.3.3 кривых позволил нам сделать вывод, о том, что в данном случае сходимость процесса итерации также существенно зависит от точности определения коэффициентов влияния  $V_{ij}$ .

При этом, если выполнен учет обратной симметрии задачи, то чем меньше число элементарных участков (т.е. участков, на которые разбита подошва фундамента), тем быстрее сходится процесс итерации.

На рисунке 4.3.4 представлены результаты расчета эпюр вертикального нормального напряжения с использованием процесса итерации, построенные с учетом нормировки (4.3.8) и обратной симметрии задачи. Их анализ позволил нам сделать вывод о том, что даже при достаточно большом шаге разбивки подошвы фундамента на элементарные участки ( $n=10$ ) приближенный результат практически полностью совпадает с точным решением.

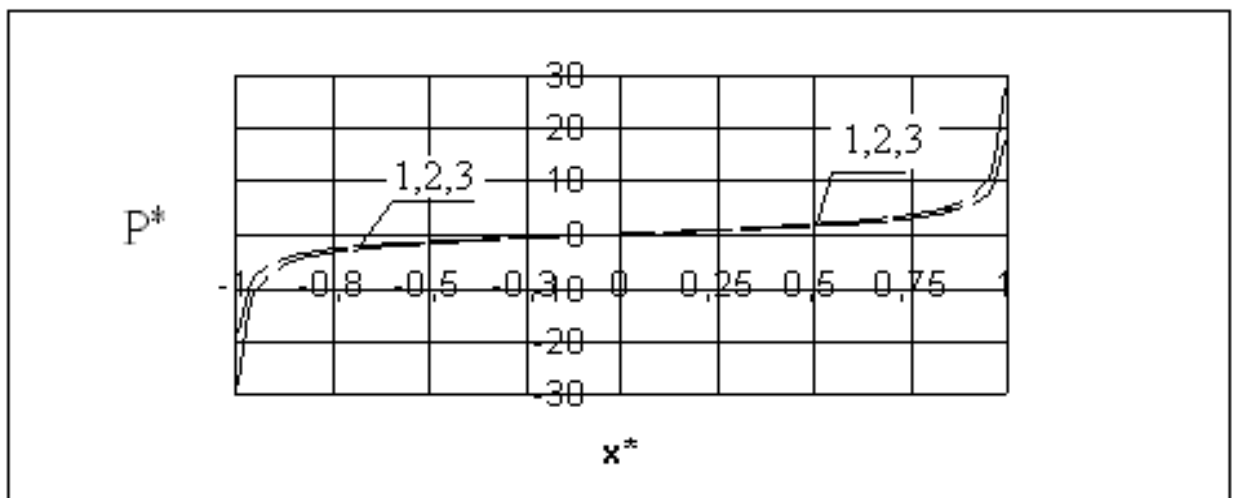


Рис. 4.3.4. Результаты решения задачи о вдавливании жесткого штампа методом итерации (обратно – симметричная нагрузка). При решении задачи коэффициенты влияния откорректированы с учетом обратной симметрии задачи. 1 – точное решение; 2 – приближенное, подошва штампа разбита на 10 участков ( $n=10$ ); 3 – то же, подошва штампа разбита на 100 участков ( $n=100$ ).

Изложенные в настоящем разделе материалы исследований позволили нам сделать такие выводы:

- получен критерий сходимости процесса итерации С.Н. Клепикова для абсолютно – жестких сооружений при действующей на них обратно – симметричной нагрузке;
- для оценки сходимости процесса итерации применительно к сооружениям конечной жесткости можно рекомендовать равенство

$$\lim_{i \rightarrow n} \frac{I_0^{i-1}}{I_0^i} = 1, \quad (4.3.10)$$

где  $I_0^i$  - установленный в ходе  $i$  – того приближения общий крен сооружения;

- на сходимость процесса итерации существенно влияет точность определения коэффициентов жесткости основания.

В целом, изложенные в настоящем разделе материалы позволили нам сделать вывод о том, что использование процесса итерации С.Н. Клепикова для решения практических задач геомеханики весьма перспективно, однако при определении коэффициентов влияния следует учитывать прямую и обратную симметрию расчетной схемы «основание – фундамент – сооружение».

#### **4.4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЙ. ВЫВОДЫ ПО РАЗДЕЛУ**

Изложенные в разделе 4 материалы исследований позволили нам сделать такие выводы.

1. В рамках модели упругой изотропной весомой неводонасыщенной среды и расчетной схемы полупространства для граничных элементов в виде прямоугольника, треугольника и четырехугольника неправильной формы получены коэффициенты влияния матрицы податливости метода граничных элементов.

2. В рамках модели упругой изотропной весомой водонасыщенной среды и расчетной схемы полупространства для граничных элементов в виде прямоугольника, треугольника и четырехугольника неправильной формы получены коэффициенты влияния матрицы податливости метода граничных элементов, которые в общем случае являются комплексными числами, т.е. содержат действительную и мнимую части.

3. В рамках расчетной схемы абсолютно – жесткого фундамента для действующей на фундамент симметричной и обратно – симметричной нагрузок выявлены условия сходимости процесса итерации С. Н. Клепикова. На этой основе предложены практические методы оценки сходимости процесса, суть которых заключается в сопоставлении амплитуд средних осадок и общих кренов фундаментов, установленных в ходе  $i$  – того и  $i+1$  – го приближений.

4. В ходе исследования закономерностей уплотнения находящегося под воздействием переменной во времени нагрузки водо – и неводонасыщенного основания были выявлены такие закономерности:

- на процесс стационарных колебаний грунтового основания существенное влияние оказывают свойства грунтового основания, в том числе его плотность, модуль упругости, коэффициент Пуассона, коэффициент фильтрации;

- на процесс стационарных колебаний грунтового основания существенное влияние оказывает частота изменения внешней нагрузки;

- на процесс стационарных колебаний грунтового основания существенное влияние оказывают размеры в плане и конфигурация загруженной области.

В целом сделан вывод о том, что при расчете находящихся под воздействием динамической нагрузки реальных сооружений на грунтовом основании следует учитывать его распределительные и реологические свойства оснований, поскольку эти факторы оказывают существенное влияние на процесс уплотнения грунта.

Влияние перечисленных факторов на напряженно – деформированное состояние фундаментов и надфундаментной конструкции исследовано в разделе 5.