УДК 622.7:519.213

В.Ф. ПОЖИДАЕВ, д-р техн. наук

ВЫВОД ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО КРУПНОСТИ ВО ВСЁМ ДИАПАЗОНЕ ЕЁ ИЗМЕНЕНИЯ

Исследование законов поведения частиц угля показывает их зависимость от диапазона размеров частицы. В практике углеобогащения считается, что гранулометрический состав адекватно описывается законом распределения Вейбулла, а поведение переизмельченных частиц можно не учитывать. Такой подход становится все более неточным, в связи со значительным переизмельчением угля в добыче и процессах переработки. Поскольку поведение мелких частиц угля подчиняется предельной теореме А. Н. Колмогорова [1], встает вопрос о нахождении границы действия двух законов, а также о возможном выводе обобщенного закона распределения [2].

Целью данной работы является вывод весовой функции распределения по крупности во всем диапазоне ее изменения, пригодной для проведения практических расчетов, для чего необходимо найти алгоритм восстановления ее параметров по результатам данных опробования.

Весовая функция распределения, связанная с логарифмическим нормальным распределением Колмогорова, имеет вид [2]:

$$F_1(x) = \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\ln\frac{x}{\mu} - \sigma\right) = \Phi\left(\frac{\ln x - \ln\mu}{\sigma} - \sigma\right).$$

Запишем весовую функцию распределения Вейбулла в эквивалентной форме:

$$F_2 = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{l}\right)^r\right\}.$$

Для нахождения области действия закона распределения Вейбулла проведем замену $\left(\frac{x}{l}\right)^r = t$ и найдем производную функции F_2.

$$(F_2)'_x = e^{-t}\,\frac{r}{l}\left(\frac{x}{l}\right)^{r-1}.$$

Найдем область, в которой . Для этого прологарифмируем первую производную:

$$(F_2)''_x = F_2 \cdot \frac{r}{x}\left(\frac{r-1}{r} - \left(\frac{x}{l}\right)^r\right).$$

Однако, $F_2 \geq 0 \quad \forall x \in (0,+\infty)$, – по свойству функции распределения. Следовательно F_2 не влияет на знак и при решении неравенства ее можно отбросить. Из вероятностного смысла функции распределения $r > 0$, $\alpha > 0$, $l > 0$, $x > 0$. Отсюда $\frac{r}{x} > 0$. В итоге получим:

$$(F_2)''_x > 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{r-1}{r} > \left(\frac{x}{l}\right)^r \;\Leftrightarrow\; \ln\frac{r-1}{r} > r\ln\frac{x}{l},\; \left(\frac{r-1}{r}\right)^{\frac{1}{r}} > \frac{x}{l},\; x < l\left(\frac{r-1}{r}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Таким образом, условие выпуклости вниз функции F_2 приводит к неравенству $x < l\left(\frac{r-1}{r}\right)^{\frac{1}{r}}$, которое определяет область его выполнения.

Поскольку функции F_1 и F_2 призваны описывать одну случайную величину – крупность – в разных областях ее изменения, естественно поставить вопрос о связи параметров, регулирующих характер поведения кривой распределения до точки их стыковки и после. Используем для этой цели проведенную выше замену: $\left(\frac{x}{l}\right)^r = t$. Подставим $\ln x$ в F_1. $F_1(x) = \Phi\left(\frac{1}{r\sigma}\ln t + \frac{1}{\sigma}\ln\frac{l}{\mu} - \sigma\right)$. Перейдем к новой переменной t и в законе распределения Вейбулла: $F_2(x) = 1 - e^{-t}$.

Обозначим через d значение x, которое разделяет области действия F_1 и F_2. Тогда, подставив $x = d$ найдем $\left(\frac{d}{l}\right)^r = \tau$ – точку разделения в новых координатах. Введем следующие обозначения: $\frac{1}{r\sigma} = a_1$, $\frac{1}{\sigma}\ln\frac{l}{\mu} - \sigma = a_0$ и запишем обобщенную функцию распределения:

$$F(t)=\begin{cases}F_1(t), 0<t\le\tau\\ F_2(t), \tau\le t<+\infty\end{cases}=\begin{cases}\Phi(a_0+a_1\ln t), 0<t\le\tau\\ 1-e^{-t}, \tau\le t<+\infty\end{cases}.$$

Очевидно, в точке $t=\tau$ должно выполняться условие $\lim\limits_{t\to\tau-}F_1(t)=\lim\limits_{t\to\tau+}F_2(t)$ (или для обобщенной функции $\lim\limits_{t\to\tau-}F(t)=\lim\limits_{t\to\tau+}F(t)$) в силу непрерывности случайной величины x (а следовательно и t):

$\Phi(a_0+a_1\ln\tau)=1-e^{-\tau}$, $a_0+a_1\ln\tau=\Phi^{-1}(1-e^{-\tau})$.

Если в некоторой точке $x=d$ плотность распределения $F'(x)$ терпит разрыв, это означает наличие в общей непрерывной совокупности изменения размеров такого класса частиц, равных d, весовая доля которых равна величине скачка функции плотности. Исходная совокупность тем самым разбивается на две статистически однородные совокупности, сама при этом не являясь статистически однородной. Поскольку мы имеем дело с однородной совокупностью, потребуем также равенство первых производных в точке $t=\tau$ (условие однородности)

Отсюда найдем условия определения параметров a_0, a_1, τ :

$$\begin{cases}a_0+a_1\ln\tau=\Phi^{-1}(1-e^{-\tau})\\ \ln\dfrac{a_1}{\sqrt{2\pi}}-\ln\tau-\dfrac{1}{2}(a_0+a_1\ln\tau)^2=-\tau\\ a_0+a_1\ln\tau=a_1\tau-a_1\end{cases},$$

Вычтем из первого уравнения системы третье: $a_1=\dfrac{\Phi^{-1}(1-e^{-\tau})}{\tau-1}$, если $\tau\ne1$ или $d\ne l$.

Опуская выкладки, можно утверждать, что $\tau\ne1$. Подставим a_1 в первое уравнение:

$$a_0+\frac{\Phi^{-1}(1-e^{-\tau})}{\tau-1}\ln\tau=\Phi^{-1}(1-e^{-\tau}),$$

$$a_0=\Phi^{-1}(1-e^{-\tau})-\frac{\Phi^{-1}(1-e^{-\tau})}{\tau-1}\ln\tau=\Phi^{-1}(1-e^{-\tau})\left(1-\frac{\ln\tau}{\tau-1}\right).$$

Таким образом, получиено выражение для и :

$$\begin{cases} a_0 = \Phi^{-1}\left(1-e^{-\tau}\right)\left(1-\dfrac{\ln\tau}{\tau-1}\right) \\ a_1 = \dfrac{\Phi^{-1}\left(1-e^{-\tau}\right)}{\tau-1} \end{cases}.$$

Найдем уравнение для нахождения τ: $\ln\dfrac{\Phi^{-1}\left(1-e^{-\tau}\right)}{(\tau-1)\sqrt{2\pi}} - \ln\tau - \dfrac{1}{2}\left(\Phi^{-1}\left(1-e^{-\tau}\right)\right)^2 + \tau = 0$.

Решив численно это уравнение и, подставив найденное значение τ, получим следующие значения параметров стандартного обобщенного закона распределения с точностью до седьмого знака:

$$\{\tau = 1{,}820645;\ \ a_1 = 1{,}202216;\ \ a_0 = 0{,}266236.$$

Точка перегиба существует и находится до точки τ. Отсюда $(F_1)''_t < 0$.

Найдем связь между параметрами α и l в различных записях закона распределения Вейбулла:

$$1-\exp\{\alpha x^r\} = 1-\exp\left\{\left(\frac{x}{l}\right)^r\right\},\quad \exp\{\alpha x^r\} = \exp\left\{\left(\frac{x}{l}\right)^r\right\},$$

$$\ln\left(\exp\{\alpha x^r\}\right) = \ln\left(\exp\left\{\left(\frac{x}{l}\right)^r\right\}\right),\quad \alpha x^r = \left(\frac{x}{l}\right)^r,\quad \ln\left(\alpha x^r\right) = \ln\left(\frac{x}{l}\right)^r,$$

$$\ln\alpha + r\ln x = r\ln x - r\ln l,\quad \ln\alpha = -r\ln l \ \Rightarrow\ \alpha = l^{-r},\ l = \alpha^{-\frac{1}{r}}.$$

Таким образом, мы имеем шесть параметров α, l, r, σ, μ, d обобщенного закона распределения и три уравнения, связывающие эти параметры. Учитывая связь между α и l имеем лишь два независимых параметра. Представляет интерес нахождение 4 параметров при заданных 2.

Пусть заданы α и r (либо α и l). Найдем σ, μ, d с учетом функциональной связи на границе действия двух альтернативных законов $\sigma = \dfrac{1}{a_1 r}$, $d = l\tau^{\frac{1}{r}}$, $\mu = le^{-\sigma(a_0+\sigma)}$.

Таким образом: α, r, l $\Rightarrow$ $\sigma = \dfrac{1}{a_1 r}$, $d = l\tau^{\frac{1}{r}}$, $\mu = le^{-\sigma(a_0+\sigma)}$.

Пусть заданы и . Тогда: , $r = \dfrac{1}{a_1\sigma}$, , .

Для нахождения параметров найденного обобщенного закона распределения воспользуемся методом вероятностной бумаги, предложенным Вейбуллом [3]. Идея метода состоит в следующем: находится такое преобразования координат при переходе к которому функция распределения преобразуется в прямую. При этом параметры полученной прямой линии однозначно связаны с неизвестными параметрами исходного распределения, подлежащими определению.

Для нахождения преобразования координат найдем функцию, обратную к обобщенной функции распределения.

$$t = F^{-1}(F) = \begin{cases} F_1^{-1}(F), F < F(\tau) \\ F_2^{-1}(F), F > F(\tau) \end{cases}, \quad t = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{\Phi^{-1}(F) - a_0}{a_1}\right), & F \le F(\tau) \\ \ln\dfrac{1}{1-F}, & F \ge F(\tau) \end{cases}.$$

Функция $\ln t = \ln F^{-1}(F)$ линейна относительно $\ln x$. Следовательно, искомым преобразованием координат будет:

$$\varphi = \ln x, \quad \psi = \begin{cases} \dfrac{\Phi^{-1}(F) - a_0}{a_1}, & F \le F(\tau) \\ \ln\ln\dfrac{1}{1-F}, & F \ge F(\tau) \end{cases}.$$

В координатах (φ, ψ), которые однозначно вычисляются по исходным координатам (x, F) независимо от того, какие граничные классы используются: в области седиментации или из области возможных рассевов на ситах, находятся эмпирические значения параметров линейной регрессии. Тем самым определяются два неизвестных параметра распределения, по которым восстанавливаются остальные.

Связь между законами Вейбулла и логарифмически нормальным отмечена в [3]. Так как

$$\inf_{p,\sigma}\inf_{a,c}\sup_{t}\left|F_w(t,p,\sigma,0) - \Phi\left(\frac{\ln t - a}{c}\right)\right| = \inf_{a,c}\sup_{t}\left|F_w(t,1,1,0) - \Phi\left(\frac{\ln t - a}{c}\right)\right| = 0{,}038,$$

то принципиально возможным является описание закона распределения размеров частиц только одним из них во всём диапазоне изменения крупности. Но это нецелесообразно, хотя становятся ясными попытки такого подхода [4].

Таким образом, выведена весовая функция распределения по крупности во всём диапазоне её изменения

$$F(t)=\begin{cases}\Phi\left(a_0+a_1\ln t\right), & 0<t\le\tau\\ 1-e^{-t},\tau\le t<+\infty\end{cases}$$

Представлен алгоритм восстановления параметров по минимальному числу экспериментальных данных. Становится возможной следующая задача – построение поверхности обогатимости по классам крупности.

Список литература

1. **Колмогоров А.Н.** О логарифмическом нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении // ДАН СССР. Новая Серия. – 1941. – Т.31. – №2. – С.99–101.
2. **Гарус В.К., Грачев О.В., Пожидаев В.Ф., Полулях О.Д.** Формализация результатов разделительных процессов в углеобогащении: Монография. – Луганск: изд. ООО ”НВФ”Стек”, 2003. – 176 с.
3. Математическая Энциклопедия. – М., „Советская Энциклопедия”, – 1977 г. – Т. 1. – С. 614.
4. **Хесин А.М., Федорченко В.И., Ямпольский М.Н.** Закономерности распределения каменных углей и антрацитов по классам крупности. – М.: Недра, 1965. – Т.4. – 270 с.

Надійшла до редколегії
Рекомендовано до публікації

УДК

И.Д. ДРОЗДНИК

К ВОПРОСУ ОБЕСПЕЧЕНИЯ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА КОКСУЮЩИМИСЯ УГЛЯМИ ТРЕБУЕМОГО КАЧЕСТВА

Новые требования доменного производства к качеству металлургического кокса

В настоящее время происходят существенные изменения в оценке требований, предъявляемых к свойствам металлургического кокса.