МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

АКТУАРНІ РОЗРАХУНКИ

Методичні рекомендації

до самостійного виконання практичних завдань з дисципліни
студентами напряму підготовки 6.030508 Фінанси і кредит

Дніпропетровськ
2014

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

ФІНАНСОВО-ЕКОНОМИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра економічного аналізу і фінансів

АКТУАРНІ РОЗРАХУНКИ

Методичні рекомендації

до самостійного виконання практичних завдань з дисципліни
студентами напряму підготовки 6.030508 Фінанси і кредит

Дніпропетровськ
НГУ
2014

І.М. Цуркан
Актуарні розрахунки. Методичні рекомендації до самостійного виконання практичних завдань з дисципліни студентами напряму підготовки 0.030508 Фінанси і кредит / І.М. Цуркан, О.Г. Федорова; М-во освіти і науки України, Нац. гірн. ун-т. – Д. : НГУ, 2014. – 76 с.

Автори:
І.М. Цуркан, канд. екон. наук, доцент;
О.Г. Федорова, асистент

Затверджено до видання редакційною радою НГУ (протокол № 12 від 03.12.2014) за поданням методичної комісії напряму підготовки 6.030508 Фінанси і кредит (протокол № 1 від 05.11.2014).

Методичні матеріали призначено для самостійної роботи студентів напряму 6.030508 Фінанси і кредит в процесі підготовки до модульного контролю з практичних занять дисципліни «Актуарні розрахунки».

Розглянуто теоретичні відомості про основні математичні моделі й методи визначення тривалості життя, розміру разових і періодичних премій, страхових надбавок стосовно різних видів страхування життя і пенсійних схем.

Подано рекомендації до розв'язування й приклади типових практичних задач, а також задачі для практичних (самостійних) занять студентів.

Наведено критерії оцінювання індивідуального контрольно-розрахункового завдання.

Рекомендації орієнтовано на активізацію виконавчого етапу навчальної діяльності студентів.

Відповідальна за випуск завідувач кафедри економічного аналізу та фінансів д-р екон. наук, проф. О.В. Єрмошкіна.

ЗМІСТ

ВСТУП

Інтерес до теорії страхування життя розвивається в Україні разом з розвитком страхового ринку – важливої частини вільної ринкової економіки. Актуарний аналіз, зокрема, стає невід'ємним аспектом діяльності серйозних страхових компаній і банків. Страхування як система захисту майнових інтересів громадян, організацій і держави є необхідним елементом сучасного суспільства. Воно забезпечує безперервність всіх видів суспільно корисної діяльності, а також підтримку рівня життя, доходів людей при настанні певних подій – страхових випадків.

Метою методичних рекомендацій до самостійної роботи студентів з практичних занять є забезпечення студентів інформацією щодо:

1) теоретичних відомостей за наступними питаннями:

- розрахунок майбутньої і сучасної вартості основних фінансових рент;
- розрахунок показників страхової статистики;
- розрахунок тарифних ставок за ризиковими видами страхування;
- розрахунок тарифних ставок для нових видів страхування;
- розрахунок платежів для страхування на чисте дожиття, різних схем пенсійного страхування;
- розрахунок комутаційних функцій;
- розрахунок нетто- та брутто- премій для страхування на чисте дожиття, рент.

2) підготовки до контролю з практичних занять (рекомендації до вирішення типових практичних задач, приклади розв’язування типових задач, задачі, призначені для практичних (самостійних) занять студентів).

3) критерії оцінювання індивідуального контрольно-розрахункового завдання.

Практичне заняття 1

ЕЛЕМЕНТИ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ. ФІНАНСОВІ РЕНТИ

Ціль практичного заняття:

1. Мати уявлення:

– про базові поняття теорії імовірності і фінансової математики.

Знати:

– види процентних ставок;

– основні види фінансових рент.

2. Уміти:

– знаходити майбутню і сучасну вартість основних фінансових рент.

Теоретичні відомості про відсоткові ставки, нагромадження й сучасну вартість

1.1. Ефективна відсоткова ставка

В страхових операціях премії і страхові виплати пов'язують із конкретними моментами або періодами часу. У договорах страхування фіксуються терміни, дати, періодичність виплат. Необхідність обліку часового фактору очевидна – зрозуміло, що отримані страховою компанією у вигляді премій суми якийсь час «працюють» (накопичуються), і страховий тариф повинен визначатися з урахуванням цієї «роботи». Наша мета – розглянути механізми нарощування отриманих страхових сум.

Почнемо з найбільш важливого параметра фінансових обчислень – ефективної відсоткової ставки.

Припустимо, що в момент t ми позичили на якийсь час h певну суму S. Загально прийнято, що в момент t + h повернення боргу ми повинні повернути більшу суму S + Δ S. Сума Δ S є нагородою власникові основного капіталу S за те, що його кошти використовувалися іншою людиною. Зазвичай її вимірюють у відносних одиницях; величина $i = \Delta S / S$ називається ефективною відсотковою ставкою за розглянутий проміжок часу. Відповідно, якщо ми позичаємо суму S (кладемо на свій рахунок у банку, вносимо плату за страховку, вносимо внесок у пенсійний фонд), то через час h ми можемо розраховувати на певний дохід $\Delta S = iS$ від інвестування приналежного нам капіталу S.

Відсоткова ставка і, як правило, визначається у відсотках, однак обчислення проводиться з величиною і /100. Наприклад, фраза «річна відсоткова ставка дорівнює 20%» або запис «і = 20%» означає, що в розрахунках використовується величина і = 0,2.

1.2. Прості й складні відсотки

Припустимо тепер, що сума S може інвестуватися у два послідовних проміжки часу (t_0, t_1) і (t_1, t_2). Відсоткові ставки на цих проміжках дорівнюють i_1 і i_2 відповідно.

Існують дві схеми обчислення доходу ΔS на об'єднаному інтервалі (t_0, t_2):

(1) принцип простих відсотків припускає, що відсотки нараховуються тільки на основний капітал.

Тому, $\Delta S = Si_1 + Si_2$.

Відповідно, підсумкова відсоткова ставка $i = \Delta S / S = i_1 + i_2$.

(2) принцип складних відсотків припускає, що відсотки нараховуються не тільки на основний капітал, але й на вже зароблені відсотки. Тому наприкінці другого інтервалу часу основний капітал S зросте до величини $S + \Delta S = S(1+i_1)\cdot(1+i_2)$. Відповідно, підсумкова відсоткова ставка і визначається з умови

$1 + i = (1+i_1)(1+i_2)$, тобто $i = i_1 + i_2 + i_1 i_2$.

На теперішній час прийнято використовувати принцип складних відсотків при визначенні доходу від вкладення коштів.

1.3. Нагромадження

Виберемо деякий проміжок часу в якості одиничного (як правило, це буде рік) і припустимо, що відсоткова ставка за цей проміжок дорівнює і.

Припустимо, що в момент $t_0 = 0$ сума S інвестується на n одиниць часу. Принцип складних відсотків передбачає, що в момент $t_0 + n$ капітал S перетвориться в суму:

$$S(n) = S(1+i)^n \tag{1.1}$$

Схема нагромадження (1.1) дозволяє одержати накопичену суму у випадку, коли послідовні в часі ставки $i_1, i_2, \ldots, i_m$ фіксуються на періоди $n_1, n_2, \ldots, n_m$ відповідно:

$$S(n) = S_0(1+i_1)^{n1}(1+i_2)^{n2}\cdot\ldots\cdot(1+i_m)^{n}m \tag{1.2}$$

1.3.1. Ефективна відсоткова ставка на частковому тимчасовому проміжку

Розглянемо тепер питання про те, як справедливим образом визначити дохід на капітал, що інвестований на час $\frac{n}{m}$.

Зафіксуємо одиничний часовий проміжок (наприклад, один рік) і розіб'ємо його на m рівних частин (у страховій практиці як правило, m = 2, 4, 12, тобто частинами є півріччя, квартал, місяць).

Нехай і – ефективна відсоткова ставка на одиничному проміжку. Позначимо ефективну відсоткову ставку для проміжку 1/m через $i_*^{(m)}$.

Завдання полягає у визначенні $i_0^{(m)}$ так, щоб «робота» грошей на об'єднанні проміжків довжиною 1/ m кожного приводила до такої ж накопиченої суми, що й ефективна відсоткова ставка і на одиничному проміжку.

Оскільки на одиничний відрізок можна дивитися як на m послідовних відрізків довжиною 1/m кожний, застосовуючи формулу (1.1) ми одержимо, що $S\cdot(1+i) = S\cdot(1+i_*^{(m)})^m$, тому:

$$i_*^{(m)} = (1+i)^{1/m} - 1 \tag{1.3}$$

Розглядаючи відрізок [0, n/ m] як n послідовних відрізків довжиною 1/m кожний і застосовуючи формули (1.1) і (1.2), ми одержимо для суми S(t), накопиченої до моменту t = n/ m, наступне вираження:

$$S(t) = S \cdot (1 + i_*^{(m)})^n = S \cdot \left((1+i)^{1/m}\right)^n = S \cdot (1+i)^{n/m} = S \cdot (1+i)^t \qquad (1.4)$$

Оскільки будь-яке дійсне число t можна скільки завгодно точно наблизити раціональними числами, припускаючи безперервність функції S(t), ми одержимо, що формула

$$S(t) = S(1+i)^t \qquad (1.5)$$

вірна для кожного t > 0.

Формула (1.3) описує процес нагромадження коштів у ситуації, коли прийнятий принцип складних відсотків, і є одною з основних формул фінансової математики.

Для цілого числа років користуються формулою (1.5), для дробової частини періоду нагромадження – формулою:

$$S(t) = S_0(1+i)^a(1+bi) \qquad (1.6)$$

де *a* – ціла частина;
b – дробова частина;
n= *a*+*b*.

1.4. Номінальна відсоткова ставка

Як відзначалося, у фінансових операціях фіксується одиничний часовий проміжок, як правило, один рік. Однак нарахування відсотків доводиться робити кілька разів на рік - по півріччях, кварталах.

Якщо період нарахування менше року, то річна ставка в цьому випадку називається номінальної

Нарахування відсотків по номінальній відсотковій ставці провадиться по формулі складних відсотків

$$S(n) = S(1+\frac{j}{m})^{n \cdot m} \qquad (1.7)$$

де *j* – номінальна процентна ставка;
m – число періодів нарахування в році;
n – число років інвестування.
S – первісний капітал;
S(n) – нарощена вартість.

Чим більше періодів нарахування в році, тим швидше йде процес нарощування капіталу. Річна ставка, що забезпечує той же дохід, що й m–разове нарахування % по номінальній ставці j, називається ефективною ставкою i. «Ефективна», а також «фактична» опускається й параметр i називають відсотковою ставкою. Поруч із цим терміном і називають ставкою інвестиційного доходу, нормою прибутку, у давній російській літературі нормою росту. За фінансовим результатом ефективна ставка еквівалентна номінальної.

$$(1+i)^n = (1+\frac{j}{m})^{nm}$$

$$i = (1+\frac{j}{m})^m - 1$$

$$j = ((1+i)^{1/m} - 1)m \qquad (1.8)$$

де i – ефективна ставка;
j – номінальна відсоткова ставка;
m – число періодів нарахування в році;
n – число років інвестування.

За номінальною процентною ставкою можна проводити дисконтування m раз у році.

$$S = \frac{S(n)}{(1+\frac{j}{m})^{nm}} \qquad (1.9)$$

«18% річних з поквартальним нарахуванням відсотків». Означає, що $i^{(4)} = 18\%$, $j^{(4)} = 4{,}5\%$.

1.5. Дисконтування

Теперішня вартість. В страховій практиці при визначенні страхової премії у відповідний момент часу використовується сума P(t), щоб через t років накопичена сума становила S(t).

Величина P(t) – теперішня (поточна, приведена) вартість.

Процес відшукання теперішньої вартості суми S називається дисконтуванням (приведенням до моменту t=0). Різницю S – P називають дисконтом.

Приведена вартість одиничної суми (S(t) = 1) позначається v(t).

$$v(t) = \frac{1}{(1+i)^t} = (1+i)^{-t} \qquad (1.10)$$

Величина $v(t) = \frac{1}{1+i} = (1+i)^{-t}$ називається коефіцієнтом дисконтування; за його допомогою сучасна вартість суми S(t) приймає вигляд:

$$P(t) = S(t)v^t \qquad (1.11)$$

1.6. Облікова ставка

Припустимо, що в момент $t_0 = 0$ ми даємо позику на суму S. Тоді в момент t=1 нам повинні повернути суму S (1+ i), яка складається з двох частин: повернення основного капіталу S і відсотків на капітал $\Delta S = iS$.

Сума S i в момент t=1, будучи приведеною до моменту $t_0 = 0$, має цінність $S \cdot i(1+i)^{-1}$. Тому відсотки на капітал можуть бути виплачені і заздалегідь, в момент $t_0 = 0$ отримання позики. Ці відсотки, які виплачуються вперед, становлять $d = i/(1+i)$ від суми позики S. Величина d називається ефективною обліковою ставкою за одиницю часу. Облікова ставка може бути виражена через коефіцієнт дисконтування v:

$$d = 1 - v, \qquad (1.12)$$

Припустимо тепер, що сума S=1 дається в борг терміном 1/m із завчасною виплатою відсотків. Ефективна процентна ставка: $i_*^{(m)} = (1+i)^{1/m} - 1$. Саме ця сума буде виплачена в момент t=1/m у вигляді відсотків. Якщо її привести до моменту t_0 = 0, то в силу формули (1.9) вона матиме цінність $i_*^m \cdot (1+i)^{-1/m} = 1-(1+i)^{-1/m}$. Оскільки $i = d/(1-d)$ для ефективної облікової ставки $d_*^{(m)}$ терміном 1/m отримаємо формулу:

$$d_*^{(m)} = 1-(1-d)^{1/m}. \qquad (1.13)$$

Однак у фінансовій математиці прийнято працювати не з ефективними обліковими ставками терміном 1/m, а з так званими номінальними обліковими ставками

$$d^{(m)} = m \cdot d_*^{(m)} \qquad (1.14)$$

З формули (1.13) ми маємо:

$$d^{(m)} = m(1-(1-d)^{1/m} \qquad (1.15)$$

Величину називають номінальною обліковою ставкою, яка нараховується з частотою m. Формули (1.14) і (1.15) дуже важливі при розрахунку рент, страхових премій, пенсій.

1.7. Фінансові ренти

Страхові операції дуже часто пов'язані не з разовими платежами, а з певною їхньою послідовністю в часі. Прикладами можуть служити оплата премій, виплата пенсій, надходження доходів від інвестицій. Такі послідовності платежів називаються потоками платежів. Окремий платіж називається членом потоку.

Потік платежів, усі члени якого позитивні, а часовий інтервал між членами однаковий, називається фінансовою рентою або ануїтетом. Сплата премій у розстрочку й виплата пенсій - приклади рент.

Основні терміни. Розмір окремого платежу називається членом ренти; часовий проміжок між двома послідовними платежами – періодом ренти; часовий проміжок від початку першого періоду до кінця останнього - терміном ренти.

Ренти діляться по кількості виплат протягом року на річні (виплата проводиться один раз на рік) і р – термінові (р – кількість виплат у році).

По величині членів ренти діляться на постійні (з однаковими платежами) і перемінні (розміри платежів змінюються за яким-небудь законом).

Термінові ренти. Якщо число рівних тимчасових інтервалів обмежено ануїтет називають терміновим.

Розглянемо n послідовних одиничних (один рік) проміжків часу (0,1), (1,2), … , (n – 1, n).

Серія з n виплат, розміри яких дорівнюють 1, здійснюваних наприкінці кожного проміжку, тобто в моменти 1, 2, .., n, називається рентою постнумерандо.

Серія з n виплат, розміри яких дорівнюють 1, що здійснюються на початку цих проміжків, тобто в моменти 0,1,2, …, n – 1, називається рентою пренумерандо.

Розходження між рентами пов'язане з вибором початку відліку.

Ануїтет постнумерандо. Пряма задача оцінки термінового ануїтету при заданих величинах регулярного надходження А и процентній ставці і припускають оцінку майбутньої вартості ануїтету.

На перше грошове надходження A_1 нараховуються складні відсотки на (n-1) період, і воно наприкінці n-го періоду стане рівним $A_1(1+i)^{n-1}$. На друге грошове надходження A_2 нараховуються складні відсотки за (n-2) періоду, і воно стане рівним $A_2(1+i)^{n-2}$ і т.д. На передостаннє грошове надходження A_{n-1} відсотки нараховуються за один період, і воно буде наприкінці n-го періоду дорівнювати $A_{n-1}(1+i)$. Природно, на A_n відсотки не нараховуються.

Нарощений грошовий потік має вигляд:

$$A\cdot(1+i)^{n-1}, A\cdot(1+i)^{n-2}, ..., A\cdot(1+i), A$$

Майбутня вартість має вигляд:

$$FV_{pst}^{a} = A\cdot\sum_{k=1}^{n}(1+i)^{n-k} = A\cdot b_{\overline{i,n}}\ . \tag{1.16}$$

Вхідний у формулу множник $b_{\overline{i,n}}$ називається мультиплікаційним множником для ануїтету, або коефіцієнтом нарощення ренти (ануїтету), і являє собою суму n перших членів геометричної прогресії, що начиняється з 1, і знаменником (1+ i).

Таким чином,

$$b_{\overline{n}} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{1.17}$$

де $b_{\overline{n}}$ - коефіцієнт нарощення ануїтету.

Економічний зміст коефіцієнта нарощення $b_{\overline{i,n}}$ міститься в наступному: він показує, чому буде дорівнювати сумарна величина термінового ануїтету в одну грошову одиницю (наприклад, гривня) до кінця строку його дії. Передбачається, що провадиться лише нарахування грошових сум, а їхнє вилучення може бути зроблене по закінченні терміну дії ануїтету.

Приклад 1. Клієнтові пропонують здати в оренду ділянку на три роки, вибравши один з варіантів оплати оренди:

а) 10 000 грн. наприкінці кожного року;

б) 35 000 грн. наприкінці 3-го періоду.

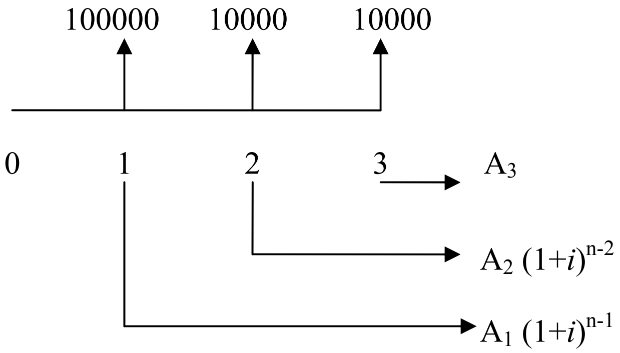
Банк пропонує 20% річних по вкладам.

Рішення.

а) ануїтет постнумерандо:

n = 3; A = 10 000 тис. грн.

$$FV_{pst}^{a} = A\cdot b_{\overline{3}} = 10000\cdot\frac{(1+0,2)^3 - 1}{0,2} = 36400 \quad грн.$$



A_1=10000 (1+0,2)^2=14 400 грн.

A_2=10000 (1+0,2)^1=12 000 грн.

A_3=10000 грн.

$\Sigma A_{1,2,3}$ = 36 400 грн.

Відповідь: клієнтові вигідніше одержувати щорічно наприкінці кожного року 10 000 грн.

Зворотна задача оцінки термінового ануїтету . Розраховується оцінка майбутніх грошових надходжень з позицій теперішнього моменту, під яким у цьому випадку розуміється момент часу, починаючи з якого відлічуються рівні тимчасові інтервали, що входять в ануїтет.

Наведений грошовий потік для вихідного потоку постнуменрандо має вигляд: $\frac{A_1}{1+i}, \frac{A_2}{(1+i)^2}, \dots, \frac{A_n}{(1+i)^n}$.

Теперішня вартість ренти постнумерандо (пренумерандо) в момент $t_0 = 0$ у фінансовій математиці позначається $a_{\overline{n|}}$ (відповідно пренумерандо $\ddot{a}_{\overline{n|}}$).

Множинник $a_{\overline{n|}}$ називається дисконтуючим множинником для ануїтету постнумерандо, або коефіцієнтом дисконтування ренти (ануїтету), і як сума членів геометричної прогресії дорівнює величині:

$$a_{\overline{n|}} = v + v^2 + \dots + v^n = \frac{v - v^{n+1}}{1-v} = \frac{1-v^n}{i} = \frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{i} \qquad (1.18)$$

де $a_{\overline{n|}}$ - коефіцієнт приведення ануїтету (сучасна вартість рент).

Оцінка теперішньої вартості термінового ануїтету постнумерандо PV^a_{pst} має вигляд:

$$PV^a_{pst} = A \cdot a_{\overline{n|}} \qquad (1.19)$$

Приклад 2. Клієнт укладає з банком договір про виплату йому протягом 6 років щорічної ренти в розмірі 9000грн. наприкінці кожного року. Яку суму необхідно йому внести на початку першого року, щоб забезпечити цю ренту, виходячи з річної процентної ставки 23 %.

Рішення.

$$V = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+0,23} = 0,8130$$

Теперішня вартість одиничної ренти:

$$a_{\overline{6|}} = \frac{1-(0,8130)^6}{0,23} = \frac{1-0,2887}{0,23} = 3,0926$$

$$PV^a_{pst} = A \cdot a_{\overline{6|}} = 9000 \cdot 3,0926 = 27833,4 \text{ грн.}$$

Відповідь: клієнтові необхідно внести на початку першого року 27833,4 грн., щоб щорічно на протязі 6 років одержувати ренту в розмірі 9000 грн.

Ануїтет пренумерандо. Оцінка майбутньої вартості ануїтету пренумерандо дорівнює:

$$FV^a_{pre} = A \cdot \ddot{b}_{\overline{n}} \tag{1.20}$$

$$\ddot{b}_{\overline{n}} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i) \tag{1.21}$$

Приклад 3. СК протягом 7 років на початку кожного року робить внески в банк у розмірі 50 000 грн. під 20% річних. Визначити величину накопиченої суми до кінця 7 року.

Рішення:

n = 7 лет; A = 50 000 грн.; i = 0,2.

1. Розрахуємо коефіцієнт нарощення ануїтету:

$$\ddot{b}_{\overline{7}} = \frac{(1+i)^7 - 1}{i} \cdot (1+i) = \frac{\left(1+0,2\right)^7}{0,2} \cdot \left(1+0,2\right) = \frac{3,5831-1}{0,2} \cdot 1,2 = 15,4986$$

2. Знайдемо величину накопиченої суми:

$$FV^a_{pre} = A \cdot \ddot{b}_{\overline{7}} = 50000 \cdot 15,4986 = 774930 \text{ грн.}$$

Відповідь: величина накопиченої суми складе 774930 грн.

Оцінка майбутніх грошових надходжень для ренти пренумерандо розраховується за формулою:

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = 1 + v + ... + v^{n-1} = \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{d} = \frac{1-\left(\dfrac{1}{1+i}\right)^n \cdot \left(1+i\right)}{i} \tag{1.22}$$

$$PV^a_{pre} = A \cdot \ddot{a}_{\overline{n|}} \tag{1.23}$$

де A – величина регулярного грошового надходження.

Приклад 4. Страхувальник уклав зі СК договір про виплату йому протягом 10 років щорічної ренти в розмірі 4000 грн. на початку кожного року. Яку суму йому необхідно внести як страховий внесок на початку першого року, щоб забезпечити цю ренту, виходячи з річної процентної ставки 15%?

Рішення:

1. Розрахуємо коефіцієнт приведення ануїтета:

$$\ddot{a}_{\overline{10|}} = \frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^{10}\cdot(1+i)}{i} = \frac{1-\left(\frac{1}{1+0,15}\right)^{10}}{0,15}\cdot(1+0,15) = \frac{1-0,2469}{0,15}\cdot 1,15 = 5,7737$$

2. Знайдемо величину страхового внеску:

$$PV^{a}_{pre} = A\cdot\ddot{a}_{\overline{10|}} = 4000\cdot 5,7737 = 23094,8\ грн.$$

1.8. Завдання для практичних (самостійних) занять

1. Страхова асоціація бере 1000 грн. у вигляді зворотного внеску й через 2 роки зобов'язується повернути 1330 грн. Необхідно написати рівняння вартості й знайти процентну ставку.

2. Фактична процентна ставка по банківському рахунку становить 4,5 % на рік. Знайдіть накопичену суму 5000 грн. за сім років.

3. Фактична процентна ставка становить на даний час 7 % за рік, але через два роки вона знизиться до 6% за рік. Знайдіть нагромадження внеску 4000 грн. за п'ять років.

4. Який внесок зробив вкладник, якщо після закінчення 5 років він при 3 % прибутковості перетворився в 638 грн.13 коп.?

5. Яку суму необхідно інвестувати, щоб одержати через 2 роки 1350 грн. при ставці 8 % (i=0,08), що конвертується (період нарахування відсотків) щокварталу.

6. Інвестор вкладає 1000 грн. на 5 років. Знайдіть акумульовану суму:
1) при річній ставці 10 %;
2) конвертації піврічний 10 %;
3) конвертації щомісячної 10 %.

7. Людина позичила 10000 грн. на 5 років під 25 % річних і хотіла би повернути його п'ятьома однаковими виплатами. Ці виплати вона хотіла би робити наприкінці кожного року. Визначити величину А кожної із цих виплат.

8. Визначити розмір внеску в пенсійний фонд, якщо через рік щорічно протягом 10 років повинна виплачуватися пенсія 800грн. Ефективна річна процентна ставка i= 15 %.

9. Банком видана позичка 1000 грн. на 5 років під i=20 % річних. Погашення позички здійснюється наприкінці кожного року однаковими виплатами. Визначити розмір виплат.

10. Клієнт купує 10-річну ренту з виплатою 600 грн. наприкінці кожного року. При цьому передбачається, що річна процентна ставка протягом найближчих 5 років становить 10 %, в інші роки 6%. Визначити вартість ренти.

11. Яким повинен бути внесок у пенсійний фонд, якщо пенсія буде виплачуватися 10 років по 1000 грн. щорічно. Перша виплата через рік. Ефективна ставка 25 % річних.

12. Надається позичка 1000 грн. на 5 років під 25 % річних, погашення в кінцю року. Знайдіть суму щорічної виплати (А).

13. Внесок у пенсійний фонд 5000 грн. Перша виплата через 3 роки. Потім пенсія виплачується протягом 10 років. Ефективна ставка 15 %. Визначите річну пенсію.

14. Експерти банку припускають, що протягом найближчих п'яти років ефективна річна процентна ставка буде дорівнює i_1 = 10 %, а протягом наступного п'ятиліття i_2 = 6 %. Людина купує десятилітню ренту з виплатою наприкінці кожного року 1000 грн. Знайти її вартість.

15. Страховою компанією здана ділянка в оренду на 8 років. Орендна плата буде здійснюватися щорічно за схемою постнумерандо на наступних умовах:

У перші 5 років – по 5000 грн.; у 3 роки, що залишилися по 6000 грн.

Потрібно оцінити приведену вартість цього договору, якщо процентна ставка, використовувана в розрахунках дорівнює 12 %.

16. Клієнт протягом 5 років на початку кожного року робить внесок у банк у розмірі 10 тис. грн. під 20 % річних. Визначити величину накопиченої суми до кінця 5 року.

17. Клієнт укладає з банком договір про виплату йому протягом 5 років щорічної ренти в розмірі 8 тис. грн. на початку кожного року. Яку суму необхідно йому внести на початку першого року, щоб забезпечити цю ренту, виходячи з річної процентної ставки 22 %.

Практичне заняття 2

РОЗРАХУНОК ТАРИФНИХ СТАВОК ПО РИЗИКОВИМ ВИДАМ СТРАХУВАННЯ

Ціль практичного заняття:

1. Отримати навички розрахунків тарифів у договорах майнового, особистого страхування й страхування відповідальності;
2. Знати поняття про основні показники страхової статистики.

Теоретичні відомості про склад та структуру тарифної ставки, про основні показники страхової статистики

2.1. Основи розрахунку тарифу

Тарифна ставка – ціна страхового ризику й інших витрат, адекватна грошовому вираженню зобов'язань страховика за укладеним договором страхування. Розрахунки тарифних ставок здійснюються за допомогою актуарних розрахунків. Сукупність тарифних ставок називається тарифом.

Тарифна ставка, за якою укладається договір страхування, називається брутто-ставкою. У свою чергу брутто-ставка складається із двох частин: нетто-ставки й навантаження.

Власне, нетто-ставка виражає ціну страхового ризику: пожежі, повені, вибухи й т.д. Навантаження покриває витрати страховика щодо організації та проведення страхування, а також містить елементи прибутку. В основі побудови нетто-ставки за будь-яким видом страхування лежить імовірність настання страхового випадку. Структура тарифної ставки наведена на рис. 2.1.

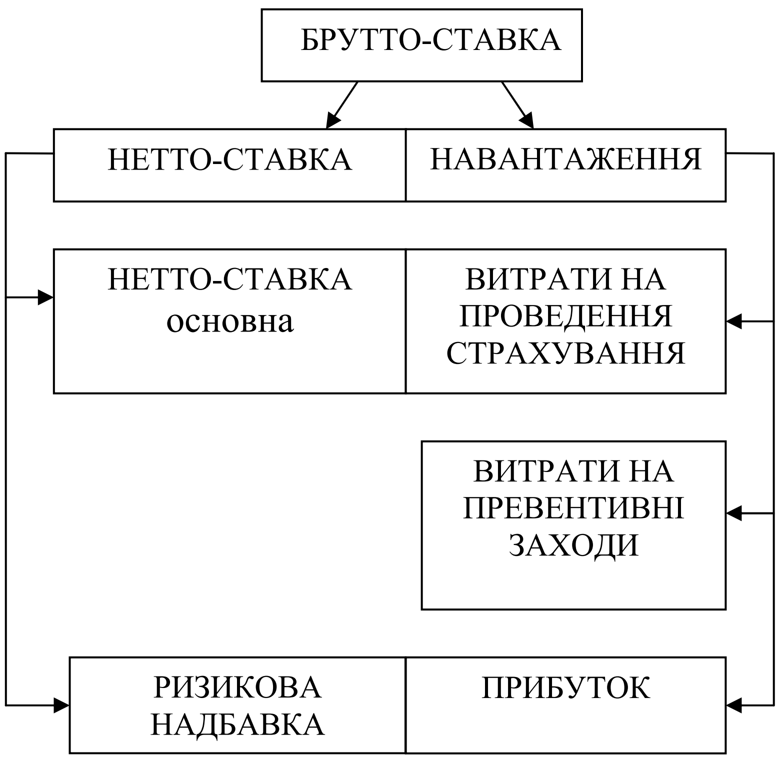


Рис. 2.1 Структура тарифної ставки для ризикових видів страхування

Нетто-ставка цілком призначена для створення фонду виплат страхувальникам. У зв'язку із цим вона повинна бути побудована таким чином, щоб забезпечити еквівалентність відносин між страховиком і страхувальником. Інакше кажучи, страхова компанія повинна зібрати стільки страхових премій, скільки має бути потім виплачено страхувальникам.

Однак при проведенні страхування сума виплачуваного страхового відшкодування постраждалим об'єктам, як правило, відхиляється від страхової суми по них. Причому, якщо за окремим договором виплата може бути тільки менше або дорівнюватися страховій сумі, то середня по групі об'єктів виплата на один договір може й перевищувати середню страхову суму. При побудові нетто-ставки враховується саме останній показник. При цих умовах розрахована нетто-ставка корегується на коефіцієнт, обумовлений співвідношенням середньої виплати до середньої страхової суми на один договір.

У результаті одержуємо наступну формулу для розрахунку нетто-ставки із кожної 100 грн. страхової суми:

$$T_н = P(A) \cdot K \cdot 100, \tag{2.1}$$

де $Т_н$ – тарифна нетто-ставка;
А – страховий випадок;
Р(А) – імовірність страхового випадку;
К – коефіцієнт відношення середньої виплати до середньої страхової суми на один договір.

Наведена формула дозволяє розмежувати поняття "імовірність страхового випадку" і "імовірність збитку". Імовірністю збитку називається добуток імовірності страхового випадку Р(А) на поправочний коефіцієнт К. Це більш загальний страховий термін. Формула може бути застосована як при удосконалюванні тарифних ставок по діючих видах страхування, так і при розрахунку ставок по видах, які вводяться.

Представимо цю формулу в розгорнутому виді. За визначенням маємо:

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{K_В}{K_Д}; \;\; K = \frac{C_В}{C_с}, \tag{2.2}$$

де $К_в$ – кількість виплат за той чи інший період (звичайно за рік);
$К_д$ – кількість укладених договорів у даному році;
$С_в$ – середня виплата на один договір;
$С_с$ – середня страхова сума на один договір.

В результаті ця формула приймає вигляд:

$$T = \frac{K_В \cdot C_В}{K_Д \cdot C_С} \cdot 100, \;\; \text{или} \;\; T = \frac{B}{C} \cdot 100, \tag{2.3}$$

де В – загальна сума виплат страхового відшкодування;
С – загальна страхова сума застрахованих об'єктів.

Остання формула є не що інше, як показник збитковості зі 100 грн. страхової суми. Це означає, що при вдосконалюванні тарифних ставок по діючих видах страхування основою уточнення нетто-ставок є збитковість зі 100 грн. страхової суми. Відношення кількості виплат $К_в$ до кількості укладених договорів К визначає частоту страхових випадків. Збитковість страхової суми може бути розрахована як по видах страхування в цілому, так і по окремих страхових ризиках. За цими даними визначається розмір нетто-ставки. Після її розрахунку встановлюється розмір сукупної тарифної ставки або брутто-ставки. Для обчислення останньої до нетто-ставки додають навантаження. Витрати на проведення страхування звичайно розраховуються на 100 грн. страхової суми, інші надбавки встановлюються у відсотках до брутто-ставки.

Припустимо, що нетто-ставка по страхуванню домашнього майна визначена в сумі 0,20 грн зі 100 грн. страхової суми, а статті навантаження складають: витрати на введення справи (включаючи оплату праці страхових агентів) – 0,06 грн.; витрати на проведення превентивних заходів – 4 % брутто-ставки; прибуток – 15 % брутто-ставки. Розмір сукупної брутто-ставки розраховується за формулою:

$$T_b = T_H + H_{c,} \tag{2.4}$$

де $Т_б$ – брутто-ставка;
$Т_н$ – нетто-ставка;
$Н_с$ – навантаження.

У цій формулі величини $Т_б$, $Т_н$, $Н_с$ вказуються в абсолютному розмірі, тобто у в гривнях зі 100 грн. страхової суми.

Оскільки ряд статей навантаження встановлюється у відсотках до брутто-ставки, остання на практиці визначається за формулою:

$$T_b = \frac{T_н + H_c}{100 - H_o} 100\% \tag{2.5}$$

де $Н_с$ – статті навантаження, які передбачаються в тарифі в гривнях зі 100 грн. страхової суми;
$Н_о$ – частка статей навантаження, що закладаються в тариф у відсотках до брутто-ставки.

Якщо всі елементи навантаження визначені у відсотках до брутто-ставки, то величина $Н_с = 0$. У цьому випадку ця формула спрощується й приймає вид

$$T_b = \frac{T_н}{100 - H_o} \cdot 100\% \tag{2.6}$$

Тепер визначимо брутто-ставку у нашому прикладі : $Т_н$ = 0,20грн; $Н_с$ = 0,06 грн; $Н_о$ =0,19.

За формулою (2.5) одержуємо:

$$T_b = \frac{(0,20 + 0,06)}{(100 - 19)} \cdot 100 = 0,32 \ грн.$$

2.2. Показники страхової статистики

У практиці актуарних розрахунків широко використовується страхова статистика. Вона являє собою систематизоване вивчення й узагальнення найбільш масових і типових страхових операцій на основі вироблених статистичною наукою методів обробки узагальнених підсумкових натуральних і вартісних показників, які характеризують страхову справу.

Основою розрахунку тарифних ставок є страхова статистика. У найбільш узагальненому виді страхову статистику можна звести до аналізу наступних абсолютних показників:

– число застрахованих об'єктів – n;
– число постраждалих об'єктів – m;
– число страхових подій – e;
– сума страхових платежів, що надійшли – Σp;
– сума виплаченого страхового відшкодування – ΣW;
– страхова сума застрахованих об'єктів – ΣS_n;
– страхова сума постраждалих об'єктів – ΣS_m.

Використовуючи абсолютні показники, розраховують наступні відносні показники:

1. Частота страхових подій – рівняється співвідношенню між числом страхових подій і числом застрахованих об'єктів, тобто частота страхових подій показує, скільки страхових випадків доводиться на один об'єкт страхування.

$$Ч_{СС} = \frac{e}{n}; \tag{2.7}$$

Зазначене співвідношення може бути представлено й кількісно як величина менша 1. Це означає, що одна страхова подія може викликати кілька страхових випадків.

2. Повнота знищення постраждалих об'єктів, або коефіцієнт ущербності – виражає співвідношення між сумою виплаченого страхового відшкодування й страховою сумою всіх постраждалих об'єктів страхування. Даний показник менше або дорівнює 1.

$$K_y = \frac{\sum W}{\sum S_m} \tag{2.8}$$

3. Коефіцієнт кумуляції ризику, або спустошливість страхової події (показує число об'єктів, що постраждали від однієї страхової події) – це відношення числа постраждалих об'єктів страхування до числа страхових подій

$$K_k = \frac{m}{e}; \quad K_k \geq 1. \tag{2.9}$$

4. Середня страхова сума на один об'єкт (договір) страхування – відношення загальної страхової суми всіх об'єктів страхування до числа всіх об'єктів страхування, тобто

$$\overline{S} = \frac{\sum S_n}{n}. \tag{2.10}$$

5. Середня страхова сума на один постраждалий об'єкт дорівнює страховій сумі всіх постраждалих об'єктів, розділеної на число цих об'єктів, тобто

$$\sum S_m / m. \tag{2.11}$$

6. Збитковість страхової суми дорівнює сумі виплаченого страхового відшкодування, розділеної на страхову суму всіх об'єктів страхування

$$x = \frac{\sum W}{\sum S_n}; \tag{2.12}$$

7. Норма збитковості – співвідношення суми виплаченого страхового відшкодування, вираженого у відсотках, до суми зібраних страхових платежів, тобто $\frac{\sum W}{\sum p} \cdot 100$.

Отриманий показник може бути менше, більше або дорівнює одиниці. Величина норми збитковості свідчить про фінансову стабільність даного виду страхування.

8. Частота збитку (імовірність настання страхового випадку). Обчислюється як добуток частоти страхових випадків і спустошливості, тобто

$$d_y = \frac{e}{n} \cdot \frac{m}{e} = \frac{m}{n}. \tag{2.13}$$

Даний показник виражає частоту настання страхового випадку й позначається символом d_y. Частота збитку завжди менше 1. При показнику частоти, рівному 1, достовірна вірогідність настання даної події для всіх об'єктів.

9. Вага збитку. При проведенні деяких видів страхування можливе настання страхового випадку, що заподіює збиток, рівний дійсної вартості застрахованого майна. Такий збиток прийнятий називати повним збитком.

Однак у більшості видів майнового страхування збиток може бути менше дійсної вартості майна, що не знищено, а тільки ушкоджено в результаті страхового випадку. Такий збиток прийнятий називати частковим збитком.

Поняття ваги збитку можна виразити математично як добуток коефіцієнту збитковості $\frac{\sum W}{\sum S_m}$ і відношення середніх страхових сум $\frac{\sum S_m}{m} : \frac{\sum S_n}{n}$, або $g = \frac{\sum W}{\sum S_n} : \frac{m}{n}$.

На рівень збитковості страхової суми впливають два показники:

1) імовірність настання страхового випадку;

2) коефіцієнт ваги збитку.

Збитковість страхової суми є основою розрахунку основної частини нетто-ставки.

2.3. Основні принципи розрахунку страхової премії

2.3.1. Основна частина нетто-ставки

Розглянемо найбільш просту ситуацію, коли в результаті страхового випадку відбувається повне знищення застрахованого об'єкта. Якщо страхова сума дорівнює S, то сумарна величина страхового відшкодування складе:

$$W = n \cdot S \,. \tag{2.14}$$

Для забезпечення виплати страхового відшкодування величина сумарної страхової нетто-премії повинна рівнятися очікуваній величині страхових виплат. Виходячи із цього величина страхової нетто-премії, отриманої за один застрахований об'єкт, тобто величина страхового нетто-внеску, складе:

$$P_{n0} = \frac{W}{N} = p \cdot S \tag{2.15}$$

де W – сумарна величина страхового відшкодування;
n – число об'єктів страхування;
S – страхова сума об'єкта;
N – число укладених договорів страхування;
p – імовірність настання страхового випадку.

Індекс «0» означає, що це тільки основна частина нетто-внеску. Звичайно в страховій теорії розраховують величину страхового внеску з одиниці страхової суми (S=1), названу тарифною ставкою або просто тарифом. Для основної частини тарифної нетто-ставки одержимо

$$T_{n0} = \frac{P_{n0}}{S} = \frac{p \cdot S}{S} = p \tag{2.16}$$

Приклад. Визначити основну частину тарифної нетто-ставки і нетто-внеску при страхуванні на випадок смерті в результаті нещасного випадку. Імовірність страхового випадку протягом року становить p = 0,002, страхова сума S = 10тис.грн.

Основна частина тарифної нетто-ставки і нетто-внеску складе:

$T_{n0} = p = 0{,}002 \quad (0{,}2\%)$; $P_{n0} = pS = 20\ грн.$

2.3.2. Частковий збиток

Повне знищення застрахованого об'єкта в результаті страхового випадку скоріше виняток, ніж правило. Для обліку часткового ушкодження застрахованого об'єкта вводиться поняття ступеня знищення, або вага збитку для застрахованого об'єкта. Величина страхового відшкодування W у цьому випадку менше страхової суми, а їхнє відношення і є коефіцієнтом ваги збитку $b = W / S$.

З урахуванням неповного знищення застрахованого об'єкта в результаті страхового випадку формули для основної частини тарифної нетто-ставки й страхового внеску приймуть вид:

$$P_{n0} = \frac{W}{N} = \frac{\overline{B}n}{N} = p\overline{B};$$

$$T_{n0} = \frac{P_{n0}}{S} = p\overline{b} \qquad (2.17)$$

Приклад. Визначити основну частину тарифної нетто-ставки при страхуванні від вогню, якщо ймовірність страхового випадку дорівнює р = 0,013, середнє значення ступеня знищення об'єкта дорівнює $\overline{b}$=0,5.

Відповідно до формули 2.17, основна частина тарифної нетто-ставки складе

$T_{n0} = 0{,}013 \cdot 0{,}5 = 0{,}0065 \quad (0{,}65\%)$.

2.3.3. Збитковість

При аналізі звітної статистичної інформації широко використовується поняття збитковості страхової суми, яка дорівнює відношенню сумарного відшкодування по страхових випадках, що відбулися у звітному періоді, до сукупної страхової суми застрахованих об'єктів:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} B_i}{\sum_{k=1}^{N} S_k} = \frac{n\overline{B}}{N\overline{S}} = p\overline{b}, \qquad (2.18)$$

де $\overline{B} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} B_i$;

$\overline{S} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} S_k$;

$\overline{b} = \frac{\overline{B}}{\overline{S}}$ відповідно середнє значення величини страхового відшкодування, страхової суми й коефіцієнта ваги збитку.

2.3.4. Верхня межа очікуваних збитків і ризикова надбавка

У ризикових видах страхування ймовірність того, що фактичний рівень виплат перевищить очікуване середнє значення, становить приблизно 0,5, і цією обставиною не можна зневажити. Відхилення фактичного рівня виплат від очікуваного значення в більшу сторону можна визначити як ризик. Чим ширше діапазон можливих відхилень, тим вище ризик.

Невизначеність кінцевого результату ставить досить складне завдання для аналітика. З одного боку, розмір страхової премії повинен бути достатнім для забезпечення страхових виплат навіть у самій несприятливій ситуації, інакше страховика чекає розорення. З іншого боку, можливо, хоча й малоймовірно, що в самому несприятливому випадку сумарна страхова виплата виявиться рівній сукупній страховій сумі всіх застрахованих об'єктів. Якщо збирати страхову премію в такому розмірі, то страхування втрачає зміст: внесок дорівнює страхової вартості об'єкта, а страховий випадок може й не відбутися. Звідси ясно, що реальний розмір страхової премії, що збирається, не повинен помітно перевищувати середній рівень виплат, не може зі стовідсотковою гарантією забезпечити перевищення внесків над виплатами в будь-якій ситуації. Мова може йти про 95%-й гарантії, 90%-й гарантії й т.д., тобто ризик виявиться в збитку з імовірністю 5 %, 10 % і т.д.

Кількісна оцінка ризику можлива тільки тоді, коли відомий розподіл ймовірностей для величини сумарної страхової виплати, тобто ймовірність реалізації кожного можливого її значення. Принцип визначення верхньої суми страхових виплат із заданим рівнем надійності g для конкретного "профілю ризику" зрозумілий з рис. 2.2. На ньому зображена залежність кумулятивної, або накопиченої ймовірності від значення верхньої границі сумарної страхової виплати.

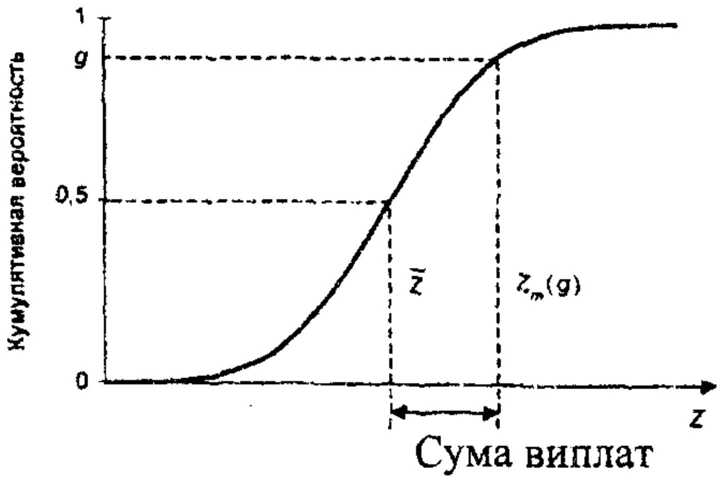


Рис. 2.2 Кумулятивна ймовірність суми страхових виплат

Вибираючи фіксоване значення верхньої границі на осі абсцис, ми одержуємо із графіка ймовірність того, що фактичне значення суми виплат виявиться менше цього значення. Чим вище вибране значення W_m тим вище ймовірність того, що фактична сума виплат виявиться менше W_m. Навпаки, якщо ми задаємо рівень надійності оцінки верхньої границі g, те, опускаючи на вісь абсцис перпендикуляр із крапки перетинання заданого рівня ординати із графіком, одержуємо гарантоване значення верхньої границі $W_m(g)$. Часто величину g називають ще рівнем гарантії або безпеки, просто гарантією безпеки.

Чим вище рівень g, тим більше високе значення $W_m(g)$ варто вибрати, щоб забезпечити з імовірністю g не перевищення цього значення фактичною сумою виплат.

Різниця між рівнем верхньої границі й середнім значенням суми страхових виплат дає діапазон можливих (з імовірністю g) несприятливих відхилень рівня страхових виплат. Звичайно ця величина становить одне-три середньоквадратичних відхилення σW величини W від її середнього значення. Тому цю різницю звичайно записують у вигляді:

$$W_m(g) - \overline{W} = \alpha(g)\,\sigma W \qquad (2.19)$$

де коефіцієнт α(g) залежно від рівня гарантії безпеки g приймає значення від 1 до 3.

Значення α (g) для заданих значень g розраховуються на підставі таблиць вибраного закону розподілу.

Величина сумарної страхової премії повинна бути достатньої для забезпечення страхових виплат, тому її дорівнюють до максимальної величини очікуваної суми страхових виплат $W_m(g)$. Мова, звичайно, іде про нетто-премію.

Страховий внесок - нетто-внесок або страхова нетто-премія, стягнута з одного страхувальника, дорівнює сумарної нетто-премії, діленої на число договорів страхування:

$$P_n = W_m / N = \overline{W}(1 + \alpha\sigma W / \overline{W}) / N = P_{n0}(1 + \alpha VW) \qquad (2.20)$$

де $VW = \sigma W / \overline{W}$ – коефіцієнт варіації розміру сумарного страхового відшкодування.

Прийнято розділяти нетто-премію на дві частини: основну нетто-премію й ризикову надбавку, призначену для компенсації несприятливих (позитивних) флуктуацій величини рівня страхових виплат. Основній нетто-премії відповідає перший доданок в (2.20), ризикованій надбавці - другий:

$$Pn = Pn_0 + Pn_r;\; Pn_0 = \overline{W} / N;\; Pn_r = \alpha Pn_0 VW \qquad (2.21)$$

Аналогічно для тарифної нетто-ставки

$$Tn = Tn_0 + Tn_r;\;\; Tn_0 = \overline{W} / SN;\; Tn_r = \alpha Tn_0 VW \qquad (2.22)$$

Для розрахунку ризикової надбавки необхідно розрахувати коефіцієнт варіації сумарного позову.

$$VW = \frac{1 + Vb^2}{Np} = \frac{1 + Vb^2}{\overline{n}} \qquad (2.23)$$

$\overline{n}$ – очікуване середнє число страхових случав за рік;

Vb – коефіцієнт варіації ступеня збитку;

$$Vb = \delta_b / \overline{b} \qquad (2.24)$$

δ_b – середньоквадратичне відхилення;

$\overline{b}$ – середнє значення ступеня знищення об'єкта.

2.4. Розрахунок тарифних ставок за ризиковими видами страхування

При стійкості тимчасового ряду показників збитковості з 100 грн. страхової суми.

Нетто-ставка призначена для забезпечення виплат страхувальникам страхового відшкодування й страхових сум. По ризиковим видах страхування вона складається із двох частин: основної частини й ризикової надбавки.

При стійкості тимчасового ряду показників збитковості за останні 5 років основна частина нетто-ставки розраховується як середня збитковість за п'ять років і забезпечує виплати у звичайному для останніх п'яти років розмірі. Ряд показників збитковості вважається постійним, якщо в ньому відсутня виражена тенденція до збільшення (зниження) збитковості.

Ризикова надбавка є гарантією забезпечення виплат страхувальникам у кожному конкретному році. Необхідність включення ризикової надбавки в тарифну нетто-ставку пояснюється тим, що в несприятливі роки основної частини нетто-ставки буде недостатньо для виконання страховими компаніями своїх зобов'язань, а ризикова надбавка створює певний запас міцності для страховика. У сприятливі роки невикористана на виплати ризикова надбавка направляється в запасний фонд.

Визначення ризикованої надбавки провадиться на основі ряду показників збитковості з 100 грн. страхової суми за останні 5 років.

Статистичним аналогом ризикової надбавки є середнєквадратичне відхилення δ, що розраховується в такому порядку:

1. Знаходиться середня арифметична збитковість за останні 5 років, що становить основну частину нетто-ставки по формулі

$$Tn_0 = \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}, \tag{2.25}$$

де x – середня арифметична збитковість;
x_i – показник збитковості в конкретному і-том році;
n – число років у тимчасовому ряді показників збитковості (5 років);
∑ – знак суми;
і – І, 2, ..., т – роки.

2. Ризикова надбавка визначається по формулі

$$Tn_r = \alpha Tn_0 VW = \alpha Tn_0 Vx \tag{2.26}$$

3. Визначається середньоквадратичне відхилення:

$$\delta_x = \sqrt{\frac{\sum \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}}, \tag{2.27}$$

4. Коефіцієнт варіації визначається по формулі:

$$Vx = \frac{\delta_x}{\bar{x}} \tag{2.28}$$

5. Нетто-ставка:

$$Tn = Tn_0 + Tn_r \tag{2.29}$$

Методика розрахунку нетто-ставки по масових ризикових видах страхування

Друга методика застосовується при наступних умовах:

1) існує статистика або якась інша інформація з розглянутого виду страхування, що дозволяє оцінити наступні величини:

p – імовірність настання страхового випадку по одному договору страхування;

$\overline{C}$ – середня страхова сума по одному договору страхування;

$\overline{B}$ – середнє відшкодування по одному договору страхування при настанні страхового випадку;

2) передбачається, що не буде спустошливих подій, коли одна подія спричиняє кілька страхових випадків;

3) розрахунок тарифів провадиться при заздалегідь відомій кількості договорів $n\,(K_Д)$, які передбачається укласти зі страхувальниками.

Нетто-ставка (Тн) складається із двох частин – основної частини (То) і ризикової надбавки (Δ):

$$T_H = T_0 + \Delta \tag{2.30}$$

Основою розрахунку основної частини нетто-ставки є збитковість страхової суми, що залежить від імовірності настання страхового випадку ($p = \frac{m}{n}$, де m – число постраждалих об'єктів) і коефіцієнта ваги збитку ($K_{ТУ} = \frac{\sum B}{m} : \frac{\sum C}{n}$)

Визначається

$$T_0 = \frac{\overline{B}}{\overline{C}} \cdot p \cdot 100 \tag{2.31}$$

Ризикова надбавка вводиться для того, щоб урахувати несприятливі коливання показника збитковості страхової суми. Можливі два варіанти розрахунку ризикової надбавки:

1. При наявності статистики про страхові відшкодування й можливість обчислення середньоквадратичного відхилення відшкодувань при настанні страхових випадків (δ_B)ризикова надбавка розраховується для кожного ризику

$$\Delta = T_0 \cdot \alpha(\gamma)\sqrt{\frac{1 - p + \left(\frac{\delta_B}{\overline{B}}\right)^2}{n \cdot p}} \tag{2.32}$$

2. При відсутності даних про середньоквадратичне відхилення страхового відшкодування ризикова надбавка визначається:

$$\Delta = 1{,}2T_0 \cdot \alpha(\gamma)\sqrt{\frac{1 - p}{n \cdot p}} \tag{2.33}$$

де α (γ) – коефіцієнт, що залежить від гарантії безпеки γ. Його значення береться з табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Значення коефіцієнта α, що залежить від гарантії безпеки γ

γ	0,84	0,90	0,93	0,95	0,98	0,99	0,9986
α	1,0	1,3	1,48	1,645	2,0	2,33	3,0

2.5. Визначення тарифних ставок для нових видів страхування

За діючими видами страхування основою побудови нетто-ставки є збитковість із 100 грн. страхової суми за ряд років. По нових видах страхування цей показник відсутній.

Нетто-ставка по нових видах страхування, як і по діючої, складається з основної частини й ризикової надбавки.

Основна частина нетто-ставки може бути розрахована виходячи з імовірності настання страхового випадку і ймовірного відношення середньої майбутньої виплати до середньої очікуваної страхової суми, а ризикова надбавка – з використанням коефіцієнта вибірковості.

Поява нового виду страхування завжди пов'язано з наявністю страхового інтересу в певної категорії потенційних страхувальників. Це означає, що, з одного боку, є об'єкти страхування, а з іншого боку – страхові ризики, яким ці об'єкти піддаються з тої або інший частотою.

Передбачувана частота страхового випадку по новому виді страхування - це відношення числа потенційних страхових випадків по об'єктах страхування, які піддаються цьому або іншому набору ризиків (окремому ризику), які становлять обсяг відповідальності по цьому виді страхування, до загального числа потенційних об'єктів страхування:

$$Ч_{пр} = \frac{К_с}{К_о}, \tag{2.34}$$

де $Ч_{пр}$ – передбачувана частота страхового випадку по новому виду страхування;

$К_с$ – кількість потенційних страхових випадків (виплат страхового відшкодування або страхових сум) за певний період;

$К_о$ – загальне число потенційних об'єктів страхування.

При побудові основної частини тарифної нетто-ставки по новому виду страхування враховується також імовірне відношення середньої майбутньої виплати до середньої очікуваної страхової суми або поправочний коефіцієнт:

$$К_{пр} = \frac{С_в}{С_с}, \tag{2.35}$$

де $С_в$ – передбачувана середня виплата на один договір (об'єкт) страхування;

$С_с$ – передбачувана середня страхова сума на один договір (об'єкт) страхування.

Величина ризикової надбавки по новому виду страхування може бути розрахована із застосуванням коефіцієнта вибірковості, що дозволяє врахувати вплив рівня розвитку на рівень збитковості страхової суми. Цей вплив полягає в тому, що зі збільшенням рівня розвитку рівень збитковості відносно знижується, оскільки в страхування входять нові категорії страхувальників, які менше підпадають під страховий ризик.

Коефіцієнт вибірковості розраховується по формулі:

$$K_{виб} = \frac{1 - K_o \cdot \left(1 - K_p\right)}{K_p}, \tag{2.36}$$

де K_p – коефіцієнт передбачуваного рівня розвитку страхування;
K_o – коефіцієнт відставання відносного зниження (збільшення) суми виплат у порівнянні зі зниженням (збільшенням) рівня розвитку страхування.

Коефіцієнт передбачуваного рівня розвитку страхування – це передбачений рівень розвитку страхування у відсотках, розділений на 100, тобто $K_p = \frac{У_p}{100}$, де $У_p$ – передбачуваний рівень розвитку страхування у відсотках. Коефіцієнт розвитку не може бути меншим нуля й більшим чим 1. Інакше кажучи, виконується нерівність: О < K_p < 1 . Чим ближче K_p до нуля, тим більше вибірковість страхування; чим ближче K_p до 1 , тим вибірковість менше.

Для коефіцієнта відставання також виконується зазначена нерівність, тобто $0 < K_o < 1$. Коефіцієнт відставання показує, на скільки відсотків приблизно зменшаться виплати страхувальникам при зниженні рівня розвитку, скажемо, на 10 %.

Наприклад, якщо $К_о$ = 0,7, то це означає, що зниження рівня розвитку страхування на 10 % приводить до зменшення суми проведених виплат лише на 7 %, і таким чином, має місце відставання відносного зниження суми виплат у порівнянні зі зниженням рівня розвитку. Чим ближче K_o до нуля, тим більше вибірковість страхування, і навпаки, чим ближче K_o до 1, тим вибірковість страхування менше.

Тарифна нетто-ставка ($T_н$) по новому виду страхування визначається множенням трьох розглянутих вище показників: імовірної частоти страхового випадку ($Ч_{пр}$), передбаченого відношення середньої майбутньої виплати до середньої очікуваної страхової суми ($K_{пр}$) і коефіцієнта вибірковості ($K_{выб}$). Крім того, оскільки тарифна ставка розраховується, як правило, зі 100 грн. страхової суми, зазначений добуток збільшується на 100. Таким чином,

$$T_н = Ч_{пр} \cdot K_{пр} \cdot K_{выб} \cdot 100 \tag{2.37}$$

2.6. Завдання для практичних (самостійних) занять

1. Розрахуйте відносні показники по страховій компанії К, виходячи з наступних абсолютних показників: число застрахованих об'єктів – 2100, число страхових подій – 86, число постраждалих об'єктів – 104.

Страхова сума всіх застрахованих об'єктів – 3150 тис. грн.

Страхова сума постраждалих об'єктів – 124,8 тис. грн. Страхове відшкодування – 42,64 тис. грн. Страхова премія – 47,25 тис. грн.

Визначити: коефіцієнт ущербності, коефіцієнт кумуляції ризику, імовірність настання страхового випадку, коефіцієнт ваги збитку, викликаного страховим випадком, збитковість страхової суми.

2. Маємо дані страхових організацій району про добровільне страхування громадян.

Страхове поле (N_{max}) = 256 250. Кількість укладених договорів (кількість застрахованих об'єктів) (n) – 102 500.

Сума застрахованого майна (ΣSn), тис. грн. – 198 350.

Надійшло страхових внесків (Σp), тис. грн. – 2800.

Страхові виплати (ΣW), тис. грн. – 1680.

Кількість об'єктів, які постраждали (m), – 2050.

Визначити: ступінь охоплення страхового поля; частоту страхових випадків (частоту збитку); середню страхову суму; середню суму страхового внеску; середню суму виплат; коефіцієнт виплат (норма збитковості); збитковість страхової суми.

3. Загальна страхова сума по страхуванню будов у господарствах громадян склала 56000000 грн., страхове відшкодування по цих об'єктах виплачено в розмірі 235200 грн. Який розмір збитковості страхової суми?

4. Застраховано 180000 дворів (господарств), у яких відбулося 594 пожежі. Визначите ймовірність виникнення пожеж.

5. Визначите відношення ризиків (відношення середньої страхової суми об'єкта, що горів, до середньої страхової суми застрахованого об'єкта) на підставі таких даних: число застрахованих дворів – 220000, страхова сума – 990000000 грн., число дворів, які горіли, – 1100, страхова сума дворів, які горіли й ушкоджені пожежею, – 4510000 грн.

6. Визначити тарифну нетто-ставку й нетто-внесок при страхуванні на випадок смерті в результаті нещасного випадку. Імовірність страхового випадку протягом року р = 0,002, страхова сума S = 10000 грн., кількість застрахованих об'єктів n = 3000, рівень гарантії безпеки прийняти рівним $\gamma = 0{,}95$.

7. Визначити тарифну нетто-ставку при страхування від вогню, якщо імовірність страхового випадку р = 0,013, кількість застрахованих об'єктів n = 500, середнє значення ступеня знищення об'єкта $\overline{b} = 0{,}5$, середньоквадратичне відхилення від середнього значення дорівнює $\sigma b = 0{,}2$. Рівень гарантії безпеки прийняти рівним $\gamma = 0{,}9$.

8. Розрахувати тарифну нетто-ставку по страхуванню від вогню майна підприємств. Вихідні дані для розрахунку – значення збитковості по страхуванню від вогню майна підприємств за останні 5 років.

Роки	1	2	3	4	5
Збитковість, %	0,605	0,706	0,725	0,715	0,694

9. Існують такі дані по страховій компанії за чотири квартали звітного року, тис. грн.

Квартал	Страхова сума	Сума виплат
1	32000	150
2	32890	135
3	34400	148
4	35000	142

У звітному році умови страхування були стабільними, величина навантаження в тарифній ставці – 25%. З імовірністю 0,95 розрахуйте нетто-ставку й брутто-ставку.

10. Існують такі дані по страховій компанії за три роки, тис. грн.:

Роки	Страхова сума	Сума виплат
1	66440	350
2	48890	285
3	56400	148

У звітному році умови страхування були стабільними, величина навантаження в тарифній ставці – 30%. Розрахуйте нетто-ставку й брутто-ставку.

11. Страховик проводить страхування від нещасних випадків. Імовірність настання страхового випадку – 0,05. Середня страхова сума – 80 тис. грн. Середнє страхове відшкодування – 30 тис. грн. Кількість укладених договорів – 6000. Частка навантаження в тарифній ставці – 24%.

Середньоквадратичне відхилення – 8 тис. грн. Визначите тарифну ставку при гарантії безпеки 0,95.

12. Страховик проводить страхування від нещасних випадків. Імовірність настання страхового випадку 0,04. Середня страхова сума – 110 тис. грн., середнє страхове відшкодування – 40 тис. грн. Кількість укладених договорів – 6800. Частка навантаження в тарифній ставці – 22 %, середнє квадратичне відхилення – 10 тис. грн. Визначити тарифну ставку при гарантії безпеки 0,95 (%).

13. Розрахуйте страхові тарифи по добровільному страхуванню туристів від нещасних випадків. За даними статистики щороку по туристичних путівках відпочиває приблизно 40 тис. чоловік. У середньому за рік травмується 1000 чіл. Відношення середньої передбачуваної виплати до середньої очікуваної страхової суми становить 0,3. Передбачається, що страхуванням буде охоплено 30 % туристів, причому коефіцієнт відставання береться за 0,9. Розрахуйте нетто-ставку.

14. Розробіть страхові тарифи по добровільному страхуванню автомобілів від ДТП. По даним статистики кількість автомобілів становить приблизно 1500 тис. У середньому за рік відбувається 30000 ДТП. Відношення середньої очікуваної виплати до середньої очікуваної страхової суми становить 0,7. Очікується, що страхуванням буде охоплено 30 % автомобілів, причому коефіцієнт відставання приймається рівним 0,6. Розрахуйте нетто-ставку.

Практичне заняття 3

ОСНОВИ ТАРИФНИХ РОЗРАХУНКІВ СТРАХУВАННЯ ЖИТТЯ

Ціль практичного заняття:

1. Мати уявлення:

– про базові поняття теорії страхування життя (страхування життя, страхування на чисте дожиття, різні види рент);

– про види довгострокового страхування життя;

– про принцип рівності страхових зобов'язань страховика й страхувальника на момент укладання договору.

2. Знати:

– актуарну сучасну вартість різних видів страхування;

– розрахункові формули для премій різних видів страхування.

3. Уміти:

– оцінювати ймовірність дожити до певного віку;

– оцінювати ймовірність не дожити до певного віку;

– використовувати таблиці тривалості життя для розрахунку основних характеристик тривалості життя;

– розраховувати величину внесків;

– обчислювати разові нетто-премії для різних видів страхування життя.

Теоретичні відомості про основи тарифних розрахунків по страхуванню життя, структуру таблиць смертності

3.1. Особливості побудови тарифної ставки по страхуванню життя і її структура

Побудова тарифів по страхуванню життя має свої особливості:

– розрахунки ведуться з використанням демографічної статистики й теорії імовірності;

– при розрахунках застосовуються способи довгострокових фінансових розрахунків;

– тарифні нетто-ставки складаються з декількох частин, кожна з яких покликана сформувати страховий фонд по одному з видів страхової відповідальності, який включений в умови страхування.

Тарифна ставка визначає, скільки грошей кожний зі страхувальників повинен внести в загальний страховий фонд з одиниці страхової суми. Тому тарифи повинні бути розраховані так, щоб сума зібраних внесків виявилася достатньою для виплат, передбачених умовами страхування. Таким чином, тарифна ставка – це ціна послуги, що надається страховиком населенню, тобто своєрідна ціна страхового захисту. Від чого ж залежать її розміри, як установити ціну на той або інший вид страхування життя?

Повна тарифна ставка називається брутто-ставкою. Вона складається з нетто-ставки й навантаження. Завдання нетто-ставки – забезпечити виплати страхових сум, тобто виконання фінансових зобов'язань страховика по договорах страхування. Навантаження призначене компенсувати витрати на проведення страхових операцій.

Своєрідність операцій страхування життя проявляється при побудові нетто-ставки. Умови страхування життя звичайно передбачають виплати у зв'язку з дожиттям застрахованого до закінчення терміну дії договору страхування або у випадку його смерті протягом цього строку. Крім того, передбачаються виплати у зв'язку із втратою здоров'я внаслідок травми й деяких хвороб.

Таким чином, для розрахунку обсягу страхового фонду потрібно мати відомості про те, скільки осіб із числа застрахованих доживе до закінчення терміну дії їхніх договорів страхування й скільки з них щороку може вмерти; у скількох з них і в якому ступені настане втрата здоров'я. Кількість виплат, помножена на відповідні страхові суми, дозволить визначити розміри майбутніх виплат, тобто з'явиться можливість довідатися, у яких розмірах потрібно буде акумулювати страховий фонд.

Тривалість життя окремих людей коливається в широких границях. Вона відноситься до категорії випадкових величин, кількісне значення яких залежить від багатьох факторів, настільки віддалених і складних, що, здавалося б, їх неможливо виявити й вивчити. Теорія імовірності й статистика досліджують випадкові явища, які мають масовий характер, у тому числі смертність населення. Установлено, що демографічний процес зміни поколінь, що виражається в зміні рівня повікової смертності, підлеглий закону більших чисел, настільки одноманітному у своїх проявах і настільки достовірному в результатах, що він може бути основою фінансових розрахунків у страхуванні.

Демографічною статистикою виявлена й виражена за допомогою математичних формул залежність смертності від віку людей. Розроблено спеціальну методику складання так званих таблиць смертності, де на конкретних цифрах показується послідовна зміна смертності слідом за віком. Цими таблицями страхові компанії користуються для розрахунку тарифів.

Крім закономірностей, пов'язаних із процесом дожиття й смертності, при побудові тарифів враховується довгостроковий характер операцій страхування життя, оскільки ці договори укладаються на тривалі строки від п’яти і більше років. Протягом усього часу їхньої дії (або на самому початку строку страхування при одноразовій сплаті) страхові компанії одержують внески. Виплати ж страхових сум ведуться протягом строку страхування або після закінчення певного періоду від початку дії договору, якщо настане смерть застрахованого або він втратить здоров'я.

Тимчасово вільні кошти акумулюються страховою компанією й використовуються як кредитні ресурси. За користування ними платиться позичковий відсоток. Але якщо при ощадній операції дохід від відсотків приєднується до внеску, то в страхуванні на суму цього доходу заздалегідь зменшуються (дисконтуються) внески страхувальника, які підлягають сплаті. Для того щоб заздалегідь понизити тарифні ставки на той дохід, що буде утворюватися протягом ряду років, використовуються методи теорії довгострокових фінансових розрахунків.

Тарифні ставки в страхуванні життя складаються з декількох частин. Візьмемо для приклада змішане страхування життя. У ньому поєднуються кілька видів страхування, які могли б бути й самостійними:

– страхування на дожиття;

– страхування на випадок смерті;

– страхування від нещасних випадків.

По кожному з них за допомогою тарифу створюється страховий фонд, тому тарифна ставка в змішаному страхуванні складається із трьох частин, які входять у нетто-ставку, і четвертої частини – навантаження.

Аналогічно складається структура тарифних ставок і по інших видах страхування життя.

Структура тарифної ставки наведена на рис. 3.1.

Рис. 3.1 Структура тарифної ставки змішаного страхування життя

3.2. Таблиці смертності

Планування і проведення фінансових операцій по страхуванню життя засновані на стійкій закономірності в настанні смерті в рамках різних груп населення. Характер вимирання певної сукупності людей залежить від різних факторів: національних, природно-кліматичних, екологічних, соціально-економічних, професійних і т.п. Найбільш сильна кореляція спостерігається між смертністю й віком людини. Залежність смертності від віку і є основою для науково обґрунтованої організації довгострокового страхування життя.

Стандартна таблиця смертності являє собою набір стовпців, які відповідають різним демографічним показникам. У кожному рядку таблиці наведені значення цих показників для певного вікового інтервалу. У повних таблицях смертності – показники представлені по віках з інтервалом в 1 рік, у коротких таблицях – з інтервалом в 5 років. Таблиця смертності представлена в додатку1. У першому стовпці таблиці наведене число людей l_x, що доживають до віку x з числа народжених l_0. Величину l_0 називають коренем таблиці смертності; значення її звичайно рівняється 1 млн., 100 тис. або 10 тис., але може бути й довільним числом. Останній рядок таблиці смертності відповідає граничному віку ω. Припускається, що кількість людей у віці x > ω рівняється нулю: $l_{\omega+1} = 0$.

Наступний стовпець таблиці смертності дає число померлих у віці x $d_x = l_x - l_{x+1}$.

У третьому стовпці таблиці наведені значення ймовірності померти протягом інтервалу таблиці для людини у віці x $q_x = d_x / l_x$.

Поряд з цими параметрами, які приводяться в таблиці смертності, часто використовується ще трохи пов'язаних з ними величин. З імовірністю вмерти тісно зв'язана ймовірність дожити до віку x+1 рік для людини у віці x, тобто ймовірність прожити ще один рік: $p_x = 1 - q_x = l_{x+1} / l_x$.

Імовірність прожити ще n років ${}_n p_x = l_{x+n} / l_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+n-1}$

Імовірність померти протягом наступних n років

$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x = (l_x - l_{x+n}) / l_x .$$

Статистичні дослідження смертності населення показали, що смертність серед чоловіків вище, ніж серед жінок, внаслідок чого в останніх більше висока тривалість життя. У зв'язку зі значними відмінностями рівня смертності серед чоловіків і жінок, особливо в літньому віці, українські страхові компанії, як правило, установлюють різні тарифні ставки для чоловіків і жінок, використовуючи відповідні таблиці смертності. У багатьох же розвинених країнах використовують єдину таблицю смертності для чоловіків і жінок і відповідно єдину систему тарифних ставок.

В актуарній математиці велике значення має ще один демографічний фактор – середня тривалість життя, що залишилася. При практичних розрахунках звичайно використовують наближене значення цієї величини, що позначають e_x. Розглянемо схему розрахунку цього показника. Число осіб, що не проживуть і року, дорівнює d_x, число тих, що прожили 1 повний рік буде рівняти d_{x+1}. Що прожили 2 повні роки – d_{x+2}, що прожили k повного років – d_{x+k}. У розрахунок приймається тільки повне число прожитого років, що давало точний результат, якби всі смерті осіб у віці x відбувалися на початку року. Повне число осіб, які доживуть у віці x із групи чисельністю l_x:

$$T_x = d_{x+1} + 2d_{x+2} + 3d_{x+3} + \ldots = l_{x+1} - l_{x+2} + 2l_{x+2} - 2l_{x+3} + 3l_{x+3} - 3l_{x+4} + \ldots =$$

$$= l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \ldots = \sum_{k=1}^{\omega-x} l_{x+k}$$

Розділивши це число на чисельність групи, одержимо приблизне значення середньої тривалості життя, що залишилася, для члена групи у віці x

$$e_x = \frac{T_x}{l_x} = \frac{1}{l_x}\sum_{k=1}^{\omega-x} l_{x+k}$$

Часто цю величину називають округленим значенням середньої тривалості життя, що залишилася, маючи на увазі, що у розрахунках використовувалося округлене до цілого числа кількість років майбутньої життя для групи чисельністю l_x.

Приклад.

1. Визначити ймовірність смерті протягом року для чоловіка у віці 40 років.

З таблиці смертності знаходимо: $l_{40} = 83344$; $l_{41} = 82199$

$q_{40} = \left(l_{40} - l_{41}\right) / l_{40} = 0,0137$

2. Визначити для чоловіка у віці 40 років імовірність дожити до 60 років.

З таблиці смертності знаходимо: $l_{60} = 50246$; ${}_{20}p_{40} = l_{60} / l_{40} = 0,603$.

3. Знайдемо округлену середню тривалість життя, що залишилася, для чоловіка у віці 65 років.

$$e_{65} = \frac{l_{66} + l_{67} + l_{68} + l_{69} + l_{70}}{l_{65}} = \frac{36556 + 34501 + 32492 + 30537 + 28604}{38723} = 4,2 \text{ р.}$$

3.3. Страхування на чисте дожиття

Страхування життя звичайно здійснюється у двох формах: страхування сум (капіталу) і страхування рент (ануїтетів). У першому випадку при настанні страхової події (смерті або дожиття) виплачується одноразово визначена сума грошей, у другому – страховик робить регулярні виплати протягом визначеного періоду часу або довічно. У класичному страхуванні життя мають місце тільки дві страхових події: дожиття до визначеного терміну і смерть у період дії договору.

3.3.1. Очікувана поточна вартість виплат

Найбільш простим варіантом є страхування на чисте дожиття, що полягає в страхуванні визначеної суми грошей на певний строк. У випадку смерті страхувальника в період дії договору страхова сума не виплачується й внески не вертаються.

Визначимо поточну вартість страхових виплат на момент укладання договору страхування. Нехай група страхувальників чисельністю l_x у віці x уклала зі страховиком договір страхування на дожиття строком на п років. Ті, що дожили до закінчення терміну страхування повинні, одержати страхову суму S. Очевидно сумарна виплата, яку повинен здійснити страховик по закінченні строку договору, дорівнює числу тих, що дожили до віку x+n, помноженому на страхову суму $l_{x+n}S$. Поточна вартість цієї суми на момент укладання договору: $V^n l_{x+n} S$, де V = 1/(1+ i) – дисконтний множник, і – річна процентна ставка чи річна норма прибутковості. У розрахунку на кожного страхувальника, що уклав договір, це складає величину

$$P = V^n l_{x+n} S / l_x \tag{3.1}$$

Очевидно, що це величина одноразового внеску, що повинен сплатити кожний страхувальник при укладанні договору. Цей же результат легко одержати й іншим шляхом, розраховуючи накопичену вартість фонду, сформованого внесками страхувальників у момент укладання договору. Якщо кожний страхувальник у віці x поклав внесок P, то первинна вартість цього фонду рівняється P l_x. Множник нарощення за n років рівняється $(1+i)^n$. До моменту закінчення договору накопичена вартість цього фонду складе $Pl_x(1+i)^n$. Дорівнюючи цю величину до суми страхових виплат Sl_{x+n}, одержимо (3.1).

Величину в правій частині формули 3.1 називають актуарною поточною вартістю страхової суми S або очікуваною поточною вартістю.

3.3.2. Прибуток від смертності

Перерозподіл внесків померлих на користь тих, що дожили, дає додатковий прибуток від смерті. Якщо на початку року величина страхового фонду становить F_x, чисельність застрахованих l_x, величина індивідуального страхового фонду (у розрахунку на одного застрахованого) $f_x = F_x / l_x$, то наприкінці року величина страхового фонду збільшиться за рахунок процентного росту до значення $F_x(1+i)$, чисельність застрахованих зменшиться на величину d_x, а величина індивідуального страхового фонду стане

$$f_{x+1} = \frac{F_x(1+i)}{l_x - d_x} = \frac{f_x(1+i)}{1-q_x} \tag{3.2}$$

Річна норма прибутковості для віку x буде дорівнювати:

$$i_x = \frac{f_{x+1} - f_x}{f_x} = \frac{i + q_x}{1-q_x} \tag{3.3}$$

Оскільки динаміка збільшення капіталу й демографічні процеси ніяк не залежать від величини страхової суми, в актуарній математиці прийнято робити всі розрахунки для страхової суми, рівній одиниці. Величину страхового внеску з одиниці страхової суми називають тарифною ставкою або тарифом. Для будь-якої конкретної страхової суми величину страхового внеску легко одержати, множачи тарифну ставку на цю суму.

Для забезпечення єдиного підходу до рішення актуарних задач по страхуванню життя в 1898 р. на II Міжнародному конгресі актуаріїв у Лондоні було прийнято, що для позначення різного роду одноразових платежів використовується заголовна буква A, для регулярних платежів – мала літера a. При страхуванні на чисте дожиття очікувана поточна вартість страхових виплат у розрахунку на одного страхувальника зі страхової суми, рівній одиниці, позначається наступним символом:

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = \nu^n \frac{l_{x+n}}{l_x} = \nu^n \, {}_n p_x \tag{3.4}$$

3.3.3. Комутаційні функції

Для спрощення актуарних розрахунків часто використовуються комутаційні функції, для яких складені спеціальні таблиці. Перша з цих функцій, що використовується в страхуванні на дожиття, визначається формулою:

$$D_x = v^x l_x \tag{3.5}$$

Зміст цієї функції дуже простій. Якщо при народженні групи дітей чисельністю l_0 їх страхують на дожиття з умовою виплати одиничної страхової суми по досягненню віку x, то формула (3.5) дає очікувану поточну вартість суми страхових виплат, тобто сумарну страхову премію. За допомогою комутаційної функції можна представити формулу (3.4) у вигляді

$$A_{x:\frac{1}{n|}} = \frac{D_{x+n}}{D_x} \tag{3.6}$$

3.4. Тарифні ставки по змішаному страхуванню життя

Умови змішаного страхування життя передбачають виплату страхової суми у випадку дожиття, смерті й у зв'язку із втратою працездатності від нещасного випадку. Для виплат за кожним видом страхової відповідальності страховик повинен створити в себе страховий фонд. Крім того, йому необхідні кошти для компенсації витрат на проведення страхових операцій. Тому тарифна ставка по змішаному страхуванню життя складається з:

– нетто-ставки на дожиття;
– нетто-ставки на випадок смерті;
– нетто-ставки на випадок втрати працездатності;
– навантаження.

Розглянемо послідовно процес побудови тарифних ставок.

3.4.1. Одноразова нетто-ставка на дожиття

Візьмемо конкретний приклад: особа у віці 40 років (x=40) укладає договір страхування на дожиття строком на 5 років на суму 100 грн. Якою повинна бути для нього величина одноразового страхового внеску?

Представимо, що такі договори страхування уклали всі сорокалітні особи з показаної таблиці смертності. Після закінчення п'яти років страховій компанії потрібно буде виплатити певне число страхових сум тим, хто доживе до закінчення терміну дії договору. З таблиці смертності знаходимо, що до 45 років доживе 91631 чіл. Виходить, і виплат буде 91631. Страхова сума кожного договору 100 грн. Тому, страховий фонд, необхідний для виплат, повинен становити

1000грн*91631 = 9163100 грн.

Однак на початку страхування він може мати меншу величину, враховуючі, що щороку на нього буде наростати 3 складних відсотки доходу. Щоб відповідно зменшити цей фонд, тобто знайти його сучасну вартість, застосуємо множник, що дисконтує, за 5 років, рівний при 3%-й нормі прибутковості 0,86261.

9163100 грн. *0,86261 = 7904182 грн.

Отже, щоб через 5 років мати кошти для виплати страхових сум по дожиттю, страхова компанія повинна мати у своєму розпорядженні фонд 7904182 грн. Цю суму й необхідно одноразово зібрати зі страхувальників. Різниця між сумою внеску й сумою виплат буде покрита за рахунок 3%-го доходу на зібрані кошти. 7904182 грн. є сучасною вартістю 9163100 грн., що будуть виплачені через 5 років.

Щоб визначити розмір внеску кожного із застрахованих у цей загальний фонд, розділимо отриману суму на число осіб на початок страхування (див. таб. смертності, x = 40).

Одержимо:

7904182 грн/93597 = 84 грн. 45 коп.

Це й буде одноразова нетто-ставка на дожиття.

Розмір тарифної ставки був, відповідно, розрахований таким чином:

91631 * 0,85261/93597 *100 = 84,45.

91631 – це число осіб, які доживають до 45 років. Воно позначається символом l_{x+n} ,де x – вік на початок страхування, n-n – строк страхування.

0,86261 – множник, що дисконтує υ^{n} ;

93597 – число осіб на початок страхування l_x;

100 – страхова сума S.

Звідси одержуємо формулу

$$ {}_{n}E_{x} = \frac{\left(l_{x+n} \cdot \nu^{n}\right)S}{l_{x}}, \tag{3.7}$$

де ${}_{n}E_{x}$ – одноразова нетто-ставка по страхуванню на дожиття для осіб у віці x років строком на n років.

$$ \nu^{n} = \frac{1}{\left(1+i\right)^{n}} \tag{3.8}$$

3.4.2. Одноразова нетто-ставка на випадок смерті

Припустимо, що особа у віці 40 років укладає договір страхування на випадок смерті строком на 5 років на 100 грн. Якщо розраховуючи нетто-ставку на дожиття необхідно знати число осіб, які доживуть до 45 років, то тепер необхідно знати кількість застрахованих які не доживуть до 45 років.

По таблиці смертності знаходимо, що у віці 40 років звичайно вмирає 1145 чоловік, у віці 41 – 1198, 42 – 1194, 43 – 1208, 44 – 1212. Тому, страхової компанії необхідно виплатити у зв'язку з випадками смерті на першому році страхування 114500 грн., на другому – 119800 грн. Помноживши ці суми на відповідні множники, які дисконтуються, знайдемо сучасну вартість майбутніх п'ятирічних виплат у випадках смерті, при нормі прибутковості 3 %

$$114500\,x\,0{,}97087 + 119800\,x\,0{,}94260 + 119400\,x\,0{,}91514 + 120800\,x\,0{,}88849 +$$
$$+121200\,x\,0{,}86261 = 545233{,}72 \text{ грн.}$$

Розділимо отриману суму на число осіб, що вступають у страхування:

$545233,72 / 83344 = 6$ грн. 54 коп.

Таким чином, особи у віці 40 років, уклавши договір страхування на випадок смерті на страхову суму 100 грн., повинні при укладанні договору внести в загальний страховий фонд 6 грн. 54 коп.

Одноразова нетто-ставка по страхуванню на випадок смерті для осіб у віці x років при терміну страхування на n років розраховується за формулою

$$ {}_nA_x = \frac{\left(d_x\, v + d_{x+1}\, v^2 + \ldots + d_{x+n-1}\, v^n\right) S}{l_x}, \tag{3.9} $$

де d_x – число вмираючих при переході від віку x до віку x +1 років;

l_x – число осіб, які вступають у страхування;

v^n – дисконтуючий множник за n років;

S – 100грн.

Комутаційні числа

$$ {}_nE_x = \frac{D_{x+n} \cdot S}{D_x}, \text{ на дожиття} \tag{3.10} $$

$$ {}_nA_x = \frac{\left(M_x - M_{x+n}\right) S}{D_x}, \text{ на випадок смерті} \tag{3.11} $$

3.4.3. Страхові премії

Основні визначення. Раніше була розглянута теорія страхових виплат для різних видів страхування життя й була визначена одноразова вартість страхових виплат на момент укладання договору. Однак довгострокові контракти по страхуванню життя оплачуються одноразовим внеском тільки в рідких випадках - занадто велика їхня вартість. Як правило, страхова премія сплачується в розстрочку – щорічно, щокварталу, щомісяця. Якщо при одноразовій оплаті страхувальник повністю виконує свої зобов'язання на момент укладання договору, то при періодичній сплаті внесків вони виконуються в розстрочку. Очевидно, що від способу сплати страхової премії страхувальником вартість зобов'язань страховика ніяк не залежить.

При розрахунку величини внесків, що сплачуються періодично, необхідно враховувати як процентний дохід від їхнього інвестування, так і демографічні фактори (смертність). Останній фактор впливає на величину внесків, оскільки далеко не всі страхувальники встигають до настання смерті сплатити всі передбачені контрактом внески. Якщо величина внесків, що сплачуються періодично, постійна, то сукупність цих внесків являє собою постійну ренту платежів. У зв'язку з тим, що договір страхування набуває чинності тільки після одержання першого внеску, рента страхових платежів завжди є приведеною (рента постнумерандо).

Основа для розрахунку величини страхових внесків – умова рівності зобов'язань страховика й страхувальника на момент укладання договору: очікувана поточна вартість майбутніх страхових виплат повинна дорівнює очікуваної поточної вартості майбутніх поточних внесків. Якщо договір страхування строком на n років укладений у віці x, очікувана поточна вартість страхових виплат дорівнює A, а невідома величина щорічних страхових внесків дорівнює P, то це рівняння має вигляд

$$A = P\ddot{a}_{x:\overline{n|}}, \tag{3.12}$$

де $\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$ – очікувана поточна вартість ренти із щорічними платежами одиничної величини.

Звідси щорічний внесок

$$P = \frac{A}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}. \tag{3.13}$$

Формула (3.13) показує, у скільки разів величина щорічного внеску менше величини внеску, що сплачується одноразово, тому величину $\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$ часто ще називають коефіцієнтом розстрочки. Якщо зменшення чисельності страхувальників і процентний дохід від внесків дорівнюють нулю $(l = const,\ \ i = 0)$, то коефіцієнт розстрочки буде в точності дорівнює тривалості строку платежів n.

Часто період сплати страхової премії становить лише частину терміну дії договору страхування. Протягом періоду сплати страхової премії страхувальник зобов'язаний повністю внести підлягаючій сплаті внески, тобто повністю виконати свої зобов'язання. Строк сплати премій будемо позначати буквою m. Перша премія вноситься на початку першого року страхування, остання – на початку m – року. Величина щорічного внеску визначається тоді формулою

$$P = \frac{A}{\ddot{a}_{x:\overline{m|}}}. \tag{3.14}$$

Період від дати сплати останнього внеску до першої (або єдиної) страхової виплати називають вичікувальним. При страхуванні капіталу на дожиття вичікувальний період триває до закінчення строку договору страхування. При страхуванні ренти вичікувальний період закінчується з початком періоду виплат ренти.

3.4.4. Нетто-премії для елементарних видів страхування

<u>Страхування на чисте дожиття</u>. Розглянемо спочатку найбільш просту ситуацію, коли вичікувальний період відсутній і сплата страхової премії відбувається протягом усього терміну дії договору страхування. Нехай вік застрахованого x років, термін страхування n років дорівнює періоду сплати премії. Відповідно до формули

$$P = \frac{A}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

величина страхового внеску з одиничної страхової суми дорівнює одноразової вартості страхування, діленої на відповідний коефіцієнт розстрочки:

$$P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}. \tag{3.15}$$

Період сплати внесків або може збігатися з терміном дії договору, або бути менше його. В останньому випадку на полісі вказується вік застрахованого, по досягненні якого поліс повинен бути повністю оплачений.

Якщо тривалість періоду сплати страхової премії дорівнює m років, то величина щорічного внеску відповідно до формули

$$P = \frac{A}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}$$

дорівнює

$$P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}. \tag{3.16}$$

Приклад. Визначити величину річних внесків при страхуванні на дожиття на 5 років на суму 10000 грн. людини у віці 40 років виходячи з річної норми прибутковості 5 %.

Рішення:

$$P_{40:\overset{1}{\overline{5}|}} = \frac{A_{40:\overset{1}{\overline{5}|}}}{\ddot{a}_{40:\overline{5}}}$$

Формула 3.10 $D_{40} = 11839$ $D_{45} = 8613$.

Одноразова вартість контракту для чоловіків:

$$A_{40:\overset{1}{\overline{5}|}} = \frac{D_{x+n}}{D_x} = \frac{D_{45}}{D_{40}} = \frac{8613}{11839} = 0,728.$$

Коефіцієнт розстрочки:

$$\ddot{a}_{40:\overline{5}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} = \frac{N_{40} - N_{45}}{D_{40}} = \frac{158589 - 157658}{11839} = 4,424.$$

Величина річного внеску з одиничної страхової суми:

$$P_{40:\overset{1}{\overline{5}|}} = \frac{A_{40:\overset{1}{\overline{5}|}}}{\ddot{a}_{40:\overline{5}}} = \frac{0,728}{4,424} = 0,165.$$

Річний внесок зі страхової суми в 10000 грн. складе:

Р = 100000 х 0,165 = 1650 грн.

Страхування рент. Страхування рент є різновидом страхування на дожиття, коли замість одноразової виплати по дожиттю до строку закінчення договору передбачено ряд регулярних страхових виплат протягом деякого періоду часу або довічно (за умови дожиття до строків виплати). Тому на додаток до періоду сплати страхової премії й вичікувальному періоду, передбаченими при страхуванні на дожиття, тут виділяють також період страхових виплат, протягом якого страховик виконує свої фінансові обов'язки стосовно страхувальника.

Розглянемо спочатку більше простий випадок, коли вичікувальний період відсутній. Будемо вважати, що період виплат довічної ренти (пенсії) починається по досягненні людиною визначеного віку p, а договір страхування укладений у віці x й передбачений період сплати внесків протягом $m = p - x$ років. Тоді очікувана поточна вартість цієї відстроченої на m років ренти на момент укладання договору страхування дорівнює

$$ {}_{m|}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+m}}{D_x} = \frac{N_p}{D_x} . \tag{3.17}$$

Коефіцієнт розстрочки, що відповідає заданому періоду сплати страхової премії, дорівнює

$$ \ddot{a}_{x:\overline{m|}} = \frac{N_x - N_{x+m}}{D_x} = \frac{N_x - N_p}{D_x} . \tag{3.18}$$

Розділивши формули (3.17) на (3.18), отримаємо:

$$ {}_{m|}P_x = \frac{{}_{m|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{m|}}} = \frac{N_{x+m}}{N_x - N_{x+m}} . \tag{3.19}$$

Якщо період сплати внесків менше строку відстрочки, то величина щорічного внеску визначається за формулою

$$ {}_{p-x|}P_x = \frac{{}_{p-x|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{m|}}} = \frac{N_p}{N_x - N_{x+m}} . \tag{3.20}$$

Для термінової ренти тривалістю n років одержимо

$$ {}_{p-x|}P_{x:\overline{n|}} = \frac{{}_{p-x|}\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{m|}}} = \frac{N_p - N_{p+n}}{N_x - N_{x+m}} . \tag{3.21}$$

Приклад. Страхувальник у віці 40 років уклав договір страхування пенсії, відповідно до якого, починаючи з 65 років довічно, йому буде виплачуватися пенсія в розмірі 10000грн. на початку кожного року. Визначити розмір річних внесків, які будуть сплачені страхувальником, починаючи з 40 і до 65 років.

Рішення.

$$ {}_{m|}P_x = \frac{{}_{m|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{m|}}} = \frac{N_{x+m}}{N_x - N_{x+m}} $$

$$ {}_{25|}P_{40} = \frac{N_{65}}{N_{40} - N_{65}} = \frac{13274}{158412 - 13274} = 0{,}091 $$

$N_{40} = 158412 \qquad N_{65} = 13274$

Річні внески зі страхової суми 10000грн. складуть:

Р= 10000 х 0,091 = 910 грн.

Премія, навантажена на витрати. Брутто-премія. Дотепер всі розрахунки розміру страхової премії були засновані на рівності очікуваної поточної вартості страхових виплат і страхової нетто-премії. Нетто-премія забезпечує лише покриття очікуваних страхових виплат. Операції за страховим договором вимагають певних витрат (витрати страхування), для покриття яких понад нетто-премію стягується ще навантаження. Сума нетто-премії й навантаження називається брутто-премією.

Якщо частка навантаження становить φ відсотків, то брутто-премія, позначимо її $БП$, може бути знайдена за формулою:

$$БП = \frac{НП}{100-\varphi}\cdot 100, \tag{3.22}$$

де $НП$ – нетто-премія.

Звичайно розрізняються три види витрат.

1. Витрати придбання (аквізаційні видатки) часто ще називають початковими витратами. Вони пов'язані із придбанням поліса й складаються з комісійних страхового агента, витрат по оформленню й реєстрації поліса, вартості консультацій, медичного огляду, реклами й т.д.

Для простоти часто до витрат придбання відносять тільки комісійні страхового агента (брокера), інші ж витрати, які в постійно діючій страховій компанії мають регулярний характер, відносять до адміністративних. Такий поділ зручний, оскільки оплата витрат придбання поліса відбувається в момент надходження першого внеску, оплату інших витрат важко прив'язати до якогось конкретного моменту часу. Ще одна перевага такого поділу в тому, що всі витрати придбання ставляться на рахунок конкретного агента (брокера) за конкретним договором з конкретним терміном дії й страховою сумою, а інші витрати носять загально загальноустановчий характер і практично не залежать від характеристик договору.

2. Витрати зборів (витрати поновлення) пов'язані з розсиланням нагадувань про сплату премії, а також з виплатою регулярних комісійних агентові, що продав поліс. Витрати стягуються в дні сплати регулярних внесків.

3. Адміністративні витрати містять у собі видатки по забезпеченню функціонування страхової компанії (зарплата, оренда, плата за комунальні послуги, вартість, обробки даних, податки, плата за ліцензію й т.п.), а також інші видатки, що не ввійшли в попередні пункти.

За способом розрахунку розрізняються три типи витрат:

– прямо пропорційні страховій сумі.

– прямо пропорційні премії (наприклад, видатки по інкасації страхових платежів).

– не залежні від премії або страхової суми (наприклад, вартість виготовлення полісів, медичного огляду й т.п.).

Витрати можуть також представляти довільну комбінацію перерахованих типів.

Для простоти будемо користуватися величиною витрат на одиницю страхової суми; відповідні витрати придбання позначимо α, видатки по збиранню страхових платежів – β, щорічні адміністративні видатки – γ.

Будемо вважати, що витрати придбання оплачуються повністю при одержанні першого внеску, адміністративні видатки провадяться рівномірно протягом усього терміну дії договору (n років), видатки по збиранню платежів – протягом періоду сплати внесків (m років). Рівняння для визначення розміру щорічної брутто-премії з одиничної страхової суми має вигляд балансу: очікувана поточна вартість страхової брутто-премії дорівнює сумі очікуваних поточних вартостей страхових виплат і витрат на момент початку договору:

$$П\ddot{a}_{x:\overline{m|}} = A + \alpha + \beta П\ddot{a}_{x:\overline{m|}} + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{n|}}, \qquad (3.23)$$

де m й n – тривалість періоду сплати внесків і термін дії договору,
$П$ – щорічна брутто-премія,
A – поточна вартість очікуваних страхових виплат.

Щорічна брутто-премія

$$П = \frac{1}{(1-\beta)}(P + P^{\alpha} + P^{\gamma}); \quad P^{\alpha} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{m|}}}; \quad P^{\gamma} = \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{m|}}}. \qquad (3.24)$$

Три доданки в дужках позначають відповідно нетто-премію, щорічну частину оплати витрат придбання й щорічну частину оплати адміністративних витрат. Звідси ясно, що страхувальник оплачує витрати придбання в розстрочку протягом усього періоду сплати внесків, хоча комісійні за продаж поліса сплачуються агентові повністю при укладанні договору. Це означає, що вищезгадані видатки несе страховик, як би надаючи страхувальникові довгострокову позичку, а останній погашає заборгованість протягом періоду сплати внесків. Якщо договір страхування припиняється до закінчення періоду сплати внесків, страховик утримує непогашену заборгованість.

Приклад. Розрахувати одноразову брутто-премію для чистого дожиття строком на 5 років для чоловіка у віці 40 років зі страхової суми 10 тис. грн. для річної процентної ставки 5%. Видатки придбання становлять 2 % від страхової суми (α =0,02), видатки по збиранню платежів – 3 % від величини платежу (β = 0,03), адміністративні видатки – 0,3% від страхової суми щорічної дії поліса (γ = 0,003).

Рішення:

$$П = \frac{1}{(1-\beta)}(P + P^{\alpha} + P^{\gamma}); \quad P^{\alpha} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{m|}}}; \quad P^{\gamma} = \gamma\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{m|}}}$$

$$P = \frac{A}{\ddot{a}_{x:\overline{m\backslash}}}$$

Одноразова вартість контракту для чоловіків:

$$A_{40:\frac{1}{5|}} = \frac{D_{x+n}}{D_x} = \frac{D_{45}}{D_{40}} = \frac{8613}{11839} = 0{,}728$$

Нетто-премія:

$$P = \frac{A}{\ddot{a}_{x:\overline{m}\backslash}} = \frac{0{,}728}{1} = 0{,}728$$

Видатки придбання:

$$P^{\alpha} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{m}\backslash}} = \frac{0{,}02}{1} = 0{,}02$$

Адміністративні видатки:

$$P^{\gamma} = \gamma \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}\backslash}} = 0{,}003 \cdot 4{,}424 = 0{,}0132$$

Коефіцієнт розстрочки:

$$\ddot{a}_{40:\overline{5|}} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} = \frac{N_{40} - N_{45}}{D_{40}} = \frac{158589 - 157658}{11839} = 4{,}424$$

$$П = \frac{1}{(1-\beta)}(P + P^{\alpha} + P^{\gamma}) = \frac{0{,}728 + 0{,}02 + 0{,}003 \cdot 4{,}424}{1 - 0{,}03} = 0{,}785$$

Сума платежу становить: 10000 х 0,785 = 7850 грн.

Структура брутто-премії: нетто-премія – 92,73% (7280/7850 х100)

Навантаження: 7,25%, у тому числі видатки на збори 3%, видатки на придбання – 2,55% (0,02 х 10000 /7850 х100), адміністративні видатки – 1,7% (132,72/7850 х100).

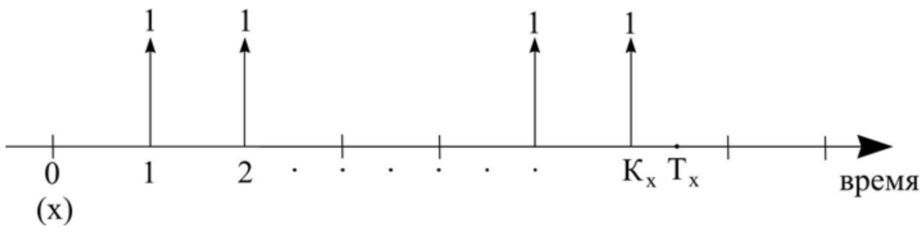
3.5. Страхування рент

У багатьох випадках краще для страхувальника є неотримання одноразової виплати, а регулярний дохід протягом певного періоду або довічно.

Регулярні виплати через рівні проміжки часу (щомісяця, щокварталу, щорічно) називають страховою рентою або ануїтетом. Страхова рента відрізняється від звичайної фінансової ренти тим, що виплачується тільки за умови, що її одержувач живий.

3.5.1. Звичайна довічна рента

Найпоширенішим видом страхової ренти є звичайна довічна рента, що виплачується наприкінці кожного року дожиття протягом всього застрахованого життя. Так як платежі здійснюються наприкінці кожного тимчасового періоду, те звичайну ренту називають ще рентою постнумерандо. Починаючи з деякого моменту $t_0 = 0$ людина раз у рік наприкінці року починає одержувати певну суму (яку звичайно приймають у якості умовної грошової одиниці). Виплати провадяться тільки під час життя людини.



Визначимо очікувану поточну вартість ренти на початок контракту, а також на початок кожного року протягом терміну дії контракту.

Нехай l_x осіб у віці x укладуть договір страхування, що передбачає регулярні виплати розміром в одиницю наприкінці кожного року довічно. Тоді наприкінці першого року страховик виплатить суму l_{x+1}, наприкінці другого року – l_{x+2}, і доти, поки буде живий хоча б один страхувальник. Остання виплата складе l_ω. Поточна вартість страхових виплат на момент укладання договору складе відповідно $vl_{x+1}, v^2 l_{x+2}, v^{\omega-x} l_\omega$, де ω – граничний вік таблиць смертності $(l_{\omega+1} = 0)$.

Сумарна поточна вартість всіх виплат ренти складе

$$vl_{x+1} + v^2 l_{x+2} + \ldots + v^{\omega-x} l_\omega = \sum_{k=1}^{\omega-x} v^k l_{k+x}$$

В розрахунку на одного страхувальника, що уклав договір у віці x, це складе

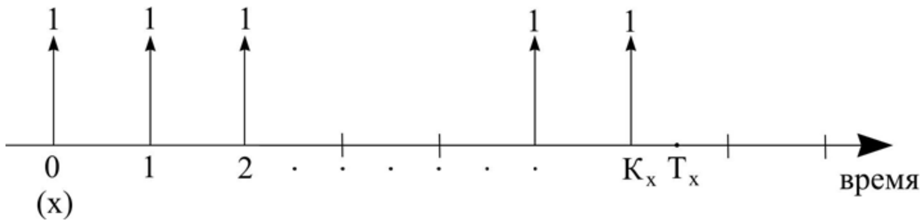
$$a_x = \sum_{k=1}^{\omega-x} A_{x:\,\overset{1}{k|}} = \sum_{k=1}^{\omega-x} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} \tag{3.25}$$

Формула (3.25) визначає очікувану поточну вартість довічної ренти виплатами наприкінці кожного року, рівними частинами, для страхувальника у віці x.

Очевидно, таку вартість ренти, або величину одноразового внеску, повинен заплатити кожний страхувальник при укладанні договору a_x.

3.5.2. Приведена довічна рента

Разом зі звичайною рентою часто використовують приведену ренту (рента пренумерандо), коли платежі здійснюються на початку кожного тимчасового періоду. Починаючи з деякого моменту $t_0 = 0$ людина раз у рік починає одержувати певну суму (яку звичайно приймають у якості умовної грошової одиниці). Виплати провадяться тільки під час життя людини.



Очікувана поточна вартість ренти пренумерандо розраховується так само, як і для ренти постнумерандо:

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} A_{x:\,\overset{1}{k|}} = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^k\, {}_k p_x \tag{3.26}$$

Приведені ренти широко використовуються при розрахунку страхових внесків, що сплачуються в розстрочку.

Порівнюючи формули (3.25) і (3.26), легко побачити, що виконується співвідношення $\ddot{a}_x = a_x + 1$.

3.5.3. Комутаційні функції

Для спрощення актуарних розрахунків по страхуванню ренти використовують також відповідну комутаційну функцію:

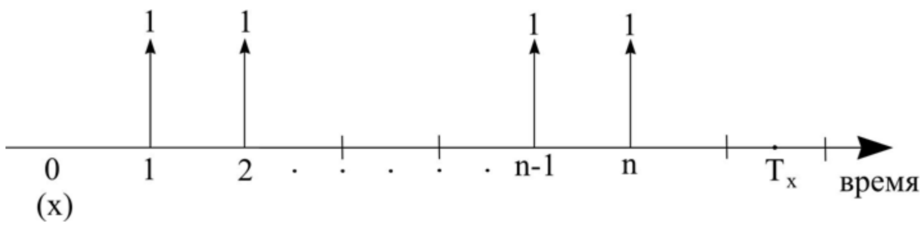
$$N_x = \sum_{k=0}^{\omega - x} D_{x+k} = \sum_{t=x}^{\omega} D_t \tag{3.27}$$

Зміст цієї функції наступний. Якщо при народженні групи дітей чисельністю l_0 укладається договір страхування з умовою довічної виплати ренти розміром в одиницю на початок кожного року починаючи з віку x, то формула (3.27) дає поточну вартість страхових виплат або сумарну величину одноразового страхового внеску. За допомогою комутаційної функції можна представити формули (3.25) і (3.26) у більше компактному виді:

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}; \qquad a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}. \tag{3.28}$$

3.5.4. Термінові ренти

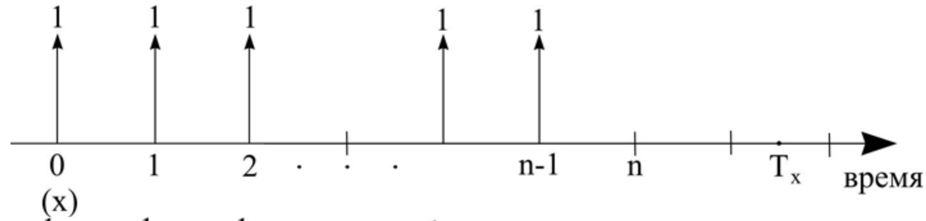
Якщо виплата ренти обмежена терміном, наприклад n років, то рента називається терміновою. Нехай $t_0 = 0$ – теперішній момент, а вік людини, якому виплачується рента – x років. Звичайна термінова рента визначається як серія виплат одиничної суми, вироблених раз у рік наприкінці року довічно, починаючи з моменту $t = 1$, але не більш, ніж n років.

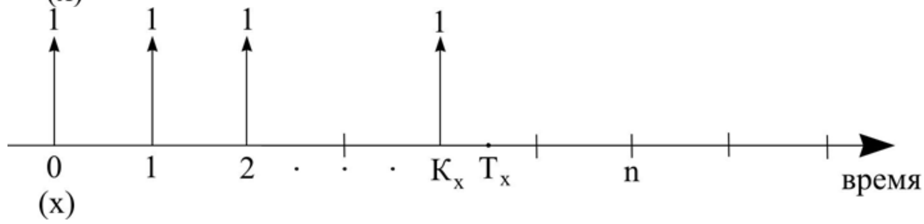


Вартість звичайної термінової ренти

$$a_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=1}^{n} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} = a_x - A_{x:\overline{n|}}^{\;1} \cdot a_{x+n} = \frac{N_{x+1} - N_{x+1+n}}{D_x}$$

Нехай $t_0 = 0$ – теперішній момент, а вік людини, якому виплачується рента – x років. Наведена термінова рента визначається як серія виплат одиничної суми, виплачуваних раз у рік довічно, починаючи з моменту $t_0 = 0$, але не більш, ніж n років. Таким чином, якщо людина проживе ще n років (тобто якщо $T_x > n$), то здійснюється рівно n виплат на початку кожного року; якщо ж $T_x < n$, то здійснюється $K_x + 1$ виплат.





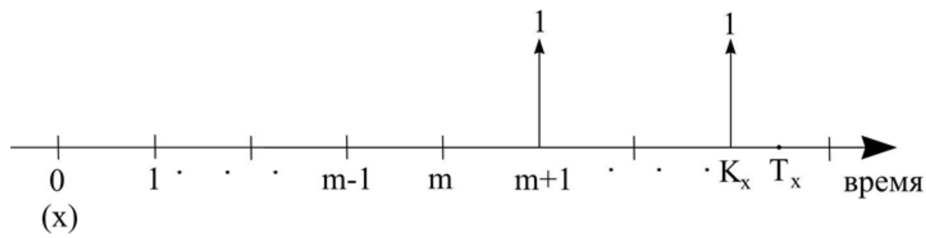
Вартість приведеної термінової ренти визначається за формулою

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} = \ddot{a}_x - A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} \cdot \ddot{a}_{x+n} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \tag{3.30}$$

3.5.5. Відкладені ренти

Розглянуті вище ренти називаються терміновими, тому що строк їхньої дії починається відразу після укладення контракту. Термін дії відкладених (або відстрочених) рент запізнюється щодо цього моменту на період відстрочки.

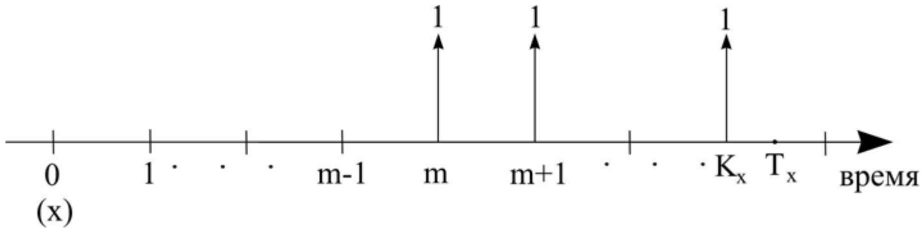
Нехай $t_0 = 0$ – теперішній момент, а вік людини, якому виплачується рента – x років. Відкладена на m років звичайна довічна рента визначається як серія виплат одиничної суми, виплачувана раз у рік, починаючи з моменту $t = m+1$, доти, поки людина жива. Однак якщо людина вмре до моменту $m+1$, те ні однієї виплати не провадиться.



Вартість відкладеної на m років довічної ренти постнумерандо

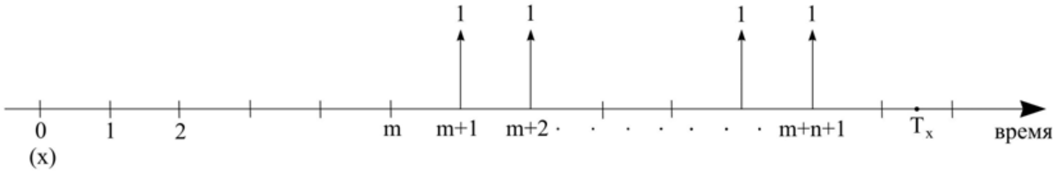
$${}_{m|}a_x = \sum_{k=m+1}^{\omega-x} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} = v^m \frac{l_{x+m}}{l_x} \cdot a_{x+m} = A_{x:\overset{1}{\overline{m|}}} \cdot a_{x+m} = \frac{N_{x+m+1}}{D_x} \tag{3.31}$$

Нехай $t_0 = 0$ – теперішній момент, а вік людини, якому виплачується рента – x років. Відкладена на m років наведена довічна рента визначається як серія виплат одиничної суми, виплачуваних раз у рік, починаючи з моменту $t = m$, доти, поки людина жива. Однак якщо людина вмре до моменту m, те ні однієї виплати не здійснюється.



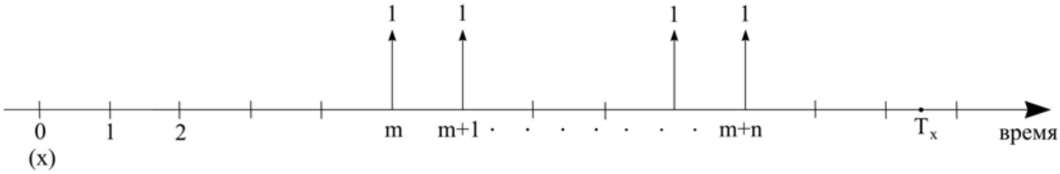
Відкладена довічна рента пренумерандо

$$
{}_{m|}\ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{\omega-x} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} = v^m \frac{l_{x+m}}{l_x} \cdot \ddot{a}_{x+m} = A_{x:\frac{1}{m|}} \cdot \ddot{a}_{x+m} = \frac{N_{x+m}}{D_x} \tag{3.32}
$$



Відкладена довічна рента постнумерандо

$$
{}_{m|}a_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=m+1}^{m+n} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} = v^m \frac{l_{x+m}}{l_x} a_{x+m:\overline{n|}} = A_{x:\frac{1}{m|}} a_{x+m:\overline{n|}} = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x}. \tag{3.33}
$$



Відкладена термінова рента пренумерандо

$$
{}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=m}^{m+n-1} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} = v^m \frac{l_{x+m}}{l_x} \ddot{a}_{x+m:\overline{n|}} = A_{x:\frac{1}{m|}} \ddot{a}_{x+m:\overline{n|}} = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x} \tag{3.34}
$$

3.6. Завдання для практичних (самостійних) занять

Завдання 1.

Використовуючи таблицю смертності, обчислити ймовірність для тридцятирічного чоловіка не дожити до 60 років.

Завдання 2.

Для особи 45 років розрахувати:

а) імовірність прожити ще один рік;

б) імовірність умерти протягом майбутнього року життя;

в) імовірність прожити ще 2 роки;

г) імовірність умерти протягом майбутніх двох років;

д) імовірність умерти на третьому році життя.

Завдання 3.

Використовуючи таблицю смертності, обчислити:

а) імовірність того, що 20-літня жінка доживе до 70 років;

б) імовірність того, що 35-літній чоловік умре у віці до 50 років.

Завдання 4.

Визначити величину внеску, якщо при дожитті дитини (хлопчик) до 18 років йому передбачається виплата в сумі 10000 грн. Річна процентна ставка – 5 %.

Завдання 5.

Визначити вартість довічної ренти з виплатою 10тис.грн. наприкінці кожного року для чоловіка у віці 60 років. Річна процентна ставка 5%.

Завдання 6.

Чоловік у віці 62 років придбав довічну ренту з виплатою 40000 грн. наприкінці кожного року. Ефективна процентна ставка $i = 5\ \%$. Знайти вартість поліса.

Завдання 7.

Відомо, що $l_{50} = 70354$, $l_{51} = 68353$, $l_{52} = 66246$, ефективна річна процентна ставка $i = 16\ \%$. Вік людини на момент укладання договору 50 років. Знайти актуарну сучасну вартість трирічної тимчасової довічної ренти, виплачуваної раз у рік на початку року в розмірі 50000 грн.

Завдання 8.

Парубок у віці 18 років планує одержати вищу освіту. Термін навчання – 5 років, вартість року навчання 10 тис. грн. Яку суму йому необхідно внести в страхову компанію перед початком навчання, щоб компанія взяла на себе оплату його навчання? Процентна ставка – 5 %.

Завдання 9. Чоловік у віці 40 років купує за 50 тис. грн. довічну ренту (пенсію), виплати якої починаються у віці 65 років. Яка величина щорічної виплати? Процентна ставка – 5 %.

Завдання 10. Чоловік у віці 45 років купує за 120000 грн. довічну ренту (пенсію), виплати якої починаються з віку 65 років. Ефективна процентна ставка $i = 5\ \%$. Знайти величину щорічних виплат.

Завдання 11.

Чоловік у віці 35 років купує за 100000 грн. довічну ренту (пенсію), виплати якої починаються з віку 55 років. Ефективна процентна ставка $i = 5\ \%$. Знайти величину щорічних виплат.

Завдання 12.

Батьки семирічної дівчинки оформляють договір на оплату вищої освіти дитини, по досягненню нею 18 років. Строк навчання 5 років, вартість 30000 грн. у рік. Ефективна процентна ставка $i = 5\ \%$. Знайти вартість поліса.

Завдання 13

При віці страхувальника (чоловік) 42 року страхування становить 5 років. Використовуючи таблицю комутаційних чисел знайти одноразову нетто-ставку на випадок смерті. Норма прибутковості 5 %.

Завдання 14

Розрахувати одноразову нетто-ставку по страхуванню на дожиття для жінки 30 років, що застрахована на 10 років. Норма прибутковості 4 %.

Завдання 15

Розрахуйте одноразову брутто-премію для страхувальника (чоловік) у віці 44 років, застрахованого по змішаному страхуванню життя строком п'ять років. Норма прибутковості – 8 %. Страхова сума – 25 тис. грн. Частка навантаження в брутто-ставці – 10 %.

Завдання 16

Страхувальник у віці 44 років уклав договір, відповідно до якого, починаючи з 65 років, довічно буде виплачуватися пенсія в розмірі 50000 грн. на початку кожного року. Ефективна процентна ставка $i = 5\%$. Знайти величину річних внесків, які будуть сплачуватися страхувальником з 44 до 65 років.

Завдання 17

Розрахувати одноразову брутто-премію для чистого дожиття строком на 6 років для чоловіка у віці 41 років зі страхової суми 28 тис. грн. для річної процентної ставки 5 %. Видатки придбання становлять 1,9 % від страхової суми, видатки по збору платежів – 2,9 % від величини платежу, адміністративні видатки – 0,7 % від страхової суми щорічної дії поліса.

РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИКОНАННЯ

Розрахункова частина контрольної роботи № 1
Тема: «Елементи фінансової математики. Фінансові ренти»

Завдання 1. Визначити сучасну величину суми А млн. грн., виплачувану через n років, при використанні ставки складних відсотків Х % річних. Вихідні дані в табл.1.

Таблиця 1

Вихідні данні

Варіант	А	n	Х	Варіант	А	n	Х
1	100	3	15	11	62	3	6
2	25	5	22	12	37	5	9
3	74	2	5	13	41	2	13
4	32	4	24	14	88	4	7
5	48	7	12	15	15	7	15
6	39	3	3	16	34	9	20
7	17	6	14	17	77	6	16
8	24	4	5	18	28	2	4
9	78	8	18	19	19	8	11
10	49	5	21	20	56	3	19

Завдання 2. Первісна сума боргу дорівнює А млн. грн. Визначити нарощену суму через n років, використовуючи нарахування складних відсотків по ставці Х % річних.

Таблиця 2

Вихідні дані

Варіант	А	n	Х	Варіант	А	n	Х
1	50	2,5	25	11	27	4,5	14
2	31	3,5	13	12	45	2,5	8
3	28	2,5	18	13	65	3,5	24
4	41	4,5	4	14	13	2,5	16
5	60	3,5	11	15	58	6,5	23
6	18	5,5	20	16	39	4,5	5
7	62	2,5	22	17	44	7,5	3
8	55	4,5	3	18	56	5,5	19
9	25	3,5	7	19	33	2,5	13
10	36	6,5	17	20	26	4,5	4

Завдання 3. Фактична процентна ставка становить на даний час X_1 % за рік, але через три роки вона знизиться до X_2 % за рік. Знайдіть нагромадження внеску 4000 грн. за n років.

Таблиця 3

Вихідні дані

Варіант	A	n	X_1	X_2
1	5000	6	8	7
2	6500	7	10	9
3	3000	5	5	4
4	4500	8	3	2
5	6000	6	12	11
6	7500	7	15	14
7	4000	5	18	17
8	5500	8	14	13
9	2000	6	9	8
10	3500	7	4	3
11	8000	5	13	12
12	6300	8	17	16
13	4800	6	21	20
14	2500	7	6	5
15	4300	5	16	15
16	5200	8	7	6
17	6700	6	23	22
18	4100	7	5	4
19	2700	5	11	10
20	7100	8	9	8

Завдання 4. Банком видана позичка А грн. на n років під i = X % річних. Погашення позички здійснюється наприкінці кожного року однаковими виплатами. Визначити розмір виплат.

Таблиця 4

Вихідні дані

Варіант	A	n	X	Варіант	A	n	X
1	1500	4	5	11	4400	8	3
2	2000	6	15	12	5100	10	17
3	3000	8	20	13	2400	4	21
4	5000	10	25	14	3200	6	6
5	4000	4	10	15	4600	8	22
6	2500	6	13	16	3800	10	14
7	3500	8	16	17	4200	4	23
8	4500	10	12	18	3400	6	8
9	2200	4	7	19	2600	8	11
10	3300	6	9	20	4800	10	18

Завдання 5. Яким повинен бути внесок у пенсійний фонд, якщо пенсія буде виплачуватися n років по А грн. щорічно. Перша виплата через рік. Ефективна ставка Х % річних.

Таблиця 5

Вихідні данні

Варіант	А	n	Х	Варіант	А	n	Х
1	400	11	18	11	500	11	10
2	450	8	14	12	800	8	24
3	600	9	19	13	730	9	9
4	480	10	12	14	850	10	16
5	550	6	15	15	430	6	20
6	650	12	21	16	740	12	13
7	530	5	11	17	380	5	8
8	700	7	23	18	250	7	25
9	420	13	17	19	300	13	12
10	750	4	22	20	460	4	7

Завдання 6. Страхової компанії запропоновано інвестувати А грн. на строк n років за умови повернення цієї суми частинами (щорічно по Б грн.) Після закінчення n років виплачується додаткова винагорода в розмірі С грн. Чи приймати цю пропозицію, якщо можна «безпечно» депонувати гроші в банк із розрахунку Х % річних?

(Необхідно розрахувати й зрівняти дві суми: 1) якщо гроші депонують у банк на n років (складні відсотки); 2) представити грошовий потік у вигляді ануїтетів постнумерандо й пренумерандо.

Таблиця 6

Вихідні данні

Варі-ант	А	n	Б	С	Х	Варі-ант	А	n	Б	С	Х
1	80000	5	16000	20000	11	11	85000	5	17000	15000	16
2	90000	6	15000	25000	10	12	42000	6	7000	3500	20
3	32000	4	8000	4000	12	13	72000	4	18000	25000	12
4	42000	3	14000	8000	8	14	60000	3	20000	12000	8
5	63000	7	9000	10000	13	15	133000	7	19000	35000	9
6	55000	5	11000	9000	9	16	42500	5	8500	16000	11
7	72000	6	12000	22000	14	17	57000	6	9500	10000	4
8	12000	4	3000	2500	6	18	52000	4	12500	12000	7
9	18000	3	6000	3000	7	19	75000	3	25000	11000	13
10	31500	7	4500	4500	15	20	35000	7	5000	10000	10

Завдання 7. Страхова компанія здала ділянку в оренду на n років. Орендна плата буде здійснюватися щорічно за схемою постнумерандо на наступних умовах: у перші n_1 років по А грн.; що залишилися n_2 роки по Б грн. Потрібно оцінити приведену вартість цього договору, якщо процентна ставка, використовувана в розрахунках, дорівнює Х %.

Таблиця 7

Вихідні данні

Варіант	n	n_1	A	n_2	Б	X
1	10	6	2000	4	3000	11
2	8	3	4000	5	5000	8
3	12	5	5000	7	7000	12
4	9	4	3000	5	4000	15
5	11	8	5000	3	6000	20
6	7	5	4000	2	6000	9
7	10	7	15000	3	16000	16
8	8	5	10000	3	11000	22
9	12	6	3500	6	4500	10
10	9	3	12000	6	13000	7
11	11	5	9000	6	10000	21
12	7	4	8000	3	9000	24
13	10	6	6000	4	7000	14
14	8	7	11000	1	12000	11
15	12	4	7000	8	8000	17
16	9	6	6500	3	7500	22
17	11	6	14000	5	15000	12
18	7	3	8500	4	9500	25
19	13	10	3000	3	5000	9
20	6	4	7000	2	9000	17

Розрахункова частина контрольної роботи № 2

Тема: «Розрахунок тарифних ставок за ризиковими видами страхування»

Завдання 1. Визначити основну частину тарифної нетто-ставки й нетто-внеску при страхуванні на випадок смерті в результаті нещасного випадку. Імовірність страхового випадку протягом року рівняється р, страхова сума S тис. грн.

Завдання 2. Визначити основну частину тарифної нетто-ставки при страхуванні від вогню, якщо ймовірність настання страхового випадку рівняється р, середнє значення ступеня знищення об'єкта рівняється $\overline{b}$.

Завдання 3. Визначити тарифну нетто-ставку й нетто-внесок при страхуванні на випадок смерті в результаті нещасного випадку. Імовірність страхового випадку протягом року рівняється р, страхова сума S тис. грн., кількість застрахованих N, рівень гарантії безпеки (імовірність перевищення страхової премії над виплатами) прийняти рівним g.

Завдання 4. Визначити тарифну нетто-ставку при страхуванні від вогню, якщо ймовірність настання страхового випадку рівняється р, кількість застрахованих об'єктів N, середнє значення ступеня знищення об'єкта рівняється $\overline{b}$, середньоквадратичне відхилення від середнього значення рівняється δ_b, рівень безпеки прийняти рівним g.

Завдання 5. Розрахувати тарифну нетто-ставку по страхуванню від вогню майна підприємств. Вихідні дані для розрахунку – значення збитковості по страхуванню від вогню майна підприємств за останні 5 років.

Таблиця 8

Вихідні данні

Роки	1	2	3	4	5
Збитковість	0,605+$\overline{b}$	0,706	0,725+ g	0,715	0,694+δ_b

Завдання 6. Страховик укладає договори майнового страхування. Імовірність настання страхового випадку рівняється р. Середня страхова сума рівняється $\overline{C}$. Середнє страхове відшкодування рівняється $\overline{B}$. Кількість договорів становить Кд. Частка навантаження в структурі тарифу – $Н_0$. Дані про розкид можливих страхових відшкодувань при настанні страхового випадку відсутні. Рівень безпеки прийняти рівним g. Визначити брутто-ставку на 100 г.о. страхової суми. (Дані таблиці 11).

Завдання 7. Страховик проводить страхування від нещасних випадків. Імовірність настання страхового випадку – р. Середня страхова сума – $\overline{C}$ тис. г.о., середнє страхове відшкодування – $\overline{B}$ тис. г.о. Кількість укладених договорів – Кд (N). Частка навантаження в тарифній ставці – $Н_0$ %, середнє квадратичне відхилення – δ_b г.о. Визначити тарифну ставку при гарантії безпеки g (%). (Дані таблиця 11).

Завдання 8. Розробіть страхові тарифи по добровільному страхуванню туристів від нещасних випадків. За даними статистики щороку по туристичних путівках відпочиває приблизно біля Х тис. осіб. У середньому за рік травмується А осіб. Відношення середньої передбаченої виплати до середньої очікуваної страхової суми становить – $К_{пр}$. Передбачається, що страхуванням буде охоплено Б % туристів, причому коефіцієнт відставання приймається рівним – $К_о$. Розрахуйте нетто-ставку. (Дані таблиця 12).

Таблиця 9

Вихідні дані

Варіант	p	S	$\overline{b}$	N	g	δ_b
1	0,009	10	0,6	3395	0,95	0,6
2	0,01	11	0,5	4001	0,84	0,6
3	0,007	24	0,8	2428	0,90	0,3
4	0,009	16	0,8	2937	0,99	0,6
5	0,008	25	0,2	4046	0,93	0,5
6	0,005	19	0,4	3445	0,98	0,3
7	0,005	26	0,7	2524	0,9986	0,2
8	0,009	11	0,8	3052	0,84	0,3
9	0,008	13	0,9	3120	0,95	0,6
10	0,002	21	0,5	2458	0,90	0,4
11	0,01	22	0,2	2498	0,98	0,4
12	0,007	25	0,5	2551	0,93	0,2
13	0,003	9	0,3	2322	0,95	0,5
14	0,004	28	0,7	3205	0,99	0,2
15	0,002	14	0,4	2611	0,84	0,6

Таблиця 10

Значення коефіцієнта α, який залежить від гарантії безпеки γ

γ	0,84	0,90	0,93	0,95	0,98	0,99	0,9986
α	1,0	1,3	1,48	1,645	2,0	2,33	3,0

Таблиця 11

Вихідні дані к завданням 6,7

Варіант	$\overline{C}$	$\overline{B}$	δ_b	H_0
1	4300	400	230	18
2	11000	6430	450	20
3	1600	1000	360	22
4	7200	2800	1100	24
5	9500	4100	210	26
6	1800	300	60	28
7	2500	620	320	30
8	2200	700	470	20
9	10000	3900	560	18
10	4000	1800	680	26
11	1800	550	710	24
12	12000	7150	1235	28
13	1000	800	420	30
14	1300	850	390	20
15	2600	1400	980	18

Таблиця 12

Вихідні дані к завданню 8

Варіант	Х	А	$К_{пр}$	Б	$К_о$
1	30	850	0,3	25	0,7
2	32	890	0,31	30	0,8
3	33	895	0,32	35	0,9
4	35	905	0,33	40	0,7
5	40	1000	0,3	45	0,8
6	41	1010	0,31	30	0,9
7	32	910	0,32	45	0,7
8	36	950	0,33	40	0,8
9	50	1200	0,3	40	0,9
10	41	1015	0,31	55	0,7
11	42	1030	0,32	45	0,8
12	44	1040	0,33	40	0,9
13	32	920	0,3	35	0,7
14	33	950	0,31	30	0,8
15	29	700	0,32	45	0,9

Розрахункова частина контрольної роботи №3

Тема: «Розрахунок страхових виплат»

Завдання 1. Визначити вартість контракту на дожиття строком на А років на суму В тис. грн. для чоловіка у віці С років виходячи з річної норми D %.

Завдання 2. Визначити очікувану (актуарну) поточну вартість одиничної суми при страхуванні на дожиття строком на Е років для чоловіка у віці С років виходячи з річної норми прибутковості D %.

Завдання 3. Визначити вартість довічної ренти з виплатою В тис. грн. наприкінці кожного року для чоловіка у віці F років. Річна процентна ставка – G%.

Завдання 4. Парубок у віці Н років планує одержати спеціальну або вищу освіту. Строк навчання – J років, вартість року навчання В тис. грн. Яку суму йому необхідно внести в страхову компанію перед початком навчання, щоб компанія взяла на себе оплату його навчання? Процентна ставка – G %.

Завдання 5. Чоловік у віці С років купує за К тис. грн. довічну ренту (пенсію), виплати якої починаються у віці L років. Яка величина щорічної виплати? Процентна ставка – G %.

Завдання 6. Жінка у віці C років придбала довічну страхову ренту, що передбачає щорічні виплати в розмірі M тис. грн., починаючи з віку L років. Ефективна процентна ставка $i = 5$ %. Знайти вартість поліса.

Завдання 7. Чоловік у віці C років уклав договір страхування. Знайти актуарну сучасну вартість п'ятирічної тимчасової довічної ренти, виплачуваної раз у рік наприкінці року в розмірі M тис грн. Ефективна річна процентна ставка $i = 15$ %.

Завдання 8. Батьки дівчинки (вік дівчинки – N) придбали поліс по оплаті одержання дитиною вищої освіти по досягненню нею 18 років. Строк навчання 5 років, вартість O тис. грн. у рік. Ефективна процентна ставка $i = 5$ %. Знайти вартість поліса.

Таблиця 13

Вихідні данні

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	5	7	5	5	3	7	9	3	6	4	7	7	4	4	3
B	14	28	10	26	12	7	20	28	18	10	22	12	28	10	9
C	45	41	49	41	53	35	30	27	52	46	38	55	51	30	54
D	10	10	11	15	8	14	12	12	14	14	10	9	8	11	9
E	3	4	4	2	9	6	3	4	9	6	5	7	2	2	5
F	56	59	75	71	75	58	56	69	67	49	75	75	63	56	50
G	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
H	17	18	21	25	23	25	16	29	18	20	18	27	16	23	18
J	6	3	7	6	6	3	7	6	7	4	6	8	3	8	7
K	39	67	76	54	73	65	54	69	55	67	44	65	60	42	75
L	57	70	57	60	70	56	63	66	56	69	70	65	61	70	65
M	50	45	30	46	41	51	35	38	43	49	47	36	33	44	42
N	5	9	7	8	6	10	11	5	8	9	7	6	10	9	6
O	8,5	9	10	8	7,5	15	11	12	8	9	14	6,5	10	8	7

Розрахункова частина контрольної роботи №4

Тема: «Розрахунок страхових премій»

Завдання 1. Визначити величину річних внесків при страхуванні на дожиття строком на A років на суму B тис. грн. людині (чоловікові) у віці C років виходячи з річної норми прибутковості 5 %.

Завдання 2. Страхувальник у віці C років уклав договір страхування пенсії, згідно якого починаючи з E років довічно йому буде виплачуватися пенсія в розмірі B тис. грн. на початку кожного року. Визначити розмір річних внесків, які будуть сплачуватися страхувальником, починаючи із C до E років.

Завдання 3. Розрахуйте одноразову брутто-премію для страхувальника (чоловік) у віці C років, застрахованого по змішаному страхуванню життя строком п'ять років. Норма прибутковості – Д%. Страхова сума – B тис. грн. Частка навантаження в брутто-ставці – F %.

Завдання 4. Розрахувати одноразову брутто-премію для чистого дожиття строком на A років для чоловіка у віці C років зі страхової суми B тис. грн. для річної процентної ставки 5%. Видатки придбання становлять K % від страхової суми, видатки зі зборів платежів – L % від величини платежу, адміністративні видатки – M% від страхової суми щорічної дії поліса.

Таблиця 14

Вихідні данні

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	5	7	5	5	3	7	9	3	6	4	7	7	4	4	3
B	14	28	10	26	12	7	20	28	18	10	22	12	28	10	9
C	45	41	49	41	53	35	30	27	52	46	38	55	51	30	54
D	10	10	11	15	8	14	12	12	14	14	10	9	8	11	9
E	53	54	54	62	69	56	53	64	69	56	55	67	62	52	65
F	22	24	21	25	27	24	20	19	16	18	22	23	25	28	24
K	39	67	76	54	73	65	54	69	55	67	44	65	60	42	75
L	57	70	57	60	70	56	63	66	56	69	70	65	61	70	65

Для розрахунків необхідно скористатися таблицями комутаційних функцій і таблицями смертності (додаток 1, 2).

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО КОНТРОЛЬНО-РОЗРАХУНКОВОГО ЗАВДАННЯ

Індивідуальне контрольно-розрахункове завдання містить 10 задач. Максимальна оцінка за кожну задачу 5 балів.

Критерії оцінки задач

0 – задача не вирішувалася, або були використанні формули з грубими помилками, або як такі, що не мають відношення щодо суті задачі;

1 – задача вирішувалась, але в підсумку були приведені тільки самі загальні формули та міркування або допущені грубі помилки у використанні формул; відсутність посилань на джерела інформації; відсутня логічна послідовність викладу; недостатня самостійність виконання (діагностується під час захисту).

2 – задача вирішувалася, але допущена груба помилка у формулі або в її використанні; відсутність посилань на джерела інформації; відсутня логічна послідовність викладу; недостатня самостійність виконання (діагностується під час захисту).

3 – задача вирішена в загальному вигляді або містить грубу помилку в розрахунках, або ж відсутня пряма відповідь на питання;

4 – задача вирішена в основному правильно, або без відповідних пояснень, або допущена незначна помилка (неточність), або ж відсутня оцінка правильного рішення;

5 – задача вирішена правильно з відповідними поясненнями й оцінкою результату.

Оцінку індивідуального контрольно-розрахункового завдання наведено в таблиці 15.

Таблиця 15

Оцінка індивідуального контрольно-розрахункового завдання

Оцінка / Практичний модульний контроль	Бали			
	відмінно	добре	задовільно	незадовільно
Індивідуальне контрольно-розрахункове завдання (27 розрахункових завдань)	≥ 121…135	95...120	75...94	< 75

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Кузнецова Н.Л. Актуарная математика: учеб. пособ. / Н.Л. Кузнецова, А.В. Сапожникова. – Тюмень: Издательство Тюменского государственного университета, 2010. – 180с.

2. Кутуков В.В. Основы финансовой и страховой математики: методы, расчеты кредитных, инвестиционных, пенсионных и страховых схем / В.В. Кутуков. – М.: Депо, 1998. – 304с.

3. Основи актуарних розрахунків: навчально-методичний посіб. / за ред. чл. Українського Товариства актуаріїв І.О. Ковтуна. – К.: Алеута, 2004. – 328с.

4. Пістунов І.М. Актуарні розрахунки: навч. посіб. / І.М. Пістунов. – Дніпропетровськ: Національний гірничий університет, 2004. – 167с.

5. Фалин Г.И. Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем / Г.И. Фалин. – издание 2-е, переработанное и дополненное. – М. : Анкил, 2002. – 262с.

ДОДАТОК 1

Таблиці смертності

Вік	Чоловіки			Жінки		
x	l_x	d_x	q_x	l_x	d_x	q_x
0	100000	2047	0,02047	100000	1512	0, 01512
1	97953	200	0, 00242	98488	161	0, 001635
2	97753	113	0, 001156	98327	98	0, 000997
3	97640	85	0, 000871	98229	69	0, 000702
4	97555	78	0, 0008	98160	57	0, 000581
5	97477	74	0, 000759	98103	45	0, 000459
6	97403	69	0, 000708	98058	41	0, 000418
7	97334	62	0, 000637	98017	39	0, 000398
8	97272	57	0, 000586	97978	39	0, 000398
9	97215	57	0, 000586	97939	37	0, 000378
10	97158	54	0,000556	97902	31	0, 000317
11	97104	54	0,000556	97871	31	0, 000317
12	97050	56	0,000577	97840	31	0, 000317
13	96994	63	0,00065	97809	35	0, 000358
14	96931	70	0,000722	97774	38	0, 000389
15	96861	105	0,001084	97736	47	0, 000481
16	96756	151	0,001561	97689	68	0, 000696
17	96605	208	0,002153	97621	92	0, 000942
18	96397	261	0,002708	97529	92	0, 000943
19	96136	299	0,00311	97437	93	0, 000954
20	95837	351	0,003662	97344	93	0, 000955
21	95486	379	0,003969	97251	94	0,000967
22	95107	388	0,0048	97157	95	0,000978
23	94719	375	0,003959	97062	98	0,00101
24	94344	392	0,004155	96964	98	0,001011
25	93952	441	0,004694	96866	99	0,001022
26	93511	473	0,005058	96767	107	0,001106
27	93038	529	0,005686	96660	132	0,001366
28	92509	543	0,00587	96528	137	0,001419
29	91966	547	0,005948	96391	138	0,001432
30	91419	597	0,00653	96253	149	0,001548
31	90822	639	0,007037	96104	164	0,001706
32	90183	695	0,007707	95940	172	0,001793
33	89488	757	0,008459	95768	180	0,00188
34	88731	797	0,008982	95588	197	0,002061
35	87934	832	0,009462	95391	218	0,002285
36	87102	905	0,01039	95173	234	0,002459
37	86197	907	0,010522	94939	250	0,002633
38	85290	940	0,011021	94689	267	0,00282

Продовження дод. 1

39	84350	1006	0,011926	94422	279	0,002955
40	83344	1145	0,013738	94143	310	0,003293
41	82199	1198	0,014574	93833	344	0,003666
42	81001	1194	0,014741	93489	382	0,004086
43	79807	1208	0,015137	93107	417	0,004479
44	78599	1212	0,01542	92690	458	0,004941
45	77387	1292	0,016695	92232	449	0,004868
46	76095	1394	0,018319	91781	481	0,005241
47	74701	1379	0,01846	91302	512	0,005608
48	73322	1432	0,01953	90790	547	0,006025
49	71890	1536	0,021366	90243	571	0,006327
50	70354	2001	0,028442	89672	680	0,007583
51	68353	2107	0,030825	88992	847	0,009518
52	66246	2156	0,032545	88145	884	0,010029
53	64090	2143	0,033437	87261	966	0,01107
54	61947	2088	0,033706	86295	959	0,011113
55	59859	2028	0,03388	85336	949	0,011121
56	57831	1974	0,034134	84387	952	0,011281
57	55857	1917	0,03432	83435	954	0,011434
58	53940	1870	0,034668	82481	1009	0,012233
59	52070	1824	0,03503	81472	1012	0,012421
60	50246	2127	0,042332	80460	1121	0,013932
61	48119	2458	0,051082	79339	1334	0,016814
62	45661	2395	0,052452	78005	1499	0,019217
63	43266	2309	0,053368	76506	1621	0,021188
64	40957	2234	0,054545	74885	1745	0,023302
65	38723	2167	0,055962	73140	1785	0,024405
66	36556	2055	0,056215	71355	1812	0,025394
67	34501	2009	0,05823	69543	1834	0,026372
68	32492	1955	0,060169	67709	1844	0,027234
69	30537	1933	0,0633	65865	1914	0,029059
70	28604	1933	0,067578	63951	2075	0,032447
71	26671	1902	0,071313	61876	2198	0,035523
72	24769	1820	0,073479	59678	2375	0,039797
73	22949	1803	0,078566	57303	2515	0,043889
74	21146	1735	0,082049	54778	2712	0,0495
75	19411	1782	0,091804	52076	2987	0,057358
76	17629	1831	0,103863	49089	3173	0,064638
77	15798	1762	0,111533	45916	3337	0,072676
78	14036	1734	0,123539	42579	3538	0,083093
79	12302	1687	0,137132	39041	3399	0,087062

Продовження дод.1

80	10615	1461	0,137635	35642	3301	0,092615
81	9154	1283	0,140157	32341	3287	0,101636
82	7871	1153	0,146487	29054	3224	0,110966
83	6718	1078	0,160464	25830	3156	0,122184
84	5640	960	0,170213	22674	3151	0,13897
85	4680	861	0,183974	19523	3001	0,153716
86	3819	791	0,207122	16522	2919	0,176674
87	3028	640	0,211361	13603	2618	0,192458
88	2388	529	0,221524	10985	2302	0,209558
89	1859	431	0,231845	8683	1979	0,227917
90	1428	348	0,243697	6704	1659	0,247464
91	1080	275	0,25463	5045	1355	0,268583
92	805	208	0,258385	3690	1083	0,290786
93	597	158	0,264657	2617	823	0,314482
94	439	138	0,314351	1794	610	0,340022
95	301	95	0,315615	1184	434	0,366554
96	206	66	0,320388	750	296	0,394667
97	140	45	0,321429	454	192	0,422907
98	95	32	0,336842	262	119	0,454198
99	63	22	0,349206	143	70	0,48951
100	41	41	1	73	73	1

ДОДАТОК 2

Таблиці комутаційних функцій

Чоловіки				Річна процентна ставка – 5%			
Вік x	D_x	N_x	C_x	M_x	R_x	a_x	A_x
0	100000	1887590	1949,524	10114,77	342608,9	17,8759	0,101148
1	93288,57	1787590	181,4059	8165,244	332494,2	18,16194	0,087527
2	88664,85	1694301	97,61365	7983,838	324328,9	18,10905	0,090045
3	84345,10	1605636	69,92971	7886,224	316345,1	18,03651	0,093499
4	80258,74	1521291	61,11504	7816,294	308458,9	17,95484	0,097389
5	76375,78	1441033	55,21994	7755,179	300642,6	17,86766	0,10154
6	72683,62	1364657	49,03701	7699,959	292887,4	17,7753	0,105938
7	69173,46	1291973	41,96404	7650,922	285187,4	17,6773	0,110605
8	65837,52	1222800	36,74271	7608,958	277536,5	17,57299	0,115572
9	62665,66	1156962	34,99306	7572,216	269927,6	17,46246	0,120835
10	59646,58	1094297	31,57268	7537,223	262355,3	17,34634	0,126365
11	56774,70	1034650	30,06922	7505,65	254818,1	17,22379	0,132201
12	54041,07	977875,3	29,698	7475,581	247312,5	17,09504	0,138331
13	51437,99	923834,2	31,81928	7445,883	239836,9	16,96015	0,144755
14	48956,74	872396,2	33,6712	7414,063	232391	16,81974	0,151441
15	46591,80	823439,5	48,10171	7380,392	224976,9	16,67349	0,158405
16	44325,04	776847,7	65,8808	7332,29	217596,5	16,52616	0,165421
17	42148,44	732522,7	86,4283	7266,41	210264,3	16,37959	0,1724
18	40054,94	690374,2	103,2866	7179,981	202997,8	16,23568	0,179253
19	38044,28	650319,3	112,69	7076,695	195817,9	16,09375	0,186012
20	36119,96	612275	125,9888	6964,005	188741,2	15,95116	0,192802
21	34273,97	576155	129,5611	6838,016	181777,2	15,81028	0,19951

22	32512,32	541881,1	126,3217	6708,455	174939,2	15,66695	0,206336
23	30837,79	509368,8	116,2755	6582,133	168230,7	15,51768	0,213444
24	29253,05	478531	115,7587	6465,858	161648,6	15,35833	0,221032
25	27744,29	449277,9	124,0272	6350,099	155182,7	15,19353	0,22888
26	26299,10	421533,6	126,6923	6226,072	148832,6	15,02844	0,236741
27	24920,07	395234,5	134,9445	6099,38	142606,5	14,86009	0,244758
28	23598,46	370314,5	131,9199	5964,435	136507,2	14,69232	0,252747
29	22342,80	346716	126,5635	5832,515	130542,7	14,51802	0,261047
30	21152,29	324373,2	131,5546	5705,952	124710,2	14,33513	0,269756
31	20013,49	303220,9	134,1045	5574,397	119004,3	14,15083	0,278532
32	18926,36	283207,4	138,9114	5440,293	113429,9	13,96365	0,287445
33	17886,19	264281,1	144,0986	5301,381	107989,6	13,7757	0,296395
34	16890,37	246394,9	144,4884	5157,283	102688,2	13,58789	0,305339
35	15941,58	229504,5	143,651	5012,794	97530,9	13,3966	0,314448
36	15038,81	213562,9	148,8142	4869,144	92518,1	13,20079	0,323772
37	14173,86	198524,1	142,0411	4720,329	87648,96	13,00636	0,333031
38	13356,87	184350,3	140,1991	4578,288	82928,63	12,8019	0,342767
39	12580,63	170993,4	142,898	4438,089	78350,34	12,5918	0,352772
40	1 1838,66	158412,7	154,8974	4295,191	73912,25	12,38097	0,362811
41	11120,01	146574,1	154,3499	4140,294	69617,06	12,18111	0,372328
42	10436,14	135454,1	146,5091	3985,944	65476,77	11,97933	0,381937
43	9792,67	125017,9	141,1685	3839,435	61490,83	11,76648	0,392072
44	9185,184	115225,3	134,8914	3698,266	57651,39	11,54469	0,402634
45	8612,903	106040,1	136,9477	3563,375	53953,12	11,31177	0,413725

46	8065,817	97427,19	140,7232	3426,427	50389,75	11,07902	0,424808
47	7541,007	89361,37	132,58	3285,704	46963,32	10,85006	0,435712
48	7049,332	81820,36	131,1195	3153,124	43677,62	10,60683	0,447294
49	6582,53	74771,03	133,9449	3022,005	40524,49	10,35901	0,459095
50	6135,131	68188,5	166,1854	2888,06	37502,49	10,11443	0,470741
51	5676,797	62053,37	166,656	2721,874	34614,43	9,931054	0,479474
52	5239,817	56376,57	162,4112	2555,218	31892,56	9,759264	0,487654
53	4827,891	51136,76	153,7447	2392,807	29337,34	9,591946	0,495622
54	4444,246	46308,86	142,6655	2239,062	26944,53	9,419959	0,503811
55	4089,95	41864,62	131,9676	2096,397	24705,47	9,235973	0,512573
56	3763,223	37774,67	122,3368	1964,429	22609,07	9,03785	0,522007
57	3461,685	34011,44	113,1469	1842,092	20644,64	8,825112	0,532138
58	3183,696	30549,76	105,117	1728,946	18802,55	8,59569	0,543062
59	2926,974	27366,06	97,6488	1623,829	17073,6	8,349608	0,554781
60	2689,946	24439,09	108,4477	1526,18	15449,78	8,085346	0,567364
61	2453,406	21749,14	119,3563	1417,732	13923,6	7,864879	0,577863
62	2217,22	19295,74	110,7592	1298,376	12505,86	7,70267	0,585587
63	2000,879	17078,52	101,6972	1187,617	11207,49	7,535506	0,593547
64	1803,902	15077,64	93,70844	1085,919	10019,87	7,358345	0,601984
65	1624,294	13273,74	86,56955	992,211	8933,951	7,172005	0,610857
66	1460,377	11649,44	78,18596	905,6415	7941,74	6,977011	0,620142
67	1312,649	10189,07	72,79601	827,4555	7036,099	6,762216	0,630371
68	1177,346	8876,416	67,46603	754,6595	6208,643	6,539344	0,640984
69	1053,816	7699,07	63,5303	687,1935	5453,984	6,305897	0,6521

70	940,1039	6645,254	60,50505	623,6632	4766,79	6,068639	0,663398
71	834,832	5705,15	56,69973	563,1581	4143,127	5,833891	0,674577
72	738,3783	4870,319	51,67168	506,4584	3579,969	5,595966	0,685906
73	651,5458	4131,94	48,75146	454,7867	3073,511	5,34175	0,698012
74	571,7683	3480,394	44,67886	406,0353	2618,724	5,087071	0,710139
75	499,8624	2908,626	43,70398	361,3564	2212,689	4,818853	0,722912
76	432,3555	2408,764	42,76735	317,6524	1851,332	4,571258	0,734702
77	368,9998	1976,408	39,19589	274,8851	1533,68	4,356123	0,744947
78	312,2324	1607,408	36,73622	235,6892	1258,795	4,148115	0,754852
79	260,628	1295,176	34,03856	198,953	1023,106	3,969443	0,76336
80	214,1786	1034,548	28,07482	164,9144	824,1526	3,830305	0,769985
81	175,9048	820,3694	23,48033	136,8396	659,2382	3,663712	0,777918
82	144,0481	644,4646	20,09636	113,3593	522,3986	3,473956	0,786954
83	117,0923	500,4165	17,89442	93,2629	409,0393	3,273695	0,796491
84	93,62201	383,3243	15,17682	75,36848	315,7764	3,094382	0,805029
85	73,987	289,7023	12,96353	60,19166	240,408	2,915583	0,813544
86	57,50028	215,7153	1 1,34247	47,22812	180,2163	2,751552	0,821355
87	43,4197	158,215	8,740206	35,88566	132,9882	2,643852	0,826483
88	32,61189	114,7953	6,880311	27,14545	97,10253	2,520044	0,832379
89	24,17863	82,18339	5,338759	20,26514	69,95708	2,399009	0,838142
90	17,68851	58,00476	4,105377	14,92638	49,69194	2,279233	0,843846
91	12,74082	40,31625	3,089706	10,821	34,76556	2,164336	0,849317
92	9,044413	27,57542	2,225658	7,731297	23,94456	2,04889	0,854815
93	6,388068	18,53101	1,610138	5,505639	16,21326	1,900879	0,861863

Продовження дод.2

94	4,473737	12,14294	1,339355	3,895501	10,70762	1,714273	0,870749
95	2,921347	7,669204	0,878114	2,556146	6,812123	1,625229	0,874989
96	1,904121	4,747858	0,581008	1,678032	4,255977	1,493465	0,881264
97	1,232441	2,843737	0,377278	1,097025	2,577945	1,307403	0,890124
98	0,796475	1,611296	0,255511	0,719747	1,48092	1,023034	0,903665
99	0,503037	0,814821	0,167299	0,464236	0,761173	0,619803	0,922867
100	0,311784	0,311784	0,296937	0,296937	0,296937	0	0,952381
Жінки				Річна процентна ставка – 5%			
Вік x	D_x	N_x	C_x	M_x	R_x	a_x	A_x
0	100000	1977650	1440	5826,207	226663,7	18,7765	0,058262
1	93798,1	1877650	146,0317	4386,207	220837,4	19,01799	0,046762
2	89185,49	1783852	84,65608	4240,176	216451,2	19,00159	0,047543
3	84853,9	1694666	56,76647	4155,52	212211,1	18,97157	0,048973
4	80756,47	1609812	44,66099	4098,753	208055,5	18,93416	0,050754
5	76866,27	1529056	33,57969	4054,092	203956,8	18,89241	0,052742
6	73172,39	1452189	29,13793	4020,512	199902,7	18,84614	0,054946
7	69658,85	1379017	26,39674	3991,374	195882,2	18,79672	0,057299
8	66315,37	1309358	25,13975	3964,978	191890,8	18,74442	0,05979
9	63132,35	1243043	22,71479	3939,838	187925,8	18,68947	0,062406
10	60103,34	1179910	18,12506	3917,123	183986	18,63136	0,065173
11	57223,15	1119807	17,26196	3898,998	180068,9	18,56913	0,068137
12	54480,97	1062584	16,43996	3881,736	176169,9	18,50376	0,071249
13	51870,2	1008103	17,67738	3865,296	172288,1	18,43511	0,074519
14	49382,51	956232,8	18,27865	3847,619	168422,8	18,36379	0,077915

15	47012,69	906850,3	21,53124	3829,34	164575,2	18,28948	0,081453
16	44752,46	859837,6	29,66817	3807,809	160745,9	18,21319	0,085086
17	42591,72	815085,1	38,2279	3778,141	156938,1	18,13717	0,088706
18	40525,31	772493,4	36,40752	3739,913	153159,9	18,062	0,092286
19	38559,13	731968,1	35,05072	3703,505	149420	17,983	0,096047
20	36687,93	693409	33,38164	3668,455	145716,5	17,90019	0,099991
21	34907,5	656721	32,13389	3635,073	142048,1	17,81318	0,104134
22	33213,11	621813,5	30,92927	3602,939	138413	17,72193	0,108479
23	31600,6	588600,4	30,38666	3572,01	134810,1	17,62624	0,113036
24	30065,42	556999,8	28,93967	3541,623	131238	17,52626	0,117797
25	28604,8	526934,4	27,84283	3512,683	127696,4	17,42119	0,1228
26	27214,82	498329,6	28,65977	3484,841	124183,7	17,31096	0,128049
27	25890,22	471114,8	33,67236	3456,181	120698,9	17,19663	0,133494
28	24623,68	445224,6	33.28365	3422,509	117242,7	17,08116	0,138993
29	23417,84	420600,9	31,93009	3389,225	113820,2	16,9607	0,144728
30	22270,77	397183,1	32,83356	3357,295	110431	16,83427	0,150749
31	21177,43	374912,3	34,41805	3324,461	107073,7	16,70339	0,156981
32	20134,56	353734,9	34,37808	3290,043	103749,2	16,56854	0,163403
33	19141,39	333600,3	34,26386	3255,665	100459,2	16,42821	0,170085
34	18195,63	314458,9	35,71419	3221,401	97203,52	16,28211	0,177043
35	17293,46	296263,3	37,63932	3185,687	93982,11	16,13152	0,184213
36	16432,32	278969,8	38,47794	3148,048	90796,43	15,97689	0,191577
37	15611,35	262537,5	39,15134	3109,57	87648,38	15,81709	0,199186
38	14828,81	246926,1	39,82251	3070,418	84538,81	15,65179	0,207058

Продовження дод.2

39	14082,85	232097,3	39,63075	3030,596	81468,39	15,48085	0,215198
40	13372,61	218014,5	41,9373	2990,965	78437,8	15,30306	0,223664
41	12693,88	204641,9	44,32083	2949,028	75446,83	15,1213	0,232319
42	12045,09	191948	46,87308	2904,707	72497,8	14,93579	0,241153
43	11424,64	179902,9	48,73118	2857,834	69593,1	14,74692	0,250147
44	10831,88	168478,3	50,9738	2809,103	66735,26	14,55393	0,259337
45	10265,1	157646,4	47,59251	2758,129	63926,16	14,35751	0,26869
46	9728,693	147381,3	48,55657	2710,537	61168,03	14,14914	0,278613
47	9216,865	137652,6	49,22476	2661,98	58457,49	13,93486	0,288816
48	8728,742	128435,7	50,08546	2612,755	55795,51	13,71412	0,299328
49	8263,002	119707	49,79333	2562,67	53182,76	13,48711	0,310138
50	7819,733	111444	56,47479	2512,876	50620,09	13,25164	0,321351
51	7390,89	103624,2	66,99461	2456,402	48107,21	13,02054	0,332355
52	6971,948	96233,36	66,59159	2389,407	45650,81	12,80294	0,342717
53	6573,359	89261,41	69,30347	2322,815	43261,4	12,57927	0,353368
54	6191,038	82688,05	65,52502	2253,512	40938,59	12,35609	0,363996
55	5830,702	76497,01	61,75405	2187,987	38685,08	12,11969	0,375253
56	5491,295	70666,31	58,99931	2126,233	36497,09	1 1,86879	0,387201
57	5170,806	65175,02	56,30786	2067,234	34370,86	11,60442	0,399789
58	4868,269	60004,21	56,71821	2010,926	32303,62	1 1,32557	0,413068
59	4579,729	55135,94	54,17795	1954,207	30292,7	11,03913	0,426708
60	4307,468	50556,21	57,15554	1900,03	28338,49	10,73687	0,441101
61	4045,195	46248,74	64,77677	1842,874	26438.46	10,43301	0,455571
62	3787,79	42203,55	69,32275	1778,097	24595,59	10,142	0,469429

Продовження дод.2

63	3538,096	38415,76	71,39501	1708,774	22817,49	9,857748	0,482964
64	3298,221	34877,66	73,19661	1637,379	21108,71	9,574691	0,496443
65	3067,966	31579,44	71,30902	1564,183	19471,34	9,293284	0,509811
66	2850,563	28511,48	68,94062	1492,874	17907,15	9,00205	0,523712
67	2645,881	25660,91	66,4549	1423,933	16414,28	8,698437	0,53817
68	2453,432	23015,03	63,63547	1357,478	14990,35	8,380749	0,553298
69	2272,967	20561,6	62,90584	1293,843	13632,87	8,046151	0,56923
70	2101,824	18288,63	64,94981	1230,937	12339,02	7,701314	0,585652
71	1936,788	16186,81	65,52366	1165,987	11108,09	7,357555	0,602021
72	1779,036	14250,02	67,4287	1100,464	9942,1	7,009968	0,618573
73	1626,891	12470,99	68,00328	1033,035	8841,637	6,665531	0,634975
74	1481,417	10844,09	69,83807	965,0315	7808,602	6,320082	0,651425
75	1341.035	9362,677	73,25689	895,1935	6843,57	5,981679	0,667539
76	1203,92	8021,642	74,11294	821,9366	5948,377	5,662939	0,682717
77	1072,477	6817,723	74,23195	747,8236	5126,44	5,356987	0,697286
78	947,1748	5745,245	74,95545	673,5917	4378,617	5,065666	0,711159
79	827,1158	1798,071	68,58154	598,6362	3705,025	4,800966	0,723764
80	719,1478	3970,955	63.43257	530,0547	3106,389	4,521751	0,737059
81	621,4701	3251,807	60,15575	466,6221	2576,334	4,232444	0,750836
82	531,7205	2630,337	56,19313	406,4664	2109,712	3,946842	0,764436
83	450,2074	2098,617	52,38849	350,2732	1703,246	3,661444	0,778026
84	376,3804	1648,409	49,81475	297,8847	1352,972	3,379636	0,791446
85	308,6428	1272,029	45,18417	248,07	1055,088	3,121362	0,803745
86	248,7613	963,386	41,85671	202,8858	807,0176	2,872732	0,815584

Продовження дод.2

87	195,0589	714,6247	35,7529	161,0291	604,1317	2,663636	0,825541
88	150,0174	519,5658	29,94041	125,2762	443,1026	2,463369	0,835078
89	112,9333	369,5484	24,5137	95,3358	317,8264	2,27227	0,844178
90	83,04186	256,615	19,57132	70,8221	222,4906	2,090189	0,852848
91	59,51617	173,5732	15,22382	51,25078	151,6685	1,916403	0,861124
92	41,45824	114,057	11,4814	36,02695	100,4177	1,75113	0,868994
93	28,00264	72,59875	8,386982	24,54555	64,39079	1,592569	0,876544
94	18,28219	44,59612	5,920337	16,15857	39,84524	1,43932	0,883842
95	11,49128	26,31392	4,011594	10,23823	23,68667	1,289904	0,890957
96	6,932479	14,82264	2,605732	6,226639	13,44843	1,138145	0,898184
97	3,996629	7,890166	1,609718	3,620907	7,221796	0,974205	0,90599
98	2,196595	3,893537	0,950181	2,011188	3,600889	0,772533	0,915594
99	1,141814	1,696942	0,532314	1,061007	1,589701	0,48618	0,92923
100	0,555128	0,555128	0,528693	0,528693	0,528693	0	0,952381

Додаток 3

Довідковий матеріал

Ренти	
Приведена (пренумерандо)	Звичайна (постнумерандо)
довічні	
$\ddot{a}_x = \dfrac{N_x}{D_x}$	$a_x = \dfrac{N_{x+1}}{D_x}$
термінові	
$\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert} = \dfrac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$	$a_{x:\overline{n}\rvert} = \dfrac{N_{x+1} - N_{x+1+n}}{D_x}$
відкладені	
${}_{m\rvert}\ddot{a}_x = \dfrac{N_{x+m}}{D_x}$	${}_{m\rvert}a_x = \dfrac{N_{x+m+1}}{D_x}$
відкладені термінові	
${}_{m\rvert}\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert} = \dfrac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}$	${}_{m\rvert}a_{x:\overline{n}\rvert} = \dfrac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x}$
ренти, що виплачуються декілька раз за рік (прості формули)	
$\ddot{a}^{(q)}_{x:\overline{n}\rvert} = \ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert} - \dfrac{q-1}{2q}\left(1 - \dfrac{D_{x+n}}{D_x}\right)$	$a^{(q)}_{x:\overline{n}\rvert} = a_{x:\overline{n}\rvert} + \dfrac{q-1}{2q}\left(1 - \dfrac{D_{x+n}}{D_x}\right)$
ренти, що виплачуються декілька раз за рік (точні формули)	
$\ddot{a}^{(q)}_{x:\overline{n}\rvert} = \alpha(q)\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert} - \beta(q)\left(1 - \dfrac{D_{x+n}}{D_x}\right)$	$a^{(q)}_{x:\overline{n}\rvert} = \alpha(q)\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert} - \left(\beta + \dfrac{1}{q}\right)\left(1 - \dfrac{D_{x+n}}{D_x}\right)$
де $\alpha(q) = \dfrac{id}{i^{(q)}d^{(q)}}$; $\beta(q) = \dfrac{i - i^{(q)}}{i^{(q)}d^{(q)}}$; $i^{(q)}, d^{(q)}$ – фактичні процентна й дисконтна ставки за період, рівний $1/q$ частини року, обумовлені формулами: $i^{(q)} = q\left(1+i_e\right)^{1/q} - q$; $i_e = \left(1 + i/q\right)^q - 1$ (ефективна процентна ставка); $d^{(q)} = q - q\left(1-d_e\right)^{1/q}$; $d_e = 1 - v$ (ефективна річна облікова ставка).	
безперервні ренти	
$\bar{a}_{x:\overline{n}\rvert} = a_{x:\overline{n}\rvert} + \dfrac{D_x - D_{x+n}}{2D_x} = \ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert} - \dfrac{D_x - D_{x+n}}{2D_x} = \dfrac{a_{x:\overline{n}\rvert} + \ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}}{2}$	

Цуркан Ірина Миколаївна
Федорова Оксана Геннадіївна

АКТУАРНІ РОЗРАХУНКИ

Методичні рекомендації
до самостійного виконання практичних завдань з дисципліни
студентами напряму підготовки 6.030508 Фінанси і кредит

Видано за редакцією авторів.

Підп. до друку 05.12.2014. Формат 30х42/4.
Папір офсет. Ризографія. Ум. друк. арк. 4,4.
Обл.-вид. арк. 3,2. Тираж 30 пр. Зам. №

ДВНЗ «Національний гірничий університет»
49005, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19