

3. Сергеева Е.Л. Информационная технология классификации типов земного покрова терриконовых ландшафтов по данным мультиспектральной космической съемки / Е.Л. Сергеева // Проблемы информатизации и управления. – 2010. – №4(32). – С. 93 – 99.
4. Busygin B. Using the space survey data for fire objects monitoring of the Donetsk coal basin / B. Busygin, I. Garkusha, K. Sergieieva // Proceedings of International Symposium on Environmental Issues and Waste Management in Energy and Mineral Production SWEMP 2010. – May 24-26, 2010. – Prague: Lesnicka prace. – P. 25 – 30;
5. Сарычева Л.В. Компьютерный эколого-социально-экономический мониторинг регионов. Математическое обеспечение / Л.В. Сарычева // – Днепропетровск: НГУ. – 2003. – 222 с.

*Рекомендовано до публікації д.т.н. Бусигінім В.С.  
Надійшла до редакції 18.05.2013*

УДК 539.3

© О.В. Белова

## **МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ В ПРИЛОЖЕНИИ К ЗАДАЧАМ МЕХАНИКИ**

Проанализированы этапы развития метода возмущений при решении задач механики. Решена задача о вдавливании штампа в упругую ортотропную пластину с цилиндрической анизотропией. Получено распределение напряжений под штампом, а также напряжений в пластине. Исследовано влияние на распределение напряжений под штампом отношения размера штампа к размеру свободной границы пластины.

Проаналізовані етапи розвитку методу збурень при розв'язанні задач механіки. Розв'язана задача про вдавлювання штампі в пружну ортотропну пластину з циліндричною анізотропією. Отримано розподіл напружень під штампі, а також напруження у пластині. Досліджений вплив на розподіл напруження під штампі відношення розміру штампі до розміру вільної границі пластины.

Stages of development of a method of perturbations are analyzed at a solution of problems of mechanics. The problem about impression of a stamp in an elastic orthotropic plate with cylindrical anisotropy is solved. Laws of the change tensions under a stamp and also the tension in the plate are obtained. Influence on distribution of voltages under a stamp of the ration of a size of a stamp to a size of free boundary of a plate is investigated.

**Введение.** В настоящее время особый интерес вызывают конструкции из современных композиционных материалов. Проблемы контакта тел из таких материалов определяют процессы прочности и долговечности сооружений. Анизотропия материала конструкций приводит к серьезным трудностям математического характера. В этой ситуации наиболее целесообразно пользоваться приближенными аналитическими подходами. Одним из таких подходов является метод малого параметра или метод возмущений, позволяющий находить решение, близкое к точному. При этом выбор малого параметра может быть основан на геометрических или физических свойствах материала.

Основные этапы развития метода возмущений отражены в монографиях [1–3]. Широкое применение этот асимптотический метод получил в различных

разделах механики, физики, математики, а именно таких, как небесная механика, теория колебаний, устойчивость движения. Относительно недавно метод возмущений стал использоваться для решения краевых задач деформируемых тел со сложными физико-механическими свойствами. В теории устойчивости трехмерных деформируемых тел метод возмущений затрагивался в работах А.Н. Спорыхина [4], М.Т. Алимжанова. А.П. Соколов, решив задачу в первом приближении о двухосном растяжении тонкой пластины с круглым отверстием при условии пластичности Треска Сен-Венана, первым применил метод малого параметра для решения упругопластических задач.

Помимо линеаризации нелинейных уравнений теории пластичности, входящих в математическую модель рассматриваемого процесса, метод малого параметра позволяет учитывать сложную геометрию области контакта, влияние неидеальных свойств материала и другие факторы. Решения некоторых упругопластических задач, полученных методом малого параметра, изложены в монографии Г.Н. Савина [5].

Сходимость метода была исследована Ивлевым на основе двух примеров, имеющих точные решения. Им было проведено разложение точных решений по малому параметру, представляющему собой разность между растягивающими усилиями, и их сравнение с решениями, полученными методом малого параметра.

Отечественными учеными асимптотический метод для решения задач был предложен впервые в 1959 году И.И. Воровичем. В его работе была рассмотрена осесимметричная задача для упругого слоя. В.М. Александровым [6] данный метод использовался для исследования задач о вдавливании штампа в упругую полосу. Однако, при выборе малого параметра авторы использовали, в основном, геометрические свойства контактирующих тел или случаи слабо выраженной анизотропии, например, как в работах С.Г. Лехницкого [7]. Наличие сильной анизотропии приводило к непреодолимым математическим трудностям, что побуждало искать новые подходы к решению задач теории упругости.

Асимптотический метод, предложенный в работах Л.И. Маневича и А.В. Павленко [8], позволяет свести исходную смешанную задачу теории упругости к последовательности краевых задач теории потенциала. Здесь выбор малого параметра был связан с физическими свойствами материала, что позволило учитывать сильную анизотропию. Решение представляется в виде двух составляющих, каждая из которых является решением краевой задачи для гармонического уравнения. При этом часть заданных краевых условий выполняется при решении одной краевой задачи, а остальные – при другой. Решение получается в виде ряда по малому параметру, представляющему отношение жесткостных характеристик. При расширении полосы до полуплоскости, построенные ряды сходятся к точному решению. Применение метода возмущений к решению как линейных, так и нелинейных задач теории упругости отражено в работах Т.С. Кагадий, И.В. Щербины [9, 10].

**Основные идеи предложенного метода возмущений.** Пусть пластина, обладающая цилиндрической анизотропией, имеет в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости  $xOy$  и занимает конечную или бесконечную область. Пластина работает в условиях обобщенного

плоского напряженного состояния, является ортотропной, причем основные направления упругости совпадают с криволинейными изометрическими координатами.

Вопрос о напряженно-деформированном состоянии (НДС) упругой анизотропной пластины сводится к интегрированию уравнений равновесия пластины (1) при соответствующих граничных условиях.

$$\begin{aligned} B_1 u_{\xi\xi} + Gu_{\eta\eta} - B_2(v_{\eta} + u) + Gmv_{\xi\eta} - Gv_{\eta} &= 0, \\ Gv_{\xi\xi} + B_2 v_{\eta\eta} + B_2 u_{\eta} + Gmu_{\xi\eta} + G(u_{\eta} - v) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u = u_r; v = u_{\theta}$  – компоненты перемещений пластины;  $m = 1 + \vartheta_2 B_1 / G = 1 + \vartheta_1 B_2 / G$ ;  $B_1, B_2$  – жесткость пластины на растяжение-сжатие;  $G$  – жесткость пластины на сдвиг; индексы  $\xi, \eta$  означают дифференцирование по соответствующим координатам.

В качестве малого параметра  $\varepsilon$  выбирается отношение  $G/B_1$ , которое характеризует анизотропию материала.

Чтобы учесть возможные соотношения между компонентами вектора перемещений и скоростями их изменения по координатам, вводятся аффинные преобразования переменных, которые зависят от параметра  $\varepsilon$ .

$$\begin{aligned} \xi_1 = \alpha\xi, \quad \eta_1 = \varepsilon^{-1/2}\eta, \quad u = U^{(1)}, \quad v = \varepsilon^{1/2}V^{(1)}, \\ \xi_2 = \beta\varepsilon^{-1}\xi, \quad \eta_2 = \varepsilon^{-1/2}\eta, \quad u = \varepsilon^{3/2}U^{(2)}, \quad v = \varepsilon^{1/2}V^{(2)}. \end{aligned}$$

После подстановки каждого из преобразований в систему (1), а также в граничные условия, компоненты вектора перемещений, а также нормальные и касательные напряжения определяются суперпозицией составляющих, которые соответствуют двум типам НДС.

$$\begin{aligned} u = u^{(1)} + u^{(2)} = U^{(1)} + \varepsilon^{3/2}U^{(2)}; \quad v = v^{(1)} + v^{(2)} = \varepsilon^{1/2}(V^{(1)} + V^{(2)}), \\ \sigma_1 = \sigma_1^{(1)} + \sigma_1^{(2)}, \quad \sigma_2 = \sigma_2^{(1)} + \sigma_2^{(2)}, \quad \tau = \tau^{(1)} + \tau^{(2)}, \end{aligned}$$

где  $\sigma_1; \tau$  – нормальное и касательное напряжения в пластине.

Учитывается, что функции  $U^{(k)}, V^{(k)}$ , ( $k = 1, 2$ ), а также величины  $\alpha; \beta$  раскладываются в ряды по малому параметру  $\varepsilon^{1/2}$ .

В соответствии с расщеплением НДС пластины на две составляющие, поставленная краевая задача в нулевом приближении будет сводиться к последовательному решению двух следующих (в исходных переменных):

**напряженно-деформированное состояние первого типа:**

$$B_1 u_{\xi\xi}^{1,0} + Gu_{\eta\eta}^{1,0} = 0, \quad (2)$$

$$v_{\eta\eta}^{1,0} + u^{1,0} = 0 \quad (3)$$

и напряженно-деформированное состояние второго типа:

$$Gv_{\xi\xi\xi}^{2,0} + B_2v_{\eta\eta}^{2,0} = 0; \quad u_{\xi\xi\xi}^{2,0} = 0 \quad (4)$$

при соответствующих граничных условиях.

В НДС первого типа основной переменной является компонента перемещений  $u$  и, определяемые из нее, составляющая касательного напряжения и нормальное напряжение  $\sigma_1$ , а во втором состоянии основной является компонента перемещений  $v$  и соответствующие касательные и нормальные напряжения. При решении уравнений (2), (4) применяется косинус-преобразование Фурье по координате  $\xi$ .

**Задача о вдавливании штампа в ортотропную пластину с цилиндрической анизотропией (рис. 1).**

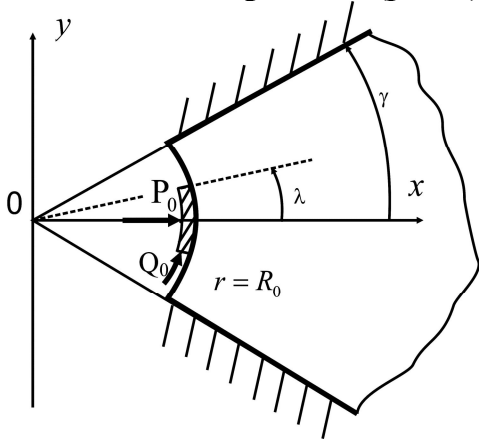


Рис. 1. Пластина со штампом

Упругая пластина ( $R_0 \leq r \leq \infty; -\gamma \leq \theta \leq \gamma$ ) закреплена по кромкам  $\theta = \pm\gamma$ . На границу  $r = R_0$  действует жесткий штамп с основанием, которое совпадает с  $r = R_0$  ( $-\lambda \leq \theta \leq \lambda$ ). Штамп нагружен нормальным усилием  $P_0$  и касательным  $Q_0$ . При этом между штампом и пластиной учитывается трение (рассматривается состояние предельного равновесия штампа). На бесконечности ( $r \rightarrow \infty$ ) перемещения и деформации равны нулю. Решение этой задачи осуществляется с помощью отображения сектора на полуплоскость и сводится к решению смешанной краевой задачи теории аналитических функций для полуплоскости [11]. Интегрирование уравнений (1) осуществляется при выполнении следующих граничных условий:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= B_1 (R_0 e^\xi)^{-1} (u_\xi + \mathcal{G}_2(v_\eta + u)) = 0, \\ \tau &= G (R_0 e^\xi)^{-1} (u_\eta + v_\xi - v) = 0 \quad (\xi = 0, \lambda \leq |\eta| \leq \gamma), \\ u &= v = 0 \quad (\eta = \pm\gamma), \\ u &= C_0, \tau = \rho \sigma_1 \quad (\xi = 0, |\eta| < \lambda), \end{aligned}$$

где  $\rho$  – коэффициент трения ( $\rho < 1$ ). На бесконечности перемещения и напряжения стремятся к нулю. Выполняются условия равновесия штампа

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \sigma_1(0, \eta) d\eta + P_0 = 0, \quad \int_{-\lambda}^{\lambda} \tau(0, \eta) d\eta + Q_0 = 0.$$

Задача решается отображением полуполосы из плоскости  $z_1$  ( $z_1 = y_1 + ix_1$ ) в верхнюю полуплоскость изображений  $\zeta_1$  ( $\zeta_1 = \eta_1 + i\xi_1$ ). Указанное отображение можно выполнять при помощи преобразования Шварца-Кристоффеля [11]. Если требовать, чтобы начало координат сохраняло свое положение, а точки  $z_1 = \pm\gamma$  переходили в точки  $\zeta_1 = \pm 1$ , то функция отображения будет иметь вид

$$\zeta_1 = \sin \frac{\pi z_1}{2\gamma}.$$

Ее действительная и мнимая части записываются следующим образом:

$$\eta_1 = \sin \frac{\pi y_1}{2\gamma} \operatorname{ch} \frac{\pi x_1}{2\gamma}; \quad \xi_1 = \cos \frac{\pi y_1}{2\gamma} \operatorname{sh} \frac{\pi x_1}{2\gamma},$$

причем точки  $z_1 = \pm\lambda$  отображаются в точки  $\zeta_1 = \pm l_1$ , где  $l_1 = \sin(\pi\lambda/2\gamma)$ .

Пусть  $\varphi^0 = u^{1,0} + iQ^{1,0}$ , где  $Q^{1,0}$  – гармоническая функция, сопряженная с  $u^{1,0}$ . Тогда  $\varphi_1^0 = \varphi_{y_1}^0 = u_{y_1}^{1,0} + iQ_{y_1}^{1,0} = u_{y_1}^{1,0} - iu_{x_1}^{1,0}$ . Функцию  $\varphi_1^0(x_1, y_1)$  можно определить в полуплоскости  $\zeta_1$ . Задача об определении аналитической в полуплоскости функции, когда на некоторых интервалах границы известна действительная, а на других мнимая часть искомой функции, решается при помощи формулы Келдыша-Седова [11]. Решение для функции  $\varphi_1^0$  во всей полуплоскости имеет вид

$$\varphi_1^0(\zeta_1) = \frac{A}{\sqrt{\zeta_1^2 - l_1^2}},$$

где  $A$  – действительная постоянная; выбирается та ветвь корня, которая положительна при положительных значениях аргумента. В частности, при  $\xi_1 = 0$  ( $x_1 = 0$  или  $y_1 = \pm\gamma$ ):

$$u_{y_1}^{1,0} = 0; \quad u_{x_1}^{1,0} = \frac{A}{\sqrt{l_1^2 - \eta_1^2}}, \quad (|\eta_1| < l_1); \quad u_{y_1}^{1,0} = \frac{A}{\sqrt{\eta_1^2 - l_1^2}}; \quad u_{x_1}^{1,0} = 0, \quad (|\eta_1| > l_1).$$

Нормальное напряжение  $\sigma_1^0$  и составляющая касательного напряжения  $\tau^{1,0}$ , соответствующая функции  $u^{1,0}$ , находятся по формулам

$$\sigma_1^0 = B_1 (R_0 e^\xi)^{-1} u_\xi^{1,0} = (R_0 e^\xi)^{-1} \sqrt{GB_1} u_{x_1}^{1,0}; \quad \tau^{1,0} = G (R_0 e^\xi)^{-1} u_\eta^{1,0} = G (R_0 e^\xi)^{-1} u_{y_1}^{1,0}.$$

Постоянная  $A$  определяется из условия равновесия штампа, а именно:

$$A = -\frac{P_0 R_0 \pi}{4\gamma \sqrt{GB_1} K(l_1)},$$

где  $l_1 = \sin \frac{\pi\lambda}{2\gamma}$ ,  $K(l_1)$  – полный эллиптический интеграл первого рода.

Давление под штампом в первом приближении выражается следующим образом:

$$\sigma_1^0 = -\frac{P_0\pi}{4\gamma K(l_1)} \frac{1}{\sqrt{l_1^2 - \eta_1^2}},$$

а функция  $u_{y_1}^{1,0}$  при  $\xi_1 = 0$ ,  $|\eta_1| > l_1$  находится по формуле  $u_{y_1}^{1,0} = A(\eta_1^2 - l_1^2)^{-1/2}$ .

Составляющая  $v^{1,0}$  компоненты вектора перемещений  $v^0$ , соответствующая данному напряженному состоянию, в этом приближении определяется из уравнения (3). В частности, при  $x_1 = 0$  ( $\xi = 0$ ),  $|y_1| = |\eta| \leq \lambda$

$$u^{1,0} = \frac{2\gamma}{\pi} A \frac{\ln\left(\sin(\pi y_1/2\gamma) + \sqrt{(\sin(\pi y_1/2\gamma))^2 - l_1^2}\right)}{\cos(\pi y_1/2\gamma)}.$$

Эта величина определяет осадку штампа. Касательное напряжение  $\tau$  под ним имеет вид  $\tau^0 = \rho\sigma_1^0$ . При  $\rho = 0$  получим решение для гладкого штампа. Влияние трения на давление под штампом сказывается лишь с третьего приближения. Исследуем влияние на распределение напряжений под штампом отношения размера штампа  $\lambda$  к размеру свободной границы  $\gamma$  пластины.

Пусть  $\sigma^* = -\frac{4\gamma}{P_0\pi} \sigma_1^0$ . Тогда, подставив выражение для  $\sigma_1^0$ , получим:

$$\sigma^* = \frac{1}{K(l_1)} \frac{1}{\sqrt{l_1^2 - \eta_1^2}} = \frac{1}{l_1 K(l_1)} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\eta_1}{l_1}\right)^2}}.$$

Обозначив  $t = \frac{\eta_1}{l_1} = \frac{\sin(\pi y_1/2\gamma)}{\sin(\pi\lambda/2\gamma)}$  (при  $x_1 = 0$ ,  $-\lambda < y_1 < \lambda$ ), имеем

$$\sigma^* = \frac{1}{l_1 K(l_1)} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \quad (-1 < l_1 < 1; -1 < t < 1).$$

В таблице 1 приведены значения  $l_1$  ( $l_1 = \sin(\pi\lambda/2\gamma)$ ), зависящие от  $\lambda/\gamma$ .

Таблица 1

Зависимость  $l_1$  от  $\lambda/\gamma$

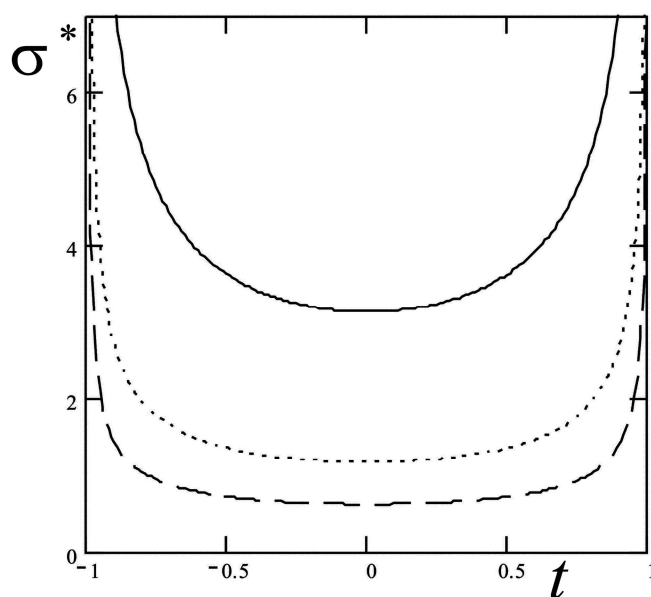
$\lambda/\gamma$	0.006	0.064	0.128	0.333	0.409	0.59	0.872	0.971
$l_1$	0.01	0.1	0.2	0.5	0.6	0.8	0.98	0.999

В таблице 2 (с учетом таблицы 1) приводятся значения нормального напряжения  $\sigma^*$  под штампом от величины отношения размера  $\lambda$  штампа к размеру  $\gamma$  свободной границы пластины.

Таблица 2

Зависимость  $\sigma^*$  от  $l_1$

$t$		0	0.2	0.3	0.5	0.6	0.8	0.99
$\sigma^*$	$l_1 = 0.01$	63.66	64.562	67.514	73.484	85.341	114.905	1424
	$l_1 = 0.2$	3.151	3.195	3.342	3.637	4.224	5.687	70.473
	$l_1 = 0.5$	1.186	1.203	1.258	1.369	1.59	2.141	26.536
	$l_1 = 0.8$	0.626	0.635	0.664	0.723	0.84	1.131	14.012
	$l_1 = 0.98$	0.338	0.343	0.358	0.39	0.453	0.61	7.555
	$l_1 = 0.999$	0.223	0.226	0.236	0.257	0.298	0.402	4.98



— при  $l_1=0,2$ ;    ..... при  $l_1=0,5$ ;    - - при  $l_1=0,8$

Рис. 2. Распределение напряжений под штампом в зависимости от  $l_1$

Из таблицы 2 и графиков на рис. 2 видно, что, как и ожидалось, при уменьшении размера штампа ( $|\lambda| \rightarrow 0 \Rightarrow l_1 \rightarrow 0$ ) напряжения под штампом значительно возрастают, а когда его размер, практически, совпадает с размером свободной границы пластины ( $l_1 \rightarrow 1$ ), напряжения под штампом (в средней его части) ослабевают.

В результате решения установлено, что влияние трения на усилие под штампом и на характер особенности учитывается с третьего приближения. В окрестности угловой точки штампа характер напряженного состояния такой же, как и для полуплоскости. Поэтому проведено сравнение известного асимптоти-

ческого решения для полуплоскости [8] с решением Л.А. Галина [12]. Установлено, что указанное решение совпадает с разложенным в ряд точным решением Галина. Учет первых двух приближений дает достаточную аппроксимацию точного решения и указывает на характер особенности в окрестности угловых точек штампа.

**Выводы.** Естественным математическим аппаратом, который дает возможность построить обоснованные приближенные уравнения и оценить области применимости различных гипотез, является асимптотический анализ. Это открывает новые перспективы при исследовании многих практически важных задач, возникающих в современной технике, которые до сих пор не нашли эффективного решения. Применение метода возмущений в данной работе при решении задачи о вдавливании штампа в упругую ортотропную пластину с цилиндрической анизотропией позволило перейти от сложной смешанной краевой задачи механики к последовательному решению задач теории потенциала, которая сейчас является одной из наиболее изученных областей математической физики. Проведенный асимптотический анализ может быть использован для оценки НДС конструкций с усилениями, накладками, штампами и др.

#### Список литературы

1. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости / М. Ван-Дайк – М. : Мир, 1967. – 310 с.
2. Ивлев Д. Д. Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
3. Найфе А. Х. Введение в методы возмущений / А. Х. Найфе – М. : Мир, 1984. – 526 с.
4. Спорыхин А. Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред / А. Н. Спорыхин. – Воронеж, 1997. – 360 с.
5. Савин Г. Н. Пластинки, подкрепленные составными кольцами и упругими накладками / Г. Н. Савин, В. И. Тульчий. – Киев : Наук. думка, 1971. – 268 с.
6. Александров В. М. Две задачи со смешанными граничными условиями для упругой ортотропной полосы / В. М. Александров // Прикл. механ. матем. – 2006.– Т. 70, № 1. – С. 139-149.
7. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. – М. : Наука, 1977. – 463 с.
8. Маневич Л. И. Асимптотический метод в теории упругости ортотропного тела / Л. И. Маневич, А. В. Павленко, С. Г. Коблик. – К. : Вища школа, 1982. – 152 с.
9. Кагадий Т. С. Метод возмущений в механике упругих (вязкоупругих) анизотропных и композиционных материалов / Т. С. Кагадий. – Днепропетровск : РИК НГА України, 1998. – 260 с.
10. Щербина И. В. Асимптотический метод в контактной задаче для ортотропной полуполосы с учетом трения/ И. В. Щербина, Т. С. Кагадий, А. В. Павленко // Математичні проблеми технічної механіки – Дніпропетровськ, 2006. – С. 39.
11. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. : Наука, 1973. – 736 с.
12. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л. А. Галин. – М. : Наука, 1980. – 303 с.

*Рекомендовано до публікації д.т.н. Сдвіжковою О.О.  
Надійшла до редакції 11.04.2013*