

ГЛАВА 3

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ МЕХАНИКИ ГРУНТОВ. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ. МОДЕЛИ ГРУНТОВЫХ ОСНОВАНИЙ

3.1 ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ. ОСОБЕННОСТИ ГРУНТОВ ОСНОВАНИЙ КАК ОБЪЕКТА СТРОИТЕЛЬСТВА

При проектировании оснований зданий и сооружений обычно поступают так:

1. В зависимости от решаемой задачи выбираются та или иная **модель и расчетная схема** грунтового основания.
2. Далее определяются входящие в **модель материальные константы грунта** (например, плотность, модуль общей деформации, коэффициент Пуассона, угол внутреннего трения, удельное сцепление и т.д.).
3. С использованием полученных таким образом данных выполняется расчет напряженно-деформированного состояния основания и далее – выбор типа фундамента, подбор его размеров в плане и т.д.).

Обычно выбор той или иной **модели основания** базируется на данных экспериментальных исследований тех или иных свойств грунта (например, его упругих, пластичных, фильтрационных или иных свойств).

Расчетная схема грунтового основания выбирается в ходе анализа геометрии загруженной области. Например, если отношение длины подошвы фундамента L к его ширине b $\frac{L}{b} < 10$, то принимают расчетную схему **полупространства**, а если $\frac{L}{b} \geq 10$, то принимают расчетную схему **полуплоскости**.

Кроме того, выбор расчетной схемы основания также зависит от глубины залегания жесткого подстилающего слоя грунта (например, скалы). В данном случае различают расчетные схемы **полупространства** или **полуплоскости** (скала залегает на значительной глубине или отсутствует вообще) и **слоя конечной толщины** (скала залегает вблизи от подошвы фундамента).

Грунты имеют как естественное, так и искусственное происхождение. При этом они имеют свою историю образования и последующего изменения свойств во времени. Иллюстрацией к сказанному является, например, образование из скального грунта песка и глины и наоборот – образование из песка песчаника (т.е. скалы).

Основной их отличительной особенностью грунтовых оснований является **несплошность (раздробленность, дискретность)** их строения.

Многокомпонентный состав грунтов, их пористость, влажность,

структурные связи между частицами, сложное взаимодействие различных компонент друг с другом приводят к особым свойствам этих материалов, существенно отличающимся от свойств конструкционных материалов (например, стали, бетона, кирпича и т.д.).

Грунтовые основания формируются в различных геолого-географических условиях, они постоянно испытывают воздействие природных и техногенных процессов. Это является причиной многообразия их строения, состояния и как следствие – их свойств.

В отличие от конструкционных материалов, состав которых подбирается технологами заранее, грунты каждой строительной площадки обладают своими особыми свойствами. Эти свойства необходимо определять каждый раз при перемене площадки строительства.

Состояние и свойства грунтов в основании достроенного сооружения также могут меняться в процессе его эксплуатации.

Строительство новых сооружений рядом с существующими, ведение подземных работ, реконструкция старых сооружений и т. п. также приводят к дополнительным воздействиям на грунты и основания уже построенных сооружений. В результате в грунтах могут вновь развиваться процессы, осложняющие эксплуатацию сооружений.

В концентрированной форме изложенное выше можно сформулировать так.

1. Грунты обладают особыми свойствами.
2. Эти свойства следует определять на каждой новой площадке строительства.
3. Свойства грунтовых оснований постоянно трансформируются во времени. При этом основными причинами трансформации являются:
 - протекающие в основании геологические и иные процессы (их, в свою очередь, подразделяют на быстрые и медленные);
 - различные внешние воздействия.
4. Все это вызывает необходимость разработки совершенно иного подхода к исследованиям, расчетам и проектированию оснований, чем это принято в инженерной практике применительно к конструкционным материалам.

В заключение отметим, что сказанное в полной мере относится к тем случаям, когда грунты являются основанием, материалом сооружения, а также средой, в которой оно возводится.

Модели механического поведения грунта. Для надежного и экономичного проектирования сооружений необходимо добиться выполнения таких условий.

1. Необходимо обеспечить прочность грунтовых оснований.
2. Основание должно находиться в устойчивом состоянии.
3. Деформации фундаментов не должны превышать некоторых наперед известных величин.

4. Возведенный на грунтовом основании (или внутри него) объект без проблем должен эксплуатироваться определенное заранее известное время после завершения его строительства.

В этой связи различают такие свойства грунта:

- прочностные;**
- деформационные;**
- реологические.**

В этой связи в настоящее время используются такие модели грунтовых оснований.

1. Модели, позволяющие выполнять расчет прочности и устойчивости грунтовых массивов.
2. Модели, позволяющие выполнять расчет грунтовых массивов по деформациям.
3. Модели, позволяющие прогнозировать изменение прочности, устойчивости и деформаций грунтовых массивов во времени.
4. Комбинированные модели.

Первая группа свойств грунта позволяет выполнять прогноз прочности и устойчивости грунтовых оснований, вторая – их деформации, а третья – трансформацию (т.е. изменение) свойств оснований во времени. В настоящее время ведутся исследования по разработке моделей оснований, **обладающих комбинацией перечисленных свойств**, например, деформационных и прочностных, деформационных и реологических и т.д. (модели четвертой группы).

Для этих целей могут быть использованы две основные группы моделей основания:

- модель дискретной среды;**
- модель сплошной среды.**

В первом случае грунт интерпретируют как совокупность отдельных частиц - шаров, дисков, балочек и т. д., которые тем или иным образом взаимодействуют между собой.

Во втором случае грунт интерпретируют как сплошную, не имеющую пор среду.

Реализация на практике первой группы моделей сопряжена с большими сложностями. Поэтому в настоящее время не существует законченной теории деформирования грунтов. В этой связи современная механика грунтов основывается на представлениях о грунтах как о сплошной среде.

При этом, однако, необходимо выполнение таких правил, ограничений и допущений.

1. Вводится понятие элементарного объема грунта, т. е. такого его объема, линейный размер которого во много раз превышает линейный размер частиц или агрегатов, слагающих этот грунт.

2. Считают, что действующие в грунтовом основании напряжения и деформации относятся уже не к точке (так поступают в механике сплошной среды), а к площадкам, соответствующим некоторому **элементарному**

объему.

3. При определении тех или иных свойств основания размеры образца грунта должны быть значительно больше линейного размера элементарного объема.

4. Применение аппарата механики сплошной среды для расчетов напряжений и деформаций в массиве грунта оказывается справедливым тогда и только тогда, когда размеры расчетной области в целом и размеры площадок, через которые передаются нагрузки, значительно больше размера элементарного объема грунта.

Необходимо отметить, что для песчаных и пылевато-глинистых грунтов эти условия всегда выполняются. При этом в **случае крупнообломочных и трещиноватых скальных грунтов** уже может потребоваться переход к крупномасштабным полевым опытам.

При описании свойств **сплошных сред** различают две основные группы моделей основания:

- **модель изотропной среды;**
- **модель анизотропной среды.**

В основу первой группы моделей положено представление о том, что свойства грунта одинаковы по всем направлениям, а во втором – нет. Например, при использовании модели **анизотропного ортотропного основания** считают, что его свойства в горизонтальном и вертикальном направлении отличаются друг от друга.

При этом также различают:

- **линейные модели оснований;**
- **нелинейные модели оснований.**

Во втором случае полагают, что **материальные константы** (например, модуль общей деформации) зависят от **напряженно-деформированного состояния грунтового основания**, а во втором – нет.

В настоящее время большинство инженерных задач решается с использованием **линейных моделей грунта**. Это объясняется тем, что при реализации **нелинейных моделей оснований** возникают значительные математические трудности. При этом проблемой является отсутствие методик определения входящих в них **материальных констант**.

Методы решения задач механики грунтов. Механика грунтов является **прикладной дисциплиной**. Ее основное назначение – **изучать и описывать протекающие в грунтах процессы**.

Общим методом механики грунтов является **решение т.н. краевых задач**, т. е. совместное решение **уравнений равновесия и физических уравнений состояния** при учете известных **заранее краевых (т.е. начальных и граничных) условий**.

При этом в ряде случаев следует учитывать соответствующие геометрические соотношения, которые вытекают, например, **из условия неразрывности деформаций упругой среды**.

Примерами **уравнений состояния основания** могут быть **обобщенный закон Гука, закон прочности Ш. Кулона** и т.д. Эти

уравнения будут рассмотрены ниже.

Правильный выбор вида уравнений состояния основания с учетом конкретных инженерно-геологических условий, типов сооружений и действующих на них нагрузок является одной из основных задач механики грунтов. С этой целью проводятся **специальные эксперименты**, позволяющие выявить те или иные особенности деформирования грунтов под нагрузкой. Поэтому говорят, что **уравнения состояния** имеют **феноменологический характер** (от слова феномен – явление).

Для количественного описания **напряженно-деформированного состояния** грунтовых оснований и массивов **используют напряжения, относительные деформации и перемещения**.

Далее остановимся на расшифровке этих понятий. Для определенности рассмотрим **декартову систему координат** (иногда, в зависимости от решаемой задачи рассматривают либо **цилиндрическую**, либо **сферическую**, либо **полярную** либо иные системы координат).

3.2. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ

Под **напряжением** понимают силу, отнесенную к площади. При этом различают нормальные

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x, \sigma_y \text{ и } \sigma_z \\ \text{(иногда используется обозначение этих же} \\ \text{напряжений в виде} \\ \sigma_{xx}, \sigma_{yy} \text{ и } \sigma_{zz}, \text{ а иногда в виде } \sigma_{11}, \sigma_{22} \text{ и } \sigma_{33}) \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

и касательные

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{xy}, \tau_{xz} \text{ и } \tau_{yz} \\ \text{(иногда используется обозначение этих же} \\ \text{напряжений в виде } \sigma_{12}, \sigma_{13} \text{ и } \sigma_{23}) \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

напряжения (рис. 3.1).

Считается, что нормальные напряжения всегда направлены по нормали к рассматриваемой площадке, а касательные – по касательной к ней (рис. 3.1).

Рассматриваемые площадки можно сориентировать таким образом, что все действующие по ним касательные напряжения будут тождественно равными нулю, а нормальные будут отличаться от нуля (рис. 3.2). В этом случае говорят, что площадки являются **главными**. При этом действующие по этим площадкам напряжения также называют **главными**.

Аналогичную терминологию используют, если площадки сориентированы таким образом, что все действующие по ним

нормальные напряжения равны нулю, а касательные напряжения отличны от нуля.

Говорят, что напряжения могут быть записаны в виде **тензора второго ранга**– таблицы вида:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}, \quad (3.2)$$

или
$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}, \quad (3.3)$$

или
$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix}. \quad (3.4)$$

При этом **тензор главных нормальных напряжений** имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}. \quad (3.5)$$

Здесь σ_1, σ_2 и σ_3 – главные нормальные напряжения.

Главные напряжения обладают свойством **инвариантности**. Иными словами, они не изменяются при перемене направления координатных осей.

Можно показать, что **главные напряжения** σ_1, σ_2 и σ_3 – это корни уравнения вида:

$$\sigma^3 - I_1 \cdot \sigma^2 - I_2 \cdot \sigma - I_3 = 0, \quad (3.6)$$

где σ – неизвестное напряжение, а I_1, I_2 и I_3 – соответственно **линейный, квадратичный и кубический инварианты** тензора напряжений. Они определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= 3 \cdot \sigma_m = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\ I_2 &= -(\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_1 \cdot \sigma_3); \\ I_3 &= \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Уравнения для определения главных напряжений также могут быть получены путем приравнивания нулю определителя вида:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_y - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (3.8)$$

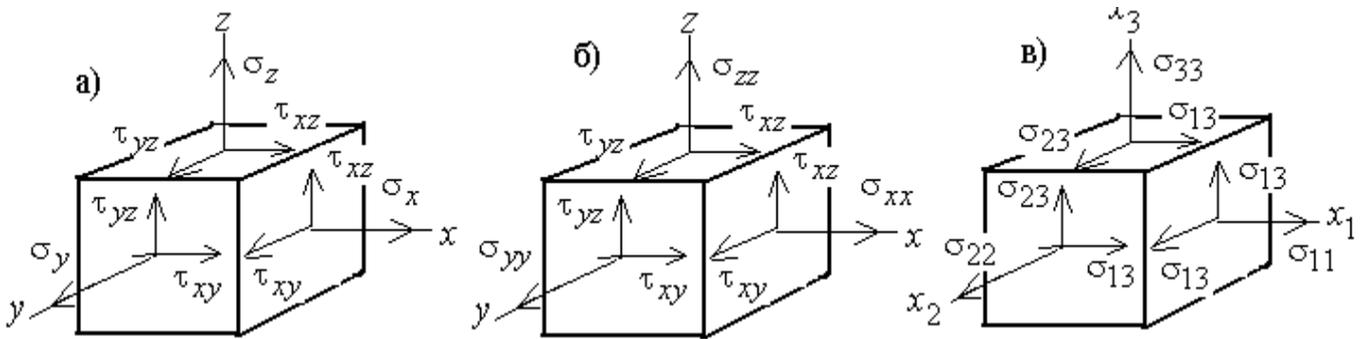


Рис. 3.1. Нормальные и касательные напряжения. а - обозначение напряжений в виде (3.2); б- то же, в виде (3.3); в- то же, в виде (3.4).

В настоящее время различают **объемное** и **девиаторное** напряжения. Считают, что первое из них вызывает изменение элементарного объема грунта, а второе- изменение его формы. В этой связи фактическую систему напряжений (3.1) представляют в виде суммы:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_y - \sigma_m \end{vmatrix}, \quad (3.9)$$

где

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (3.10)$$

–**среднее нормальное напряжение** (иногда его называют **объемным**).

Первое слагаемое в правой части (3.9) называют **шаровым тензором напряжений**, а второе слагаемое– **девиатором тензора напряжений**.

Тремя инвариантами **шарового тензора напряжений** являются выражения вида:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= 3 \cdot \sigma_m = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\ I_2 &= -3 \cdot \sigma_m^2 = -\frac{1}{3} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2; \\ I_3 &= \sigma_m^3 = \frac{1}{27} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^3. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

При этом тремя инвариантами **девиатора напряжений** являются выражения вида:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= 0; \\ I_2 &= \frac{1}{6} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_m)^2 + (\sigma_2 - \sigma_m)^2 + (\sigma_3 - \sigma_m)^2]; \\ I_3 &= (\sigma_1 - \sigma_m) \cdot (\sigma_2 - \sigma_m) \cdot (\sigma_3 - \sigma_m). \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Для анализа напряженного состояния грунтовых оснований иногда используют параметр, называемый **интенсивностью напряжений**.

Интенсивность нормальных напряжений σ_i определяют из второго равенства (3.12) по формуле

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{I_2} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

При этом **интенсивность касательных напряжений** τ_i определяют из второго равенства (3.12) по формуле

$$\left. \begin{aligned} \tau_i &= \sqrt{I_2} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{6}} = \\ &= \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}{6}} \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

В заключение отметим, что равенств (3.1...3.14) вполне достаточно для анализа напряжений в грунтовом основании.

Деформации и перемещения. В настоящее время в механике грунтов и фундаментостроении под термином «**деформация**» понимают **относительные деформации основания, а также осадки, крены, прогибы, выгибы фундаментов и т.д.** Детально этот вопрос будет рассмотрен во второй части настоящего курса. Необходимо отметить, что в данном случае имеет место некоторая путаница, поскольку в классической физике термину «осадка» соответствует термин «линейное перемещение», термину «крен» – термин «угловое перемещение» и т.д.

Поэтому ниже нами под термином «**деформация**» будет пониматься т.н. **относительная деформация**, определяемая по формуле (см. рис. 3.2):

$$\varepsilon_x = \frac{L_0 - L}{L_0} = \frac{\Delta L_0}{L_0} = 1 - \frac{L}{L_0}, \quad (3.15)$$

где ε_x – **нормальная относительная деформация образца** в направлении оси Ox (в дальнейшем **деформация образца**); L_0 – его первоначальная длина; L – длина образца после деформирования;

$$\Delta L_0 = L_0 - L.$$

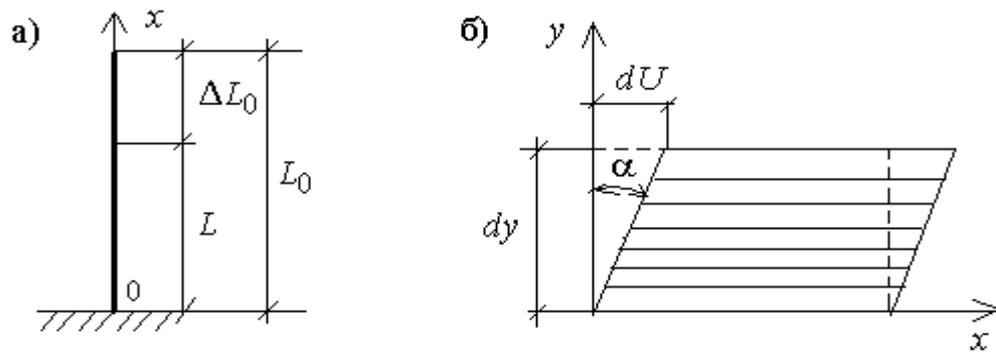


Рис. 3.2. Нормальная (а) и угловая (б) деформации. Здесь $\operatorname{tg}(\alpha) \approx \alpha = \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y}$.

Деформация, определяемая формулой (3.15), сопровождается изменением линейного размера стержня, а, следовательно, и его объема (рис. 3.2-а). Существуют также деформации, при которых объем образца остается неизменным, однако изменяется его форма (рис. 3.2-б и формула (3.16)).

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (3.16)$$

Эти деформации называют либо **угловыми деформациями**, либо **деформациями сдвига**.

Для дальнейшего понимания категории «деформация» рассмотрим смещение некоторой точки M с координатами (x, y, z) в положение M_1 с координатами $(x+U, y+V, z+W)$, где U, V и W – перемещения точки M в направлении осей $0x, 0y$ и $0z$ соответственно. В этом случае длина

вектора $\overrightarrow{MM_1}$ (т.е. его модуль) будет равна:

$$[MM_1] = \sqrt{U^2 + V^2 + W^2} \quad (3.17)$$

Далее вырежем вокруг точки M элементарный параллелепипед, грани которого параллельны координатным плоскостям, и найдем его деформации (рис. 3.3). При этом учтем равенства (3.15...3.17). Имеем:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right]; \\ \dots\dots\dots; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} + \left[\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial x} \cdot \frac{\partial W}{\partial y} \right]; \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

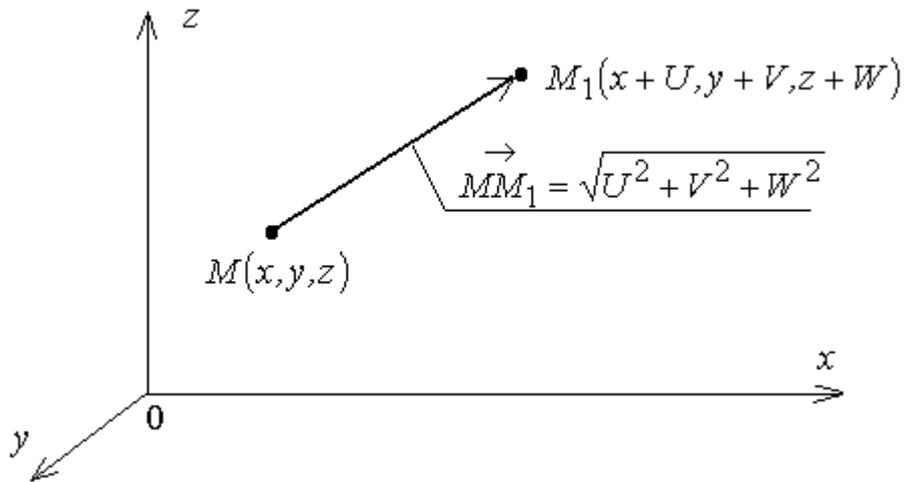


Рис. 3.3. К определению относительных линейных и угловых деформаций

Говорят, что равенства (3.18) являются **мерой деформаций в смысле Грина** (иногда их называют **деформациями Грина**).

Если в формулах (3.18) пренебречь слагаемыми вида $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2$ и $\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial y}$, мы приходим к деформациям, которые определяются **мерой**

Коши (иногда их называют **деформациями Коши**). Имеем:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}; \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Также установим меру деформаций в смысле **Генки**, в соответствии с которой относительные деформации определяют с использованием формул вида:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \int_{X_0}^X \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{X}{X_0}\right); \quad \varepsilon_y = \int_{Y_0}^Y \frac{dy}{y} = \ln\left(\frac{Y}{Y_0}\right); \\ \varepsilon_z &= \int_{Z_0}^Z \frac{dz}{z} = \ln\left(\frac{Z}{Z_0}\right). \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Здесь X_0, Y_0 и Z_0 — первоначальные размеры образца в

направлении осей Ox, Oy и Oz соответственно; X, Y и Z – размеры деформированного образца.

В заключение отметим, что в современной механике грунтов равенства (3.18) и (3.20) практически не используются. Поэтому в дальнейшем **будем оперировать деформациями в смысле Коши (3.19).**

Далее отметим, что деформации, также как и напряжения могут быть записаны в виде **тензора второго ранга**- таблицы вида

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix}, \quad (3.21)$$

$$\text{или } \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}; \quad (3.22)$$

$$\text{или } \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}; \quad (3.23)$$

Здесь $\varepsilon_x, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}, \varepsilon_y, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \varepsilon_z, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33}$ – деформации; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и ε_3 – главные деформации.

Тензор деформаций точно также как и тензор напряжений может быть представлен в виде суммы **шарового тензора деформаций и девиатора деформаций:**

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_m & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon_m & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon_m \end{vmatrix}, \quad (3.24)$$

где

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} \quad (3.25)$$

средняя линейная деформация (она равна одной трети объемной деформации).

Далее отметим, что все выполненные нами выкладки

применительно к тензорам напряжений (формулы (3.1...3.14)), в полной мере могут быть применены к тензорам деформаций.

Так, три инварианта тензора деформации (т.е. линейный, квадратный и кубический) следует определять по формулам:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= 3 \cdot \varepsilon_m = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \\ I_2 &= -(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_3); \\ I_3 &= \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

При этом инварианты шарового тензора деформаций имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= 3 \cdot \varepsilon_m = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \\ I_2 &= -3 \cdot \varepsilon_m^2 = -\frac{1}{3} \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2; \quad I_3 = \varepsilon_m^3 = \frac{1}{27} \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^3. \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

а инварианты девиатора деформаций имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= 0; \\ I_2 &= \frac{1}{6} \cdot [(\varepsilon_1 - \varepsilon_m)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_m)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_m)^2]; \\ I_3 &= (\varepsilon_1 - \varepsilon_m) \cdot (\varepsilon_2 - \varepsilon_m) \cdot (\varepsilon_3 - \varepsilon_m). \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

Далее отметим, что **интенсивность линейных деформаций** определяют из второго равенства (3.28) по формуле

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_i &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{I_2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} \cdot (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2)} \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

а **интенсивность угловых деформаций** - по формуле

$$\left. \begin{aligned} \gamma_i &= 2 \cdot \sqrt{I_2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} \cdot (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2)} \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

3.3. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

По сути, уравнения равновесия являются проекциями действующих в основании усилий на координатные оси (рис. 3.1). Их вывод рассмотрен в соответствующих курсах теории упругости и сопротивления материалов. Поэтому ниже представлен окончательный результат:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0; \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

Здесь σ_x, σ_y и σ_z – нормальные напряжения; τ_{xy}, τ_{xz} и τ_{yz} – касательные напряжения; X, Y и Z – проекции на координатные оси **объемной силы** (она имеет размерность $[кН/м^3]$).

Уравнения (3.31) называют **уравнениями равновесия в напряжениях**. Эти уравнения являются общими для всех рассмотренных ниже моделей грунтовых оснований.

Уравнений равновесия недостаточно для моделирования напряженно- деформированного состояния грунтовых оснований и массивов, поскольку с их использованием невозможно описать свойства рассматриваемой среды (в нашем случае это грунтовое основание). Поэтому для описания свойств той или иной среды к ним следует добавить **уравнения состояния**. Остановимся на этом вопросе подробнее.

3.4. МОДЕЛЬ СУХОГО ТРЕНИЯ Ш. КУЛОНА

При определенных условиях может произойти разрушение или потеря устойчивости грунтового массива или его части. Обычно это явление сопровождается разрушением взаимодействующих с грунтовым массивом сооружений.

Экспериментальные данные. Рассмотрим нагруженный вертикальным (σ) и радиальным (P) давлением цилиндрический образец (рис. 3.4). Положим, что касательные напряжения по подошве образца близки к нулю. Такое напряженное состояние возникает в ходе **стабилометрических испытаний грунта** (этот вопрос рассмотрен в разделе 4).

Известны два основных варианта разрушения грунта.

В первом случае (рис. 3.4-а) в образце возникает наклонная **линия скольжения**, по которой и происходит его разрушение. При этом, чем больше радиальное напряжение P , тем большее вертикальное напряжение σ следует приложить для разрушения образца.

Во втором случае (рис. 3.4-б) образец приобретает **бочкообразную форму**, а его деформации нарастают при постоянных значениях напряжений σ и P . При этом зависимость "деформация– время" имеет вид **неубывающей функции**. В этом случае говорят, что произошло **пластическое разрушение** грунта.

В строительной практике рассматривают такие основные случаи разрушения оснований:

- разрушение основания вследствие превышения действующей на него нагрузкой некоторой величины;
- разрушение откоса или склона;
- разрушение удерживающей конструкции (подпорной стенки) вследствие ее взаимодействия с грунтом.

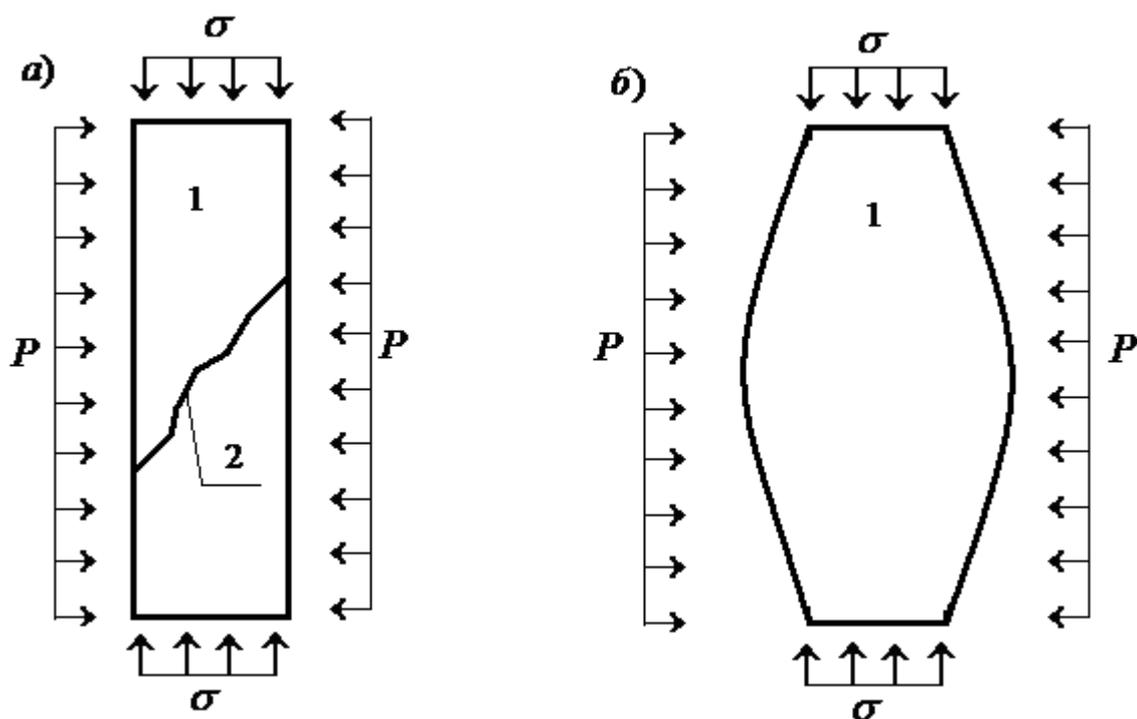


Рис. 3.4. Схемы разрушения грунтовых образцов: а– обычное разрушение, б– пластичное. 1– грунтовый образец, 2– кривая скольжения (т.е. линия, по которой произошло разрушение).

Задачи этого типа решаются с **помощью теории предельного напряженного состояния**, в основу которой **положены модель основания и закон сухого трения Ш. Кулона**.

Суть этой теории заключается в следующем.

1. Механизм разрушения основания в общем случае - сдвиг.
2. Разрушение основания в его некоторой точке происходит вследствие достижения действующих в ней напряжений некоторой критической комбинации.
3. Прочностными свойствами основания являются угол внутреннего трения φ и удельное сцепление c , которые для каждого вида грунта следует определять экспериментально.

Теория предельного равновесия исследует только напряженное состояние грунта и не позволяет определить его деформации.

Основы теории предельного равновесия были заложены в трудах Ш. Кулона (1773) и В. Ренкина (1859). Существенный вклад в ее развитие внесли А. Прандтль, Ф. Кеттер, Г. Рейснер, К. Терцаги и др. В современном виде теория предельного равновесия сформирована фундаментальными трудами В. В. Соколовского, В. Г. Березанцева, М. В. Малышева, Ю. И. Соловьева, Ю. А. Соболевского, А. С. Строганова, Г. Мейергофа, В.Б. Швеца и других ученых.

В одномерном случае закон прочности Мора– Кулона имеет вид (рис. 3.5-а):

$$\tau \leq (\sigma - U) \cdot \operatorname{tg}(\varphi) + c, \quad (3.32)$$

а в пространственном (рис. 3.5-б):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3 + 2 \cdot c \cdot \operatorname{ctg}(\varphi)} &\leq \sin(\varphi), \\ \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

Здесь τ и σ – действующие в некоторой точке основания касательное и нормальное напряжения, U – давление в поровой жидкости (иногда его называют нейтральным); σ_1 , σ_2 и σ_3 главные напряжения в точке, φ – угол внутреннего трения, а c – удельное сцепление грунта. Равенство (3.33) иногда называют условием прочности Ренкина.

Согласно (3.33) разрушение грунта происходит только лишь под воздействием максимального и минимального значения действующего в точке напряжения.

Полагая в (3.32) и (3.33) $\varphi \neq 0$ и $c = 0$, мы получим закон Кулона для сыпучего грунта (песка), а, положив $c \neq 0$ и $\varphi = 0$, мы получим закон Кулона для связного грунта (жирные глины, илы), наконец, полагая в (3.32) $U = 0$ мы приходим к условию прочности Кулона для неводонасыщенного грунта.

Соотношение (3.32) получено исходя из таких предположений (рис. 3.5-а). Чем больше коэффициент трения находящихся в контакте поверхностей $K_f = \operatorname{tg}(\varphi)$, действующее на них вертикальное давление σ и чем крепче они будут «склеены» (удельная прочность «клея» в данном случае равна удельному сцеплению c), тем большее касательное напряжение τ следует приложить для того, чтобы сдвинуть их друг относительно друга. Соотношение (3.33) получено исходя из таких предположений (рис. 3.5-б). Максимальное значение касательного напряжения имеет место при выполнении равенства $\alpha = \varphi$.

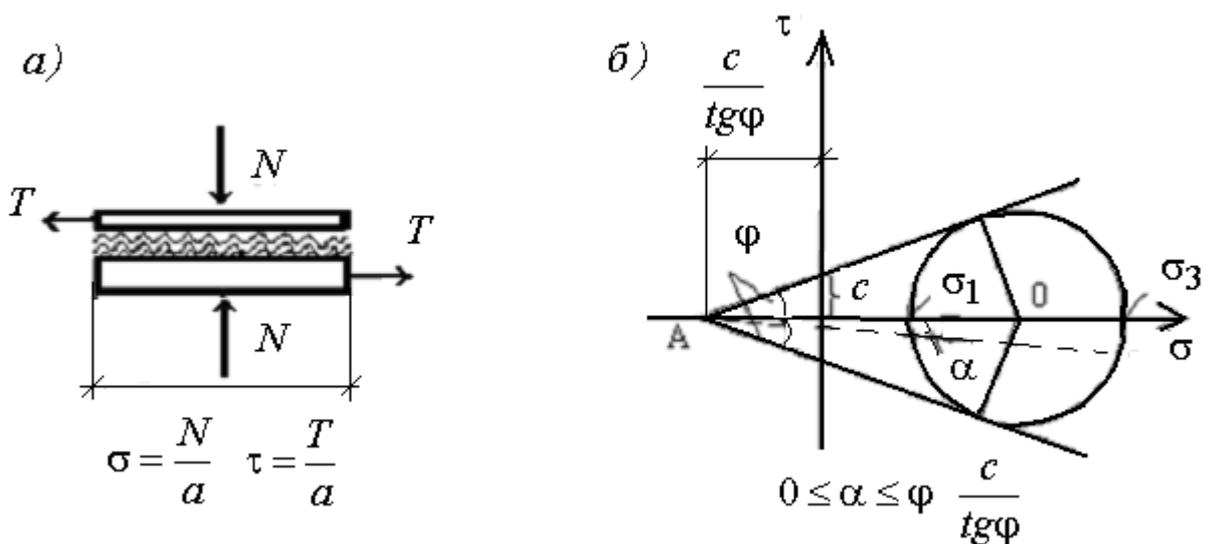


Рис. 3.5. Графическая интерпретация закона сухого трения Ш. Кулона.

Далее рассмотрим прямоугольный треугольник АОБ. Имеем:
 $OA = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + c \cdot ctg(\varphi)$; $OB = R = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$, откуда найдем окончательно:

$$\sin(\varphi) = \frac{OA}{OB} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3 + 2 \cdot c \cdot ctg(\varphi)}. \quad (3.34)$$

Соотношения (3.32) и (3.33) являются **уравнениями состояния** в рамках **модели основания сухого трения Ш. Кулона**. При этом запись **уравнения состояния** в виде (3.32) соответствует случаю **одномерной задачи**, а запись **уравнений состояния** в виде (3.33) соответствует случаю **пространственной задачи**.

В заключение отметим, что достоинством **модели сухого трения Ш. Кулона** является возможность определения **прочности и устойчивости** грунтовых оснований, а недостатком - **невозможность определения его деформаций**.

3.5. МОДЕЛЬ ЛИНЕЙНОЙ УПРУГОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

При решении ряда практических задач механики грунтов и фундаментостроения возникает необходимость определения осадок, кренов, разности осадок, прогибов, выгибов фундаментов и иных деформаций. В этом случае потери устойчивости или разрушения основания не происходит, поскольку действующие в нем напряжения значительно меньше предельных.

Экспериментальные данные. Если к фундаменту прикладывать возрастающую нагрузку N , по формуле $P = \frac{N}{A}$ определять среднее давление под подошвой фундамента (здесь A – его площадь) и на основе полученных таким образом данных построить график «среднее давление под подошвой фундамента P – средняя осадка фундамента S », можно выявить такие закономерности (рис. 3.6).

1. Деформации основания имеют место не только в пределах загруженной области, но и за ее границами (рис. 3.6-а). Это свидетельствует о том, что **грунтовые основания обладают распределительной способностью**.

2. До некоторого предела (его называют **пределом пропорциональности**) зависимость "среднее давление под подошвой фундамента – средняя осадка" имеет вид отрезка прямой (рис. 3.6-б). Пределу пропорциональности соответствует среднее давление под подошвой фундамента P_{nn} и осадка фундамента S_{nn} .

3. При превышении предела пропорциональности имеет место нелинейная зависимость средней осадки от среднего давления под подошвой фундамента (рис. 3.6-б).

Если нагрузка на основание возрастает до некоторого предела и далее остается постоянной во времени, а также не превышает предела

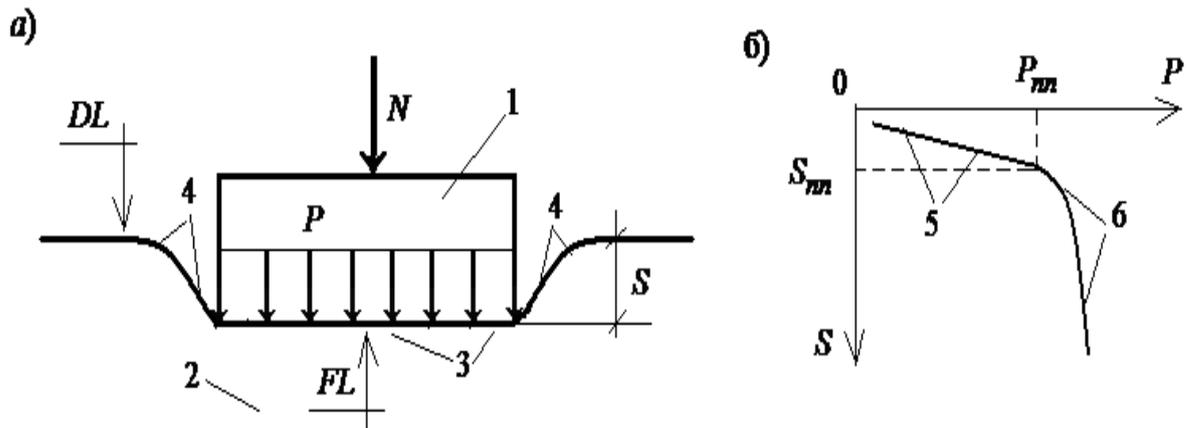


Рис. 3.6. Закономерности уплотнения грунтового основания фундамента (схема). а– система "основание– фундамент"; б– зависимость "среднее давление под подошвой фундамента P – средняя осадка S ". 1– фундамент; 2– основание; 3– осадка основания под фундаментом; 4– то же, за его пределами; 5– прямолинейный участок диаграммы; 6– то же, криволинейный.

пропорциональности P_{nn} , учесть перечисленные выше экспериментальные особенности уплотнения грунтовых оснований позволяет **модель линейной упругой изотропной среды**. В основу этой модели положен **постулат о неразрывности деформаций** (т.е. утверждается, что расчетная область основания не содержит трещин). Соответствующие этой модели **уравнения состояния** носят название **обобщенного закона Гука**. Они имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2 \cdot G \cdot \varepsilon_x + \lambda \cdot e; \quad \sigma_y = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_y + \lambda \cdot e; \\ \sigma_z &= 2 \cdot G \cdot \varepsilon_z + \lambda \cdot e; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = G \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right); \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = G \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right); \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = G \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right); \\ \varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}; \quad \varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{yx} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}; \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}; \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{zy} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}; \quad e = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Здесь $\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}$ и $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$ – **упругие константы Ламе**; E и ν – технические упругие константы (соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона грунта); σ_x, σ_y и σ_z – нормальные напряжения; τ_{xy}, τ_{xz} и τ_{yz} – касательные напряжения; $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ и ε_z – **нормальные линейные относительные деформации**; γ_{xy}, γ_{xz} и γ_{yz} – **угловые деформации**; U, V и W – **линейные перемещения** в направлении координатных осей Ox, Oy и Oz соответственно.

Далее подставим **уравнения состояния** (3.35) в **уравнения равновесия** (3.31). Имеем:

$$G \cdot \Delta U + (\lambda + G) \cdot \frac{\partial e}{\partial x} + X = 0; \quad G \cdot \Delta V + (\lambda + G) \cdot \frac{\partial e}{\partial y} + Y = 0;$$

$$G \cdot \Delta W + (\lambda + G) \cdot \frac{\partial e}{\partial z} + Z = 0. \quad (3.36)$$

Система уравнений (3.36) носит название **уравнений равновесия в перемещениях**.

Если в (3.36) проекции объемной силы на координатные оси положить равными нулю, мы придем к **модели линейного изотропного упругого невесомого основания**.

Если в (3.36) проекции объемной силы на координатные оси положить равными:

$$X = -\rho \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}; \quad Y = -\rho \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}; \quad Z = -\rho \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial t^2},$$

где ρ – **плотность основания**, мы придем к **модели линейного изотропного упругого весомого основания**.

В заключение отметим, что достоинством модели основания в виде **упругой линейной изотропной среды** является возможность определения напряженно-деформированного состояния грунтовых оснований. При этом с ее использованием абсолютно невозможно выполнять расчеты на прочность и устойчивость оснований.

3.6. МОДЕЛЬ ЛИНЕЙНОЙ УПРУГОЙ ИЗОТРОПНОЙ ВОДОНАСЫЩЕННОЙ СРЕДЫ

Экспериментальные данные. Если поры грунта полностью заполнены водой, то скорость ее движения в основании подчиняется **закону Дарси**, который имеет вид:

$$v = -\frac{k_f}{\gamma_w} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right), \quad (3.37)$$

где v - скорость движения жидкости (т.е. воды) в порах грунта; k_f - коэффициент фильтрации; $\gamma_w = 10 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$ - удельный вес воды; P - давление в поровой жидкости (иногда его называют поровым давлением); x, y и z - координаты.

С физической точки зрения равенство (3.37) означает, что скорость движения поровой жидкости в грунтовом основании прямо пропорциональна градиенту порового давления.

Поскольку на отжатие воды из пор грунта требуется некоторое время (иногда оно составляет годы, десятилетия и даже столетия), деформации основания реализуются не сразу, а через некоторое время. При этом вид кривой "осадка- время" зависит от площади фундамента (рис. 3.7).

Явление запаздывания во времени деформаций, обусловленное отжатием из пор грунта воды, позволяет учитывать модель линейного упругого изотропного водонасыщенного основания. Эта модель базируется на таких допущениях.

1. Грунтовый скелет основания обладает свойствами **линейной изотропной упругой среды**.
2. Напряженно-деформированное состояние основания определяется взаимодействием его твердой и жидкой фаз.

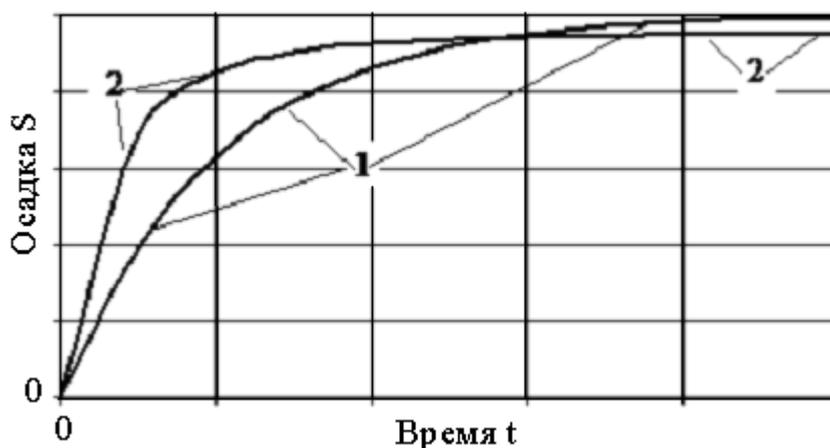


Рис. 3.7. Зависимости "осадка фундамента- время" (схема).
1- осадка фундамента с площадью подошвы A_1 ; 2- то же, A_2 .

Примечание. $A_1 > A_2$.

Поровое давление P зависит от напряженно-деформированного состояния грунтового скелета и наоборот - напряженно-деформированное

состояние грунтового скелета зависит от величины порового давления.

3. Поровая жидкость подчиняется **законам Архимеда и Паскаля**.

4. Поровое давление является **объемной силой**.

5. Поровая жидкость **не сопротивляется сдвигу**.

Этим допущениям соответствуют уравнения состояния вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} &= \frac{k\phi}{\gamma_w} \Delta P; & \sigma_x &= 2 \cdot G \cdot \varepsilon_x + \lambda \cdot e - P; \\ \sigma_y &= 2 \cdot G \cdot \varepsilon_y + \lambda \cdot e - P; & \sigma_z &= 2 \cdot G \cdot \varepsilon_z + \lambda \cdot e - P; \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= G \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right); & \tau_{xz} = \tau_{zx} &= G \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right); \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= G \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right); & \varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x}; & \varepsilon_y &= \frac{\partial V}{\partial y}; & \varepsilon_z &= \frac{\partial W}{\partial z}; \\ e &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yx} &= \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}; & \gamma_{xz} = \gamma_{zx} &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}; \\ \gamma_{yz} = \gamma_{zy} &= \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}; & e &= \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Здесь λ , G , $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, U, V$ и W см.

пояснения к формулам (3.35), а $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — **оператор Лапласа**

в декартовой системе координат.

Первое уравнение системы (3.38) называется **уравнением порового давления**.

С учетом того, что проекции порового давления P на координатные

оси $0x, 0y$ и $0z$ равны соответственно $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial P}{\partial z}$, **уравнения**

равновесия в перемещениях в рамках модели **невесомого линейного упругого изотропного водонасыщенного основания** имеют вид:

$$\begin{aligned} G \cdot \Delta U + (\lambda + G) \cdot \frac{\partial e}{\partial x} &= \frac{\partial P}{\partial x}; & G \cdot \Delta V + (\lambda + G) \cdot \frac{\partial e}{\partial y} &= \frac{\partial P}{\partial y}; \\ G \cdot \Delta W + (\lambda + G) \cdot \frac{\partial e}{\partial z} &= \frac{\partial P}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

При этом **уравнения равновесия в перемещениях** в рамках модели **весомого линейного упругого изотропного водонасыщенного**

ОСНОВАНИЯ имеют вид:

$$G \cdot \Delta U + (\lambda + G) \cdot \frac{\partial e}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} + \rho \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}; \quad G \cdot \Delta V + (\lambda + G) \cdot \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + \rho \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2};$$

$$G \cdot \Delta W + (\lambda + G) \cdot \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z} + \rho \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \quad (3.40)$$

Здесь ρ - средняя плотность водонасыщенного основания.

3.7. МОДЕЛЬ ЛИНЕЙНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ОБЛАДАЮЩЕЙ СВОЙСТВОМ ПОЛЗУЧЕСТИ СРЕДЫ

Опытные данные. Ряд грунтов (например, глинистые, лессовые просадочные, илистые и некоторые другие) при определенных условиях приобретают свойства **последействия**. В механике грунтов под последствием понимают **ползучесть и релаксацию**.

Под **ползучестью** понимают непрерывное нарастание деформаций грунтового образца во времени при неизменном значении действующей на грунт нагрузки (рис. 3.8).

Под **релаксацией** понимают непрерывное уменьшение напряжений грунтового образца во времени при неизменном значении его деформации (рис. 3.9).

По аналогии с моделью линейной упругой изотропной среды различают **сдвиговую и объемную ползучесть** (рис. 3.8-б). Кроме того, различают **затухающую ползучесть, ползучесть с постоянной скоростью, вековую ползучесть, а также прогрессирующую ползучесть** (рис. 3.8-в). Иногда кривая "деформация–время" может включать в себя несколько видов ползучести, например, до некоторого времени–затухающую, далее– ползучесть с постоянной скоростью и, наконец, прогрессирующую ползучесть (рис. 3.8-г).

В случае затухающей ползучести справедливы равенства:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\varepsilon(t)] = const; \quad v = \frac{d\varepsilon(t)}{dt} < 0, \quad (3.41)$$

при этом вековая ползучесть характеризуется соотношениями:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\varepsilon(t)] = \infty; \quad v = \frac{d\varepsilon(t)}{dt} < 0, \quad (3.42)$$

ползучесть с постоянной скоростью характеризуется соотношениями:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\varepsilon(t)] = \infty; \quad v = \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = const, \quad (3.43)$$

и, наконец, прогрессирующая ползучесть с постоянной скоростью характеризуется соотношениями:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\varepsilon(t)] = \infty; \quad v = \frac{d\varepsilon(t)}{dt} > 0. \quad (3.44)$$

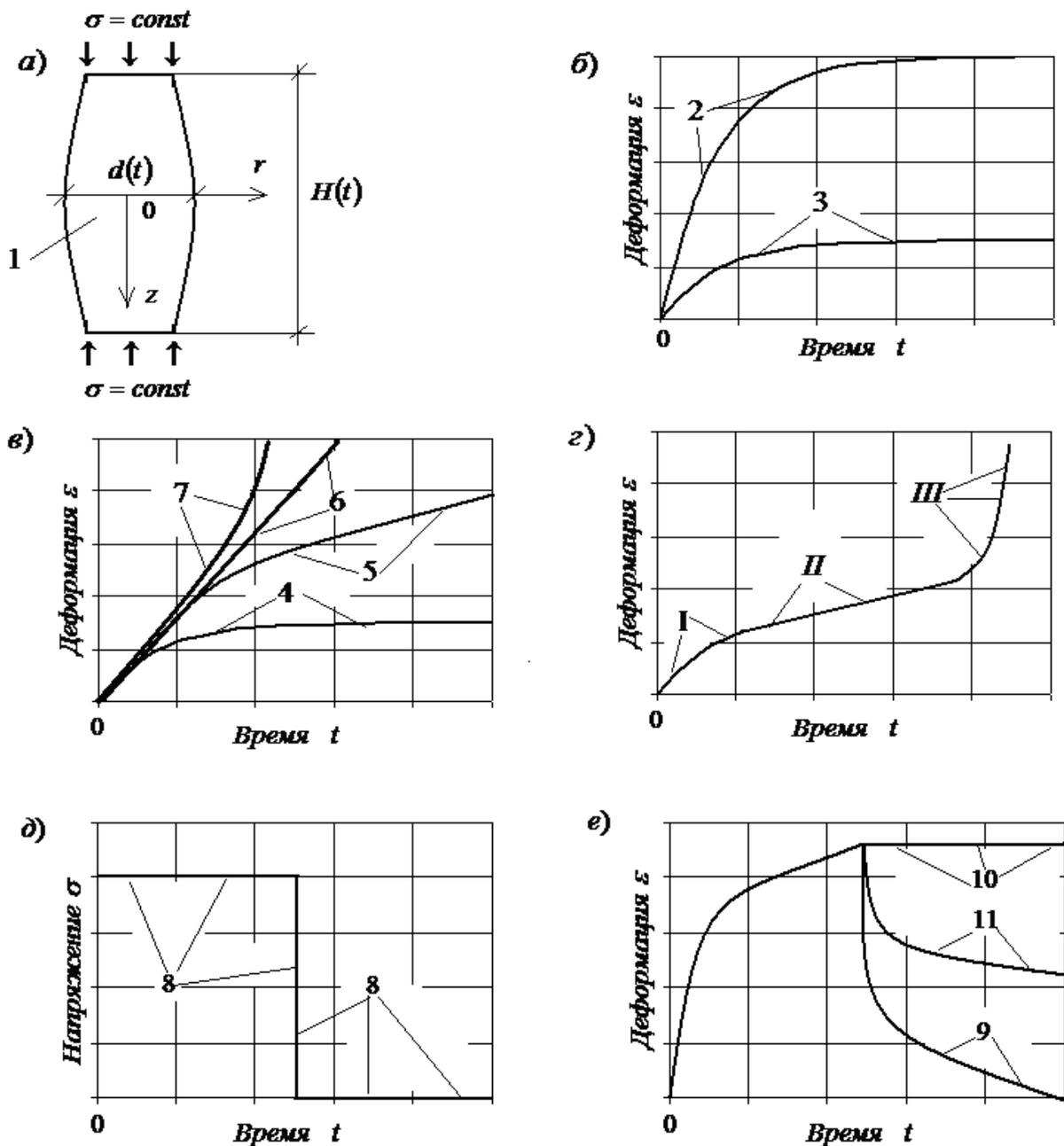


Рис. 3.8. Закономерности ползучести (схема). а– схема испытания грунтового образца; б– зависимости объемной деформации и деформации сдвига от времени; в, г– виды деформаций ползучести; д– зависимость "нагрузка– время", соответствующая кривым на рисунке е; е– зависимости деформаций ползучести от времени при загрузке–разгрузке основания.

1– грунтовый образец; 2– зависимость сдвиговой ползучести от времени; 3– то же, объемной ползучести; 4– затухающая ползучесть; 5– то же, вековая; 6– ползучесть с постоянной скоростью; 7– прогрессирующая ползучесть; 8– зависимость "нагрузка– время"; 9– деформации ползучести полностью обратимы; 10– то же, полностью необратимы; 11– деформации частично обратимы, а частично– необратимы.

Примечания.

1. На рисунке приняты такие обозначения: $H(t)$ – высота грунтового образца в момент времени t ; $d(t)$ – его диаметр, z и r – координатные оси.

2. Кривые на рисунках б), в) и г) соответствуют случаю $\sigma(t) = const$

Кроме того, также различают **полностью обратимые** и **необратимые** деформации ползучести (рис. 3.8-д и рис. 3.8-е).

Отметим, что **полностью обратимые** и запаздывающие во времени деформации в механике грунтов называют **вязкоупругими**, а полностью необратимые – **пластичными**.

Схема испытания грунта на **релаксацию** и соответствующие различным моделям грунтовых оснований зависимости "напряжение–время" представлены на рисунке 3.9.

Из рисунка следует, что в этом случае вид кривых "напряжение–время" зависит от того, являются ли деформации грунта обратимыми или нет.

Перечисленные закономерности уплотнения грунта позволяет учитывать модель **упруговязкопластического** основания.

Соответствующие этой модели **уравнения состояния** получаются из уравнений состояния, соответствующих моделям **упругого изотропного основания** и **упругого изотропного водонасыщенного основания** путем формальной замены входящих в них упругих материальных констант **интегральными операторами** вида

$$\left. \begin{aligned} \frac{y(t)}{\tilde{G}} &\equiv \frac{1}{G} \cdot \left[y(t) + \int_0^t y(\tau) \cdot K_G(t, \tau) \cdot d\tau \right]; \\ \frac{y(t)}{\tilde{\lambda}} &\equiv \frac{1}{\lambda} \cdot \left[y(t) + \int_0^t y(\tau) \cdot K_\lambda(t, \tau) \cdot d\tau \right]; \\ \tilde{\lambda} \cdot y(t) &\equiv \lambda \cdot \left[y(t) - \int_0^t y(\tau) \cdot R_\lambda(t, \tau) \cdot d\tau \right]; \\ \tilde{G} \cdot y(t) &\equiv G \cdot \left[y(t) - \int_0^t y(\tau) \cdot R_G(t, \tau) \cdot d\tau \right], \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

где λ и G – упругие константы Ламе; $K_\lambda(t, \tau)$ и $K_G(t, \tau)$ – соответствующие им **ядра ползучести грунта**; $R_\lambda(t, \tau)$ и $R_G(t, \tau)$ – **резольвенты ядер ползучести**; $y(t)$ – некоторая функция времени (например, деформация); t – время; τ – имеющий размерность времени параметр.

Ядра ползучести определяются экспериментально. Они имеют физический смысл **скорости ползучести грунта под воздействием единичного напряжения σ** .

Наиболее распространенными простейшими ядрами ползучести являются:

– экспоненциальные $K(t - \tau) = \delta \cdot \exp[-\delta_1 \cdot (t - \tau)]$ и $K(\tau) = \delta \cdot \exp[-\delta_1 \cdot \tau]$ (описывают затухающую ползучесть);

– абелевы $K(t - \tau) = \delta \cdot (t - \tau)^{\delta_1}$ и $K(\tau) = \delta \cdot (\tau)^{\delta_1}$ (описывают вековую ползучесть).

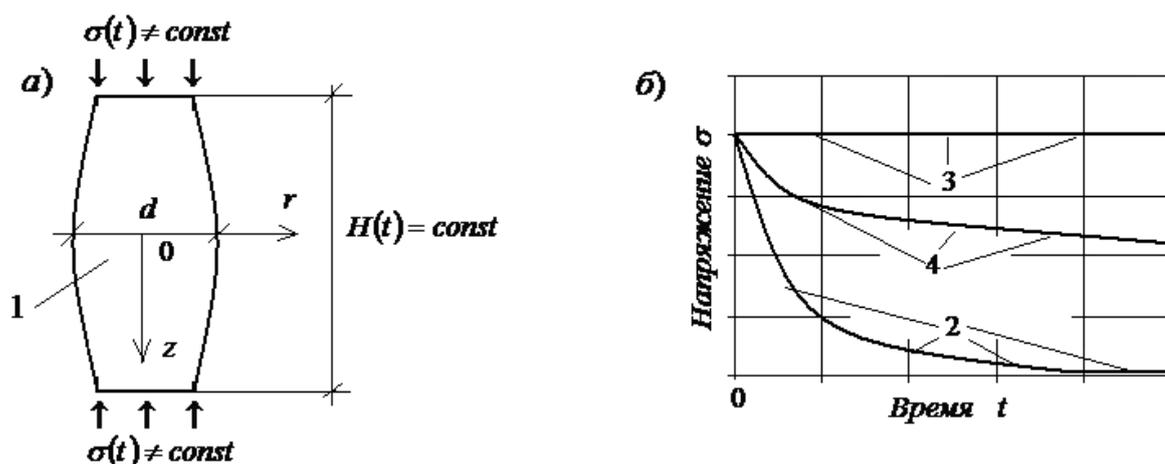


Рис. 3.9. Закономерности релаксации (схема). А– схема испытания грунтового образца; б– зависимости напряжения σ от времени t .

1– грунтовый образец; 2– деформации образца полностью обратимы; 3– то же, полностью необратимы; 4– деформации частично обратимы, а частично– необратимы.

Примечание. На рисунке приняты такие обозначения: $H(t)$ – высота грунтового образца в момент времени t ; d – его диаметр, z и r – координатные оси.

Резольвенты ядер ползучести определяют путем решения интегральных уравнений вида

$$K(t, \tau) - R(t, \tau) = - \int_{\tau}^t K(t, \xi) \cdot R(\tau, \xi) \cdot d\xi.$$

Равенства (3.45) имеют сложный вид. Поэтому при выполнении практических расчетов обычно полагают

$$\left. \begin{aligned} K_{\lambda}(t, \tau) &= K_G(t, \tau) = K(t, \tau) \\ R_{\lambda}(t, \tau) &= R_G(t, \tau) = R(t, \tau) \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

Если деформации грунта частично восстанавливаются, а частично необратимы (это наиболее общий случай), ядро ползучести имеет вид

$$K(t, \tau) = K_1(t - \tau) + K_2(\tau), \quad (3.47)$$

где $K_1(t - \tau)$ – часть ядра ползучести, описывающая запаздывающие во времени полностью обратимые деформации, а $K_2(\tau)$ – часть ядра ползучести, описывающая запаздывающие во времени полностью необратимые (т.е. пластичные) деформации.

Далее покажем, как изменятся соответствующие модели упругого основания равенства (3.35) при учете ползучести грунта:

$$\sigma_x = 2 \cdot \tilde{G} \cdot \varepsilon_x + \tilde{\lambda} \cdot e; \quad \sigma_y = 2 \cdot \tilde{G} \cdot \varepsilon_y + \tilde{\lambda} \cdot e; \quad \sigma_z = 2 \cdot \tilde{G} \cdot \varepsilon_z + \tilde{\lambda} \cdot e;$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tilde{G} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right); \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tilde{G} \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right); \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \tilde{G} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right); \quad \varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}; \\ \varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}; \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}; \\ \gamma_{xz} = \gamma_{zx} &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}; \quad e = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Здесь $\tilde{\lambda}$ и \tilde{G} - см. пояснения к формулам (3.45), а $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, U, V$ и W см. пояснения к формулам (3.35).

Отметим, что запись в развернутой форме первого уравнения системы (4.48) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x(x, y, t) &= 2 \cdot G \cdot \left[\varepsilon_x(x, y, t) - \int_0^t R_G(t, \tau) \cdot \varepsilon_x(x, y, \tau) \cdot d\tau \right] + \\ &+ \lambda \cdot \left[e(x, y, t) - \int_0^t R_\lambda(t, \tau) \cdot e(x, y, \tau) \cdot d\tau \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.49)$$

В заключение отметим, что в настоящее время при выполнении практических расчетов учет ползучести основания выполняется весьма редко. Обычно это происходит при определении напряженно-деформированного состояния ответственных и уникальных зданий и сооружений.

3.8. МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГРУНТОВ

Эти модели применяются как для определения напряженно-деформированного состояния грунтовых оснований, так и для оценки их прочности.

Различают **геометрическую** и **физическую** нелинейность грунта. В первом случае для определения деформаций используют формулы Грина (3.18) или Генки (3.20), а во втором учитывается нелинейный вид зависимостей "напряжение–деформация". Например, учет физической нелинейности применительно к диаграмме на рис. 3.6. позволяет определять осадки за пределом пропорциональности.

Геометрическая нелинейность при расчете оснований в настоящее время практически не учитывается. Поэтому далее будем рассматривать **физическую нелинейность**. Одним из ее свойств является **характеристика нелинейности**. В механике различают **мягкую** и **жесткую** характеристики (рис. 3.10).

В механике грунтов их физическую нелинейность оснований обычно учитывают с использованием т.н. **деформационной теории**

пластичности. В ее основу положено допущение о том, что объемная и сдвиговая деформации зависят соответственно от среднего нормального напряжения и интенсивности касательных напряжений, т. е.

$$\varepsilon_m = \psi(\sigma_m); \quad \gamma_i = f(\tau_i). \quad (3.50)$$

Здесь ψ и f - некоторые функции (обычно они определяются экспериментально), а $\sigma_m, \tau_i, \varepsilon_m$ и γ_i - соответственно среднее нормальное напряжение, интенсивность касательных напряжений, нормальная средняя деформация и интенсивность угловых напряжений (см. пояснения к формулам (3.10, 3.14, 3.25 и 3.30)).

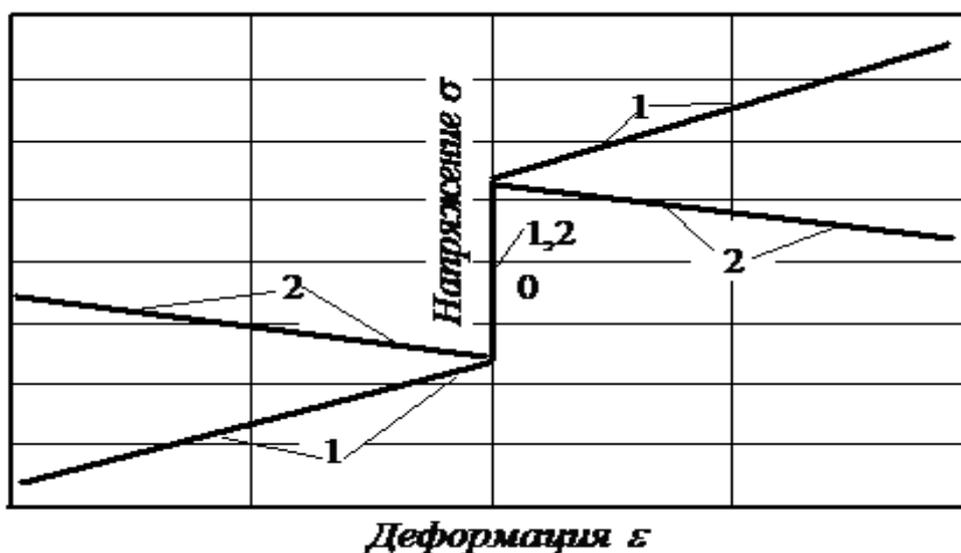


Рис. 3.10. Характеристики физической нелинейности (схема): 1 — жесткая; 2 — мягкая

Деформационная теория пластичности не учитывает некоторые процессы, происходящие в грунте. Более точные решения можно получить с помощью **теории пластического течения**. Теорию пластического течения применяют при решении сложных задач строительства.

Различные модификации теорий нелинейного деформирования грунтов представлены в работах С. С. Вялова, Ю. К. Зарецкого, С. Ф. Клованича, А. Л. Крыжановского, В. Г. Николаевского, В. И. Соломина, В. Г. Федоровского и других ученых.

При использовании нелинейных моделей для решения практических задач проблемой является определение не только входящих в уравнения состояния материальных констант, но и определение вида уравнений состояния. Поэтому в настоящее время их использование в инженерной практике весьма ограничено.

3.9. КОНТАКТНЫЕ МОДЕЛИ ГРУНТОВ

Эти модели применяются для определения напряжений на контакте оснований и фундаментов. Обычно это наиболее простые модели оснований, которые появились на начальном этапе становления механики грунтов.

В основу **модели Винклера– Фусса** положена взаимосвязь между вертикальными осадками основания и давлением под подошвой фундамента вида:

$$p = c_z \cdot S, \quad (3.51)$$

где p - среднее давление под подошвой фундамента; S – его осадка, а c_z – коэффициент пропорциональности, который называют **коэффициентом постели**.

Основы модели разработаны в 1801 году русским академиком Фуссом, а в окончательном виде она была сформулирована в 1867 году Винклером.

Достоинством **модели Винклера– Фусса** является ее простота, а основными недостатками - невозможность прогноза напряженно-деформированного состояния внутри основания, учета распределительных свойств основания, а также отсутствие норм и ГОСТов определения коэффициента постели c_z .

Модель **Пастернака** является развитием модели **Винклера– Фусса**. Она позволяет учитывать **распределительные свойства основания**. В ее основу положена такая взаимосвязь между вертикальными осадками основания и давлением под подошвой фундамента

$$p = c_1 \cdot S - c_2 \cdot \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right), \quad (3.52)$$

где p – среднее давление под подошвой фундамента; S – его осадка; c_1 и c_2 – коэффициенты пропорциональности, а x и y - координаты.

Достоинствами модели **Пастернака** являются ее относительная простота и возможность учета распределительных свойств основания, а основными недостатками – невозможность прогноза напряженно-деформированного состояния по глубине основания, а также отсутствие норм и ГОСТов определения коэффициентов постели c_1 и c_2 .

В основу **модели коэффициента жесткости** положена взаимосвязь между вертикальными осадками основания и давлением под подошвой фундамента вида:

$$p = c_z(x, y) \cdot S, \quad (3.53)$$

где p – среднее давление под подошвой фундамента; S – его осадка, а $c_z(x, y)$ – зависящий от координат x и y коэффициент пропорциональности, который называют **коэффициентом жесткости**.

Основы модели разработаны украинским профессором С. Н. Клепиковым.

Достоинствами модели **коэффициента жесткости** являются ее

относительная простота и возможность учета при определении контактных эпюр специфических свойств грунта (например, просадочных), а основными недостатками– невозможность прогноза напряженно-деформированного состояния по глубине основания и учета распределительных свойств основания.