УЧЕТ МАКРОДЕФЕКТОВ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЧНОСТИ

Е.А. Сдвижкова, С.Н. Гапеев, А.О. Логунова, Национальный горный университет, Украина

Приведены особенности методики учета элементов, нарушенных макродефектами, в статистической модели прочности породного массива.

Для учета наличия в породном массиве неоднородностей макро- и мегауровней, таких как природные трещины, необходимо условно включить в статистику опробования элементы, содержащие трещину. Таким образом, реальная выборка и реальный вариационный ряд корректируются путем введения дополнительных элементов, прочность которых значительно ниже прочности ненарушенных элементов. Следует отметить, что искусственное дополнение выборки изменит все моменты распределения, в том числе и характеристики разброса: дисперсию, стандарт, относительную вариацию.

Тогда, в соответствии с диаграммой Пирсона, изменится и закон распределения прочности структурных элементов.

Предполагается, что прочность таких элементов, нарушенных макродефектами, близка к нулю, а их количество в выборке зависит от расстояния между трещинами в реальном массиве [1]. В итоге для выборки, в которую условно внесено n_m элементов с нулевой прочностью, определены «исправленные» начальный момент первого порядка (средняя выборочная) и центральный момент второго порядка (выборочная дисперсия), а также связанная с ними относительная вариация прочности. Для «исправленной» выборки относительная вариация прочности $\eta^{/}$ в соответствии с [2] определяется через вариацию обычного опробования η и расстояние между трещинами в реальной породной среде l_m:

$$\eta^{/} = \sqrt{\frac{l_m + l_0}{l_m}\left(\eta^2 + 1\right) - 1}\ , \tag{1}$$

где l_0 – характерный размер образца, испытанного на прочность в лабораторных условиях. На рис. 1. показана зависимость относительной вариации прочности массива $\eta^{/}$ от расстояния между трещинами, отнесенного к размеру стандартного лабораторного образца породы, а также от вариации обычного опробования η. Из физического смысла задачи ясно, что расстояние между трещинами не может быть меньше линейного размера образца, иначе, его нельзя было бы изготовить. При отношении $\frac{l_m}{l_0} = 1$, равном единице, имеет место наибольшее значение вариации, которое уменьшается по мере увеличения расстояния между трещинами. Видно, что искусственное внесение в выборку «дефектных» элементов с нулевой прочностью значительно увеличивает разброс значений прочности. Так, при $\eta^2 + 1 = 1{,}1$, что соответствует значению исходной вариации лабораторного опробования η=0,31, и расстоянии между трещинами, в пять раз превышающем размер образца, вариация прочности массива составляет η=0,58, то есть увеличивается по сравнению с исходной вариацией в 1,8 раз. Такое резкое увеличение вариации объясняется, возможно, излишней идеализацией модели, в которой предполагается, что прочность нарушенных элементов равна нулю.

В работе [3] предложено учесть тот факт, что прочность элементов, содержащих макродефекты, не уменьшается до нуля, а снижена по сравнению с ненарушенными элементами. Таким образом, в генеральной совокупности значений прочности R_i $\left(i = 1 \ldots n_в\right)$, содержатся структурные элементы, прочность которых меньше прочности ненарушенных образцов, что оценивается некоторой функцией снижения прочности $f(\alpha)$, зависящей от угла наклона трещины α к горизонтальной плоскости (рис. 2). Тогда к исходной совокупности из $n_в$ образцов должны быть добавлены n_m нарушенных образцов, прочность которых равна:

$$R_{i\,m} = f(\alpha)R_i \qquad \left(i = 1 ... n_m\right). \tag{2}$$

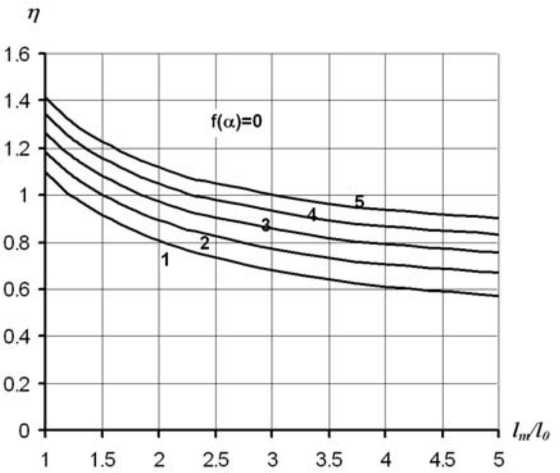

Рис. 1 Зависимость коэффициента вариации трещиноватого массива от расстояния между трещинами и степенью неоднородности среды в предположении, что прочность дефектных элементов равна нулю: 1, 2, 3, 4, 5 – при исходной вариации прочности породных образцов η=0,3; 0,45; 0,55; 0,65; 0,7 соответственно

Функция $f(\alpha)$, характеризующая снижение прочности структурного элемента в зависимости от угла наклона плоскости ослабления, получена путем моделирования методом граничных элементов разрушения образца породы, нарушенного трещиной, при различной ее ориентации к оси нагружения [3].

Функция снижения прочности $f(\alpha)$ характеризует собой закономерные изменения прочности структурных элементов в зависимости от ориентации трещин и имеет явно выраженный минимум при α=35^0 (рис.2)

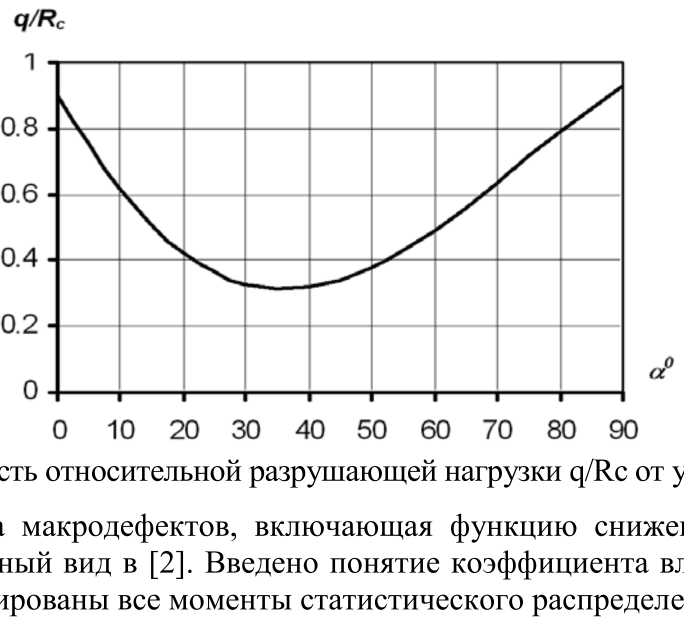

Рис. 2. Зависимость относительной разрушающей нагрузки q/Rc от угла наклона трещины α

Методика учета макродефектов, включающая функцию снижения прочности, приняла наиболее обобщенный вид в [2]. Введено понятие коэффициента влияния трещин, с учетом которого скорректированы все моменты статистического распределения.

$$m_1' = K_1 m_1 . \qquad (3)$$

Здесь:

$m_1 = \dfrac{1}{n_в}\sum_{i=1}^{n_в} R_i$, – начальный момент первого порядка (среднее) для обычной выборки;

$K_1 = \dfrac{\dfrac{l_m}{l_0} + f(\alpha)}{\dfrac{l_m}{l_0} + 1}$ – коэффициент влияния трещин для момента первого порядка.

Для начального момента второго порядка «исправленной» выборки $m_2^{/}$ коэффициент влияния трещины определяется формулой:

$$K_2 = \frac{\dfrac{l_m}{l_0} + f^2(\alpha)}{\dfrac{l_m}{l_0} + 1}, \qquad (4)$$

тогда

$$m_2' = K_2 m_2 , \qquad (5)$$

где $m_2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i^2$ – начальный момент второго порядка при обычной описательной статистике.

Можно показать, что все начальные моменты *k*-го порядка «исправленного» и исходного ряда связаны соотношением:

$$m_k' = K_k m_k , \qquad (6)$$

где

$$K_k = \frac{\dfrac{l_m}{l_0} + f^k(\alpha)}{\dfrac{l_m}{l_0} + 1} . \qquad (7)$$

В частном случае, если полагать прочность нарушенных элементов все таки равной нулю, коэффициент влияния трещин одинаков для всех начальных моментов:

$$K_1 = K_2 = K_3 = \dots K_k = K = \frac{\dfrac{l_m}{l_0}}{\dfrac{l_m}{l_0} + 1} = \frac{l_m}{l_m + l_0} . \qquad (8)$$

Величина K изменяется в пределах от 0,5 ($l_m = l_0$ – сильно трещиноватая среда) до 1,0 ($l_m \to \infty$ – нетрещиноватая среда).

Дисперсия «исправленного» вариационного ряда равна:

$$D^{/} = K_2 m_2 - K_1^2 m_1^2 . \qquad 9)$$

Тогда, относительная вариация «исправленного» ряда будет определяться выражением:

$$\eta^{/} = \frac{\sqrt{D^{/}}}{m_1^{/}} = \sqrt{\frac{K_2 m_2 - K_1^2 m_1^2}{K_1^2 m_1^2}} = \sqrt{\frac{K_2}{K_1^2}\left(\eta^2+1\right)-1}\,. \tag{10}$$

Выражение (10) получено в предположении, что дефектные элементы обладают некоторой прочностью $(f(\alpha) \neq 0)$.

На рис. 3 приведена зависимость относительной вариации от расстояния между трещинам при $f(\alpha)$=0,3, то есть в предположении, что прочность нарушенных элементов составляет 30% от прочности ненарушенных образцов.

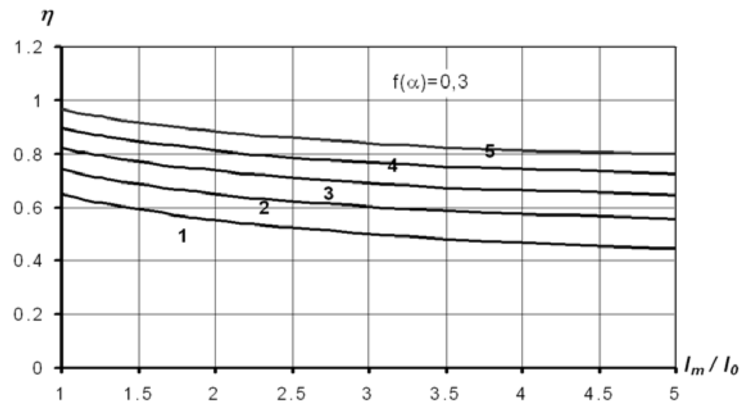

Рис. 3. Зависимость вариации прочности массива от расстояния между трещинами в предположении, что дефектные элементы частично сохраняют несущую способность: 1, 2, 3, 4, 5 – при η=0,3; 0,45; 0,55; 0,65; 0,7 соответственно

Видно, что при сохранении нарушенными элементами частичной несущей способности вариация прочности не так велика, как в случае полного разрушения «дефектных» элементов (рис. 1). В частности при $\eta^2+1=1{,}1$, что соответствует значению исходной вариации лабораторного опробования η=0,31, и расстоянии между трещинами в пять раз превышающем размер образца, вариация прочности массива будет составлять $\eta^{/}$=0,42 , то есть увеличиватся по сравнению с исходной вариацией в 1,3 раза. Такой разброс прочности породного массива представляется более реалистичным по сравнению с гипотезой о нулевой прочности нарушенных элементов, что может быть использовано для построения более адекватной вероятностно-статистической модели прочности породной среды.

В [3] показано, что более приемлемой статистической моделью прочности структурных элементов породного массива является логарифмически нормальный закон распределения.

Логарифмически нормальное распределение описывает случайную величину, логарифм которой распределен по нормальному закону с параметрами a и σ, т.е. плотность распределения случайной величины $z=\ln R$ имеет вид:

$$f(z,a,\sigma)= 1\Big/\sigma\sqrt{2\pi}\,\exp\left(-(z-a)^2\Big/2\sigma^2\right). \tag{11}$$

Вероятность того, что случайная величина z не окажется ниже некоторого предельного значения z_m, равна

$$p(z_m \prec z \prec \infty) = 1 - F[(z_m - a)/\sigma]. \tag{12}$$

Здесь функция $F(z)$ определяется относительно переменной $z=lnR$ и, возвращаясь к случайной величине R, получаем выражение для коэффициента структурного ослабления:

$$k_c = \exp(\sigma \arg F(1-p) - \frac{\sigma^2}{2}).$$

С учетом того что $\eta^2 + 1 = \exp(\sigma^2)$, получим окончательную формулу

$$k_c = \frac{\exp(\arg F(1-p) \cdot \sqrt{\ln(\eta^2+1)})}{\sqrt{\eta^2+1}}. \tag{13}$$

Коэффициент структурного ослабления k_c выражен в (13) через относительную вариацию прочности η, отражающую степень неоднородности среды на микроуровне. Неоднородность, обусловленная наличием макродефектов, в частности – систем трещин, должна быть учтена путем введения в расчетную формулу (13) «исправленной» вариации η', определяемой в зависимости от расстояния между трещинами и угла их падения по формулам (10) и (7).

Проанализировав окончательную формулу (13), видим, что при η=0, т.е. при идеально однородной среде, коэффициент структурного ослабления равен единице и прочность массива совпадает с прочностью его структурных элементов (образцов). С увеличением коэффициента вариации, т.е. с ростом степени неоднородности среды, коэффициент структурного ослабления уменьшается, уменьшая тем самым прочность массива.

При $\eta \to \infty$ функция (13) асимптотически приближается к нулю. Таким образом, в отличии от нормального распределения, логарифмически нормальный закон не накладывает никаких ограничений на величину разброса значений прочности относительно среднего. При использовании этого закона исключается появление отрицательных значений. Характер изменения зависимости (13) вполне соответствуют физической сути коэффициента структурного ослабления.

Список литературы

1. Шашенко А.Н. Методы теории вероятностей в геомеханике / А.Н. Шашенко, Н.С. Сургай, Л.Я. Парчевский.- К.: Техника, 1994. - 209 с.

2. Шашенко А.Н. Деформируемость и прочность массивов горных пород: Монография / А.Н. Шашенко, Е.А. Сдвижкова, С.Н. Гапеев. – Днепропетровск: НГУ, 2008. – 224 с.

3. Сдвижкова Е.А. Устойчивость подземных выработок в структурно-неоднородном породном массиве со случайно распределенными свойствами: Дисс....докт. техн. наук: 05.15.09 / Сдвижкова Елена Александровна.– Днепропетровск, 2002. – 410 с.