

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»



І.В. НОВИЦЬКИЙ

С.А. УС

Сучасна теорія керування

Навчальний посібник

Дніпро

НГУ

2017

УДК 681.5
Н73

Рекомендовано вченою радою Державного ВНЗ «НГУ» як навчальний посібник з дисципліни «Сучасна теорія керування» для студентів напряму підготовки 6.040303 Системний аналіз (протокол № 9 від 25 червня 2015).

Рецензенти:

Д. Г. Зеленцов – д-р техн. наук, проф. (ДВНЗ «Український державний хіміко-технологічний університет», завідувач кафедри інформаційних систем);
Л. С. Коряшкіна – канд. фіз.-мат. наук, доц. (Дніпропетровський національний університет, завідувач кафедри обчислювальної математики і математичної кібернетики).

Новицький І.В.

Н73 Сучасна теорія керування: навч. посіб. / І.В. Новицький, С.А. Ус, м-во освіти і науки України, Нац. гірн. ун-т. – Дніпро : НГУ, 2017. – 263 с.

ISBN 978-966-350-661-6

Навчальний посібник охоплює матеріал, передбачений програмою дисципліни “Сучасна теорія керування” для студентів напряму підготовки 6.040303 Системний аналіз.

Викладено методи аналізу й синтезу сучасних систем керування. Відображено освітній стандарт курсу в межах концепції «модель – аналіз – синтез». Разом з основними положеннями класичної теорії керування велика увага приділяється теорії оптимальних й адаптивних систем. У посібнику наведено велику кількість прикладів практичного застосування розглянутих систем.

Посібник розраховано на студентів вищих закладів освіти, а також може бути корисним для інженерів та аспірантів.

УДК 681.5

ISBN 978-966-350-661-6

© І.В. Новицький, С.А. Ус, 2017

© Державний ВНЗ «НГУ», 2017

ЗМІСТ

Вступ	6
Розділ 1. Математичні моделі систем керування	12
§ 1.1. Подання систем у вигляді диференціальних та різницевих рівнянь	13
§ 1.2. Перетворення моделей типу «вхід – вихід» на моделі у змінних стану	15
§ 1.3. Типові динамічні ланки СК та їхні характеристики	15
§ 1.4. Основні типи ланок	25
§ 1.5. Подання систем керування у вигляді структурних схем. Правила еквівалентного перетворення лінійних схем	39
Приклади до розділу 1	46
Питання для самоконтролю	49
Задачі до самостійного розв’язування	50
Розділ 2. Постановка задач керування	54
§ 2.1. Мета і задачі керування	54
§ 2.2. Показники якості керування	55
§ 2.3. Узагальнені показники якості процесів керування. Поняття про оптимальне керування	58
§ 2.4. Постановка задачі оптимального керування	59
§ 2.5. Види функціоналів. Класифікація задач оптимального керування	62
§ 2.6. Поняття про адаптивне керування	66
Приклади до розділу 2	68
Питання для самоконтролю	72
Задачі до самостійного розв’язування	72
Розділ 3. Дослідження якісних властивостей систем керування	74
§ 3.1. Керованість і спостережуваність СК	74
§ 3.2. Дослідження руху систем на фазовій площині	79
§ 3.3. Особливі точки й фазові портрети нелінійних систем	88
§ 3.4. Поняття про стійкість лінеаризованих систем. Критерії стійкості Гурвіца та Михайлова	92
§ 3.5. Стійкість нелінійних систем. Теорема Ляпунова	100
§ 3.6. Чутливість систем керування	106
Приклади до розділу 3	109
Питання для самоконтролю	111
Задачі до самостійного розв’язування	112
Розділ 4. Синтез систем керування. Класичний підхід	115
§ 4.1. Метод кореневого годографа	115
§ 4.2. Типові закони керування (типові регулятори)	120
§ 4.3. Використання коригувальних пристроїв у системах керування	123

Питання для самоконтролю	128
Задачі до самостійного розв'язування	128
Розділ 5. Застосування методів варіаційного числення для розв'язування задач оптимального керування	130
§ 5.1. Варіація функціонала. Необхідна умова існування екстремуму	130
§ 5.2. Рівняння Ейлера	132
§ 5.3. Рівняння Ейлера–Лагранжа та Ейлера–Пуассона	135
§ 5.4. Умовний екстремум функціонала	137
§ 5.5. Ізопериметрична задача. Задача Майєра і Больца	141
§ 5.6. Синтез оптимальних систем керування за допомогою варіаційних методів	146
Питання для самоконтролю	151
Задачі до самостійного розв'язування	151
Розділ 6. Синтез оптимальних систем керування за допомогою принципу максимуму Л.С. Понтрягіна	154
§ 6.1. Принцип максимуму	154
§ 6.2. Застосування ПМП для синтезу оптимальних систем	157
§ 6.3. Зв'язок оптимального керування з енергією, нагромадженою в об'єкті керування	162
§ 6.4. Теорема про n інтервалів	167
§ 6.5. Визначення моментів перемикання керувальної функції задачі про швидкодію. Метод «склеювання» рішень	170
§ 6.6. Задачі про керування консервативним об'єктом	173
§ 6.7. Аналітичний синтез оптимальних регуляторів відповідно до квадратичного критерію якості за допомогою принципу максимуму Понтрягіна	175
§ 6.8. Встановлення початкових значень перемикальних функцій $\Psi(t)$	181
Питання для самоконтролю	182
Задачі до самостійного розв'язування	182
Розділ 7. Розв'язування задач оптимізації методом динамічного програмування	184
§ 7.1. Дискретна форма варіаційної задачі. Принцип оптимальності Р. Беллмана	184
§ 7.2. Неперервна задача динамічного програмування	188
Питання для самоконтролю	196
Задачі до самостійного розв'язування	197
Розділ 8. Адаптивні системи керування	198
§ 8.1. Загальна характеристика адаптивних систем та їх кваліфікація	198

§ 8.2. Типи самоналаштувальних систем	201
§ 8.3. Аналітичні СНС з еталонною моделлю. Метод допоміжних операторів	203
§ 8.4. Аналітичні СНС з моделлю варіацій рівняння об'єкта (інваріантні СНС)	208
§ 8.5. Аналітичні СНС с самоналаштуванням за еталонною імпульсною перехідною функцією розімкненого основного контуру.....	213
§ 8.6. Проектування СНС з еталонною моделлю на основі прямого методу Ляпунова	216
§ 8.7. Аналітичні СНС, у яких налаштування відбувається з огляду на зовнішні впливи	218
Питання для самоконтролю	222
Розділ 9. Системи екстремального регулювання	224
§ 9.1. Поняття про екстремальне регулювання. Класифікація СЕР. Показники якості їх роботи	224
§ 9.2. Методи визначення екстремуму однопараметричних об'єктів	226
§ 9.3. Пошукові крокові алгоритми екстремального керування однопараметричними і багатопараметричними об'єктами	229
§ 9.4. Градієнтні алгоритми пошуку екстремуму багатопараметричних об'єктів	232
§ 9.5. Екстремальне керування в умовах перешкод	235
§ 9.6. Ідентифікаційні алгоритми екстремального регулювання	236
§ 9.7. Динаміка систем екстремального регулювання. Показники якості роботи СЕР	238
§ 9.8. Методи поліпшення якості СЕР. Вибір параметрів керувальної частини СЕР.....	246
Питання для самоконтролю	251
Задачі до самостійного розв'язування	251
Розділ 10. Основні поняття ситуаційного керування	252
Список скорочень	259
Список літератури	260
Предметний покажчик	261

ВСТУП

Теорія керування – це наука про принципи й методи спрямування функцій різних систем, процесів та об'єктів. Її сутність полягає в побудові математичної моделі об'єкта керування на основі його системного аналізу та в синтезі алгоритму для досягнення бажаних характеристик перебігу процесу або цілей керування.

Теорія керування (ТК) належить до класу найважливіших загальнотехнічних дисциплін, передбачених типовими програмами інженерної підготовки. Вона базується на положеннях кібернетики і теорії інформації. Предметом її вивчення є процеси керування, методи дослідження та основи проектування *систем керування* (СК), принципи побудови таких систем та закономірності процесів, які в них відбуваються. Визначальна мета теорії керування – побудова роботоздатних та ефективних СК.

У даний час ця теорія слугує єдиною науковою основою розв'язування задач керування об'єктами різної природи (фізичної, хімічної, біологічної та соціальної тощо) на базі розвинених методів дослідження СК, зокрема їх аналізу та синтезу.

Визначимо основні поняття теорії керування.

Фундаментальним поняттям кібернетики як науки про керування є «система». Воно має кілька визначень. Одне з них таке: *система є засобом досягнення мети*. Це тлумачення відображає функціональне призначення системи. Крім того, існують визначення, які розкривають внутрішню будову системи, наприклад: *система являє собою сукупність зв'язаних елементів, що взаємодіють між собою задля досягнення спільної мети*. Зауважимо, що в цьому визначенні виявлено такі істотні властивості системи:

- існування кількох елементів;
- взаємодія елементів між собою;
- спільна мета.

Система керування являє собою окремий різновид системи, а саме той, де реалізовано процес керування. Він передбачає наявність принаймні двох складових: керованої і керувальної. Таким чином, кожна система керування має дві частини: керовану – об'єкт керування (ОК) і керувальну – пристрій керування (ПК).

В теорії керування *вхід системи* – це сукупність змінних параметрів зовнішнього середовища, які впливають на систему і здійснюють істотний вплив на її перехід з одного стану до іншого; *вихід системи* – сукупність її змінних параметрів, які впливають на зовнішнє середовище.

Таким чином, вхід і вихід системи являють собою сукупність впливів на неї зовнішнього середовища і впливів системи на середовище. Вихід однієї системи неминуче буде входом іншої – у цьому сенс загального взаємозв'язку явищ у світі.

Отже, кожен вхід може бути двох основних видів: результат попереднього процесу, послідовно пов'язаного з нинішнім, і результат попереднього процесу, випадковим чином пов'язаного з наявним. Крім того,

вхід може виявитися результатом дії тієї самої системи, який знову вводиться в неї (так званий *зворотний зв'язок*). Будь-який процес має вхід і вихід, і тому функціонування системи іноді називають «перетворенням входу у вихід, а правило такого перетворення – *оператором*. Математично входи і виходи системи описуються у вигляді наборів (векторів і кортежів) змінних величин. Якщо позначити оператор перетворення через P , то вплив на систему (вхід) x , що має результатом (виходом) y , можна виразити такою формулою: $y = P(x)$. У керованих системах серед вхідних величин (їх називають також сигналами) можна виділити дві групи, різні за характером впливу на виходи: керувальний вплив і збурення (збурювальні впливи). До першої групи відносяться такі величини (керувальні або інструментальні змінні), на значення яких можна впливати для отримання бажаного (зазвичай оптимального) виходу, до другої – впливи на систему, які порушують її нормальне функціонування і розвиток у бажаному напрямі.

Об'єкт керування (ОК) являє собою будь-який пристрій, призначений для досягнення заданих цілей, який підлягає керуванню. У загальному випадку він має два входи, їх позначають через F та U , і вихід Y .

Пристрій керування (ПК) узагальнює всі елементи, що входять до системи керування і використовуються для організації процесу керування. У загальному випадку ПК має три входи F , Y , Z і один вихід U .

Більшість СК має канал зв'язку від виходу ОК до входу ПК – *зворотний зв'язок* (ЗЗ). Він призначений для передачі в ПК інформації про те, наскільки вихід ОК відрізняється від бажаного. Системи із наявним каналом ЗЗ називаються *системами регулювання*.

У найбільш загальному випадку функціональна схема системи керування має вигляд, зображений на рис. 1. Тут $Y(t)$ – вихід СК, $F(t)$ – збурювальний вплив, $Z(t)$ – завдання (воно зазвичай визначає мету керування), $U(t)$ – керувальний вплив.

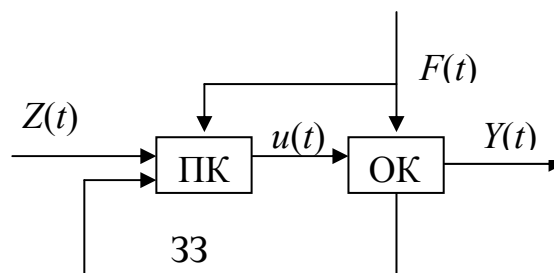


Рис. 1. Функціональна схема системи керування

Якщо в СК каналу ЗЗ немає, її називають системою з *програмним керуванням* (рис. 2). Такі системи використовують, коли існує висока ймовірність того, що вихід ОК під дією керування $U(t)$ буде відповідати бажаному.

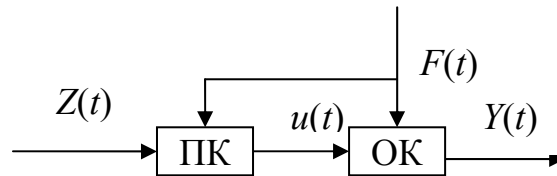


Рис. 2. Загальна схема системи з програмним керуванням

Зазвичай модель ОК відома після виконання процедури ідентифікації¹, тобто її подано в такому вигляді: $Y = L_{OY}(U, F)$, тут L_{OY} – оператор об’єкта.

Основне завдання керування полягає у виборі (визначенні) оператора керувального пристрою: $U = L_{YU}(Y, Z, F)$, який забезпечує реалізацію мети керування. Оператор L_{YU} визначає структуру керувального пристрою. У системах з програмним керуванням розв’язок цієї задачі відшуковують у вигляді явної функції часу $U^*(t)$.

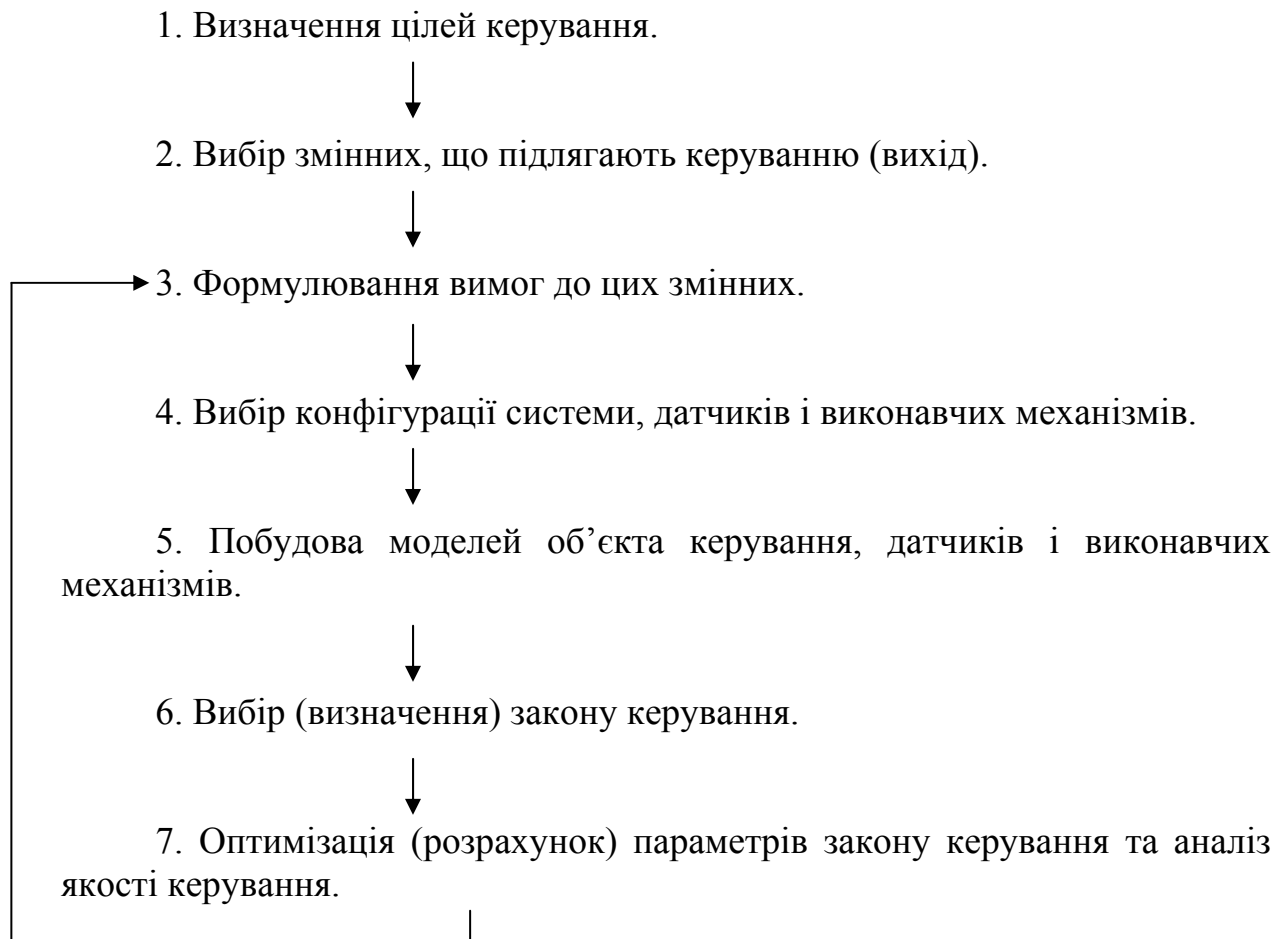
Класифікацію СК зазвичай здійснюють за такими ознаками:

1. За основними видами рівнянь, що описують рух системи, а саме:
 - лінійні;
 - нелінійні.
2. За типом параметрів математичних моделей системи:
 - системи із сталими параметрами;
 - системи зі змінними параметрами;
 - системи з розподіленими параметрами.
3. За характером передачі сигналів у системі:
 - безперервні;
 - дискретні.
4. За наявністю випадкових факторів:
 - детерміновані;
 - стохастичні.
5. За характером функціонування:
 - неадаптивні;
 - адаптивні.
6. За природою об’єкта керування:
 - фізичні;
 - біологічні;

¹ Ідентифікація (від лат. – *identifico* – ототожнення) – це процес побудови математичної моделі об’єкта, адекватної (від лат. *adaequatus* – зрівняний) йому із заданою точністю. Розрізняють ідентифікацію у вузькому і в широкому сенсі. Під ідентифікацією у вузькому сенсі розуміють оцінювання за результатами вимірювань вхідних і вихідних сигналів та параметрів математичної моделі, коли відомо її структуру. Під ідентифікацією у широкому сенсі розуміють як побудову самої моделі об’єкта, так і визначення її параметрів. Ідентифікація у широкому сенсі – це, як правило, тривалий процес. Отже, загальна задача ідентифікації формулюється таким чином: за результатами спостереження над вхідними і вихідними змінними системи повинна бути побудована оптимальна в деякому розумінні модель, тобто формалізоване подання цієї системи.

- економічні;
- екологічні;
- організаційні і т. д.

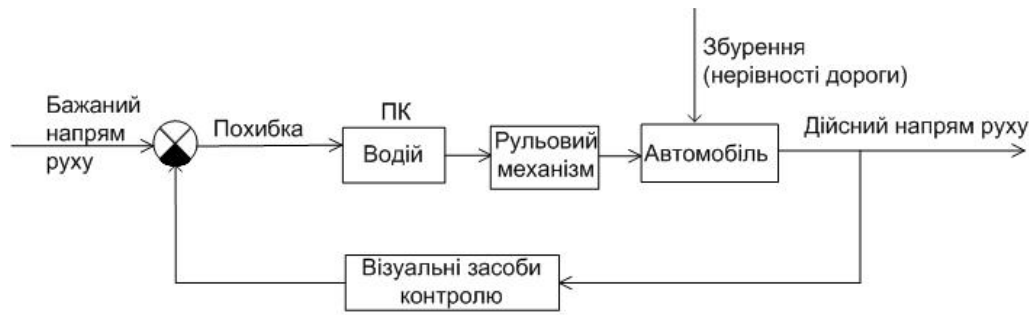
Одним із завдань ТК є синтез систем керування. У загальному випадку цей процес можна описати такою схемою:



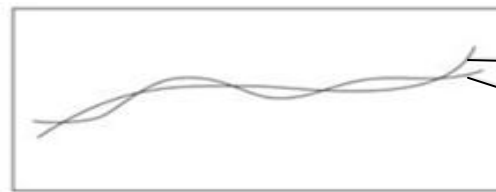
Коли якість керування не відповідає вимогам п. 3, то необхідно змінити конфігурацію системи.

Розглянемо кілька прикладів керування в технічних системах.

Приклад 1. СК автомобілем за допомогою рульового механізму. Система рульового керування служить для управління автомобілем і забезпечення його руху в заданому напрямку по команді водія. Її схематично зображено на рис. 3.



a



Бажана траєкторія руху
Дійсна траєкторія руху

б

Рис. 3. СК автомобілем за допомогою рульового механізму: *a* – загальна схема СК; *б* – вигляд бажаної та реальної траєкторій руху автомобіля

Приклад 2. СК рівнем рідини у резервуарі (рис. 4). Дана система стабілізує висоту шару рідини h на заданому рівні за допомогою поплавкового механізму.

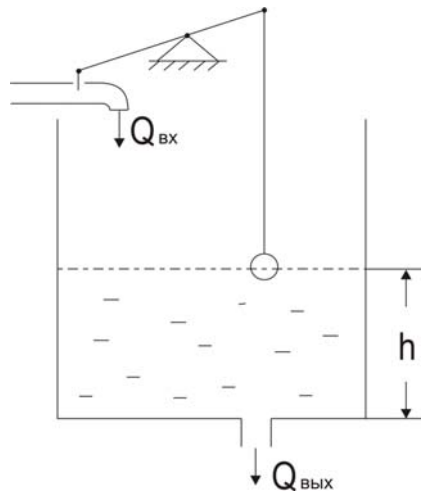


Рис. 4. Загальна схема СК рівнем рідини у резервуарі

Приклад 3. СК швидкістю обертання диска цифрового пристрою (програмне керування). Загальну схему керування подано на рис. 5.

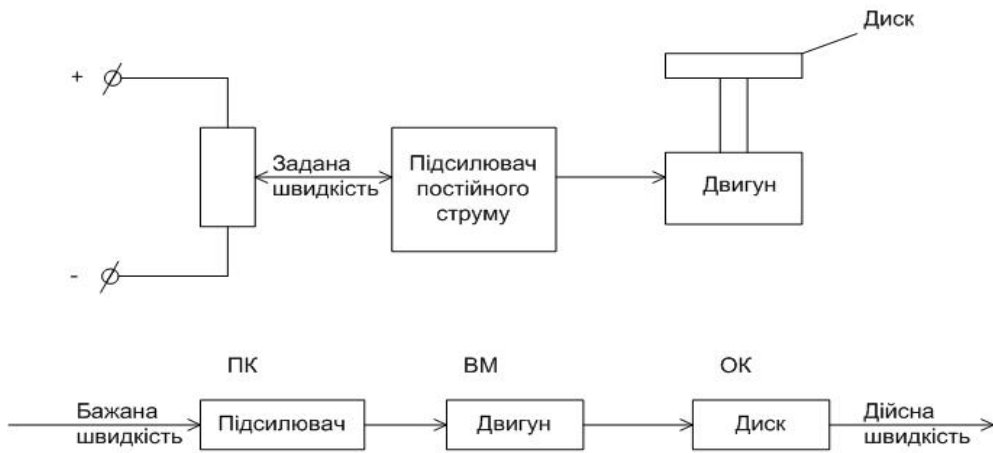


Рис. 5. Загальна схема СК швидкістю обертання диска

Приклад 4. СК зчитуванням інформації з диска. (рис. 6, 7)

Мета системи – позиціонування головки для зчитування даних на певній доріжці диска (етап 1).

Змінна, якою потрібно керувати із високою точністю, – це положення зчитувальної головки, закріпленої на кінці важеля, точніше кутова координата важеля, див. рис. 6 (етап 2).

Диск обертається зі швидкістю 1800 – 7200 об/хв., а головка розташована над диском на відстані 100 мкм. Початкова вимога до точності позиціонування становить 1 мкм. Крім того, переміщення головки від однієї доріжки до іншої має становити менше 50 мс (етап 3).

Схематично конфігурацію системи зображено на рис. 7 (етап 4).



Рис. 6. Загальна схема СК зчитуванням інформації з диска та будова дисководу

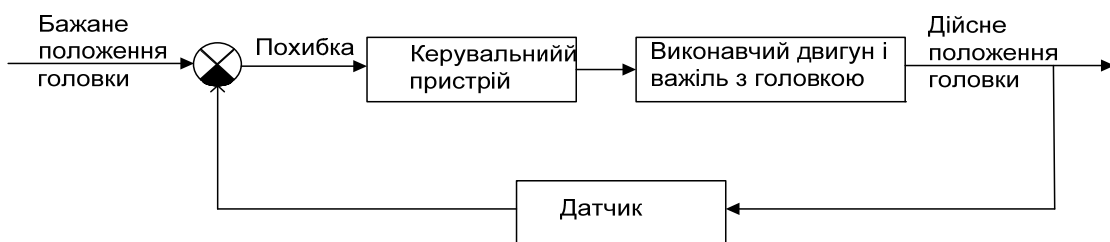


Рис. 7. Загальна схема замкненої СК (системи регулювання) до прикладу 1.4

РОЗДІЛ 1

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Мета розділу: *вивчення основних видів математичних моделей, застосовуваних для опису функціонування системи керування та її складових частин*

Завдання побудови математичних моделей СК та її складових елементів полягає у визначенні ряду співвідношень, які дозволяють за даними вхідними впливами і початковими станами визначити перебіг процесу на виході моделі. Функціонування СК відбувається в часі, отже, її елементи являють собою перетворювачі функцій часу на вході системи у функції часу на її виході. Отже, математичні моделі елементів СК зазвичай являють собою оператори. На рис. 1.1 зображено моделі типу «чорна скринька» для СК та її основних елементів, коли мають місце оператори перетворення входів системи у її виходи.

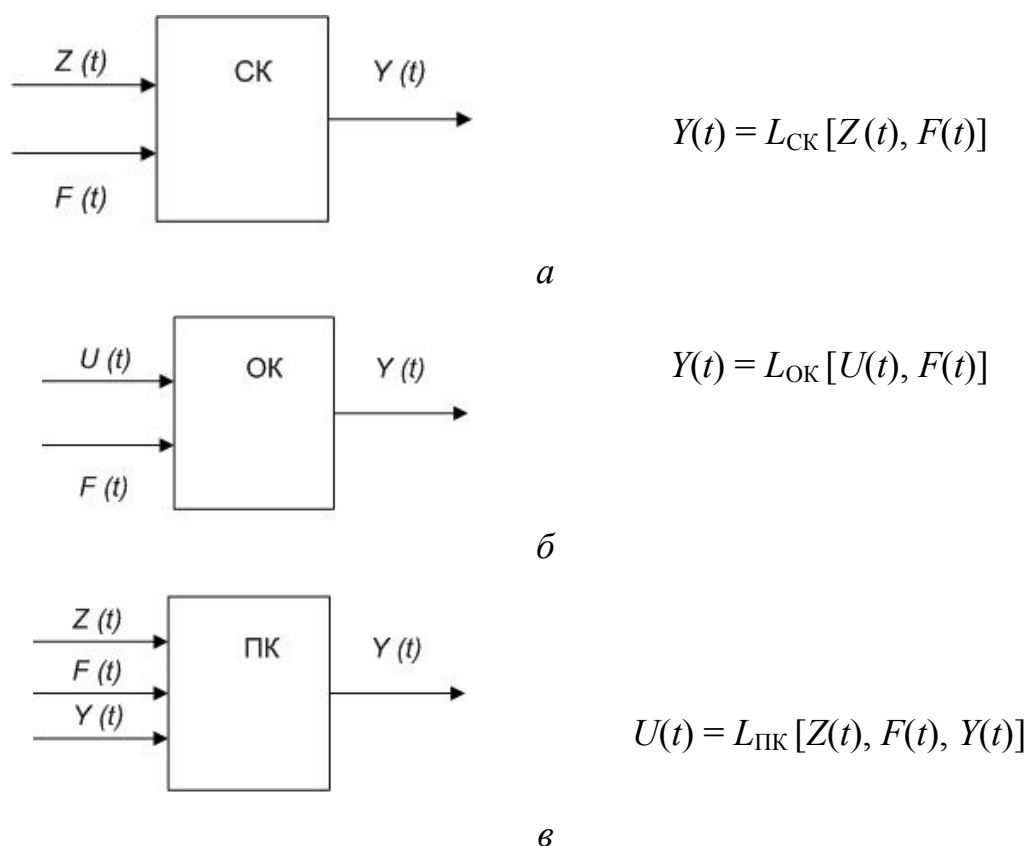


Рис. 1.1. Моделі типу «чорна скринька» СК та її основних елементів:
а – модель СК; б – ОК; в – ПК

Зазвичай модель об'єкта керування являє собою математичне формулювання фізичних законів, котрим підпорядкована його робота.

Модель пристрою керування має вигляд закону, згідно з яким формується керувальний вплив $U(t)$. Цей закон зазвичай реалізується за допомогою *алгоритму керування*.

Розглянемо основні види математичних моделей, які найбільш часто використовуються в теорії керування.

§ 1.1. Подання систем у вигляді диференціальних та різницевих рівнянь

При створенні СК одним з найбільш актуальних завдань є математичний опис об'єкта керування. Математичне вираження фізичних законів для об'єкта керування в більшості випадків приводить до створення системи нелінійних диференціальних рівнянь, яка може мати складну форму. Система, яка має r входів та n виходів (її схему показано на рис. 1.2), у загальному випадку може бути описана за допомогою такої математичної моделі:

$$\Phi_i(y_i, \dot{y}_i, \ddot{y}_i, \ddot{y}_i, \dots, u_1, \dot{u}_1, \dots, u_2, \dot{u}_2, \dots, \dots, u_r, \dot{u}_r, \dots, t_1, \dot{t}_1, \dots, t_k, \dot{t}_k, \dots) = 0, \quad i = \overline{1, l}, \quad (1.1)$$

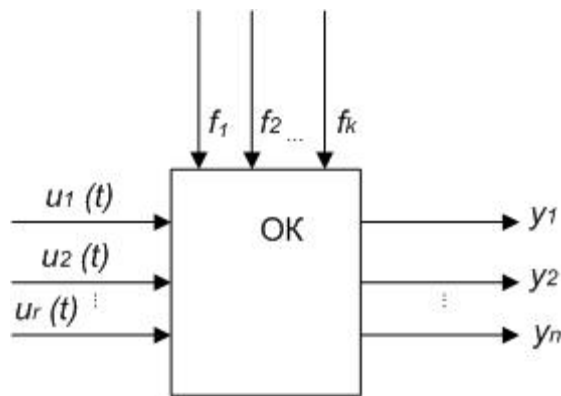


Рис. 1.2. Загальна схема СК, яка має r входів та n виходів

Розглянемо більш простий випадок, коли об'єкт є одновимірним ($r = n = 1$), тобто має один вхід і один вихід (див. рис. 1.3), тоді математична модель може бути записана в такому вигляді:

$$\Phi(u, \dot{u}, \dots, u^{(m)}, y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1.2)$$

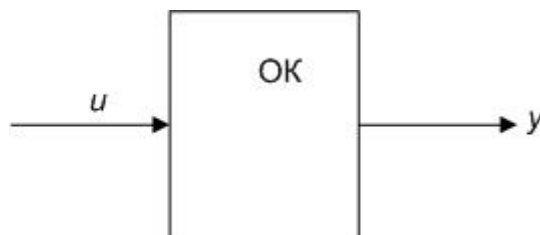


Рис. 1.3. Загальна схема одновимірного об'єкта керування

Вираз (1.2) називається моделлю типу «вхід – вихід». У сучасній теорії керування модель (1.2) не набула значного поширення. Найчастіше рівняння (1.2) порядку n ($n > m$) перетворюється в *нормальну форму Коші*, котра являє собою систему диференціальних рівнянь першого порядку, а саме:

$$\dot{x}_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.3)$$

У цьому рівнянні x_i називають змінними стану, а модель (1.3) – рівняннями стану. Перехід від моделі у формі (1.2) до форми (1.3) не є однозначним і може здійснюватися різними шляхами. Одній і тій самій системі «вхід – вихід» (1.2) може відповідати кілька систем у формі Коші (1.3), це залежить від способу визначення змінних стану. Однак, у будь-якому випадку модель системи у змінних стану повинна мати такі властивості:

1. Стан системи у наступний момент часу можна однозначно встановити за вхідним сигналом і за станом у даний момент часу, тобто

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t)], \quad x(t_0) = x_0. \quad (1.4)$$

Вираз (1.4) називається *рівнянням стану системи*.

2. Вихідний сигнал у даний момент часу однозначно встановлено за сигналом на вході і за станом системи в даний момент часу, а саме:

$$y(t) = \varphi[x(t), u(t)]. \quad (1.5)$$

Рівняння (1.5) називається *рівнянням виходу системи*.

Зауважимо, що в застосуванні до *лінійних стаціонарних* систем рівняння (1.4), (1.5) набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= A X(t) + B U(t); \\ Y(t) &= C \cdot X(t) + D \cdot U(t), \quad X(0) = X_0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

тут X, U, Y – вектори; A, B, C, D – матриці.

Для математичного опису дискретних об'єктів, тобто таких, де вхідні й вихідні змінні, а також змінні стану можуть набувати інших значень тільки у фіксовані дискретні моменти часу t_0, t_1, t_2, \dots , використовують апарат різницевого рівнянь. Ці рівняння описують зв'язок між вхідними, вихідними змінними та змінними стану в різні дискретні моменти часу. Для одновимірного дискретного об'єкта керування різницеве рівняння n -го порядку типу «вхід – вихід» має такий вигляд:

$$\varphi(y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+n}, u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+m}) = 0,$$

де $y_k = y(t_k)$; t_k – момент часу.

Дискретні моделі, так само як і неперервні, можуть бути записані у вигляді різницевих рівнянь. Вони, у свою чергу, являють собою моделі системи у змінних стану. Їх записують таким чином:

$$X_{k+1} = f[X_k, U_k];$$

$$Y_k = \phi[X_k, U_k].$$

Зокрема, якщо функції f та ϕ лінійні, то ці рівняння набувають такого вигляду:

$$X_{k+1} = AX_k + BU_k;$$

$$Y_k = CX_k + DU_k.$$

Насамкінець зауважимо, що найчастіше апарат різницевих рівнянь використовується для опису пристрою керування СК. Це пов'язано із тим, що зазвичай ПК реалізується на базі ЕОМ, котрі являють собою пристрої дискретного типу.

§ 1.2. Перетворення моделей типу «вхід – вихід» на моделі у змінних стану

Спочатку розглянемо випадок, коли нелінійна модель типу «вхід – вихід» не містить похідних від керування U , тобто вона має такий вигляд:

$$\phi(u, y, \dot{y} \dots y^{(n)}) = 0.$$

У цьому разі перетворення здійснюють за такою схемою:

1. Спершу розв'язуємо рівняння відносно старшої похідної від функції виходу $y^{(n)}$, тобто

$$y^{(n)} = F(u, y, \dot{y} \dots y^{(n-1)}).$$

2. Вводимо змінні стану, а саме: $x_i = y^{(i-1)}$, $i = \overline{1, n}$.

Тоді модель у змінних стану набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, & i = 1, 2, \dots, (n-1), \\ \dot{x}_n = F(u, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ y = x_1. \end{cases} \quad (1.7)$$

Наприклад, якщо модель «вхід – вихід» лінійна, тобто вона описана таким лінійним рівнянням:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = ku,$$

то відповідна модель у змінних стану буде такою:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, & i = 1, 2, \dots, (n-1), \\ \dot{x}_n = \frac{1}{a_0} (ku - a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n), \\ y = x_1. \end{cases}$$

Розглянемо на прикладі описане вище перетворення.

Приклад 1.1. Задано модель типу «вхід – вихід», а саме: $y''' + 2y = 3u$.
Необхідно перетворити її на модель у змінних стану.

Розв'язування

У даному випадку порядок моделі $n = 3$. Розв'язуємо рівняння відносно старшої похідної, а саме:

$$y''' = 3u - 2y.$$

Вводимо змінні стану: $x_1 = y$, $x_2 = y'$, $x_3 = y''$.

Тоді модель набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = 3u - 2x_1, \\ y = x_1. \end{cases}$$

Вочевидь, можна здійснити й обернене перетворення, тобто записану вище модель у змінних стану перетворити знову на модель типу «вхід – вихід». Це можна зробити за таким правилом:

Позначимо, що

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x}_1 = x_2, \\ \ddot{y} &= \dot{x}_2 = x_3, \\ \ddot{\ddot{y}} &= \dot{x}_3 = 3u - 2x_1 = 3u - 2y, \end{aligned}$$

У результаті отримуємо таку вихідну модель: $\ddot{\ddot{y}} + 2y = 3u$.

Матрична форма отриманої в прикладі 1.1 моделі в змінних стану подається таким чином:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU, \\ Y &= CX + DU, \end{aligned}$$

$$\text{де } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad C = (1 \ 0 \ 0); \quad D = (0).$$

Тепер розглянемо випадок, коли лінійна модель типу «вхід – вихід» містить похідні від входу u , а саме:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \dots + b_n u. \quad (1.8)$$

За таких умов модель у змінних стану буде мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} + k_i u; \\ \dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + k_n u; \quad i = \overline{1, n-1}; \\ y &= x_1 + k_0 u. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Виразимо коефіцієнти k_i , $i = \overline{1, n}$ через a_i, b_i .

Для цього продиференціюємо останнє рівняння системи (1.9), тобто

$$\dot{y} = \dot{x}_1 + k_0 \dot{u} = x_2 + k_1 u + k_0 \dot{u},$$

і вдруге $\ddot{y} = \dot{x}_2 + k_1 \dot{u} + k_0 \ddot{u} = x_3 + k_2 u + k_1 \dot{u} + k_0 \ddot{u}$.

Продовжуючи цю процедуру n разів, отримуємо такий результат:

$$\begin{aligned} y^n &= x_n^{(1)} + k_{n-1} u^{(1)} + k_{n-2} u^{(11)} + \dots + k_0 u^{(n)} = \\ &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + k_n u + k_{n-1} u^{(1)} + k_{n-2} u^{(11)} + \dots + k_0 u^{(n)}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Підставимо у вираз (1.10) значення змінних, а саме:

$$\begin{aligned} x_1 &= y - k_0 u, \\ x_2 &= y^{(1)} - k_1 u - k_0 u^{(1)}, \\ &\dots \\ x_n &= y^{(n-1)} - k_{n-1} u - k_{n-2} u^{(1)} - \dots - k_0 u^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Після зведення подібних членів

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y &= \\ = k_0 u^{(n)} + (k_1 + a_1 k_0) u^{(n-1)} + (k_2 + a_1 k_1 + a_2 k_0) u^{(n-2)} + \dots \\ &\quad + (k_n + a_1 k_{n-1} + \dots + a_n k_0) u. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Порівнюючи коефіцієнти рівнянь (1.8) і (1.11), маємо такі співвідношення:

$$\begin{aligned}
k_0 &= b_0; \\
k_1 &= b_1 - a_1 k_0; \\
k_2 &= b_2 - a_1 k_1 - a_2 k_0; \\
&\dots\dots\dots \\
k_i &= b_i - \sum_{j=0}^{i-1} a_{i-j} k_j; \quad i = 3, 4, \dots, n.
\end{aligned}
\tag{1.12}$$

Таким чином, рівняння (1.8) буде подано у вигляді системи (1.9), де коефіцієнти k_i розраховують за рекурентним співвідношенням (1.12).

На закінчення слід зауважити, що цей спосіб застосовують і тоді, коли порядок старшої похідної у правій частині рівняння (1.8) менший за n , тобто менший від порядку старшої похідної у лівій частині. Тоді необхідно припустити, що відповідні коефіцієнти $b_0, b_1, b_2 \dots b_n$ у системі (1.12) дорівнюють нулю.

§ 1.3. Типові динамічні ланки СК та їхні характеристики

Для полегшення процедур ідентифікації та аналізу СК використовується підхід, відповідно до якого система розбивається на окремі динамічні ланки. Зазвичай розбиття виконують за функціональною ознакою. Проілюструємо цей підхід на прикладі.

Приклад 1.2. Розглянемо систему керування курсом літака за допомогою автопілота, загальну схему якої подано на рис. 1.4. Складовими цієї системи є гіроскоп, що задає курс; підсилювач; електропривід; кермо; корпус літака. Мета керування – звести значення кута φ до нуля.

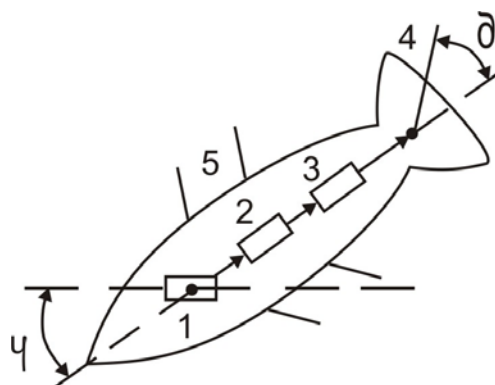


Рис. 1.4. Схема системи керування курсом літака за допомогою автопілота: 1 – гіроскоп, що задає курс; 2 – підсилювач; 3 – електропривід; 4 – кермо; 5 – корпус літака

Цю систему можна розбити на окремі ланки 1, 2, 3, 4, 5 (їх показано на схемі), відповідно до виконуваних ними функцій і описати та здійснити аналіз властивостей кожної з них.

Зауважимо, що кожна динамічна ланка являє собою окремий елемент СК зі своїми вхідними і вихідними впливами, відповідно до схеми, показаної на рис. 1.5. Вона може являти собою технічний пристрій будь-якої фізичної природи, конструкції та призначення, тому створення математичної моделі у кожному конкретному випадку є предметом розгляду відповідної галузі технічних наук.



Рис. 1.5. Схема окремої ланки системи

У більшості випадків математичний опис динамічних ланок виконують за допомогою диференціальних рівнянь того чи іншого виду. У результаті фізична задача визначення вихідної величини ланки, коли змінюється її вхідний сигнал, приводить до задачі розв'язування диференціального рівняння, яке описує роботу ланки.

Припустимо, що в результаті ідентифікації отримано таке рівняння для опису деякої ланки:

$$a_2\ddot{x}_2 + a_1\dot{x}_2 + a_0x_2 = b_1\dot{x}_1 + b_0x_1. \quad (1.13)$$

У теорії керування прийнято математичну модель у вигляді виразу (1.13) записувати таким чином:

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)x_2 = k(\tau_1 p + 1)x_1, \quad (1.14)$$

тут p – операція диференціювання ($p = \frac{d}{dt}$).

Величини: $T_1 = \frac{a_1}{a_0}$, $T_2^2 = \frac{a_2}{a_0}$, $\tau_1 = \frac{b_1}{b_0}$, називають *сталими часу*. Чим більше значення кожної з них, тим повільніше йдуть процеси в ланці. Величина: $k = \frac{b_0}{a_0}$, називається *коефіцієнтом підсилення*. Розмірності величин:

$$T_1, T_2, \tau_1 - [c]; \quad k_1 - \left[\frac{\text{розмірність } x_2}{\text{розмірність } x_1} \right].$$

Коли ланка перебуває у сталому стані, змінні x_1, x_2 також будуть сталими, тобто $x_1 = \text{const}$; $x_2 = \text{const}$, тому з виразу (1.13) отримуємо таке співвідношення:

$$x_2 = kx_1.$$

Останній вираз називається *статичною характеристикою ланки*. Ця характеристика встановлює відповідність між входом і виходом ланки у сталому режимі (після завершення перехідних процесів).

Крім традиційних математичних моделей (1.13), (1.14), у теорії керування для опису змінних у часі властивостей ланок застосовують інші моделі, які називаються *динамічними характеристиками ланок*. Розглянемо їх докладніше.

1. *Передавальна функція* ланки $W(p)$ являє собою відношення зображення за Лапласом сигналу на виході ланки до відповідного зображення її вхідного сигналу за нульовими початковими умовами, тобто:

$$W(p) = \frac{x_2(p)}{x_1(p)},$$

тут $x_2(p) = L[x_2(t)] = \int_0^{\infty} x_2(t)e^{-pt} dt$ – перетворення Лапласа, $x_1(p) = L[x_1(t)]$,

$x_i(t)$ – оригінал, $x_i(p)$ – зображення, яке ставить у відповідність функції $x_i(t)$ дійсної змінної t , функцію $x_i(p)$ комплексної змінної p , $i=1, 2$.

Зазвичай для лінійної ланки (системи) передавальну функцію можна безпосередньо записати, скориставшись диференціальним рівнянням. Наприклад, для рівнянь типу (1.13), (1.14)

$$W(p) = \frac{b_1 p + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0} = \frac{k(\tau_1 p + 1)}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}.$$

У загальному випадку $W(p) = kN(p) / M(p)$, де $N(p)$ і $M(p)$ – поліноми від параметра p з одиницями в молодших розрядах, причому як правило, ступінь полінома $N(p)$ нижчий від ступеня полінома $M(p)$.

2. *Вагова функція ланки (імпульсна перехідна функція) $h(t)$* являє собою оригінал (тобто обернене перетворення Лапласа) передавальної функції, а саме:

$$h(t) = L^{-1}[W(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{l-j\infty}^{l+j\infty} W(p)e^{pt} dp,$$

при нульових початкових умовах, тобто коли

$$x_2(p) = W(p)x_1(p).$$

Отже, якщо $x_1(p)=1$, тобто, коли $x_1(t)=\delta(t)$ – дельта-функція, то $x_2(t)=h(t)$, тут $\delta(t)$ являє собою одиничний імпульс, для котрого $t_1=0$, $l_1=\infty$, а $t_1 l_1=1$ (див. рис. 1.6, а). Іншими словами, вагова функція $h(t)$ показує реакцію ланки на одиничний миттєвий імпульс великої амплітуди на її вході.

Знаючи вигляд вагової функції $h(t)$, можна знайти передавальну функцію ланки таким чином:

$$W(p) = L[h(t)],$$

а також визначити вихідний сигнал $x_2(t)$, коли відомий вхідний сигнал $x_1(t)$, а саме:

$$x_2(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x_1(t-\tau)d\tau.$$

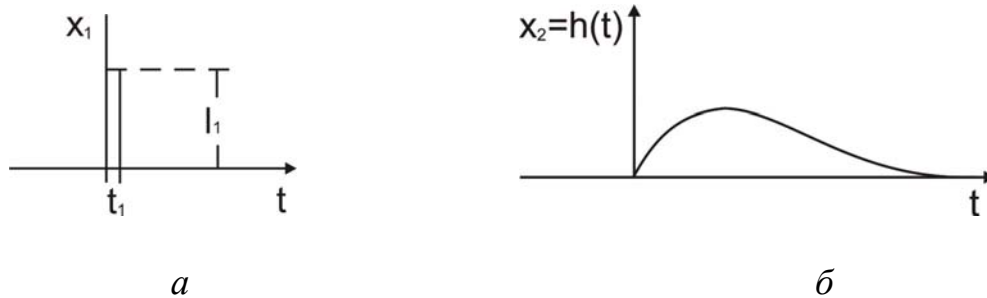


Рис. 1.6. Графічне подання: а – дельта-функції, б – імпульсної перехідної функції

3. *Перехідна функція ланки $H(t)$* – це реакція ланки на одиничну східчасту дію, тобто перехідний процес на виході: $x_2(t)=H(t)$, коли на вхід подається одиничний східчастий стрибок, тобто $x_1(t)=l(t)$. Приклади графіків перехідних функцій показано на рис. 1.7.

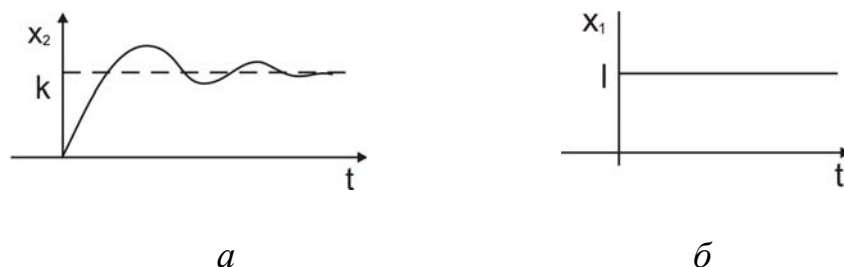


Рис. 1.7. Графіки перехідної функції ланки і сигналу на вході: а – перехідна функція, б – одиничний східчастий стрибок на вході

Зображення за Лапласом² одиничної функції має такий вигляд: $L[l(t)] = \frac{1}{p}$. Це означає, що $x_2(t) = H(t) = L^{-1}\left(\frac{W(p)}{p}\right)$. Як відомо, $\delta(t) = \frac{dl(t)}{dt}$, тому $h(t) = \frac{dH(t)}{dt}$, тобто вагова функція дорівнює першій похідній від її перехідної функції.

4. *Частотні характеристики* являють собою співвідношення, які описують реакцію ланки на гармонійний вхідний вплив у сталому режимі, тобто коли мають місце вимушені синусоїдальні коливання на виході ланки (див. рис. 1.8).



Рис. 1.8. Реакція ланки на гармонійний вплив

Нехай на вхід подається сигнал: $x_1(t) = \sin(\omega t)$, тоді на виході маємо таку реакцію: $x_2(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$, тут A – амплітуда; φ – фаза. Величини A і φ будуть залежати від частоти вхідного сигналу, тобто $A(\omega)$ – *амплітудна частотна характеристика* (АЧХ); $\varphi(\omega)$ – *фазова частотна характеристика* (ФЧХ).

Частотні характеристики можуть бути отримані через передавальну функцію $W(p)$ за такими формулами:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= |W(j\omega)|, \\ \varphi(\omega) &= \arg W(j\omega). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Функція $W(j\omega)$ називається *амплітудно-фазовою частотною характеристикою* (АФЧХ). Її можна отримати, якщо в передавальній функції зробити таку заміну: $p \rightarrow j\omega$.

Тоді характеристики $W(j\omega)$, $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$ можна подати таким чином:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= U(\omega) + jV(\omega); \\ A(\omega) &= \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}; \\ \varphi(\omega) &= \arctg(V(\omega) / U(\omega)). \end{aligned}$$

² Ідеться про інтегральне перетворення Лапласа, що зв'язує функцію $F(s)$ комплексної змінної (зображення) з функцією $f(x)$ дійсної змінної (оригіналу). За допомогою цього перетворення досліджуються властивості динамічних систем і розв'язуються диференціальні й інтегральні рівняння. Докладніше див. [6]

Приклад 1.3. Нехай відомо передавальну функцію ланки: $W(p) = \frac{k}{Tp + 1}$.

Необхідно визначити її амплітудну частотну характеристику $A(\omega)$ й фазову частотну характеристику $\varphi(\omega)$.

Розв'язування

У передавальній функції: $W(p) = \frac{k}{Tp + 1}$, зробимо таку заміну: $p \rightarrow j\omega$, і

отримаємо АФЧХ, а саме: $W(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1}$.

Тепер подамо функцію $W(j\omega)$ в такому вигляді: $W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$.

Для цього виконаємо викладені нижче перетворення.

Помножимо чисельник і знаменник на число, спряжене із знаменником, тобто

$$W(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1} \cdot \frac{Tj\omega - 1}{Tj\omega - 1} = \frac{-k + jkT\omega}{-T^2\omega^2 - 1} = \frac{k}{T^2\omega^2 + 1} - j \frac{kT\omega}{T^2\omega^2 + 1},$$

і поставимо у відповідність один одному отримані вирази.

Певна річ, що

$$U(\omega) = \frac{k}{T^2\omega^2 + 1} \quad \text{— дійсна частина;}$$

$$V(\omega) = \frac{-kT\omega}{T^2\omega^2 + 1} \quad \text{— уявна частина.}$$

Тепер, використовуючи визначення АЧХ й ФЧХ, отримуємо такі вирази для їх визначення:

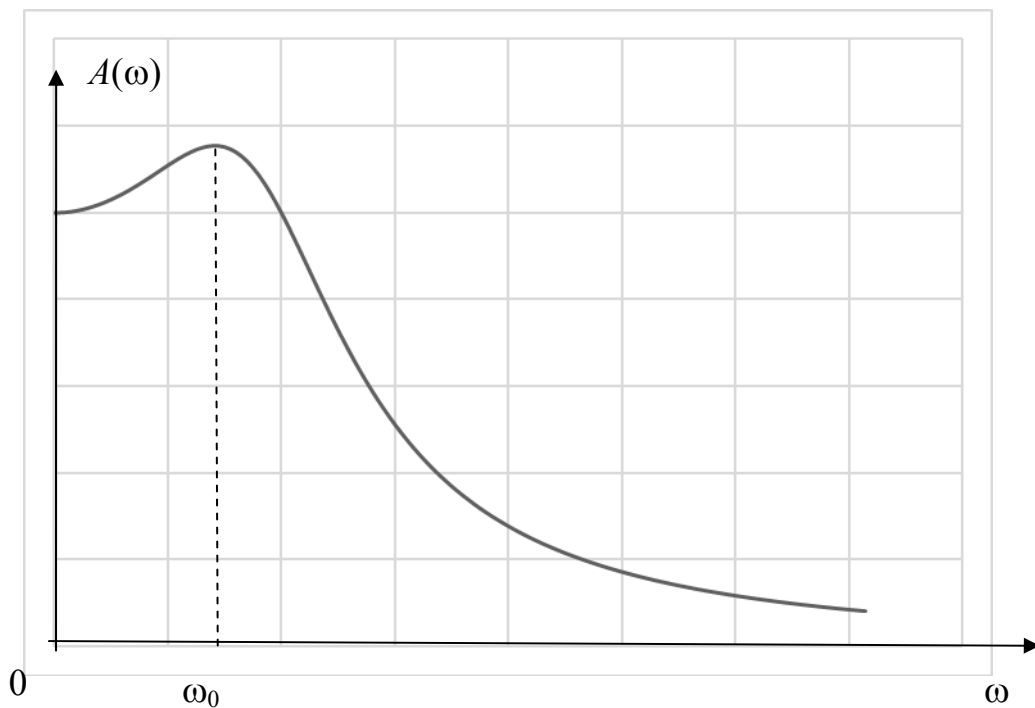
$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \frac{k\sqrt{1 + T^2\omega^2}}{T^2\omega^2 + 1} = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}};$$

$$\varphi(\omega) = \arctg(-T\omega).$$

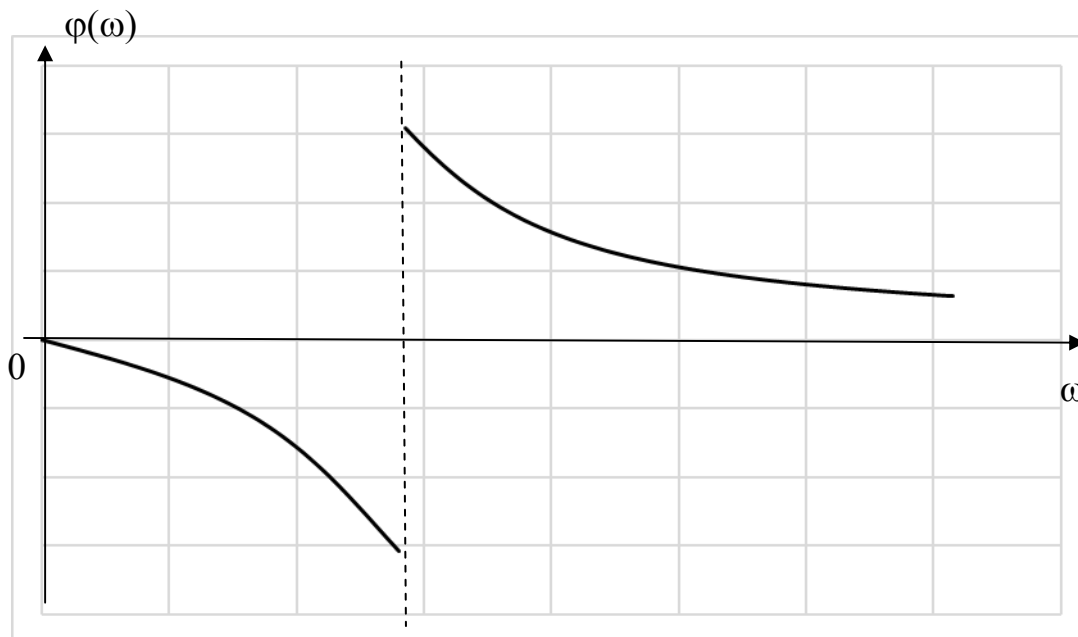
Насамкінець опишемо зв'язок між частотною характеристикою $W(j\omega)$ і ваговою функцією $h(t)$, а саме:

$$W(j\omega) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt; \quad h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

Зауважимо, що функції $A(\omega)$ і $\varphi(\omega)$ можуть бути подані графічно. Приклади їх можливого вигляду показано на рис. 1.9.



a



б

Рис. 1.9. Графічне подання функцій: *a* – $A(\omega)$; *б* – $\varphi(\omega)$

5. *Логарифмічні частотні характеристики (ЛЧХ)* будуються на основі частотних характеристик $A(\omega)$ і $\varphi(\omega)$. При побудові логарифмічної амплітудно-частотної характеристики (ЛАЧХ) на осі ординат відкладають значення функції: $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$ (виміряну в дБ). На осі абсцис відкладають частоту в логарифмічному масштабі $\lg(\omega)$.

При побудові фазової логарифмічної частотної характеристики (ЛФЧХ) вісь ординат відповідає куту φ в градусах, вісь абсцис – частоті в логарифмічному масштабі $\lg(\omega)$ (див. рис. 1.10).

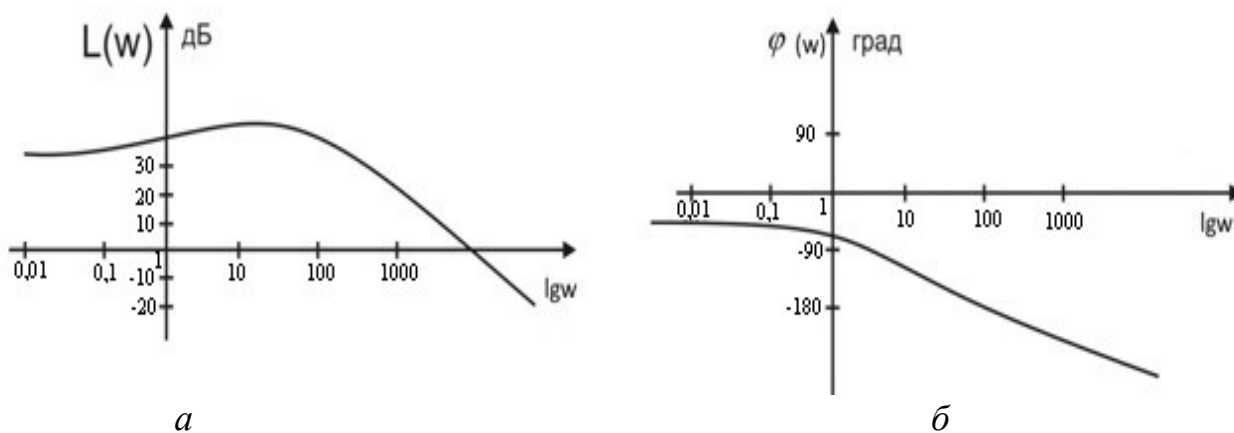


Рис.1.10. Графіки логарифмічних частотних характеристик: *a* – ЛАЧХ; *б* – ЛФЧХ

§ 1.4. Основні типи ланок

Залежно від виду передавальної функції, котра визначає динамічні властивості кожної ланки, їх поділяють на кілька типів.

Нагадаємо, що передавальна функція лінійної системи являє собою такий вираз: $W(p) = \frac{kN(p)}{M(p)}$, де $N(p)$, $M(p)$ – поліноми від параметра p .

Поліноми $N(p)$, $M(p)$ можуть бути розкладені на множники. Можливий вигляд цих множників і визначає структуру типових ланок. До типових відносять ланки, порядок чисельника і знаменника яких не перевищує 2.

Розглянемо їх детальніше.

1. Ідеальна підсилювальна ланка (пропорційна ланка) підсилює вхідний сигнал у k разів (k – коефіцієнт підсилення або коефіцієнт передачі ланки). Її модель подано на рис.1.11, а рівняння має такий вигляд: $x_2 = kx_1$.

Передавальна функція ідеальної підсилювальної ланки має такий вигляд:

$$W(p) = k,$$

тобто, вона не залежить від змінної p , а значить, пропорційна ланка є статичною.

Частотна характеристика такої ланки: $W(j\omega) = k$, її АЧХ: $A(\omega) = k$. Як бачимо, вона не залежить від частоти гармонійного впливу, а за будь-якого її значення змінює амплітуду коливань у k разів, тобто ФЧХ: $\varphi(\omega) = 0$, а це означає, що ланка не дає фазового зсуву за жодної частоти.

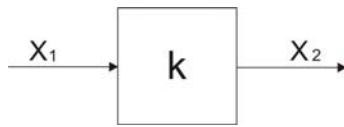


Рис. 1.11. Модель «вхід – вихід» ідеальної підсилювальної ланки

Перехідна функція цієї ланки має такий вигляд:

$$H(t) = kl(t), (t > 0),$$

тобто у відповідь на одиничний східчастий вплив сигнал на виході миттєво досягає величини, у k разів більшої за сигнал на вході, і зберігає це значення (рис. 1.12). Тому

цю ланку називають ще *безінерційною*. Якщо $k = 1$, то ланка ніяк себе не виявляє, а коли $k = -1$, то вона інвертує вхідний сигнал. Імпульсна перехідна функція ідеальної підсилювальної ланки $h(t) = k\delta(t)$.

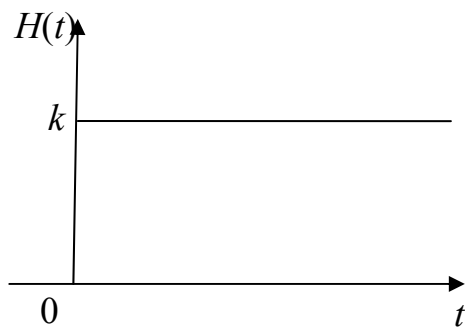


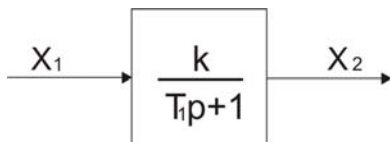
Рис. 1.12. Перехідна функція ідеальної підсилювальної ланки

Прикладами підсилювальної ланки є механічні передачі, датчики. Та чи інша реальна ланка зазвичай має інерційність, але з певною мірою точності деякі реальні ланки можна розглядати як безінерційні, скажімо, жорсткий механічний важіль, редуктор, потенціометр.

2. Аперіодична (інерційна) ланка першого порядку (рис. 1.13).

Аперіодичними називаються ланки, у яких вихідна величина після східчастого впливу змінюється монотонно, досягаючи деякого усталеного значення. Такі ланки часто застосовують у практиці автоматичного регулювання. Наприклад, саме так можна описати більшість теплових об'єктів. Якщо подати напругу на вхід електричної печі, її температура буде змінюватися за аналогічним законом. Рівняння аперіодичної ланки має такий вигляд: $T_1\dot{x}_2 + x_2 = kx_1$.

Передавальна функція такої ланки



$$W(p) = \frac{k}{T_1 p + 1},$$

Рис.1.13. Модель «вхід – вихід» аперіодичної ланки першого порядку

де k – статичний коефіцієнт передачі, T – стала часу (вимірюється в секундах).

Її частотні характеристики відповідають таким виразам:

$$\text{АФЧХ: } W(j\omega) = \frac{k}{T_1 j\omega + 1};$$

$$\text{АЧХ: } A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}};$$

$$\text{ФЧХ: } \varphi(\omega) = -\text{arctg}(T_1 \omega).$$

Перехідна функція аперіодичної ланки має такий вигляд:

$$H(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}), \quad t > 0.$$

Це означає, що коли на вхід подати східчастий вплив, вихідна величина буде змінюватись не стрибком, а плавно, за експоненціальним законом, тобто ланка має інерцію. Звідси і її друга назва – інерційна ланка. Перехідна функція зростає монотонно, без коливань, тому й ланку називають аперіодичною, тобто такою, що не має періоду, неколивальною.

Усталене значення перехідної функції дорівнює коефіцієнту k . Теоретично перехідна функція буде нескінченно наближуватись до цього значення, і перехідний процес триває нескінченно довго (див. рис. 1.14, *а*). На практиці зазвичай вважають, що перехідний процес завершено, коли вихідна величина досягає значення 0,95 – 0,99 від значення коефіцієнта k . Такий проміжок часу визначено інтервалом $(3T \div 5T)$. Стала T – це показник інерційності ланки. Чим він вищий, тим більш інерційною є ланка. Вагова функція аперіодичної ланки

першого порядку має такий вигляд: $h(t) = \frac{k}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}}, \quad t > 0$ (див. рис. 1.14, *б*).

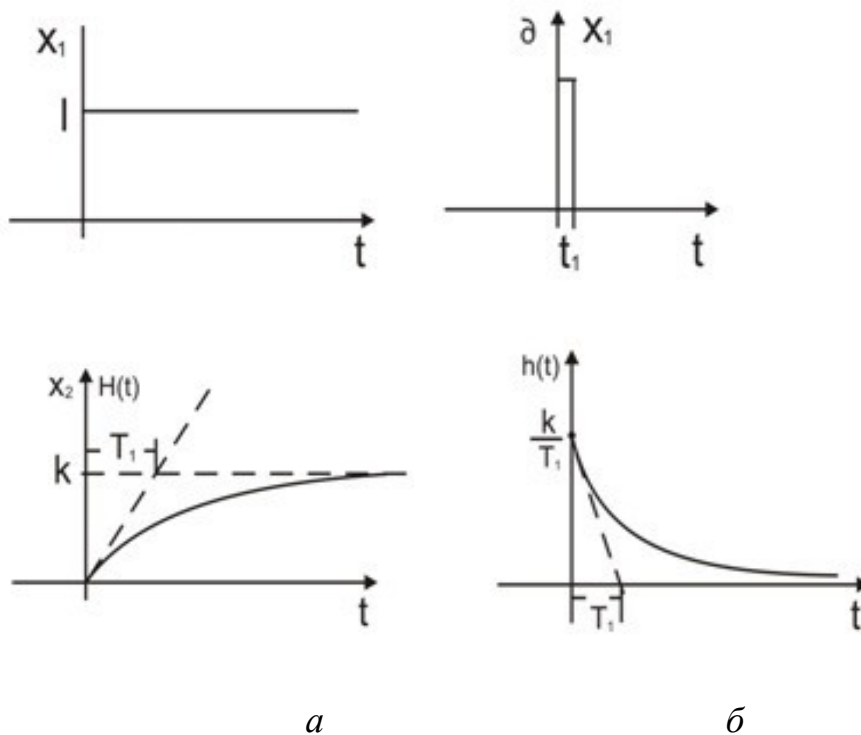


Рис. 1.14. Графіки перехідної (*а*) та імпульсної перехідної (вагової) (*б*) функції аперіодичної ланки першого порядку

Наведемо приклади аперіодичних ланок першого порядку.

1. Процес $y(t)$ нагрівання тіла описується диференціальним рівнянням такого вигляду: $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$, або в операторній формі $(Tp + 1) \cdot y(p) = k \cdot x(p)$.

2. Розглянемо RC-коло (рис.1.15).

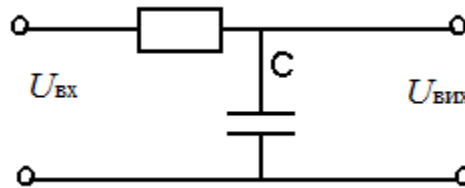


Рис.1.15. Схема RC-кола

Напруга $U_{вих}(t)$ на його виході змінюється відповідно до такого диференціального рівняння:

$$RC \frac{dU_{вих}(t)}{dt} + U_{вих}(t) = U_{вх}(t).$$

3. Аперіодична ланка другого порядку (рис. 1.16) описується таким рівнянням: $T_2^2 \ddot{x}_2 + T_1 \dot{x}_2 + x_2 = kx_1$, причому $T_1 \geq 2T_2$. Фізичний сенс цієї нерівності полягає в тому, що втрати енергії у ланці дуже великі, а тому коливання в ній не виникають.

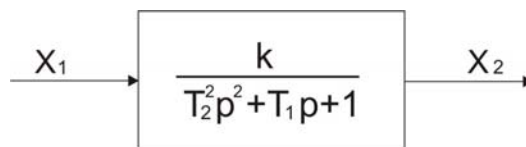


Рис. 1.16. Модель «вхід – вихід» аперіодичної ланки другого порядку

Передавальна функція цієї ланки має такий вигляд:

$$W(p) = \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}, \text{ де } T_1 \geq 2T_2.$$

За цих умов корені характеристичного рівняння: $T_2^2 p^2 + T_1 p + 1 = 0$, будуть дійсними, а саме:

$$p_{1,2} = -(T_1 \pm \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}) / 2T_2^2.$$

Розклавши знаменник $W(p)$ на множники, отримуємо такий результат:

$$W(p) = \frac{k}{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)}, \text{ де } T_{3,4} = \frac{T_1}{2} \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2};$$

$$W(j\omega) = \frac{k}{(T_3 j\omega + 1)(T_4 j\omega + 1)};$$

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(T_3^2 \omega^2 + 1)(T_4^2 \omega^2 + 1)}};$$

$$\varphi(\omega) = -\text{arctg}(T_3 \omega) - \text{arctg}(T_4 \omega).$$

Інакше кажучи, аперіодична ланка другого порядку може бути подана як дві послідовно увімкнені ланки першого порядку.

Перехідна та вагова функції будуть відповідно мати такий вигляд:

$$H(t) = k \left(1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_4}} \right), \quad h(t) = \frac{k}{T_3 - T_4} \left(e^{-\frac{t}{T_3}} - e^{-\frac{t}{T_4}} \right), \quad t > 0,$$

їхні графіки показано на рис. 1.17.

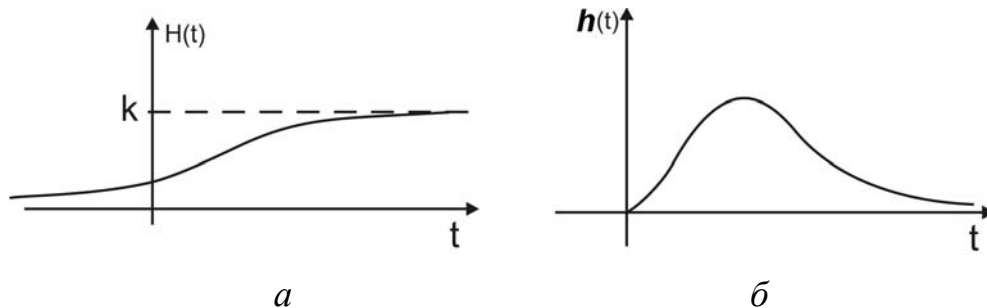


Рис. 1.17. Графіки перехідної (а) та вагової (б) функцій аперіодичної ланки другого порядку

Завдання 1.1. Довести, що коло, зображене на рис. 1.18, – це аперіодична ланка другого порядку.

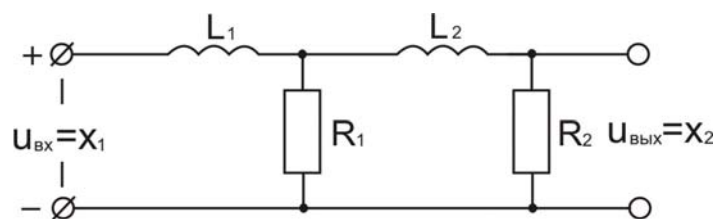


Рис. 1.18. Схема електричного кола до завдання 1.1

4. Коливальна ланка (її схему див. на рис. 1.19). Якщо подати на вхід східчастий вплив з амплітудою x_0 , то перехідна крива буде належати до одного з двох видів: аперіодичного (коли $T_1 \geq 2T_2$, її було розглянуто вище) або коливального (коли $T_1 < 2T_2$).

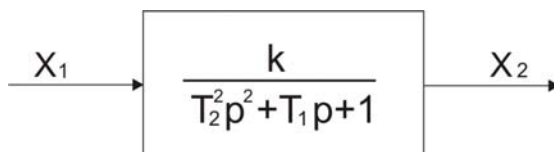


Рис. 1.19. Модель типу «вхід – вихід» коливальної ланки

Рівняння цієї ланки: $T_2^2 \ddot{x}_2 + T_1 \dot{x}_2 + x_2 = kx_1$, а перехідна функція має такий вигляд: $W(p) = \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}$, причому $T_1 < 2T_2$.

У цьому випадку корені характеристичного рівняння: $T_2^2 p^2 + T_1 p + 1 = 0$ будуть комплексними, це означає, що процеси, які тривають у ланці, містять коливальну складову, від чого й походить назва ланки.

Передавальну функцію коливальної ланки часто записують у такому вигляді:

$$W(p) = \frac{k}{T_2 p^2 + 2\varepsilon T p + 1}, \text{ де } T = T_2; \varepsilon = \frac{T_1}{2T_2}.$$

При цьому $0 < \varepsilon < 1$. Якщо $\varepsilon \geq 1$, то ланка стає аперіодичною другого порядку. Величина ε називається *коефіцієнтом загасання ланки*.

Основні частотні характеристики коливальної ланки мають такий вигляд:

$$\text{АФЧХ: } W(j\omega) = \frac{k}{T^2(j\omega)^2 + 2\varepsilon T j\omega + 1};$$

$$\text{АЧХ: } A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2 T^2 \omega^2}};$$

$$\text{ФЧХ: } \varphi(\omega) = -\arctg \frac{2\varepsilon T \omega}{1 - T^2 \omega^2}.$$

Завдання 1.2. Вивести вирази для опису функцій $A(\omega)$ й $\varphi(\omega)$ самостійно.

Частоту: $\omega_p = \frac{1}{T} \sqrt{1-2\varepsilon^2}$, називають *резонансною*. Перехідна та вагова функції коливальної ланки будуть мати такий вигляд:

$$H(t) = k \left[1 - e^{-\frac{\varepsilon}{T}t} \left(\cos \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{T}t + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \sin \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{T}t \right) \right];$$

$$h(t) = \frac{k\varepsilon}{T\sqrt{1-\varepsilon^2}} e^{-\frac{\varepsilon}{T}t} \sin \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{T}t, t > 0.$$

На рис. 1.20 показано графіки характеристик коливальної ланки. Коливальний характер перехідної функції відповідає наявності в ній періодичних функцій синуса та косинуса. Коливання будуть згасати, оскільки множник $e^{-\frac{\varepsilon}{T}t}$ зменшується із збільшенням параметра t і прямує до нуля, коли $t \rightarrow \infty$.

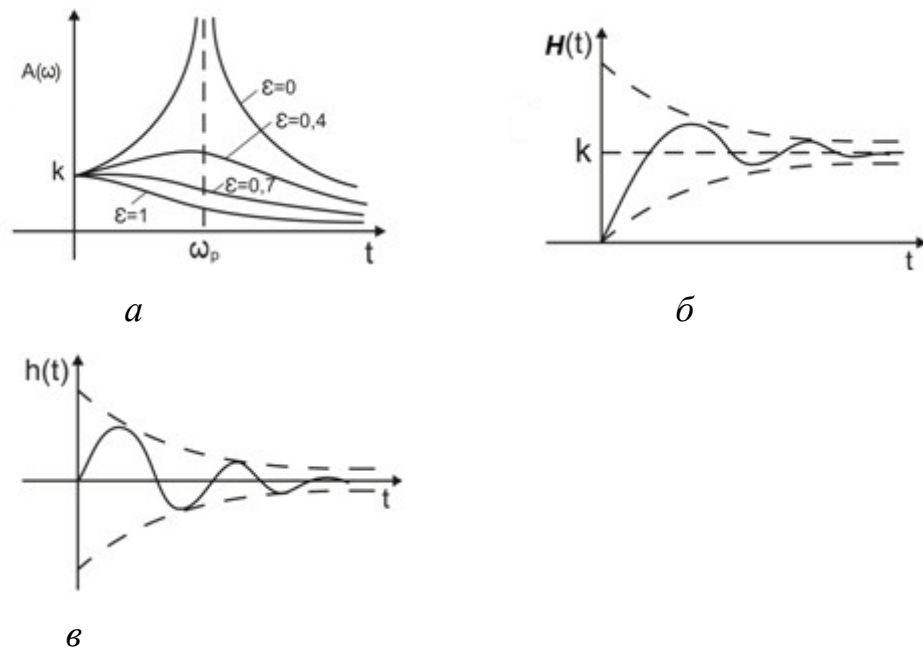


Рис.1.20. Графіки характеристик коливальної ланки: *а* – амплітудна частотна характеристика; *б* – перехідна функція; *в* – вагова функція

Зауважимо, що в теорії керування розрізняють вимушені й вільні коливання. *Вільні*, які ще називають *власними*, виникають і відбуваються під дією внутрішніх властивостей системи і тому характеризуються обов'язковим згасанням, коли дія внутрішніх сил припиняється або зменшується. *Вимушені* коливання – це процеси, викликані впливом зовнішніх сил на систему, тобто ті, що відбуваються під впливом різного роду зовнішніх збурень середовища, у якому вони діють.

Коливання перехідної функції коливальної ланки – вільні, оскільки вони спричинені власними характеристиками системи.

Характерним для елементів, відповідних коливальній ланці, є наявність не менше двох нагромаджувачів енергії, які мають властивість обмінюватись її запасами. Якщо в процесі обміну загальний запас енергії в ланці зменшується, то коливання згасають, і ланка буде стійкою. У стійкій коливальній ланці, окрім двох нагромаджувачів енергії, ще має бути елемент, який може її розсіювати.

На рис. 1.21 показано приклади коливальних ланок. Це механічна коливальна система (рис. 1.21, а), котра являє собою вантаж масою m , підвішений у в'язкому середовищі на пружині з коефіцієнтом пружності n ; та електричне RLC-коло (рис. 1.21, б). Динамічні процеси в механічній коливальній ланці та в електричному колі аналогічні, оскільки вони описуються однаковими диференціальними рівняннями. У механічній коливальній ланці маса виступає аналогом індуктивності, пружність – аналогом електричної ємності, а механічний опір – аналогом електричного опору.

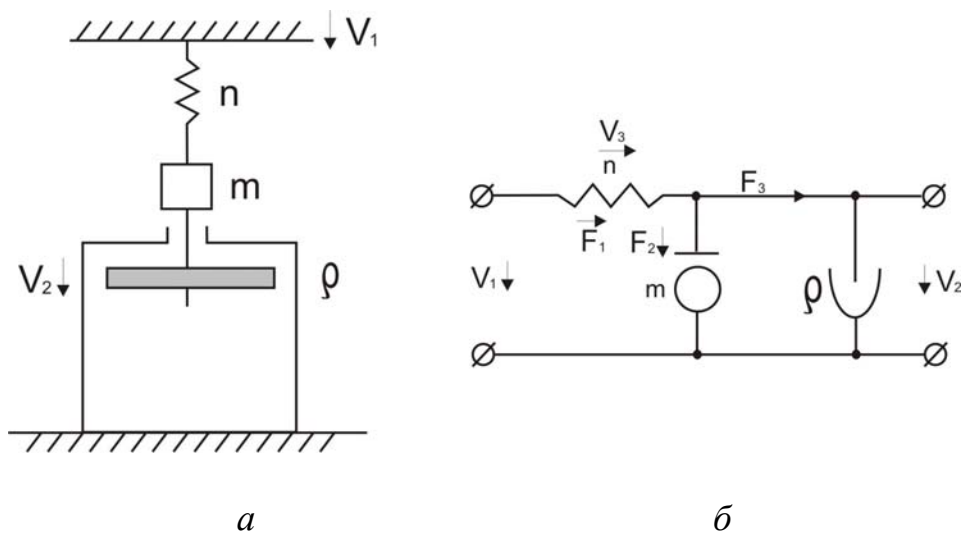


Рис.1.21. Схеми коливальних ланок: а – механічна коливальна система (пружина, вантаж, демпфер), б – електричне коло

Приклад 1.4. Для механічної системи (рис. 1.21, а) знайти співвідношення між параметрами n , m і ρ , за яким об'єкт стає коливальною ланкою.

Розв'язування

Дана механічна система, складається з пасивних елементів пружини (коефіцієнт пружності n , маси m і механічного демпфера ρ . Зовнішнім впливом є швидкість V_1 . На схемі позначено швидкості пасивних елементів V_2 , V_3 і сили F_1 , F_2 , F_3 , що на них діють.

Запишемо спочатку основні співвідношення, які характеризують даний об'єкт, використовуючи відомі фізичні закони, а саме:

1. При послідовному з'єднанні елементів швидкості підсумовуються. Тому, враховуючи те, що m та ρ мають однакову швидкість,

$$V_1 = V_2 + V_3;$$

2. При паралельному з'єднанні елементів різні за величиною сили, які діють на кожний елемент, також підсумовуються, тобто

$$F_1 = F_2 + F_3.$$

3. У разі зміни лінійної швидкості, що діє на масу m , виникає сила: $F_2 = m\dot{V}_2$, тому

$$V_2 = \frac{1}{m} \int F_2 dt.$$

4. Зміна лінійної швидкості, яка діє на демпфер, зумовлює виникнення сили: $F_3 = \frac{1}{\rho} V_2$, звідси

$$V_2 = F_3 \rho.$$

5. Коли змінюється лінійна швидкість, що діє на пружність, то виникає сила: $F_1 = \frac{1}{n} \int V_3 dt$, отже,

$$V_3 = n \frac{dF_1}{dt}.$$

Таким чином, отримуємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} V_1 = V_2 + V_3, \\ F_1 = F_2 + F_3, \\ V_2 = F_3 \rho, \\ m\dot{V}_2 = F_2, \\ V_3 = n\dot{F}_1. \end{cases}$$

Вилучимо з рівнянь змінні V_3, F_1, F_2, F_3 , тобто

$$\begin{cases} V_1 = V_2 + V_3, \\ F_1 = F_2 + F_3, \\ V_2 = F_3 \rho, \\ m\dot{V}_2 = F_2, \\ V_3 = n\dot{F}_1. \end{cases} \quad \begin{cases} F_1 = F_2 + F_3, \\ V_2 = F_3 \rho, \\ m\dot{V}_2 = F_2, \\ V_1 - V_2 = n\dot{F}_1. \end{cases} \quad \begin{cases} V_2 = F_3 \rho, \\ m\dot{V}_2 = F_2 \rightarrow \dot{F}_2 = m\ddot{V}_2, \\ V_1 - V_2 = n\dot{F}_1 - n\dot{F}_3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_2 = F_3 \rho \rightarrow F_3 = \frac{V_2}{\rho} \rightarrow \dot{F}_3 = \frac{\dot{V}_2}{\rho}, \\ V_1 - V_2 = nm\dot{V}_2 - n\dot{F}_3. \end{cases} \quad V_1 - V_2 = nm\ddot{V}_2 + n \frac{\dot{V}_2}{\rho}.$$

Отже, отримано таку модель: $nm\ddot{V}_2 + \frac{n}{\rho}\dot{V}_2 + V_2 = V_1$.

Модель коливальної ланки має такий вигляд: $T_2^2\ddot{x}_2 + T_1\dot{x}_2 + x_2 = kx_1$. Порівнюючи ці два вирази, визначимо параметри коливальної ланки, а саме:

$$k=1, \quad T_2^2 = nm, \quad T_1 = \frac{n}{\rho}, \quad T_2 = \sqrt{nm}.$$

Ланка буде коливальною за умови, що $T_1 < 2T_2$. Таким чином, шукане співвідношення між параметрами

$$\frac{n}{\rho} < 2\sqrt{nm}.$$

5. Ідеальна інтегрувальна ланка (рис. 1.22) характеризується тим, що вихідна величина пропорційна інтегралу від величини на вході. Вона астатична, тобто не має усталеного режиму.

Рівняння ідеальної інтегрувальної ланки має такий вигляд: $\dot{x}_2 = kx_1$ або $x_2 = k \int x_1 dt$, а її передавальна функція та АФЧХ записуються таким чином:

$$W(p) = \frac{k}{p}; \quad W(j\omega) = \frac{k}{j\omega}.$$

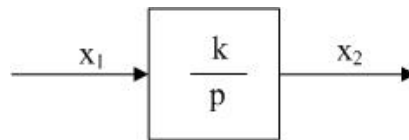


Рис. 1.22. Модель типу «вхід – вихід» ідеальної інтегрувальної ланки

Приклад 1.5. Вивести вирази для опису частотних характеристик $A(\omega)$ й $\varphi(\omega)$ інтегрувальної ланки.

Розв'язування

Згідно з формулами (1.15) $A(\omega) = |W(j\omega)|$, $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$.

Враховуючи вигляд передавальної функції ідеальної інтегрувальної ланки, отримуємо такий вираз:

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} \cdot \frac{j\omega}{j\omega} = -\frac{jk}{\omega} = 0 - j\frac{k}{\omega}.$$

Отже, $A(\omega) = \frac{k}{\omega}$, $\varphi(\omega) = \arctg(-\infty) = -90^\circ$.

Перехідна функція ідеальної інтегрувальної ланки має такий вигляд: $H(t) = kt$, це означає, що коли сигнал на вході – це стала додатна величина, то

значення перехідної функції нескінченно лінійно зростає, причому швидкість зростання дорівнює коефіцієнту k . Вагова функція $h(t) = k$, коли $t > 0$, тобто інтегровальна ланка має властивість зберігати стале, ненульове значення вихідної величини. Графіки цих функцій подано на рис. 1.23.

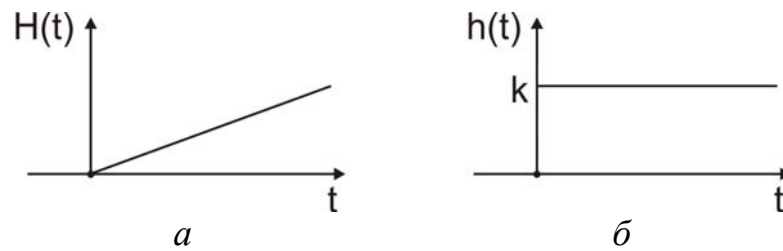


Рис. 1.23. Графіки перехідної (а) та вагової (б) функцій ідеальної інтегровальної ланки

б. Інерційна (реальна) інтегровальна ланка (рис. 1.24) описується таким рівнянням: $T_1\ddot{x}_2 + \dot{x}_2 = kx_1$. Її можна подати у вигляді суми двох ланок: ідеальної інтегровальної та аперіодичної першого порядку, які з'єднано послідовно.

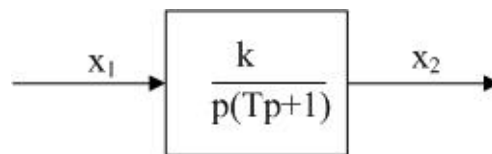


Рис. 1.24. Модель типу «вхід – вихід» інерційної інтегровальної ланки

Основні характеристики інерційної інтегровальної ланки такі:

$$W(p) = \frac{k}{p(T_1p + 1)};$$

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega(T_1j\omega + 1)};$$

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega\sqrt{T_1^2\omega^2 + 1}};$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \text{arctg}(T_1\omega).$$

Реальна інтегровальна ланка має перехідну функцію такого вигляду:

$$H(t) = k\left[t - T_1\left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right)\right], \quad t > 0,$$

її графік зображено на рис. 1.25.

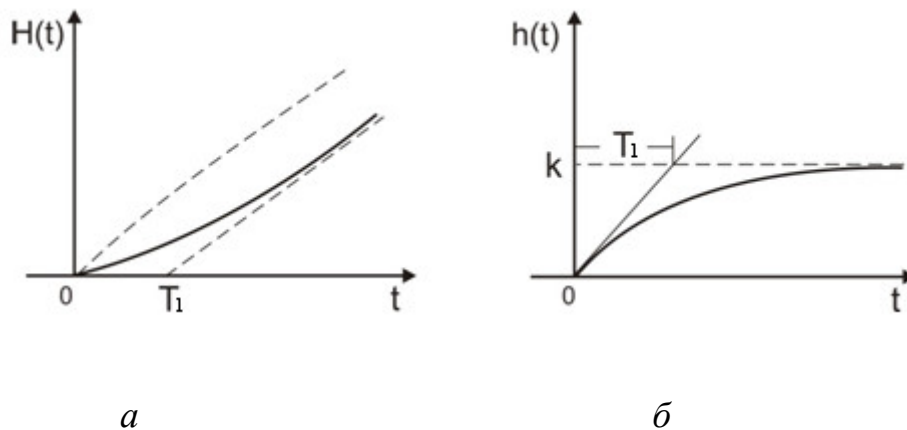


Рис. 1.25. Графіки перехідної (а) та вагової (б) функцій інерційної інтегрувальної ланки

Очевидно, що графік перехідної функції реальної ланки, на відміну від ідеальної (рис. 1.23, а), має вигляд деякої кривої, тобто інерційна інтегрувальна ланка являє собою ланку із запізненням. Її вагова функція

$$h(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}), t > 0.$$

7. Ідеальна диференціувальна ланка (рис. 1.26). У цій ланці вихідна величина пропорційна похідній від величин на вході в неї. Її рівняння: $x_2 = k\dot{x}_1$, а передавальна функція й частотні характеристики записують у такому вигляді:

$$W(p) = kp; \quad W(j\omega) = kj\omega; \quad A(\omega) = k_1\omega; \quad \varphi(\omega) = 90^\circ.$$

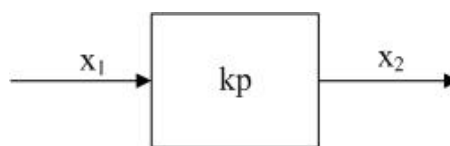


Рис. 1.26. Модель типу «вхід – вихід» ідеальної диференціувальної ланки

Перехідну та вагову функції цієї ланки описано такими рівняннями:

$$H(t) = k\delta(t), \quad h(t) = k\dot{\delta}(t).$$

Як бачимо, вихідна величина x_2 такої ланки реагує не на значення величини x_1 на вході, а на тенденцію її зміни в майбутньому. За цих умов вважають, що дана ланка має властивість передбачення (прогнозування). Ідеальні диференціувальні ланки фізично реалізувати не можна, але реальні диференціувальні ланки можна спостерігати на прикладі багатьох об'єктів.

8. Диференціювальна інерційна (реальна) ланка (рис. 1.27) описується рівнянням: $T_1 \dot{x}_2 + x_2 = kx_1$, і передавальною функцією, що має такий вигляд:

$$W(p) = \frac{kp}{T_1 p + 1}.$$

Ця ланка є результатом послідовного з'єднання двох простих ланок: ідеальної диференціювальної із передавальною функцією $k_1 p$ та аперіодичної з передавальною функцією $\frac{k_2 p}{T_1 p + 1}$, де $k = k_1 k_2$.

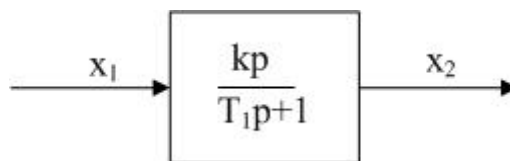


Рис. 1.27. Модель типу «вхід – вихід» інерційної диференціювальної ланки

Частотні характеристики цієї ланки подано нижче.

$$W(j\omega) = \frac{jk\omega}{T_1 j\omega + 1}; \quad A(\omega) = \frac{k\omega}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}}; \quad \varphi(\omega) = -90^\circ - \text{arctg}(T_1 \omega).$$

Її перехідна та вагова функції мають такий вигляд:

$$H(t) = \frac{k}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}}, \quad t > 0;$$

$$h(t) = \frac{k}{T_1} \delta(t) - \frac{k}{T_1^2} e^{-\frac{t}{T_1}}, \quad t > 0.$$

Графіки цих функцій зображено на рис. 1.28.

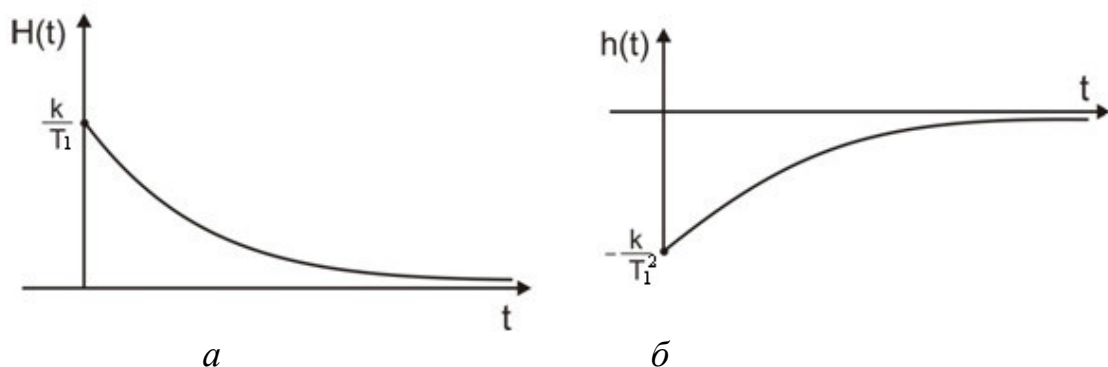


Рис. 1.28. Графіки перехідної (а) та вагової (б) функцій інерційної диференціювальної ланки

Прикладом інерційної диференціовальної ланки є RC-коло, зображене на рис. 1.29.

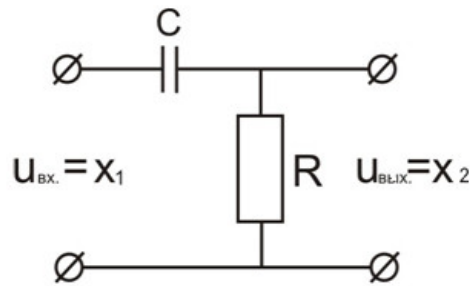


Рис. 1.29. Схема RC-кола

9. Немінімально-фазова ланка. Зауважимо, що в загальному випадку передавальна функція динамічної ланки записується таким чином: $W(p) = k \frac{N(p)}{M(p)}$, де $N(p)$ і $M(p)$ – багаточлени з коефіцієнтом 1 у молодшому розряді. В усіх розглянутих вище ланках (п. 1 – 8) багаточлени $N(p)$ і $M(p)$ не мають коренів із додатною дійсною частиною. Якщо хоча б в одному з багаточленів $N(p)$ і $M(p)$ передавальної функції є хоча б один корінь з додатною дійсною частиною, то така ланка називається *немінімально-фазовою*. Наприклад:

$$W(p) = \frac{k}{T_1 p - 1}, p = \frac{1}{T_1} \text{ – додатний корінь;}$$

$$W(j\omega) = \frac{k}{T_1 j\omega - 1};$$

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}} \text{ (так само, як для аперіодичної ланки);}$$

$$\varphi(\omega) = \text{arctg}(T_1 \omega) - 180^\circ.$$

Мінімально-фазові ланки (п. 1 – 8) мають властивість мінімуму $|\varphi(\omega)|$, про що свідчить їх назва. Зауважимо, що немінімально-фазові ланки часто виявляються нестійкими, а тому не цікаві для практичного застосування.

Усі розглянуті вище типові ланки класифікують таким чином:

Позиційні ланки. Мають таку передавальну функцію:

$$W(p) = k \frac{N(p)}{M(p)},$$

причому поліноми $N(p)$ і $M(p)$ містять вільні члени, які дорівнюють одиниці. Їм властива статична характеристика: $x_2 = kx_1$ (коли $p = 0$) (властивість позиційності). Позиційні ланки описано в п. 1, 2, 3, 4.

Інтегрувальні ланки. Мають передавальну функцію такого вигляду:

$$W(p) = \frac{k}{p^n} \cdot \frac{N(p)}{M(p)}, \quad n \geq 1.$$

Їх розглянуто в п. 5, 6.

Диференціювальні ланки. Характерні такою передавальною функцією:

$$W(p) = kp^n \frac{N(p)}{M(p)}, \quad n \geq 1.$$

Ці ланки описано в п. 7, 8.

Немінімально-фазові ланки, тобто такі, у котрих поліноми $N(p)$ і $M(p)$ мають хоча б один додатний корінь.

§ 1.5. Подання систем керування у вигляді структурних схем. Правила еквівалентного перетворення лінійних схем

Нехай система керування являє собою сукупність динамічних ланок, з'єднаних між собою певним чином. Якщо передавальну функцію кожної ланки відомо, то таку сукупність ланок у теорії керування прийнято називати *структурною схемою* системи.

Існують певні правила еквівалентного перетворення структурних схем лінійних систем:

1. При послідовному з'єднанні декількох ланок (див. рис. 1.30) їх передавальні функції перемножують.

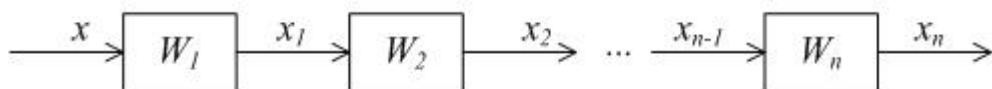


Рис.1.30. Послідовне з'єднання ланок системи керування

Припустимо, що $W_1 = \frac{\overline{x_1}}{x}$, $W_2 = \frac{\overline{x_2}}{x_1}$, ..., $W_n = \frac{\overline{x_n}}{x_{n-1}}$.

Згідно із сформульованим вище правилом, для всього ланцюга ланок буде справедливою така рівність: $W_{\text{заг}} = \frac{\overline{x_n}}{x}$, тобто

$$W_{\text{заг}} = \prod_{i=1}^n W_i. \quad (1.16)$$

2. При паралельному з'єднанні кількох ланок (див. рис. 1.31) їх передавальні функції підсумовуються.

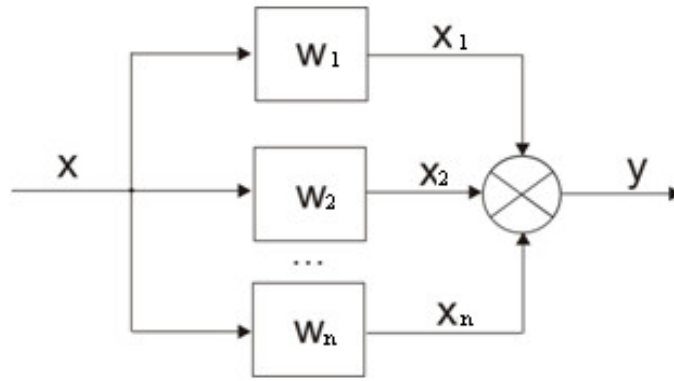


Рис. 1.31. Паралельне з'єднання ланок системи керування

Отже, при паралельному з'єднанні, коли $W_i(p) = \frac{\bar{x}_i}{x}$, $i = \overline{1, n}$, то $y = \sum_{i=1}^n x_i$,

й передавальна функція системи обчислюється таким чином:

$$W_{заг}(p) = \frac{\bar{y}}{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i}{x} = \sum_{i=1}^n W_i(p). \quad (1.17)$$

3. Зустрічно-паралельне вмикання (зворотний зв'язок) (див. рис. 1.32).

За умовами $W_{заг} = \frac{\bar{x}_n}{x}$, $\bar{x}_1 = \bar{x} - \bar{x}_2$. Оскільки $W_1 = \frac{\bar{y}}{x_1}$, то $\bar{x}_1 = \frac{\bar{y}}{W_1}$, аналогічно

$W_2 = \frac{\bar{x}_2}{\bar{y}} \rightarrow \bar{x}_2 = W_2 \bar{y}$, в результаті чого

$$\bar{x} = \bar{y} \left(\frac{1}{W_1} + W_2 \right).$$

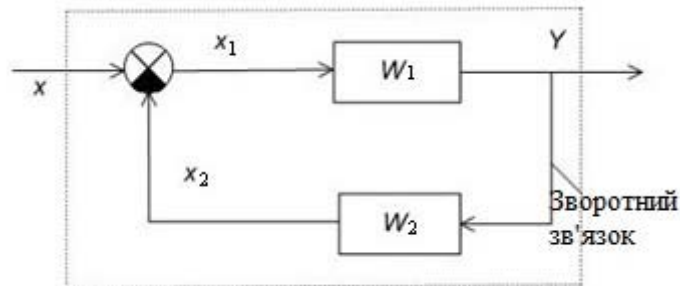


Рис. 1.32. Схема зустрічно-паралельного вмикання ланок системи керування (зв'язок від'ємний)

Зворотний зв'язок буде від'ємним, якщо $x_1 = x - x_2$. Перетворимо передавальну функцію з огляду на це припущення, а саме:

$$W_{заг} = \frac{\bar{y}}{x} = \left(\frac{1}{W_1} + W_2 \right)^{-1} = \left(\frac{1 + W_1 W_2}{W_1} \right)^{-1} = \frac{W_1}{1 + W_2 W_1}. \quad (1.18)$$

Для додатного зворотного зв'язку (див. рис. 1.33) функція набуває такого вигляду:

$$W_{заг} = \frac{W_1}{1 - W_1 W_2}, \quad x_1 = x + x_2.$$

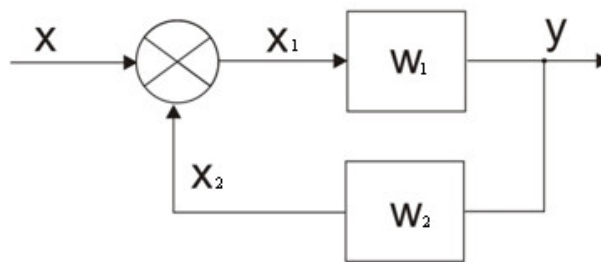


Рис.1.33. Схема зустрічно-паралельного вмикання ланок системи керування (зв'язок додатний)

Відмінність у знаку знаменника математичної моделі визначає якісну властивість стійкості реальних СК. Зауважимо, що основне практичне застосування в теорії керування має від'ємний зворотний зв'язок.

4. Послідовно й паралельно з'єднані ланки можна міняти місцями. При цьому загальна передатна функція ланцюга не змінюється. Це впливає з формул (1.16), (1.17).

5. Можна переносити зовнішній вплив уперед або назад уздовж ланцюга таким чином, щоб передача сигналу на вихід з цього ланцюга не зазнавала змін.

Це правило ілюструється зображеннями трьох еквівалентних структурних схем (див. рис. 1.34).

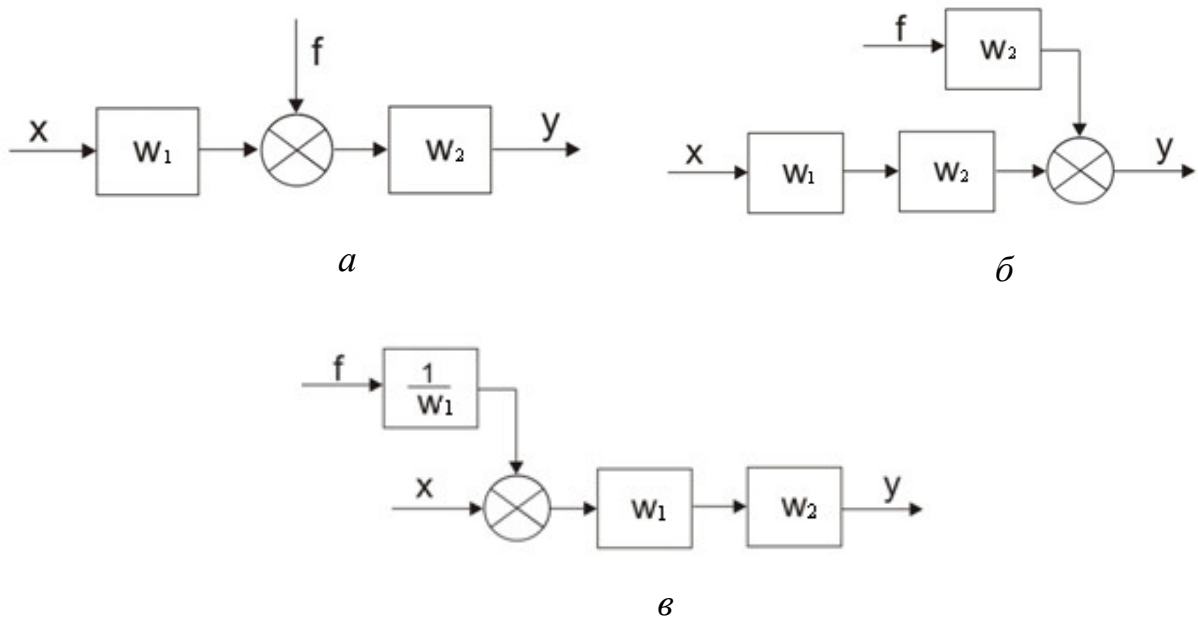


Рис.1.34. Еквівалентні структурні схеми системи керування при переносі зовнішнього впливу: *a* – вихідна схема; *б* – при переносі вперед уздовж ланцюга; *в* – при переносі назад уздовж ланцюга

6. Можна переносити місце вмикання ланки паралельного контуру вперед або назад уздовж ланцюга із відповідними додаваннями ланок (див. рис. 1.35).

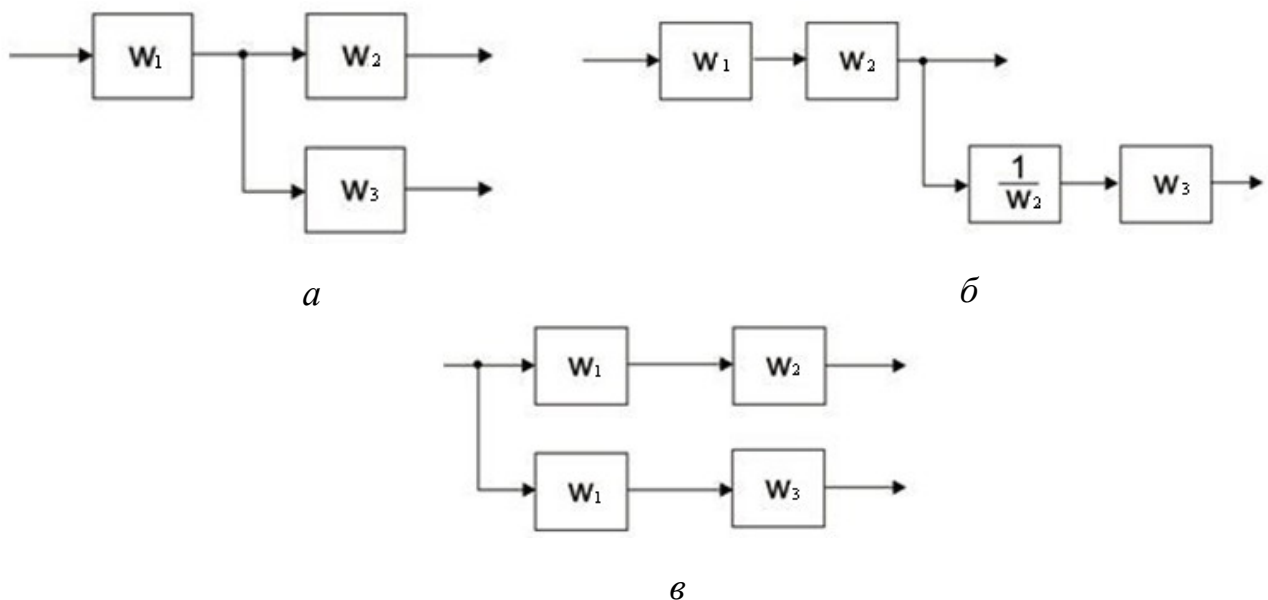


Рис.1.35. Еквівалентні структурні схеми системи керування при переносі місця вмикання ланки паралельного контуру: *a* – вихідна схема; *б* – при переносі вперед уздовж ланцюга; *в* – при переносі назад уздовж ланцюга

7. Можна перенести місце вмикання ланки зворотного зв'язку вперед або назад уздовж ланцюга із відповідним додаваннями ланок (див. рис. 1.36).

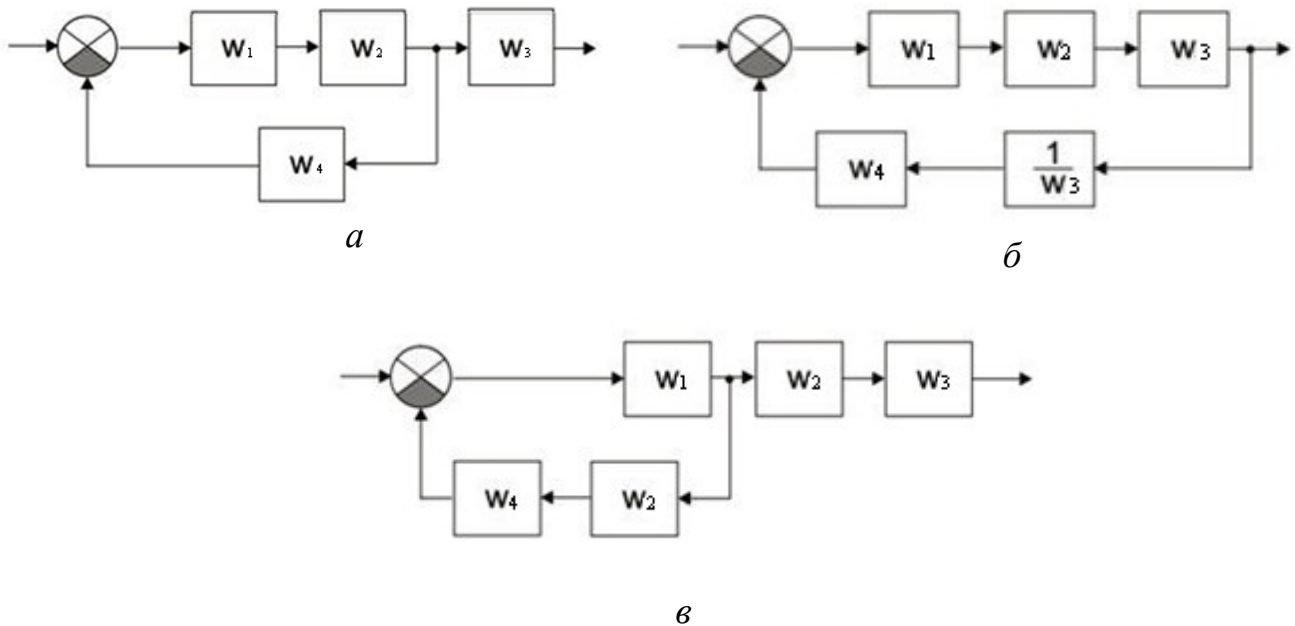


Рис. 1.36. Еквівалентні структурні схеми системи керування при переносі місця вмикання ланки зворотного зв'язку паралельного контуру: *а* – вихідна схема; *б* – при переносі вперед уздовж ланцюга; *в* – при переносі назад уздовж ланцюга

Увага! Усі розглянуті види перетворень є еквівалентними тільки для лінійних систем.

Приклад 1.6. Встановити передавальні функції системи, яку зображено на рис. 1.37, по каналах « $x - y$ » та « $f - y$ ».

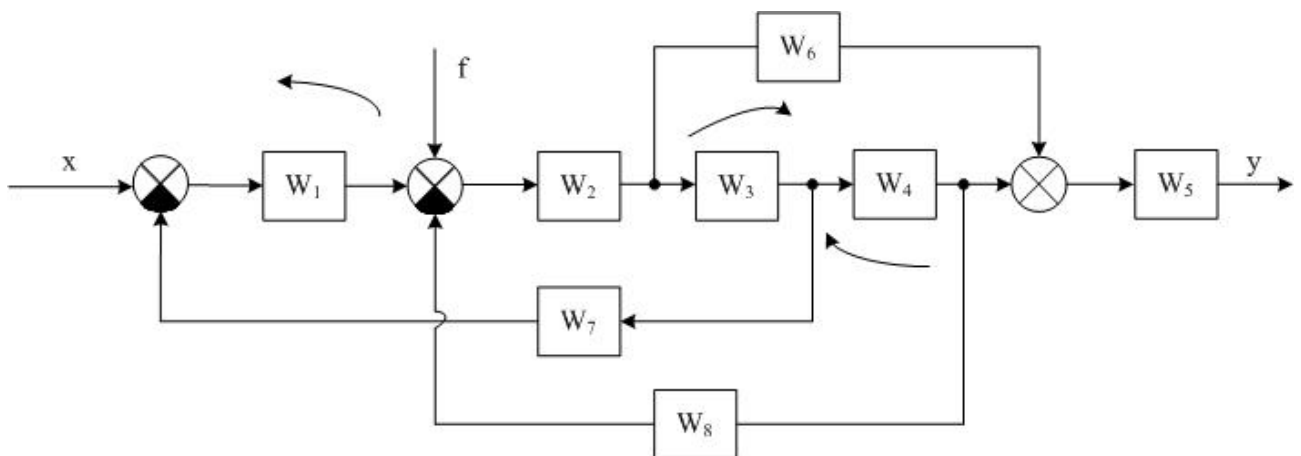


Рис. 1.37. Структурна схема системи до прикладу 1.6

Розв'язування

Спочатку виконаємо перетворення схеми (див. рис. 1.37).

1. Переносимо вплив f назад уздовж ланцюга (згідно з п. 5 правил перетворення).

2. Місце вмикання ланки W_6 перенесемо вперед уздовж ланцюга (відповідно до п. 6 правил перетворення).

3. Місце вмикання зворотного зв'язку через W_8 перенесемо назад уздовж ланцюга (згідно з п. 1 правил перетворення).

Після зазначених перетворень отримуємо схему, зображену на рис. 1.38.

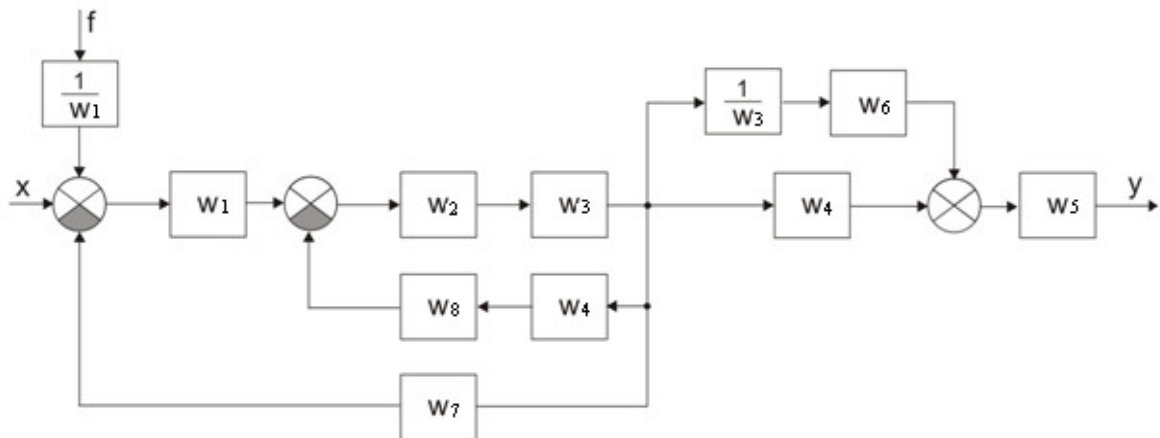


Рис. 1.38. Побудована після першого етапу перетворень (кроки 1 – 3) схема

4. Послідовно ввімкнені ланки замінюємо еквівалентними. Результат перетворення зображено на рис. 1.39.

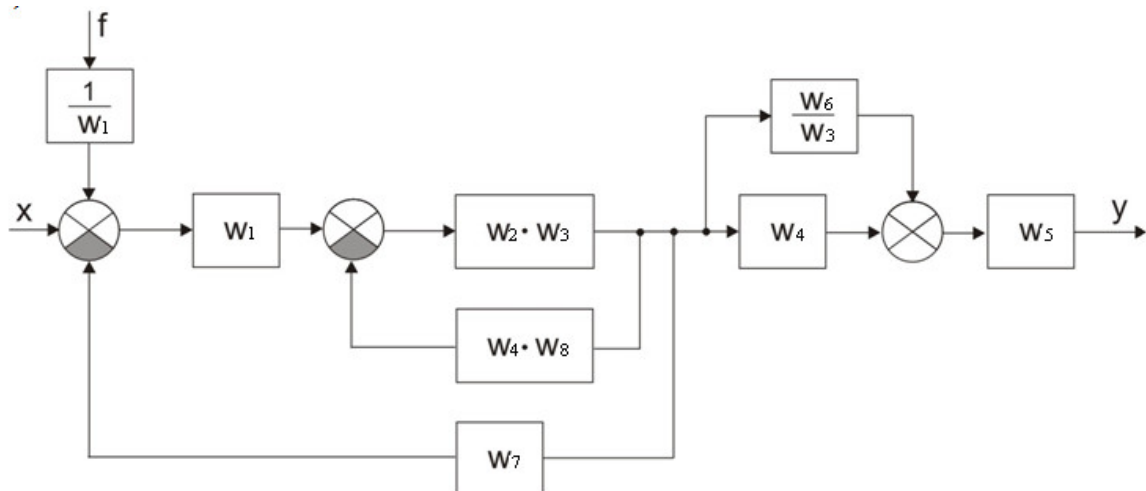


Рис. 1.39. Схема, побудована після четвертого кроку перетворень

5. Паралельно ввімкнені ланки (див. п. 2. правил перетворення) і зворотний зв'язок (п. 3 правил) замінюємо еквівалентними ланками (див. рис. 1.40).

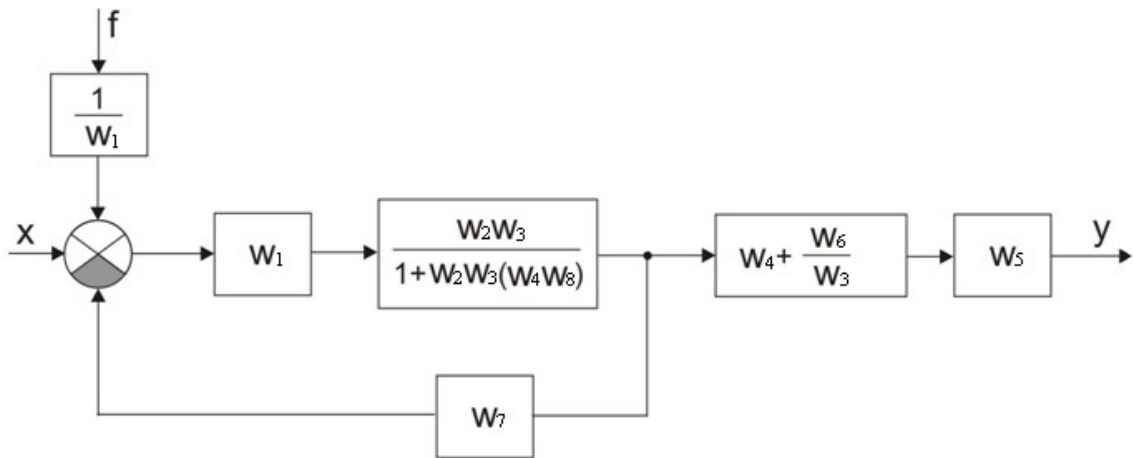


Рис. 1.40. Схема, побудована після п'ятого кроку перетворень

6. Знов замінюємо еквівалентними послідовно ввімкнені ланки (рис. 1.41)

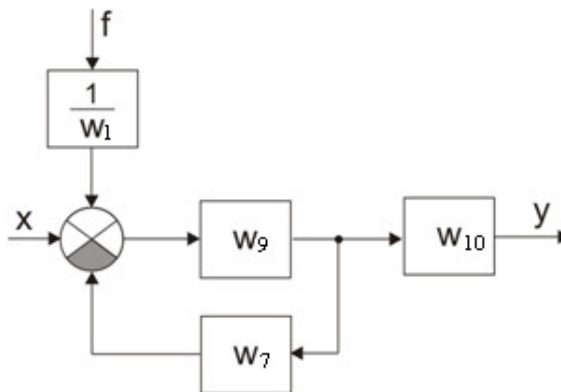


Рис. 1.41. Схема, складена за результатами шостого кроку перетворень

Відповідні ланкам передавальні функції будуть такими:

$$W_9 = \frac{W_1 W_2 W_3}{1 + W_2 W_3 W_4 W_8};$$

$$W_{10} = W_5 \left(W_4 + \frac{W_6}{W_3} \right).$$

7. Замінюємо зустрічно-паралельне ввімкнення (зворотний зв'язок) відповідно до п. 3 правил перетворення. Результат показано на рис. 1.42.

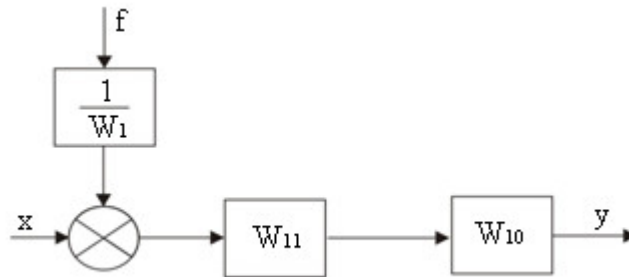


Рис. 1.42. Результат еквівалентних перетворень вихідної схеми (приклад 1.6)

Відповідна передавальна функція буде такою:

$$W_{11} = \frac{W_9}{1 + W_9 W_7}.$$

Тоді
$$W' = \frac{\bar{y}}{x} = W_{11} W_{10}, \quad W'' = \frac{\bar{y}}{f} = \frac{W_{11} W_{10}}{W_1}.$$

Приклади до розділу 1

Приклад 1.7. Дано розімкнену СК швидкістю обертання двигуна постійного струму (див. Рис. 1.43).

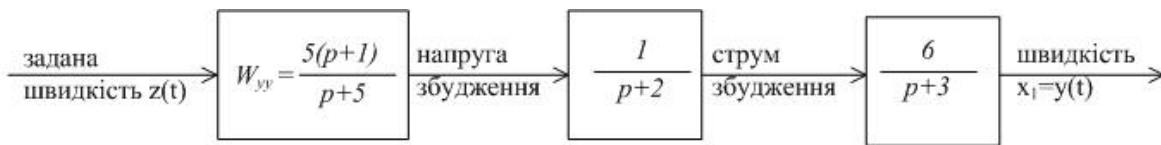


Рис. 1.43. Структурна схема СК швидкістю обертання двигуна постійного струму (до прикладу 1.7)

Запишемо модель системи через передавальну функцію, а саме:

$$W(p) = \frac{\bar{y}}{z} = \frac{5(p+1)6}{(p+5)(p+2)(p+3)}.$$

Модель «вхід – вихід» буде мати такий вигляд:

$$(p+5)(p+2)(p+3) \cdot Y(p) = 30(p+1)Z(p);$$

$$(p^3 + 10p^2 + 31p + 30) \cdot Y(p) = (30p + 30)Z(p);$$

$$\ddot{y} + 10\dot{y} + 30y = 30\dot{z} + 30z.$$

Відповідну даній системі модель у змінних стану подано нижче.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3 + 30z, \\ \dot{x}_3 = -30x_1 - 31x_2 - 10x_3 - 270z, \\ y = x_1, \end{cases} \quad (1.19)$$

або у векторній формі

$$\begin{aligned} \dot{x} &= AX + BZ, \\ y &= CX. \end{aligned}$$

$$\text{Тут } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -30 & -31 & -10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \\ -270 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0].$$

Модель у змінних стану можна записати також і в іншому вигляді. Для цього використовується запис передавальної функції $W(p)$ як суми простих дробів, тобто

$$W(p) = \frac{30(p) + 1}{(p + 5)(p + 2)(p + 3)} = \frac{k_1}{p + 5} + \frac{k_2}{p + 2} + \frac{k_3}{p + 3}.$$

Після виконання необхідних обчислень отримуємо такі результати $k_1 = -20$; $k_2 = -10$; $k_3 = 30$.

Тоді відповідна модель у змінних стану буде мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} Z; \\ Y &= [-20 \ -10 \ 30] X. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Модель (1.20) називають *канонічною формою*, тому що в матриці A відмінними від нуля будуть тільки діагональні елементи.

Моделі (1.19) і (1.20) описують одну й ту саму систему, а тому еквівалентні одна одній, проте наявні в кожній з них змінні стану (x_1, x_2, x_3) мають різний сенс.

Приклад 1.8. Дано систему зчитування інформації з диска.

Для системи, описаної у вступі, виберемо виконавчий пристрій, датчик і регулятор (тобто здійснимо етап 4 синтезу), а також складемо їх математичні моделі (етап 5 синтезу).

Структурна схема цієї системи має вигляд, зображений на рис. 1.44.

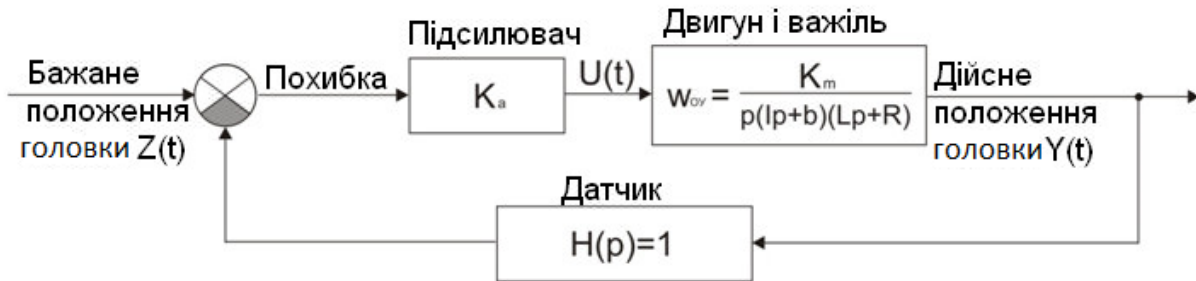


Рис. 1.44. Структурна схема СК зчитування інформації з диска (до прикладу 1.7)

Вважаємо, що положення головки можна визначити точно, тому передавальна функція датчика дорівнює 1. У виразі для опису передавальної функції $W_{oy}(P)$, використовуємо такі параметри:

$K_m = 5 \text{ Н} \cdot \text{м} / \text{А}$ – коефіцієнт передачі двигуна;

$I = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2 / \text{рад}$ – момент інерції важеля;

$b = 20 \frac{\text{кг}}{\text{м/с}}$ – коефіцієнт тертя;

$L = 1 \text{ мГн}$ – індуктивність якоря;

$R = 1 \text{ Ом}$ – опір якоря;

$K_a = 10 \div 1000$ – коефіцієнт підсилення (параметр системи, яка налаштовується).

Значення функцій $Z(t), Y(t)$ вимірюються в радіанах.

Таким чином,

$$W_{oy}(p) = \frac{5000}{p(p+20)(p+1000)} = \frac{5000}{20000 \cdot p \left(\frac{1}{20}p+1\right) \left(\frac{1}{1000}p+1\right)} \approx \frac{0,25}{p(0,05p+1)}.$$

Використовуючи правила перетворення структурних схем, знайдемо передавальну функцію замкненої системи, тобто

$$W_{сист}(p) = \frac{K_a \cdot W_{oy}}{1 + K_a \cdot W_{oy}} = \frac{K_a \cdot 0,25}{0,05p^2 + p + K_a \cdot 0,25} = \frac{5 \cdot K_a}{p^2 + 20p + 5K_a} = \frac{\bar{Y}(p)}{\bar{Z}(p)}.$$

Налаштування системи полягає у визначенні параметрів керувальної частини. У нашому випадку це параметр K_a . Коли, наприклад, $K_a = 40$, то

$$W_{сист} = \frac{200}{p^2 + 20p + 200}, \text{ або } \ddot{y} + 20\dot{y} + 200y = 200Z.$$

Якщо $Z = 0,1$ рад і $y(0) = \dot{y}(0) = 0$, то перехідний процес $y(t)$ набуває вигляду, зображеного на рис. 1.45.

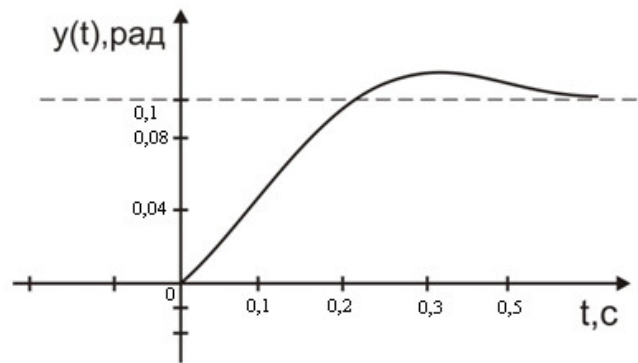


Рис. 1.45. Графік перехідного процесу до прикладу 1.8

Питання для самоконтролю

1. Назвіть основні елементи узагальненої структурної схеми СК.
2. У чому полягає відмінність між системою керування та системою регулювання?
3. За якими ознаками класифікують СК?
4. Перелічіть основні етапи синтезу СК.
5. Які дві умови задовольняє модель СК у змінних стану?
6. Яким чином визначається розмір матриць A , B , C , D моделі лінійних СК, записаних у змінних стану?
7. Яка розмірність сталих часу ланок СК?
8. Що називають статичною характеристикою ланки СК?
9. Перелічіть динамічні характеристики ланок СК.
10. Що являє собою передавальна функція динамічної ланки (системи)?
11. Дайте визначення перехідної та імпульсної перехідної функцій.
12. Дайте визначення амплітудної та фазової частотних характеристик СК.
13. Назвіть основні типові ланки СК. За якими характеристиками їх класифікують?
14. Який вигляд має передавальна функція позиційних ланок?
15. Яка основна властивість немінімально-фазових ланок?
16. Що називають структурною схемою СК?
17. Назвіть основні правила еквівалентного перетворення структурних схем лінійних СК?
18. Що являє собою зворотний зв'язок у СК?

19. Дайте визначення імпульсної перехідної функції СК?
 20. Який вигляд має канонічна форма моделі СК у змінних стану?

Задачі до самостійного розв'язування

1. Задано модель об'єкта типу «вхід – вихід». Перетворити її на модель у змінних стану. Визначити матрицю параметрів об'єкта керування. Результат записати у вигляді системи рівнянь і в матричній формі.

- а) $y^{(4)}(t) - 2y(t) = U^{(1)}(t) + U(t)$;
 б) $y^{(4)}(t) + 2y^{(1)}(t) = 2U(t)^{(1)} + U(t)$;
 в) $5y^{(4)}(t) + y^{(1)}(t) + y(t) = 5U(t)$;
 г) $-y^{(3)}(t) + 2y^{(2)}(t) - y(t) = -U^{(3)}(t) - 2U(t)$;
 д) $y^{(5)}(t) - y(t) = U^{(1)}(t)$;
 е) $2y^{(2)}(t) + 3y^{(1)}(t) + 5y(t) = 8U^{(2)}(t) + 7U^{(1)}(t) + 5U(t)$;
 ж) $5y^{(2)}(t) + 7y(t) = 2U^{(2)}(t) - 6U^{(1)}(t) + 5U(t)$;
 и) $8y^{(3)}(t) + 6y^{(2)}(t) - 4y^{(1)}(t) = 2U^{(1)}(t) + 3U(t)$.

2. Визначити передавальну функцію для кожної із заданих схем (рис. 1.46 – 1.53).

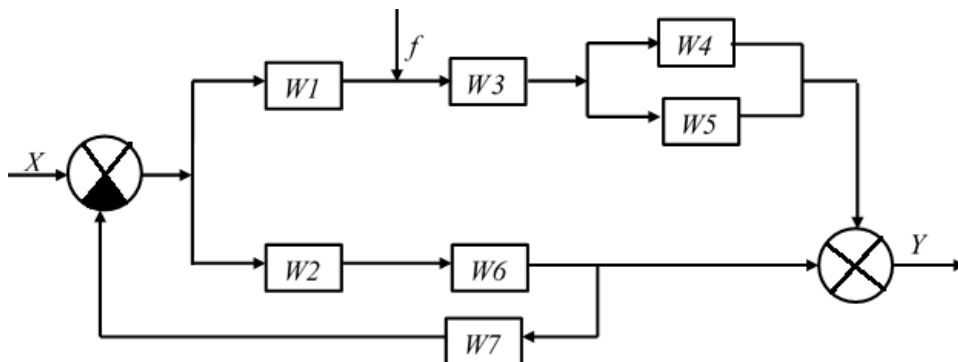


Рис. 1.46

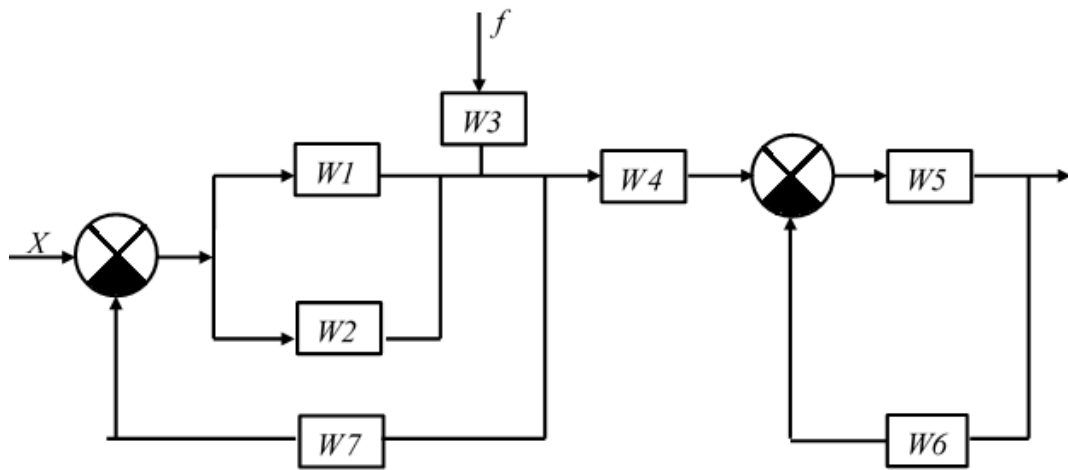


Рис. 1.47

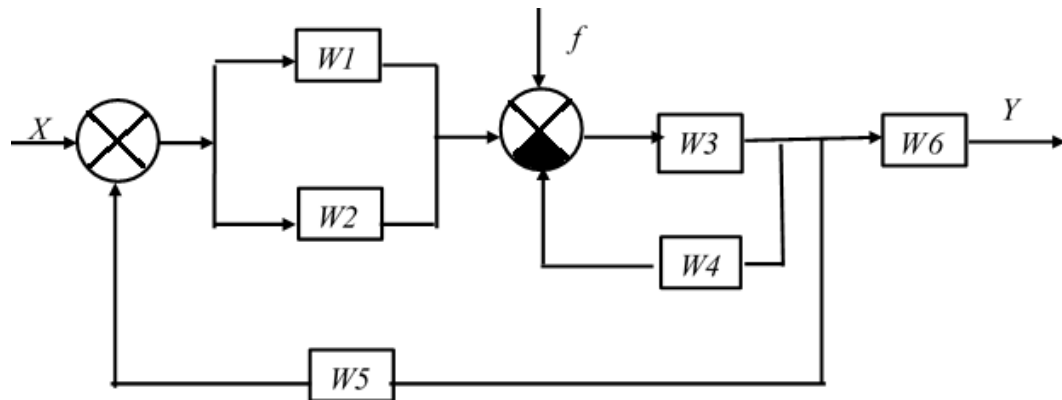


Рис. 1.48

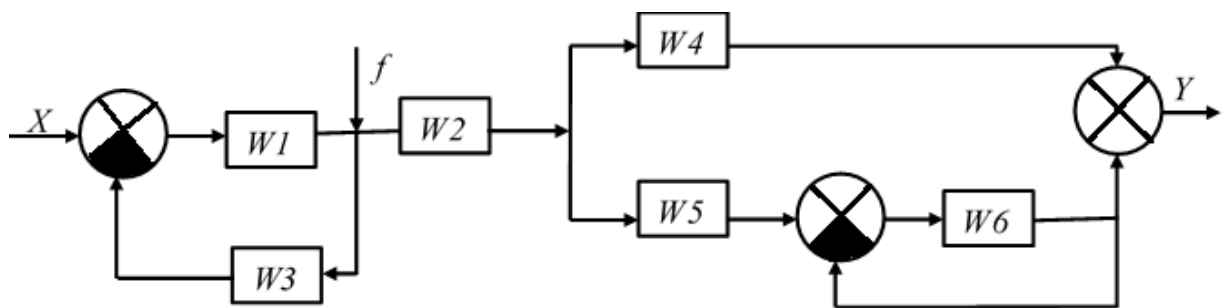


Рис. 1.49

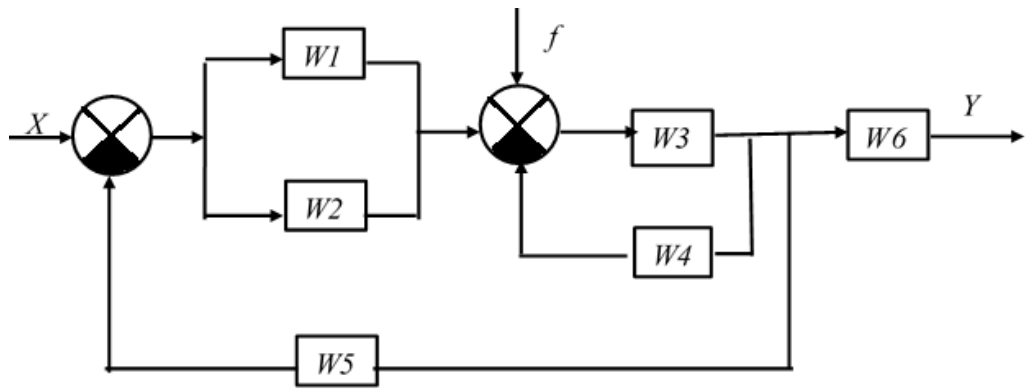


Рис. 1.50

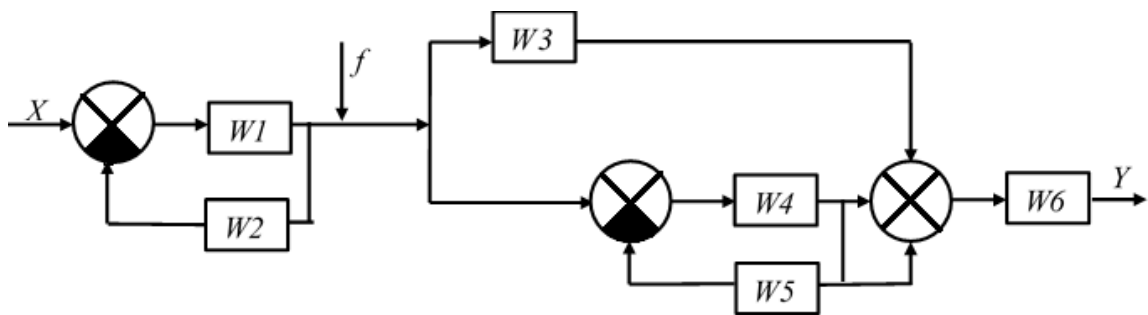


Рис. 1.51

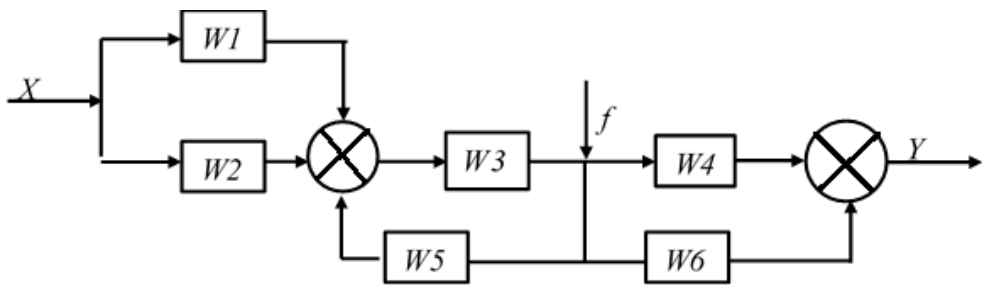


Рис. 1.52

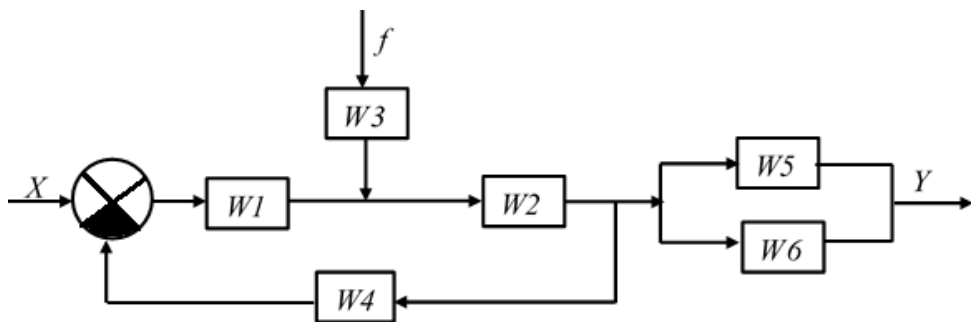


Рис. 1.53

3. Дано передавальну функцію ланки. Визначити її АЧХ й ФЧХ.

$$a) W(p) = \frac{2}{p^2 + 2p + 4}; \quad б) W(p) = \frac{2p + 3}{p^2 + 2p + 1}.$$

4. Для системи, зображеної на рис. 1.54, знайти співвідношення, за яким об'єкт буде:

а) коливальною ланкою; б) аперіодичною ланкою.

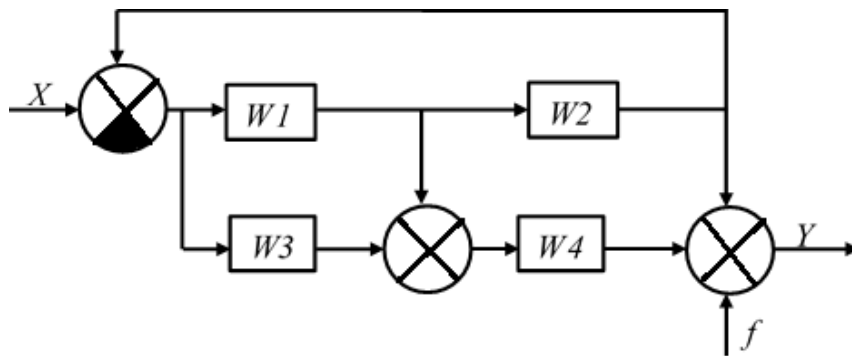


Рис. 1.54

5. Систему задано диференціальним рівнянням у координатах «вхід – вихід». Необхідно скласти структурну схему системи, побудувати її статичну характеристику, перехідну та імпульсну перехідну функції, амплітудну й фазову частотні характеристики.

а) $\ddot{y} + 3,5\dot{y} + 3,5y = 2U$;

а) $\ddot{y} + 3\dot{y} + 4y = 3U$;

б) $2\ddot{y} + 10\dot{y} + 18y = U$;

д) $0,5\ddot{y} + 2\dot{y} + 6y = 2U$;

в) $\ddot{y} + 5\dot{y} + 7y = 3U$;

е) $3\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = 4U$.

РОЗДІЛ 2

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ КЕРУВАННЯ

Мета розділу: вивчення принципів оцінювання ефективності процесів керування, основних понять оптимального й адаптивного керування

§ 2.1. Мета і задача керування

Розглянемо n -вимірну систему координат, по осях якої будемо відкладати значення змінних стану x_1, x_2, \dots, x_n (див. § 1.1.). Коли $n < 4$, таку систему можна відобразити графічно.

Простір, що характеризується цією системою координат, прийнято називати *простором станів* або *фазовим простором*. В окремому випадку величини x_1, x_2, \dots, x_n можуть мати такий фізичний сенс: y – вихід об'єкта, \dot{y} – швидкість, \ddot{y} – прискорення, і т. д. відповідно.

Нехай у початковий момент часу t_0 (зазвичай $t_0 = 0$) змінні стану мали значення $x_1(t_0), x_2(t_0) \dots x_n(t_0)$, тобто вектор стану дорівнював $X(t_0)$. Цьому вектору відповідає початкова точка M_0 (рис. 2.1).

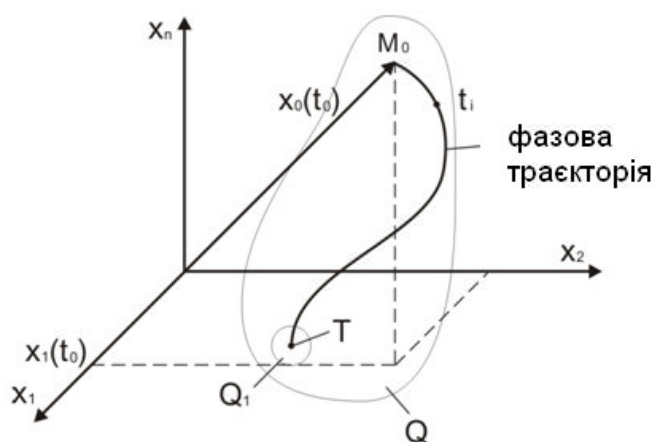


Рис. 2.1. Фазовий простір і початкова точка, відповідна вектору $X(t_0)$

Припустимо, що до об'єкта керування прикладено впливи $U(t), F(t)$. Якщо модель об'єкта відома і подана, наприклад, у вигляді такого диференціального рівняння: $\dot{X} = f[X(t), U(t), F(t)]$, то це рівняння можна розв'язати для відомих значень функцій $X(t_0), U(t), F(t)$.

Отриманий розв'язок рівняння: $X(t, U(t), F(t), X(t_0))$, коли $t \geq t_0$, залежатиме від усіх впливів і початкових умов. Кожному значенню змінної t буде відповідати певна точка $X(t)$ фазового простору, яка в загальному випадку називається *зображувальною* (рос. *изображающей*). Якщо всі зображувальні

точки з'єднати, то утвориться крива в просторі станів, яка називається *траєкторією руху* об'єкта або *фазовою траєкторією*.

У реальних системах керування мають місце такі обмеження:

$$U(t) \in \Omega(U); \quad (2.1)$$

$$X(t) \in Q(X), \quad (2.2)$$

тут $\Omega(U)$ – область допустимих керувальних впливів³; $Q(X)$ – область допустимих станів.

Області Ω і Q визначають внаслідок конструктивних, енергетичних, ресурсних і т. д. особливостей об'єкта і всієї системи.

Виділимо в області Q деяку підобласть Q_1 станів ($Q_1 \subset Q$), бажану для нас з тих чи інших причин.

Мета керування полягає в тому, щоб перевести об'єкт з початкового стану $X(t_0)$ в кінцевий бажаний стан $X(T)$, який належить підобласті Q_1 , тобто $X(T) \in Q_1$. Момент часу T потрапляння об'єкта в бажаний стан може при цьому бути невідомий.

Для досягнення мети на вхід об'єкта необхідно подати відповідний керувальний вплив.

Задача керування полягає в тому, щоб в області допустимих керувальних впливів Ω підібрати такий, за яким буде досягнуто мету керування.

Таким чином, потрібно знайти таке керування $U(t) \in \Omega$, визначене на відрізку $[t_0, T]$ (значення часу T може бути невідомим), за яким рівняння ОК для заданого початкового стану $X(t_0)$ і відомого вектора збурень $F(t)$ має розв'язок $X(t)$, причому $X(t) \in Q$, коли $t \in [t_0, T]$ й $X(T) \in Q_1$.

§ 2.2. Показники якості керування

Сформульована вище задача керування, як правило, має безліч розв'язків, тобто існує нескінченна кількість допустимих керувальних впливів, які переводять об'єкт з початкового стану в кінцевий відповідно до всіх уведених обмежень [на рис. 2.2 їм відповідає нескінченна множина траєкторій від початкової точки $X(t_0)$ до кінцевої $X(T) \in Q_1$].

У цьому сенсі всі керувальні впливи реалізують мету керування і є рівноцінними. Однак, до системи і процесу керування зазвичай застосовується ряд вимог, не задіяних у формулюванні задачі керування, але таких, що характеризують так звану *якість керування*.

Для оцінювання якості керування в ТК використовують два підходи:

– оцінка у вигляді сукупності показників якості;

³ Далі для скорочення будемо називати керувальний вплив *керуванням*.

– оцінювання за допомогою деякого узагальненого (інтегрального) критерію якості.

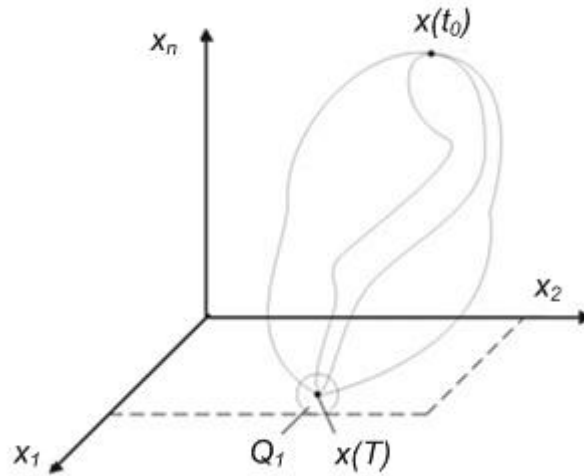


Рис. 2.2. Графічне подання множини розв’язків (траєкторій) задачі керування

Опис якості процесів керування у вигляді сукупності показників зазвичай застосовують до лінійних систем. Такий підхід передбачає аналіз перехідного процесу, при цьому оцінюються описані нижче показники.

1. Час регулювання t_p – це час, починаючи з якого відхилення регульованої величини від її сталого значення: $H_0 = H(\infty)$, буде меншим наперед заданого значення ϵ [зазвичай вважають, що $\epsilon = 0,05 H(\infty)$].

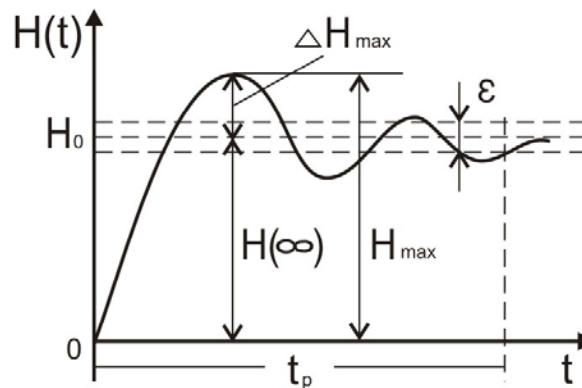


Рис. 2.3. Оцінювання якості керування за допомогою часу регулювання

2. *Перерегулювання* σ – це максимальне відхилення регульованої величини від сталого значення, виражене у відсотках, тобто, якщо $\Delta H_{max} = H_{max} - H(\infty)$ – абсолютне відхилення, то σ – відносне відхилення.

$$\sigma = \frac{\Delta H_{max} \cdot 100\%}{H(\infty)} = \frac{H_{max} - H(\infty)}{H(\infty)} \cdot 100\%.$$

3. *Коливальність* відображає кількість коливань регульованої величини відносно сталого значення $H(\infty)$ протягом часу регулювання. Коливальність і перерегулювання аперіодичних перехідних процесів дорівнюють нулю (див. рис. 2.4).

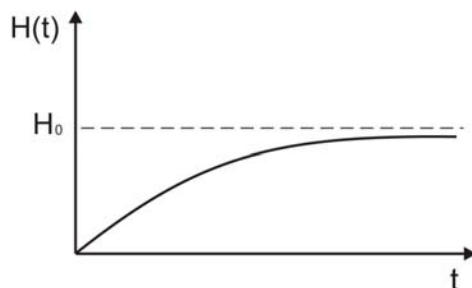
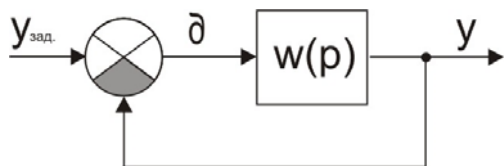


Рис. 2.4. Відхилення регульованої вихідної величини $H(\infty)$ від її сталого значення для аперіодичних процесів

4. *Усталена помилка* δ – це усталене відхилення регульованої величини від заданого значення (відхилення y від $y_{зад}$).

Розглянемо приклад. Нехай $W(p)$ – передавальна функція системи, зображеної на рис. 2.5, а, по каналу « $y_{зад} - y$ ».

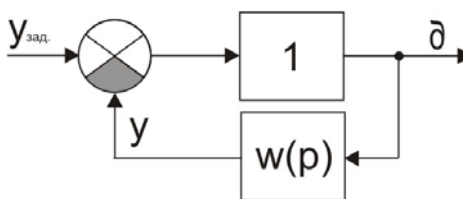
а



Тоді передавальна функція системи по каналу « $y_{зад} - \delta$ » (рис. 2.5, б) матиме такий вигляд:

$$W_{\delta}(p) = \frac{1}{1+W(p)}. \quad (2.3)$$

б



Тепер запишемо передавальну функцію системи таким чином:

$$W(p) = kp^{\nu} \frac{N(p)}{M(p)},$$

де $N(p)$ і $M(p)$ – поліноми від p з вільними членами, які дорівнюють одиниці, ν – ціле число, показник степеня.

Рис. 2.5. Структурна схема СК по каналу «вхід – вихід» (а) і по каналу «вхід-помилка» (б)

У сталому режимі $p = 0$, тому якщо $\nu < 0$ ($-1, -2 \dots$), то усталена помилка згідно з формулою (2.3) дорівнює 0. Системи, які мають таку властивість, називаються *астатичними*. Наприклад: $W(p) = \frac{k}{p}$, тоді

$$W_{\delta}(p) = \frac{1}{1 + \frac{k}{p}} = \frac{p}{k + p}.$$

Причому, $\delta = 0$, коли $p = 0$, тобто в сталому режимі помилка дорівнює нулю.

Системи, у яких $v = 0$, називаються *статичними*. У таких системах має місце усталена помилка. Нехай $v = 0$, тоді

$$\delta = y_{уст.} \cdot \frac{1}{1 + k}, \quad \text{тут } k \text{ – коефіцієнт передачі системи.}$$

Величина: $S = \frac{1}{1 + k}$, називається *коефіцієнтом статизму* системи.

Отже, з урахуванням уведених показників, поняття якості множини допустимих керувальних впливів може бути ще більш звужене, а саме: вартими уваги будуть лише ті керувальні впливи, котрі забезпечують бажані показники якості перехідного процесу.

§ 2.3. Узагальнені показники якості процесів керування. Поняття про оптимальне керування

Оцінка якості керування за сукупністю показників перехідного процесу (§ 2.2.) властива ранньому етапу розвитку теорії керування, хоча застосовується і зараз. По суті даний підхід забезпечує вибір раціонального керувального впливу, коли показники перехідного процесу будуть не гірші за бажані.

У сучасній теорії керування застосовують підхід, що передбачає оцінювання якості керування за допомогою деякого узагальненого (інтегрального) показника. Його називають також *критерієм ефективності керування*. Він являє собою числову характеристику, значення якої в загальному випадку залежить від функцій $U(t)$, $F(t)$, $X(t)$, $Z(t)$. При цьому конкретним законам керування $U(t)$ і процесам $F(t)$, $X(t)$, $Z(t)$ відповідає певне значення показника якості.

Узагальнений показник якості в кожній технологічній задачі керування потрібно визначати окремо. Вибір та обґрунтування цього показника – завдання непросте й універсальних методик його визначення не існує. Якість керування може мати різний фізичний сенс і відображати залежно від технічного призначення об'єкта такі властивості системи:

- енергетичні витрати на керування;
- точність підтримки заданого режиму роботи об'єкта керування;
- час досягнення мети керування;
- значення максимальної помилки за певного режиму роботи об'єкта;
- надійність роботи системи;

- продуктивність системи та якість продукції;
- собівартість продукції і т. д.

Найчастіше узагальнений показник якості являє собою функціонал і його можна подати у формі інтегрального співвідношення, тобто

$$I = \int_{t_0}^T G[U(t), F(t), X(t), t] dt, \quad (2.4)$$

де функція G визначає конкретний фізичний зміст показника якості.

Уведення єдиного узагальненого показника (2.4) дозволяє сформулювати задачу оптимального керування таким чином: в області допустимих керувальних впливів Ω слід знайти таке керування $U^*(t)$, при якому показник якості (2.4) з урахуванням заданих зовнішніх впливів $F(t)$ і $Z(t)$ на систему керування досягає екстремального значення, тобто:

$$I \rightarrow \text{extr}, \quad U(t) \in \Omega, \quad (2.5)$$

а об'єкт переводиться з початкового стану $X(t_0)$ в кінцевий $X(T) \in Q_1$, залишаючись в області допустимих станів Q для всіх значень часу $t \in [t_0, T]$.

Функціонал (2.4) – це *критерій оптимальності*. При цьому оптимальними називають: керування $U^*(t)$, яке забезпечує екстремум функціоналу I ; розв'язок рівняння $X^*(t)$, що описує рух системи при оптимальному керуванні (*оптимальна траєкторія руху ОК*) і систему керування, яка з позицій критерію (2.4) виявляється найкращою серед інших систем.

Вигляд екстремуму (2.5) залежить від конкретного змісту задачі.

Наприклад,

якщо I – питома витрата електроенергії, то функціонал мінімізують, тобто

$$I \rightarrow \min;$$

якщо I – продуктивність, то функціонал максимізують, а саме:

$$I \rightarrow \max.$$

§ 2.4. Постановка задачі оптимального керування

Формалізована постановка задачі оптимального керування в загальному випадку складається з трьох частин: критерій керування, обмеження I виду, та обмеження II виду. Розглянемо послідовно кожен з цих елементів.

Математичний вираз, який дає кількісну оцінку ефективності керування, називають *критерієм якості керування*.

Наприклад, стосовно задачі стабілізації вихідних параметрів системи $Y(t)$, з огляду на задане значення, критерій якості може бути записано таким чином:

$$I = \int_0^{\infty} |Y_{\text{зад.}} - Y(t)| dt \rightarrow \min .$$

Геометричний сенс цього критерію проілюстровано на рис. 2.6, *а*. Значення критерію дорівнює площі заштрихованої фігури на графіку. Очевидно, що кожному можливому процесу $Y(t)$ буде відповідати певне значення критерію, а саме: I відповідає I_1 , II – I_2 , III – I_3 (див. рис. 2.6, *б*).

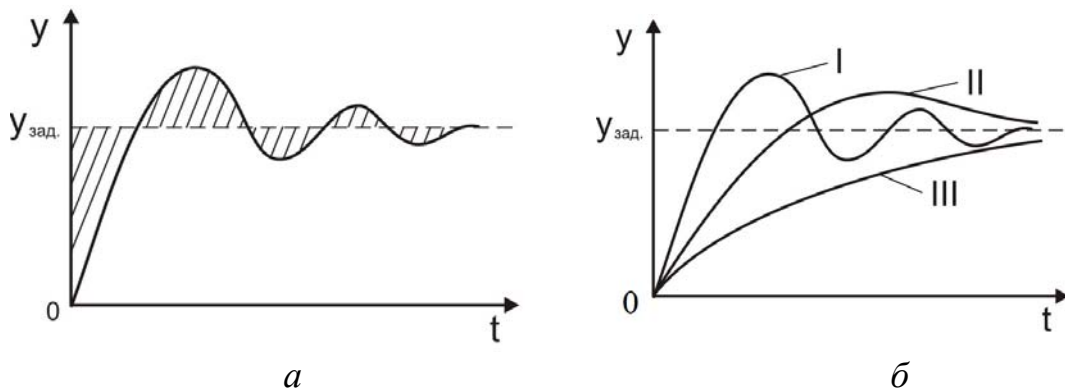


Рис. 2.6. Геометрична інтерпретація критерію якості керування: *а* – геометричний сенс критерію; *б* – відповідність критерію певним процесам

Обмеження першого виду являють собою закони природи, відповідно до яких відбувається рух об'єкта (або загалом системи). Це закони Ньютона, Ома, Кірхгофа, Максвелла, збереження енергії, речовини, імпульсу і т. д. Ці обмеження зазвичай описують алгебраїчними або диференціальними рівняннями.

Обмеження другого виду зумовлене вичерпністю ресурсів або інших величин, які не можуть перевищувати певних значень. Такі обмеження записують у вигляді алгебраїчних нерівностей.

Таким чином, задачу оптимального керування можна вважати сформульованою (формалізованою), якщо:

- визначено мету керування, тобто її виражено через узагальнений критерій якості;
- встановлено обмеження першого виду у формі диференціальних або алгебраїчних рівнянь, які виділяють способи руху системи (окреслюють область Q);
- визначено обмеження другого виду, що являють собою систему нерівностей, які описують вичерпність ресурсів або інтервали значень інших фізичних величин (задають область Ω).

Приклад 2.1. Розглянемо систему стабілізації висоти стовпа рідини в баку на заданому рівні (див. рис. 2.7). Формалізуємо задачу оптимального керування, для цього виконаємо такі дії:

1. Визначимо критерій оптимальності. Очевидно, що мета керування полягає в мінімізації відхилення рівня води у баку від заданого, тому критерій оптимальності може бути записаний таким чином:

$$I = \int_0^{\infty} |h_{\text{зад.}} - h(t)| dt \rightarrow \min ,$$

тут сенс мінімізації відхилення відповідає висловленій вище меті.

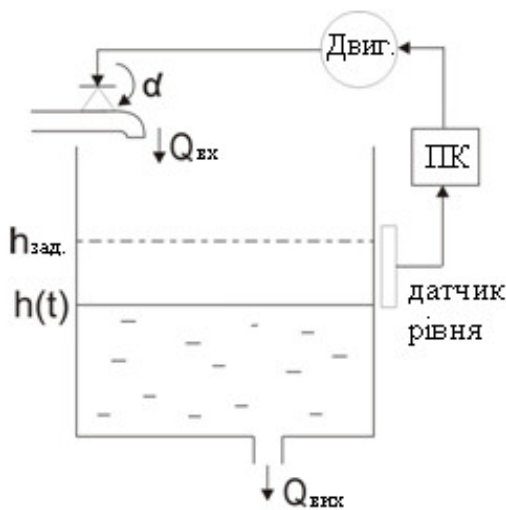


Рис. 2.7. Система стабілізації рівня рідини в баку

2. Визначимо обмеження I виду. Для цього згадаємо фізичні закони, за якими рухається рідина в баку, а саме:

$$Q_{\text{вх}} - Q_{\text{вих}} = \frac{dV}{dt} = S \frac{dh}{dt} ;$$

$$Q_{\text{вих}} = k_1 h ;$$

$$Q_{\text{вх}} = k_2 \alpha ,$$

тут $Q_{\text{вх}}$ – вхідний потік рідини; $Q_{\text{вих}}$ – вихідний потік рідини; V – об’єм бака; k_1 – коефіцієнт пропорційності; k_2 – коефіцієнт пропорційності; α – кут повороту крана; h – поточний рівень рідини.

Отже, обмеження першого виду можна записати таким чином:

$$S \frac{dh}{dt} + k_1 h = k_2 \alpha .$$

3. Визначимо обмеження II виду, а саме:

$$0 \leq \alpha \leq \alpha_{\text{max}} .$$

Позначимо через x рівень рідини h , через u – кут повороту крана α , й через z – заданий рівень рідини $h_{\text{зад.}}$. Тоді формалізовану задачу керування можна подати в такому вигляді:

$$I = \int_0^{\infty} |z - x| dt \rightarrow \min ;$$

$$S \dot{x} + k_1 x = k_2 u ;$$

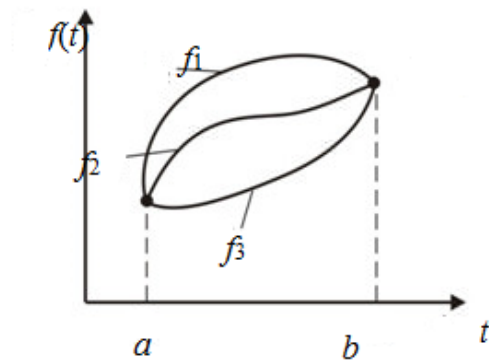
$$0 \leq u \leq u_{\text{max}} .$$

§ 2.5. Види функціоналів. Класифікація задач оптимального керування

Критеріями керування зазвичай слугують функціонали. Нагадаємо, що функціонал являє собою відображення об'єктів довільної природи (наприклад, матриць, векторів, функцій) у числову вісь, тобто він ставить у відповідність кожному об'єкту деяке число, на відміну від функції, яка визначає відповідність між числовими множинами.

Наведемо приклади функціоналів.

1. Визначений інтеграл від функції на відрізку $[a; b]$ являє собою лінійний функціонал: $I(f) = \int_a^b f(t) dt$. Для кожної функції, він набуває свого значення (див. рис. 2.8), наприклад:



$$I(f_1) = \int_a^b f_1(t) dt = I_1;$$

$$I(f_3) = \int_a^b f_3(t) dt = I_3;$$

$$I(f_2) = \int_a^b f_2(t) dt = I_2.$$

Рис. 2.8. Геометрична форма тлумачення функціонала $I(f)$

2. Довжина дуги, що з'єднує дві точки A і B на площині (рис. 2.9), – це також функціонал: $I(f) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + (df/dt)^2} dt$.

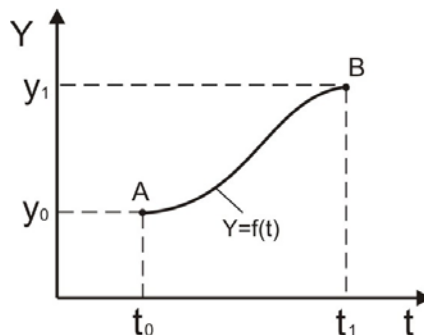


Рис. 2.9. Геометрична форма тлумачення функціонала «довжина дуги»

3. **Задача про брахістохрону.** По якій кривій має рухатися важке тіло під дією сили тяжіння, щоб якнайшвидше потрапити з точки A в точку B ? Тут час руху являє собою функціонал. Значення T_1 відповідає кривій $Y_1(x)$, T_2 – кривій $Y_2(x)$ (див. рис. 2.10).

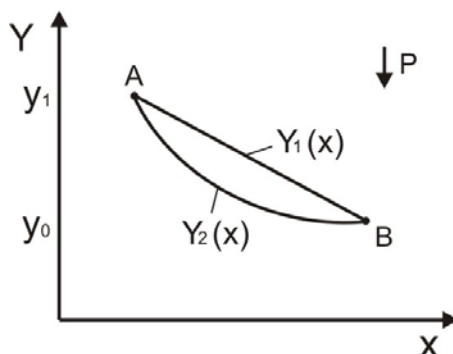


Рис. 2.10. Задача про брахістохрону

4. Сумарне відхилення регульованої величини Y від заданого значення являє собою функціонал (заштрихована площа на рис. 2.11):

$$I(Y) = \int_0^{\infty} |Y_{\text{зад.}} - Y(t)| dt.$$

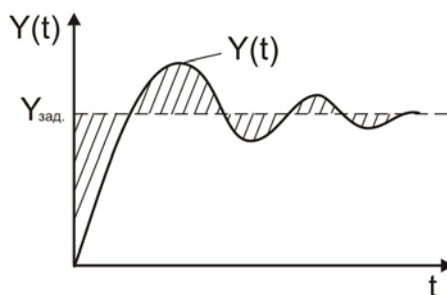


Рис. 2.11. Геометрична форма тлумачення функціонала «сумарне відхилення регульованої величини від заданого значення»

5. Інтеграл $I(y) = \int_0^1 y(t) dt$, також являє собою функціонал як окремий випадок розглянутого в прикладі 1.

Якщо $y(t) = t^2$, то значення функціонала: $I = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$.

Якщо $y(t) = e^t$, то $I = \int_0^1 e^t dt = e^1 - e^0 = 1,718$.

6. Функціонал такого вигляду: $I = \int_0^1 \dot{y}(t) dt$. Якщо $y(t) = t^2$, тоді $\dot{y}(t) = 2t$ й

$$I = \int_0^1 \dot{y} dt = \int_0^1 2t dt = t^2 = 1.$$

У теорії керування незалежною змінною зазвичай виступає час. Тому найважливіші узагальнені критерії якості систем керування – це швидкодія, витрата енергії або палива, точність та ін. Усі вони являють собою функціонали.

Розглянемо узагальнений об'єкт керування (рис. 2.12).

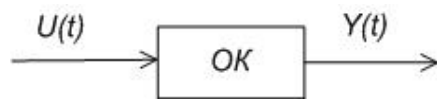


Рис. 2.12. Узагальнена схема об'єкта керування

У загальному випадку для цього ОК критерій можна записати у такому вигляді: $I = \int_0^T F(y, u) dt$. Його сенс буде залежати від функції $F(y, u)$.

Наведемо приклади критеріїв, які найбільш часто застосовуються в теорії керування.

1. Якщо $F(y, u) \equiv 1$, то $I = \int_0^T dt = T$. Цей критерій показує тривалість процесу керування і має місце задача про максимальну швидкодію, тобто

$$I = \int_0^T dt \rightarrow \min.$$

2. Задача про мінімізацію відхилення регульованої величини від заданого значення (рис. 2.11).

У цьому разі $F(y, u) = |Y_{зад} - y|$, і задача набуває такого вигляду:

$$I = \int_0^T |Y_{зад} - y| dt \rightarrow \min,$$

або $F(y, u) = (Y_{зад} - y)^2$, і

$$I = \int_0^T (Y_{зад} - y)^2 dt \rightarrow \min.$$

3. Припустимо для спрощення, що $Y_{зад} = 0$, а $F(y, u) = y^2 + \gamma u^2$.

Функціонал: $I = \int_0^T (y^2 + \gamma u^2) dt$, відображає сумарні витрати на керування.

Тут γ – ваговий коефіцієнт, який враховує вартість енергії відносно вихідного продукту y .

4. Якщо $F(y, u) = y^2 + \gamma y'^2$, то $I = \int_0^T (y^2 + \gamma y'^2) dt$. Це функціонал, який застосовують тоді, коли необхідно забезпечити плавність перехідного процесу.

5. Комбінований критерій, що об'єднує властивості критеріїв 3 і 4:

$$I = \int_0^T (u^2 + \gamma_1 y^2 + \gamma_2 y'^2) dt.$$

6. Функціонал, котрий враховує кінцеву неузгодженість,

$$I = \int_0^T (u^2 + \gamma_1 y^2 + \gamma_2 y'^2) dt + ky^2(T).$$

7. Функціонал, який описує витрати енергії на керування та час процесу керування, $I = \int_0^T (u^2 + k) dt$.

Задачі оптимального керування можна класифікувати з огляду на подані нижче ознаки.

– За обмеженнями на стан OK і час керування вони бувають такі:

1. Задача без обмеження на змінні стану X .

2. Задача із закріпленим правим кінцем траєкторії. Множина бажаних значень вектора $X(T)$ складається з єдиної точки, у яку має потрапити вектор $X(t)$, коли $t = T$.

3. Задача з вільним правим кінцем траєкторії. Тут кінцевий момент часу T зафіксовано, але не існує обмежень на положення вектора $X(T)$, тобто він може перебувати в будь-якій точці простору станів.

– За формою подання керувального впливу U існує такий поділ:

1. Оптимальне керування $U(t)$ відшукується у вигляді явної функції часу t . Такій формі відповідає розімкнута система, яка не містить зворотних зв'язків і працює в програмному режимі. У цьому випадку задача називається *задачею програмного керування*, а відповідна їй система (її зображено на рис. 2.14) – *системою програмного керування*.

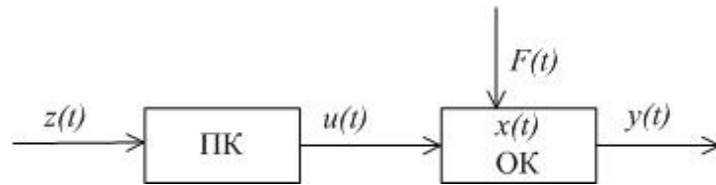


Рис. 2.14. Структурна схема системи програмного керування

2. З практичних міркувань більш цінним є пошук оптимального керування як функції векторів стану $X(t)$, задавального впливу $Z(t)$ і збурення $F(t)$, тобто $U[Z(t), X(t), F(t)]$. Цьому випадку відповідає комбінована система керування зі зворотним зв'язком і компенсацією збурення (див. рис. 2.15, а).

Якщо в законі керування збурення не враховано, тобто $U(Z, X)$, то має місце задача синтезу оптимального регулятора, а система називається системою оптимального регулювання (див. рис. 2.15, б).

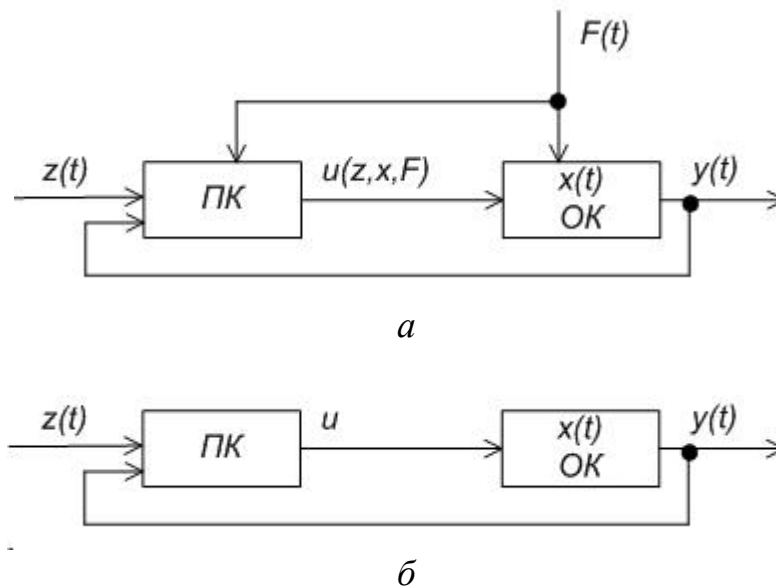


Рис. 2.15. Структурні схеми: а – комбінованої системи; б – системи оптимального регулювання

§ 2.6. Поняття про адаптивне керування

Щоб розв'язати задачу оптимального керування, необхідно мати певну інформацію про об'єкт керування й умови роботи системи, а саме: математичний опис ОК (зазвичай це система диференціальних рівнянь); дані про властивості задавальних і збурювальних впливів. Наявність такої апріорної інформації дозволяє синтезувати оптимальну або неоптимальну систему з потрібними показниками якості.

Однак, у багатьох реальних задачах наявної апріорної інформації для синтезу системи керування виявляється недостатньо і тоді мають місце описані нижче ситуації.

1. На етапі проектування структури й розрахунку параметрів ПК виявляються невідомими властивості ОК та зовнішніх впливів. Система керування в процесі роботи сама має відновити брак інформації та з огляду на це змінити структуру й параметри ПК таким чином, щоб забезпечити екстремальне значення показника якості.

2. Вихідні відомості про властивості ОК та зовнішніх впливів дають змогу синтезувати ПК. Разом з тим, під час роботи системи властивості ОК і зовнішніх впливів змінюються, що потребує відповідних змін у структурі або параметрах ПК. Отже, система повинна зафіксувати зміни властивостей ОК, збурень F та задавальних впливів Z і внести зміни у ПК.

Адаптацією називається процес зміни параметрів і структури системи на основі поточної інформації з метою досягнення певного, зазвичай оптимального, її стану за початкової невизначеності та змінних умов роботи.

Адаптація може бути одноразовою (відповідно до першого випадку невизначеності) і багаторазовою (відповідно до другого варіанта).

Отже, використання принципів адаптивного керування дає змогу:

- побудувати систему згідно з вимогами її якості в умовах обмеженої апріорної інформації про властивості ОК та дії зовнішніх впливів;
- забезпечити відповідність якості керування заданим вимогам у процесі функціонування системи, коли властивості ОК і зовнішні впливи змінюються.

Адаптивні системи класифікують, враховуючи перелічені нижче ознаки.

1. *За способом зміни властивостей ПК:*

- самоналаштувальні системи (СНС), у яких змінюються тільки параметри ПК;
- самоорганізовані, де підлягають зміні параметри й структура ПК;
- самоалгоритмізовані системи, у яких передбачено зміну алгоритму функціонування ПК.

2. *За вимогами до якості керування:*

- характерні стабілізацією якості, коли забезпечено її незмінний заданий рівень;
- ті, де передбачено оптимізацію якості, коли система забезпечує екстремальне значення критерію для всіх можливих умов її роботи.

3. *За способом налаштування параметрів ПК:*

- пошукові, у яких запроваджено пробні впливи на ОК та аналізується їх результат;
- аналітичні, у котрих виконується аналітичний розрахунок потрібних значень параметрів ПК, за яких критерій керування набуває екстремальних значень.

4. За видом причин адаптації:

– ті, в яких адаптація зумовлена наявністю широкого діапазону зміни властивостей зовнішніх впливів на систему [$F(t)$ або $Z(t)$];

– системи, де адаптація викликана зміною властивостей ОК.

Узагальнену схему адаптивної СК зображено на рис. 2.16. Як бачимо, така система має дворівневу структуру: основний контур керування зі зворотним зв'язком і пристрій адаптації (ПА) для цілеспрямованої зміни властивостей ПК.

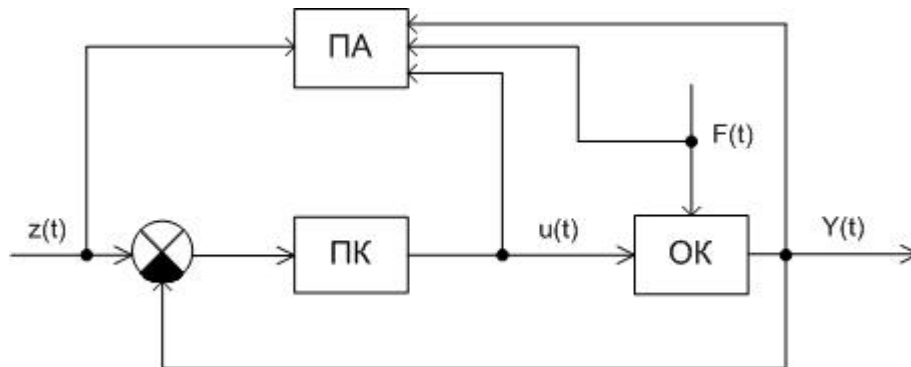


Рис. 2.16. Узагальнена схема адаптивної системи

Проектування адаптивної системи передбачає такі етапи:

1. Методами теорії керування визначають структуру ПК, припускаючи, що характеристики ОК і зовнішніх впливів відомі. Такий ПК називають *ідеальним*.

2. Визначають структуру адаптивної системи.

3. Розробляють алгоритм адаптації, тобто встановлюють правило зміни параметрів і структури ПК залежно від змін зовнішніх умов або ОК.

4. Проводять обґрунтування роботоздатності системи на практиці.

Проектуючи адаптивні СК, необхідно впевнитися у правильності гіпотези про квазістаціонарність характеристик ОК і зовнішніх впливів. Це означає, що процеси зміни властивостей ОК і зовнішніх впливів на систему F , Z мають бути повільнішими від процесів, що відбуваються в каналах адаптації. Інакше кажучи, протягом часу, необхідного для перебудови параметрів ПК, об'єкт керування, а також характеристики зовнішніх впливів істотно не змінюються.

Приклади до розділу 2

Приклад 2.2. Розглянемо систему керування бурильною машиною, структурну схему якої зображено на рис. 2.17.

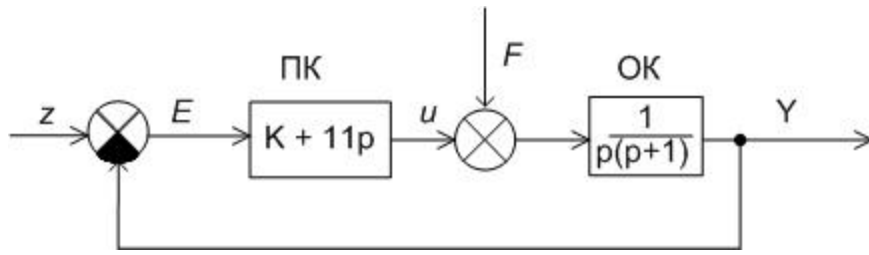


Рис. 2.17. Структурна схема системи керування бурильною машиною

Тут Z – кут, який задає напрямки руху робочого органу; Y – реальний напрямок руху; E – помилка (тобто відхилення від заданого напрямку руху); F – збурення (перешкода).

Завдання полягає у виборі такого значення коефіцієнта K , котре забезпечить задовільні показники перехідного процесу і несуттєвий вплив збурення.

Розв’язування

Визначимо спочатку передавальні функції системи по каналах « $z - y$ », та « $f - y$ », а саме:

$$W_{zy} = \frac{\frac{k+11p}{p^2+p}}{1 + \frac{k+11p}{p^2+p}} = \frac{k+11p}{p^2+12p+k} = \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}};$$

$$\ddot{y} + 12\dot{y} + Ky = 11\dot{z} + KZ. \tag{2.6}$$

$$W_{fy} = 1 + \frac{\frac{1}{p^2+p}}{\frac{K+11p}{p+p}} = \frac{1}{p^2+12p+K} = \frac{\bar{Y}}{\bar{F}};$$

$$\ddot{y} + 12\dot{y} + Ky = f. \tag{2.7}$$

З останнього диференціального рівняння видно, що в міру зростання значення коефіцієнта K вплив збурення f на вихідний параметр y зменшується (оскільки в сталому режимі $y = \frac{1}{K} f$).

Перехідні процеси, коли $K = 20$ і $K = 100$, при одиничному східчастому впливі Z визначаються шляхом розв’язування рівняння (2.6). Їх графіки зображено на рис. 2.18.

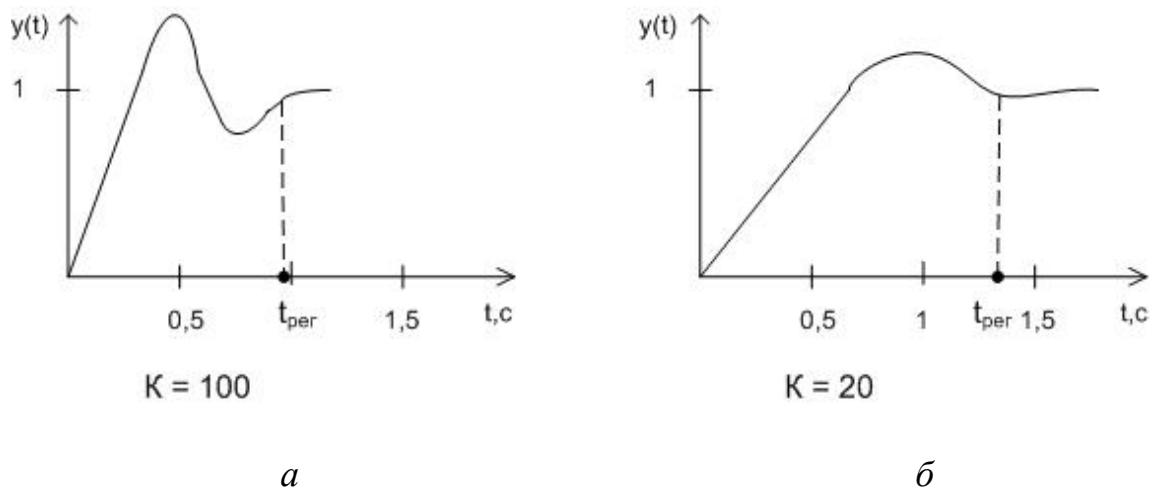


Рис. 2.18. Графіки перехідних процесів в умовах одиничного східчастого впливу Z : $a - K = 100$; $б - K = 20$

Визначимо показники якості керування, відповідні цим значенням коефіцієнта K , і занесемо їх у табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Показники якості роботи системи за різних значень коефіцієнта K

K	Перерегулювання, %	Час регулювання, с	Значення y , ($f=1$)	Помилка E
20	4	1	0,05	0
100	22	0,7	0,01	0

Приклад 2.3. Розглянемо систему зчитування інформації з диска (див. рис. 219). Вона має забезпечити точне розташування читальної головки, одночасно зменшуючи вплив зовнішніх ударів та вібрацій (биття в підшипниках приводу). Потрібно дослідити реакцію системи на збурення, а також якість керування за різних значень параметра ПК (кроки 6, 7 синтезу).

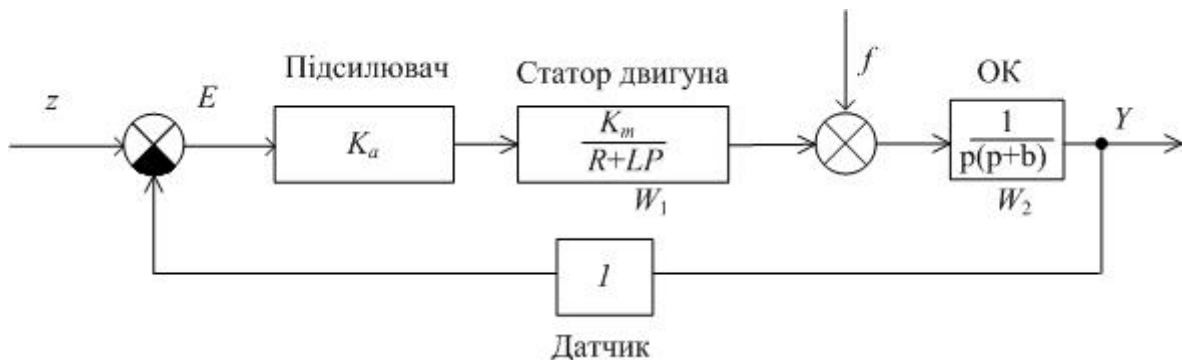


Рис. 2.19. Структурна схема системи зчитування інформації з диска

Розв'язування

Оцінимо усталену помилку системи, тобто $\lim_{t \rightarrow \infty} E(t)$.

Для цього спочатку обчислимо передавальну функцію системи, а саме:

$$W_{ZE} = \frac{1}{1 + K_a W_1 W_2} = \frac{1}{1 + \frac{K_a K_m}{(R + Lp)p(Jp + b)}} = \frac{(R + Lp)p(Jp + b)}{(R + Lp)p(Jp + b) + K_a K_m} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}}.$$

Тоді $\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} E(t) = 0$, тобто усталена помилка дорівнює нулю.

Для визначених раніше фізичних параметрів (див. приклад 1.8 попереднього розділу)

$$W_1 = \frac{500}{p + 1000}; \quad W_2 = \frac{1}{p(p + 20)}.$$

Тоді передавальна функція замкненої системи буде мати такий вигляд:

$$W_{ZY} = \frac{K_a W_1 W_2}{1 + K_a W_1 W_2} = \frac{5000 K_a}{p^3 + 1020 p^2 + 20000 p + 5000 K_a};$$

$$\ddot{y} + 1020 \dot{y} + 20000 y + 5000 K_a y = 5000 K_a Z. \quad (2.8)$$

Аналогічно передавальну функцію перешкоди отримуємо в такому вигляді:

$$W_{fy} = \frac{W_2}{1 + K_a W_1 W_2} = \frac{p + 1000}{(p^2 + 20p)(p + 1000) + 5000 K_a} = \frac{p + 1000}{p^3 + 1020 p^2 + 20000 p + 5000 K_a};$$

$$y + 1020 y + 20000 y + 5000 K_a y = f + 1000 f. \quad (2.9)$$

З рівнянь (2.8) і (2.9) випливає, що чим більше значення коефіцієнта K_a , тим менший вплив перешкоди f на вихідні параметри системи, оскільки права частина рівняння (2.9) не залежить від величини K_a і в сталому режимі

$$y = \frac{1000}{5000 K_a f}.$$

Разом з тим, занадто збільшувати значення K_a не можна, оскільки при цьому збільшується показник перерегулювання і процес стає коливальним. На рис. 2.20 показано реакцію системи на одиничний східчастий вплив Z при нульових початкових умовах, коли $K_a = 10$ (рис. 2.20, а) й $K_a = 80$ (рис. 2.20, б).

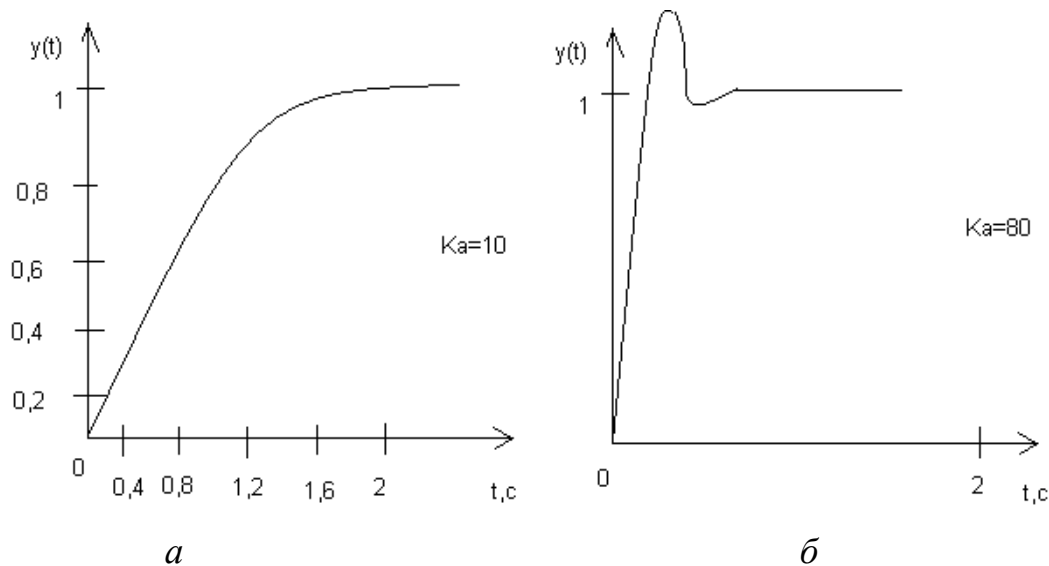


Рис. 2.20. Графіки реакції системи на одиничний східчастий вплив Z за нульових початкових умов: $a - K_a = 10$; $б - K_a = 80$

Питання для самоконтролю.

1. Яким чином можна сформулювати мету і задачу керування?
2. Які умови слугують для визначення області допустимих станів і області допустимих керувальних впливів?
3. Що вкладають у поняття «ефективність керування»?
4. Перелічіть основні показники якості керування.
5. Сформулюйте задачу оптимального керування.
6. Які складові частини включає формалізована задача оптимального керування?
7. Перелічіть основні типові інтегральні критерії оптимального керування.
8. Яку систему називають оптимальним програматором? Регулятором?
9. У яких випадках доцільне застосування адаптивних СК?
10. За якими ознаками класифікуються адаптивні СК?
11. Сформулюйте гіпотезу квазістаціонарності.
12. Який вигляд має узагальнена структурна схема адаптивної СК?

Задачі до самостійного розв'язування

1. Дослідіть реакцію на збурення системи, схему якої зображено на рис. 2.21.

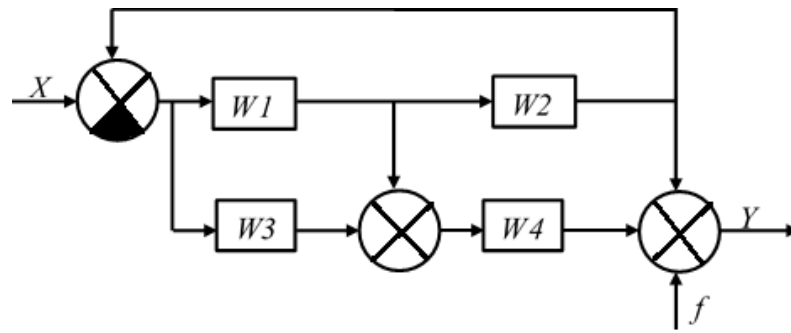


Рис. 2.21

2. Визначте параметри системи, схему якої зображено на рис. 2.22.

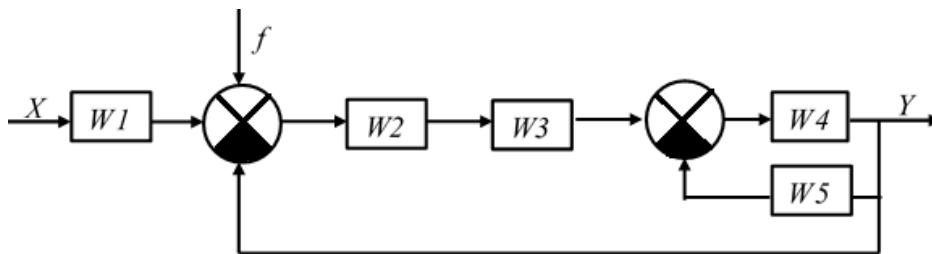


Рис. 2.22

РОЗДІЛ 3

ДОСЛІДЖЕННЯ ЯКІСНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Мета розділу: вивчення основних задач аналізу СК: визначення керованості, спостережуваності, стійкості та чутливості системи, дослідження її руху на фазовій площині, а також вивчення методів розв'язування таких задач

§ 3.1. Керованість і спостережуваність СК

Будь-яка система керування з погляду її практичної придатності повинна мати певні властивості. Зокрема, необхідно, щоб лінійні системи керування задовольняли умови *керованості* й *спостережуваності*.

Під *керованістю* розуміють таку властивість системи, коли під дією керувального впливу за скінченний проміжок часу її можна перевести з будь-якого стану в початок координат.

Спостережуваність – це властивість системи, котра дозволяє шляхом вимірювання її вихідних координат протягом скінченного проміжку часу при заданому входньому впливі визначити її початковий стан $X(t_0)$. Вимірювання координат і спостереження за вихідним сигналом здійснюється на проміжку часу $[t_0, t_0 + T]$.

Отже, перш ніж проектувати структуру і розраховувати параметри пристрою керування, необхідно дослідити об'єкт керування на керованість і спостережуваність.

Припустимо, ОК має m входів, r виходів та n змінних стану (його схему подано на рис. 3.1).

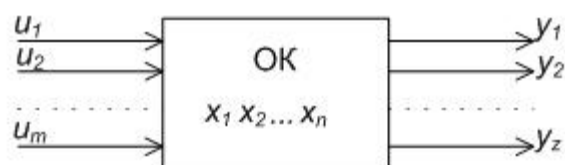


Рис. 3.1. Загальна схема ОК, що має m входів, r виходів та n змінних стану

Лінійна модель такого об'єкта в нормальній формі буде мати поданий нижче вигляд.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1m}u_m, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \dots + b_{2m}u_m, \\ \dots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nm}u_m, \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} x_1(0) = x_{10}; \\ x_2(0) = x_{20}; \\ \dots \\ x_n(0) = x_{n0}. \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + \dots + d_{1m}u_m, \\ \dots \\ y_r = c_{r1}x_1 + c_{r2}x_2 + \dots + c_{rn}x_n + d_{r1}u_1 + \dots + d_{rm}u_m. \end{cases} \quad (3.3)$$

У матричній формі

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU, \\ Y = CX + DU, \\ X(0) = X_0, \end{cases} \quad (3.4)$$

тут X – вектор змінних стану (розмірності n), Y – вектор вихідного сигналу (розмірність r), U – вектор керування (m), A – матриця параметрів об'єкта (розмірність $n \times n$), B – матриця керування ($n \times m$), C – матриця спостереження ($r \times n$), D – матриця обходу (розмірність $r \times m$).

Приклад 3.1. Дано лінійну модель у нормальній формі, тобто

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 5x_1 + 2x_2 - u_1, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_3 + 2u_2, \\ \dot{x}_3 = x_2 - u_1 + 3u_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2 + x_3 + u_1. \end{cases}$$

Запишемо її в матричній формі; відповідні матриці будуть мати такий вигляд:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Критерій керованості. Нехай дано систему n -го порядку.

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU, \\ Y &= CX + DU. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Для її дослідження на керованість запишемо так звану *матрицю керованості*, а саме:

$$G = (B : AB : A^2B : \dots : A^{n-1}B).$$

Система буде повністю керованою, якщо ранг матриці G дорівнює n .

Отже, мають місце такі твердження:

1. Коли ранг матриці G дорівнює n , то система (3.5) повністю керована.
2. Якщо ранг матриці G дорівнює 0, то система (3.5) повністю некерована.
3. Коли $0 < \text{rang } G < n$, то система (3.5) частково керована.

Нагадаємо, що рангом матриці називається число її лінійно незалежних рядків або стовпців. У квадратній матриці порядку n ранг дорівнює n , коли її визначник не дорівнює нулю, тобто

$$\det G \neq 0 \Rightarrow \text{rang } G = n.$$

Приклад 3.2. Дослідити на керованість подану нижче систему.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 5x_1 + 2x_2 - u_1, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_3 + 2u_2, \\ \dot{x}_3 = x_2 - u_1 + 3u_2, \\ y = x_1. \end{cases}$$

Розв'язування

У цій системі

$$n = 3, \quad m = 2, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Отже, для цієї задачі матриця керованості $G = (B : AB : A^2B)$.

Обчислимо послідовно її складові, а саме:

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -7 & 12 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$A^2B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -7 & 12 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 & 44 \\ -15 & 20 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Тепер запишемо матрицю G , тобто

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 & 4 & -39 & 44 \\ 0 & 2 & -7 & 12 & -15 & 20 \\ -1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Для того, щоб визначити керованість системи, обчислимо ранг матриці G , а саме:

$$\det G = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & -7 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -10 - 21 = -31 \neq 0,$$

а значить $\text{rang}G = 3$. Отже, можна зробити висновок, що система повністю керована.

Критерій спостережуваності. Нагадаємо, що *спостережуваність* як властивість системи дозволяє шляхом вимірювання вихідних координат протягом скінченного проміжку часу при заданому вхідному впливі визначити її початковий стан $X(t_0)$. Вимірювання та спостереження за вихідним сигналом виконується протягом проміжку часу $[t_0, t_0 + T]$.

Нехай дано систему порядку n такого вигляду:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU, \\ Y &= CX + DU, \\ X(0) &= X_0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Для її дослідження на спостережуваність використовують так звану *матрицю спостережуваності*, а саме:

$$H = \left(C^T : A^T C^T : (A^T)^2 C^T : \dots : (A^T)^{n-1} C^T \right).$$

Система (3.6) є повністю спостережуваною, якщо ранг матриці спостережуваності H дорівнює n .

Тобто, можна зробити такі висновки:

1. Якщо $\text{rang } H = n$, то система (3.6) повністю спостережувана.
2. Якщо $\text{rang } H = 0$, то система (3.6) повністю не спостережувана.
3. Якщо $0 < \text{rang } H < n$, то система (3.6) частково спостережувана.

Приклад 3.3. Дослідити на спостережуваність і керованість подану нижче систему.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ y = x_2 + u. \end{cases}$$

Розв'язування

У цій системі $n = 2$, $m = 1$. Запишемо відповідні системі матриці, а саме:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (0; \ 1), \quad D = (1).$$

Матриця керованості $G = (B:AB)$. Обчислимо її складові, а саме:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

тепер запишемо матрицю G таким чином:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

та обчислимо її визначник: $\det G = 1 \neq 0$, тоді $\text{rang } G = 2$, тобто система повністю керована.

Далі перевіримо систему на спостережуваність, для цього запишемо матрицю спостережуваності: $H = (C^T: A^T C^T)$. Спочатку обчислимо добуток $A^T C^T$, а саме:

$$A^T C^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

отже, матриця $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Визначимо ранг цієї матриці, для чого обчислимо її визначник. $\det H = -1 \neq 0$, отже, $\text{rang } H = 2$, що свідчить про повну спостережуваність системи.

Приклад 3.4. Дослідити на керованість і спостережуваність подану нижче систему.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = u, \\ y = x_2. \end{cases}$$

Розв'язування

Випишемо відповідні системі матриці: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = (0 \ 1)$,

та обчислимо добуток AB :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді матриця $G = (B:AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а її визначник $\det G = -1 \neq 0$, тому $\text{rang } G = 2$, і система повністю керована.

Тепер перевіримо систему на спостережуваність. Обчислимо добуток $A^T C^T$, а саме:

$$A^T C^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

й запишемо матрицю H таким чином:

$$H = (C^T : A^T C^T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Її визначник $\det H = 0$, але існує мінор першого порядку, визначник якого дорівнює 1, отже, $\text{rang } H = 1 < 2$, а це свідчить про часткову спостережуваність системи.

§ 3.2. Дослідження руху систем на фазовій площині

Вільний рух стаціонарних систем описується системою рівнянь у змінних стану, а саме:

$$\frac{dx}{dt} = \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n); \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.7)$$

Крім того, вільний рух може бути досліджено методом фазового простору.

Фазовий простір є n -вимірним координатним простором станів системи. У кожен момент часу t_j стан системи зображується точкою з координатами: $x_1(t_j), x_2(t_j) \dots x_n(t_j)$, а процес руху системи $x_1(t), x_2(t) \dots x_n(t)$ зображується у вигляді кривої, яку називають *фазовою траєкторією* (рис. 3.2).

Повну сукупність усіх фазових траєкторій називають *фазовим портретом*.

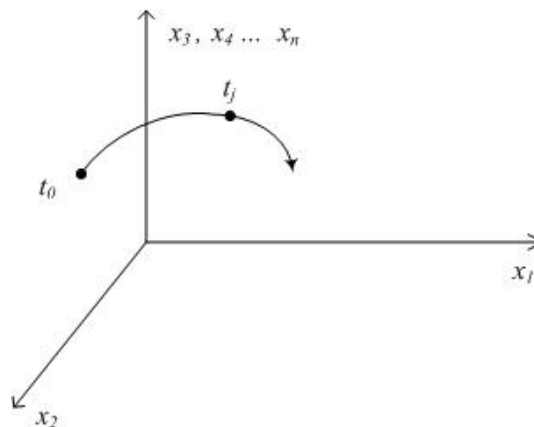


Рис. 3.2. Фазовий простір і фазова траєкторія руху системи

На практиці застосовується аналіз окремого випадку, коли $n = 2$. Тоді фазовий простір перетворюється на фазову площину (див. рис. 3.3). Для опису систем другого порядку ($n = 2$) рівняння (3.7) мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \Phi_1(x_1, x_2); \\ \frac{dx_2}{dt} &= \Phi_2(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (3.8)$$

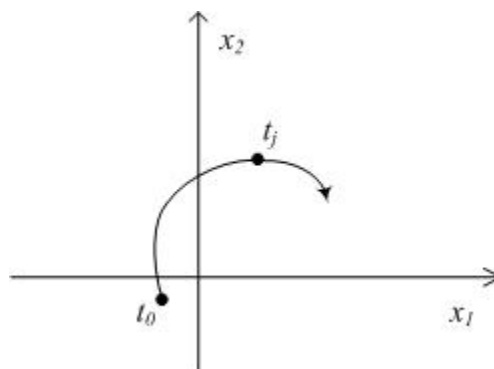


Рис. 3.3. Фазова площина і фазова траєкторія, що описують вільний рух системи другого порядку

Диференціальні рівняння фазової траєкторії отримують шляхом вилучення часу t з системи рівнянь (3.8), тобто

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\Phi_2(x_1, x_2)}{\Phi_1(x_1, x_2)}. \quad (3.9)$$

Точки рівноважного стану системи знаходять через нульові значення швидкості, а саме: $\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = 0$, й тому в цих точках буде правильною така рівність:

$$\Phi_1(x_1, x_2) = \Phi_2(x_1, x_2) = 0.$$

Точки на фазовій площині, які задовольняють цю умову, називають *особливими*.

У більшості випадків рівняння руху системи мають такий вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = \Phi(x_1, x_2), \end{cases}$$

де x_1 – координата, x_2 – її швидкість.

У цьому випадку напрямки руху системи по фазових траєкторіях визначаються такими правилами:

1. У верхній напівплощині: зліва направо, тому що $x_2 > 0$.
2. У нижній напівплощині, справа наліво, оскільки $x_2 < 0$.
3. Фазові траєкторії перетинають вісь x_1 під прямим кутом, бо в точках перетину $x_2 = 0$ (тобто має місце мінімум або максимум).

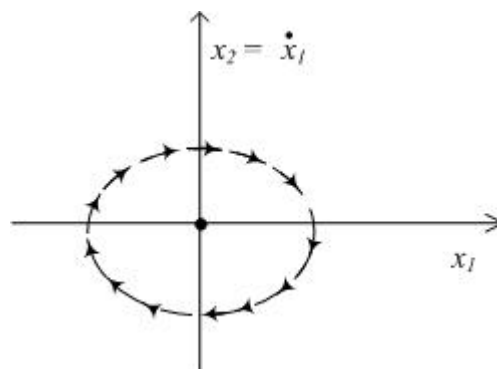


Рис. 3.4. Напрямки руху системи по фазових траєкторіях

Нижче показано графіки типових перехідних процесів і відповідні їм фазові траєкторії.

1. Згасальний коливний процес (рис. 3.5).

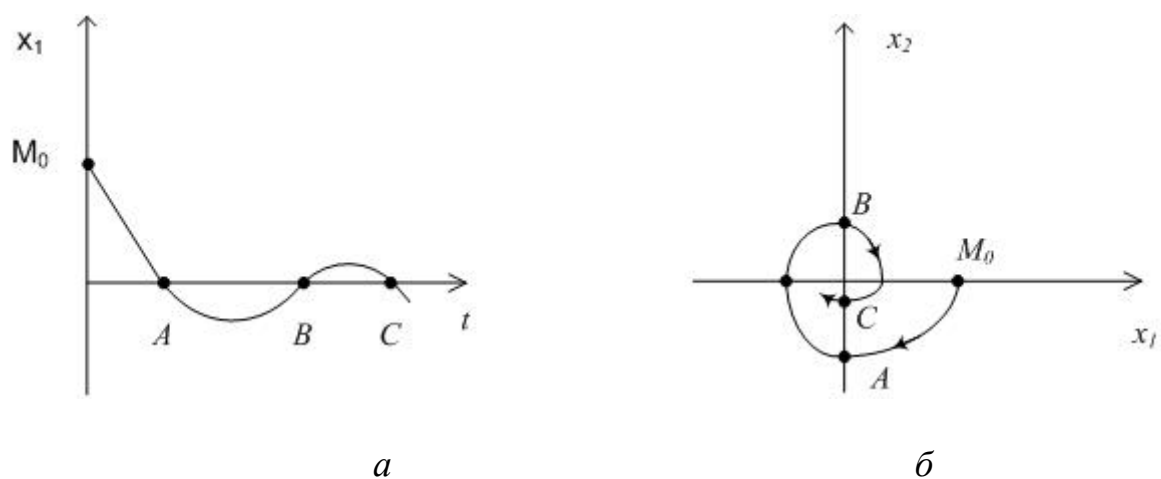


Рис. 3.5. Графік згасального коливного перехідного процесу (а) і відповідної йому фазової траєкторії (б)

2. Розбіжний коливний процес (рис. 3.6).

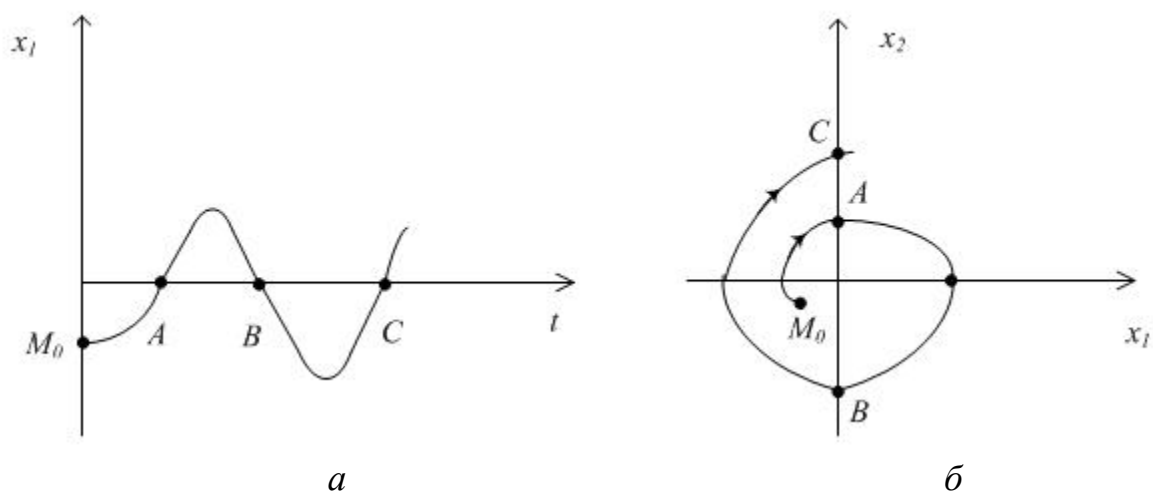


Рис. 3.6. Графік розбіжного коливного перехідного процесу (а) і відповідної йому фазової траєкторії (б)

3. Періодичний процес (рис. 3.7).

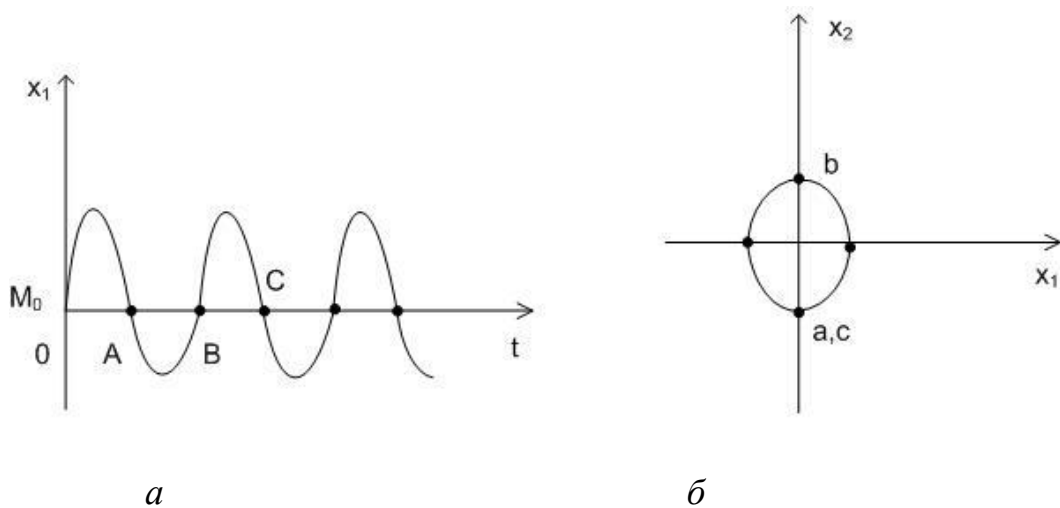


Рис. 3.7. Графік періодичного перехідного процесу (а) і відповідної йому фазової траєкторії (б)

4. Монотонний згасальний процес (рис. 3.8).

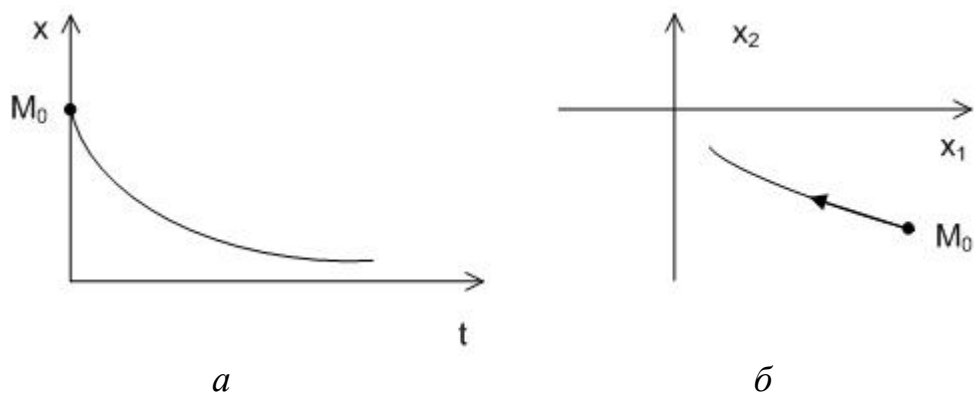


Рис. 3.8. Графік монотонного згасального перехідного процесу (а) і відповідної йому фазової траєкторії (б)

5. Монотонний розбіжний процес.

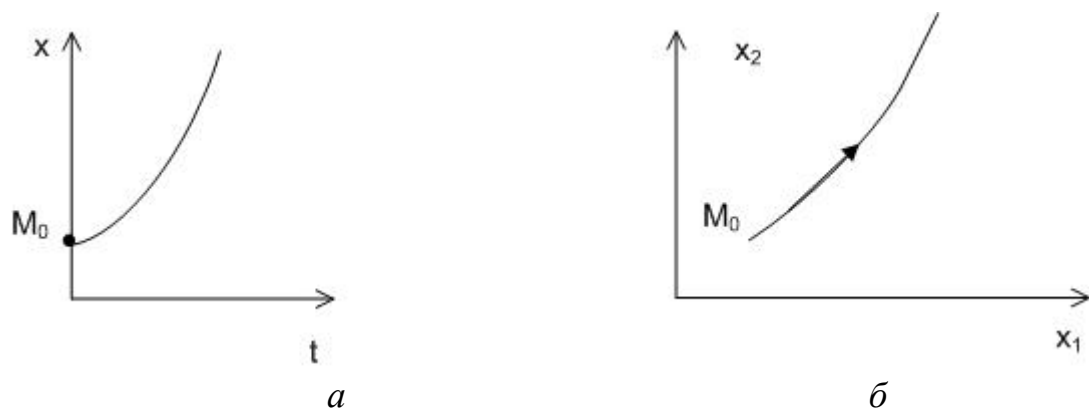


Рис. 3.9. Графік монотонного розбіжного перехідного процесу (а) і відповідної фазової траєкторії (б)

Розглянемо тепер типи особливих точок і фазові портрети лінійних систем. Візьмемо систему такого вигляду:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2;$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2,$$

або в матричній формі $\dot{X} = AX$; $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Диференціальне рівняння фазових траєкторій буде таким:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}.$$

За цих припущень особлива точка буде єдиною, а її координати $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Тип особливої точки і характер перехідного процесу в системі визначають за коренями характеристичного рівняння системи, а саме:

$$\det[A - \lambda E] = 0. \quad (3.10)$$

Для системи другого порядку характеристичне рівняння (3.10) буде мати два корені – λ_1 , λ_2 . При цьому можливі такі випадки:

1. Корені λ_1 , λ_2 – дійсні від'ємні. У цьому разі перехідний процес буде аперіодичним згасальним. Тип особливої точки – стійкий вузол (див. рис. 3.10).

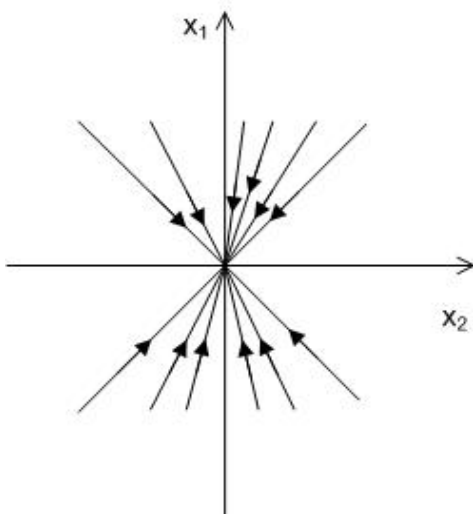


Рис. 3.10. Особлива точка типу «стійкий вузол»

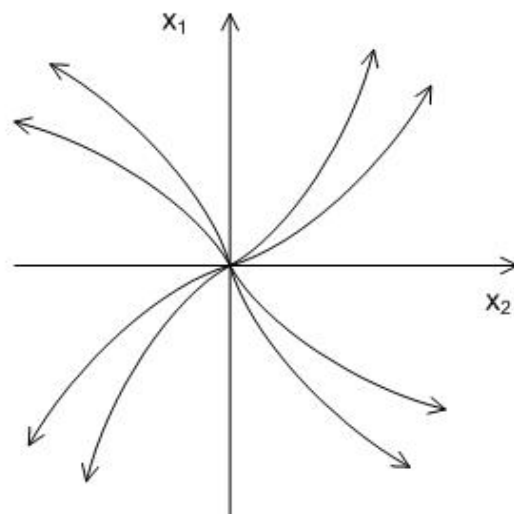


Рис. 3.11. Особлива точка типу «нестійкий вузол»

2. Корені λ_1, λ_2 – дійсні додатні, тоді перехідний процес – аперіодичний розбіжний, а тип особливої точки – нестійкий вузол (рис. 3.11).

3. Корені λ_1, λ_2 – дійсні з різними знаками. Тоді перехідний процес аперіодичний розбіжний. Тип особливої точки – сідло (рис. 3.12).

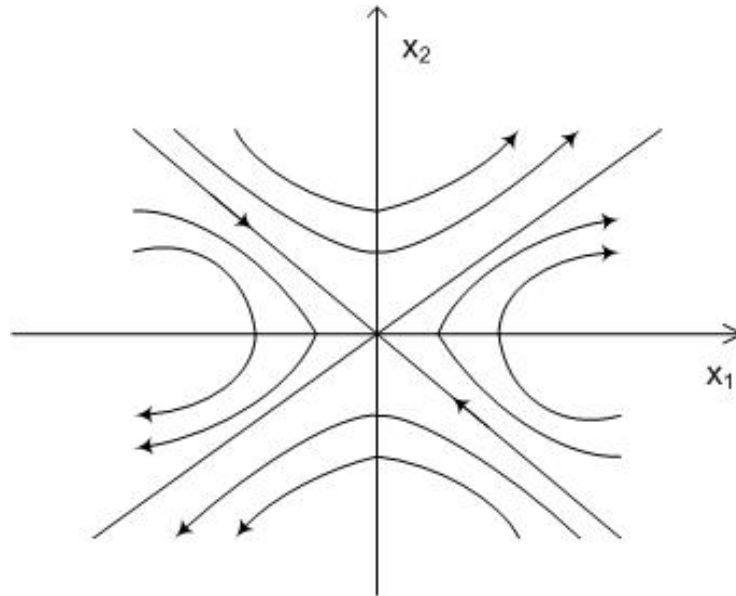


Рис. 3.12. Особлива точка типу «сідло»

4. Корені λ_1, λ_2 – дійсні рівні. Тип особливої точки – вироджений вузол, стійкий, коли $\lambda_{1,2} < 0$, і нестійкий, якщо $\lambda_{1,2} > 0$. Перехідний процес – аперіодичний (рис. 3.13).

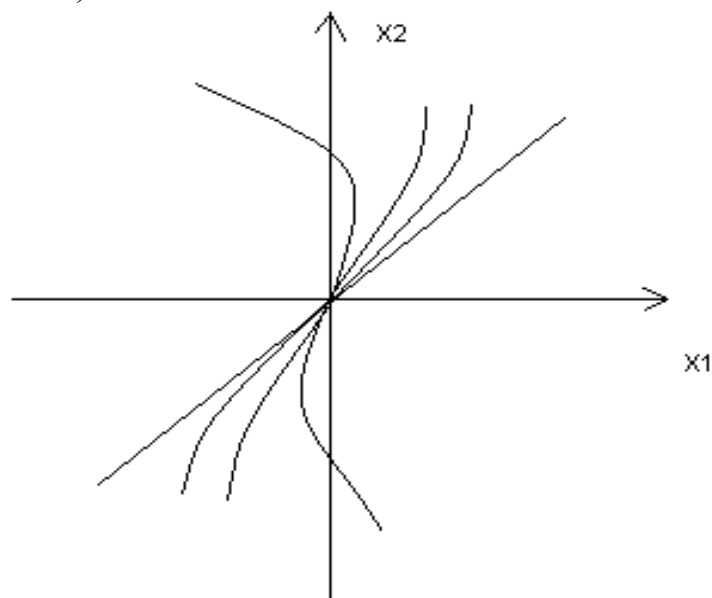


Рис. 3.13. Особлива точка типу «вироджений вузол»

5. Корені λ_1, λ_2 – комплексні спряжені, тобто $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$. Тоді перехідний процес – коливний розбіжний, якщо $\alpha > 0$; згасальний, коли $\alpha < 0$. Тип особливої точки – нестійкий фокус, якщо $\alpha > 0$; стійкий, якщо $\alpha < 0$ (рис. 3.14).

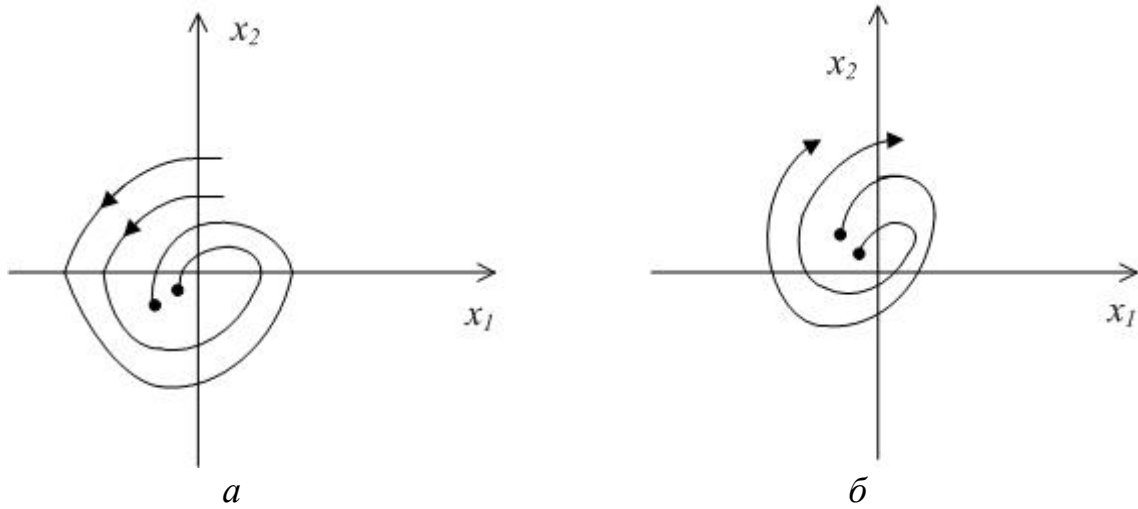


Рис. 3.14. Особлива точка типу «стійкий фокус» (а) і «нестійкий фокус» (б)

6. Корені λ_1, λ_2 – чисто уявні, тобто $\lambda_{1,2} = \pm j\beta$. У цьому разі перехідний процес – періодичний. Тип особливої точки – центр (рис. 3.15).

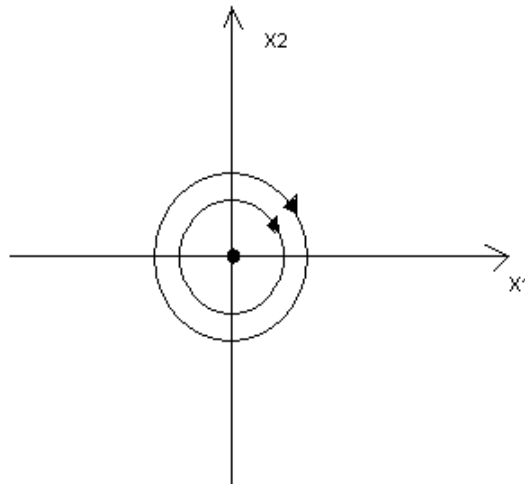


Рис. 3.15. Особлива точка типу «центр»

Для уточнення фазової картини часто застосовується *метод ізоклін*.

Ізокліною називається лінія, яка з'єднує точки фазових траєкторій, що мають однаковий нахил дотичних, тобто для кожної ізокліни $\frac{dx_2}{dx_1} = c$.

Відповідні лінійним системам ізокліни будуть являти собою прямі, які проходять через початок координат і описуються таким рівнянням:

$$\frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2} = C.$$

Отже, будь-яка пряма, задана рівнянням: $x_2 = k_n x_1$, буде ізокліною, що має таку сталу:

$$C = \frac{a_{21} + a_{22}k_n}{a_{11} + a_{12}k_n}.$$

Задавши кілька ізоклін і знаючи стосовно кожної з них крутизну нахилу фазових траєкторій, котрі її перетинають, можна довершити повний фазовий портрет системи.

Приклад 3.5. Дано систему: $\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = 0$. Потрібно дослідити її рух методом фазової площини.

Опишемо систему моделлю у змінних стану. Позначимо, що $y = x_1$, $\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2$, тоді

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_2 - 5x_1, \end{cases}$$

або $\dot{X} = AX$, де $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$.

Складемо характеристичне рівняння системи:

$$\det[A - \lambda E] = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -5 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(-2 - \lambda) + 5 = \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0.$$

Після його розв'язування маємо такий результат:

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 5} = -1 \pm j2.$$

Як бачимо, корені цього рівняння комплексні спряжені із від'ємною дійсною частиною, $\alpha = -1$. Це означає, що перехідний процес коливний згасальний, а тип особливої точки $(0; 0)$ – стійкий фокус.

Диференціальне рівняння фазових траєкторій має такий вигляд:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -2 - 5\frac{x_1}{x_2}.$$

Для ізокліни: $x_2 = k_n x_1$, знайдемо сталу C , а саме:

$$C = \frac{a_{21} + a_{22}k_n}{a_{11} + a_{12}k_n} = \frac{-5 - 2k_n}{0 + 1k_n} = -2 - \frac{5}{k_n}.$$

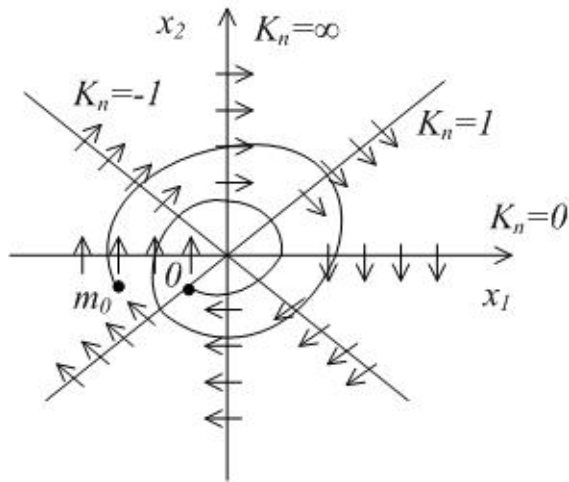


Рис. 3.16. Фазовий портрет системи до прикладу 3.5

Візьмемо чотири значення параметрів; $k_n = \{0; 1; \infty; -1\}$
 $k_n = (0; 1; \infty; -1)$. Їм відповідають такі значення сталої: $C = \{-\infty; -7; -2; 3\}$. Враховуючи її геометричний сенс, а саме: $C = \operatorname{tg} \gamma$ (наприклад, коли $k_n = 1$, $C = \operatorname{tg} \gamma = -7$), проводять відрізки з відповідним нахилом уздовж кожної ізокліни.

Відповідні напрямки дотичних до фазових траєкторій показано на рис. 3.16 стрілками. Орієнтуючись на них, можна накреслити фазові траєкторії. Одну з них зображено на рис. 3.16 для умов, коли $M_0(X_{10}, X_{20})$.

§ 3.3. Особливі точки й фазові портрети нелінійних систем

Припустимо, що дано нелінійну систему другого порядку, а саме:

$$\dot{x}_1 = \varphi_1(x_1, x_2);$$

$$\dot{x}_2 = \varphi_2(x_1, x_2).$$

Особливі точки, які відповідають рівноважним станам системи, можна визначити з таких умов:

$$\varphi_1(x_1, x_2) = 0;$$

$$\varphi_2(x_1, x_2) = 0. \quad (3.11)$$

Система (3.11) нелінійна, тому в загальному випадку вона має кілька розв'язків, тобто кілька особливих точок. Для виявлення типу кожної з них спочатку рівняння (3.11) лінеаризують за малих відхилень координат в околі особливої точки, а потім визначають корені характеристичного рівняння отриманої лінеаризованої системи і, керуючись правилами, описаними в § 3.2, встановлюють тип особливої точки.

Приклад 3.6. Задано модель нелінійної системи, а саме:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1(1+x_1^2) - 2x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2. \end{cases} \quad (3.12)$$

Рівняння фазових траєкторій згідно з виразом (3.9) має такий вигляд:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_1 + x_2}{-x_1(1+x_1^2) - 2x_2}.$$

Для визначення особливих точок запишемо систему рівнянь, що має вигляд (3.11), тобто

$$\begin{cases} x_1(1+x_1^2) + 2x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Ця система має три корені, і відповідно три рівноважних стани.

Дослідимо характер особливих точок.

1. $x_1 = 0, x_2 = 0$. Лінеаризовані рівняння в околі цієї точки мають такий вигляд:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2; \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2. \end{cases}$$

Складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння, тобто

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0;$$

$$\lambda_{1,2} = \pm j.$$

Як бачимо, його корені чисто уявні. Значить тип особливої точки $(0; 0)$ – центр.

2. $x_1 = 1, x_2 = -1$. В околі цієї точки введемо малі відхилення, тобто $x_1 = 1 + \varepsilon_1, x_2 = -1 + \varepsilon_2$, де $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – малі числа. Підставимо x_1 і x_2 у рівняння (3.12) і відкинемо нелінійні члени, тоді отримуємо таку систему:

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon_1}{dt} = -4\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2, \\ \frac{d\varepsilon_2}{dt} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \end{cases}$$

Складемо і розв'яжемо відповідне характеристичне рівняння, тобто

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0.$$

Корені цього рівняння: $\lambda_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{4}}$, дійсні й мають різні знаки. Отже, тип особливої точки $(1; -1)$ – сідло.

3. $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Уведемо такі відхилення: $x_1 = -1 + \varepsilon_1$, $x_2 = 1 + \varepsilon_2$. Рівняння системи, лінійної в околі точки $(-1; 1)$, будуть мати такий вигляд:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 = -4\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon}_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \end{cases}$$

Отримані корені характеристичного рівняння: $\lambda_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{4}}$, дійсні й мають різні знаки. Тип особливої точки $(-1; 1)$ – сідло.

Тепер знайдемо асимптоти фазових траєкторій у сідлових точках. Для цього припустимо, що $\varepsilon_2 = k\varepsilon_1$, тоді

$$k = \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{-4\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2} = \frac{1+k}{-4-2k};$$

$$2k^2 + 5k + 1 = 0;$$

$$k_1 = \frac{-5 - \sqrt{17}}{4}, \quad k_2 = \frac{-5 + \sqrt{17}}{4},$$

тут k_1 і k_2 є тангенсами кутів нахилу асимптот у сідлових точках (див. рис. 3.17).

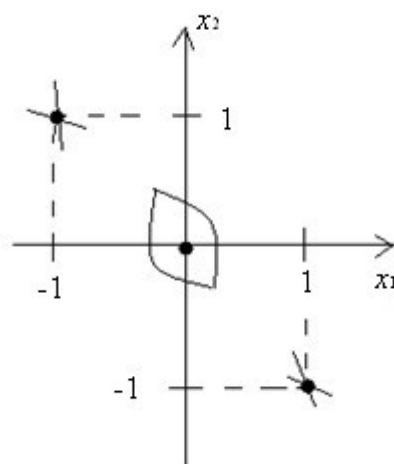


Рис. 3.17. Особливі точки на фазовій площині (до прикладу 3.6): $(0; 0)$ – центр, $(-1; 1)$, $(1; -1)$ – сідло

Для визначення напрямку руху в будь-якій точці фазової площини необхідно підставити координати цієї точки в рівняння (3.12). Наприклад, для точки $(0; 1)$ маємо такий результат: $\dot{x}_1 = -2$, $\dot{x}_2 = 1$, тобто значення x_1 зменшується, а x_2 зростає. Таким чином, прояснюється вся картина траєкторій руху системи на фазовій площині (див. рис. 3.18).

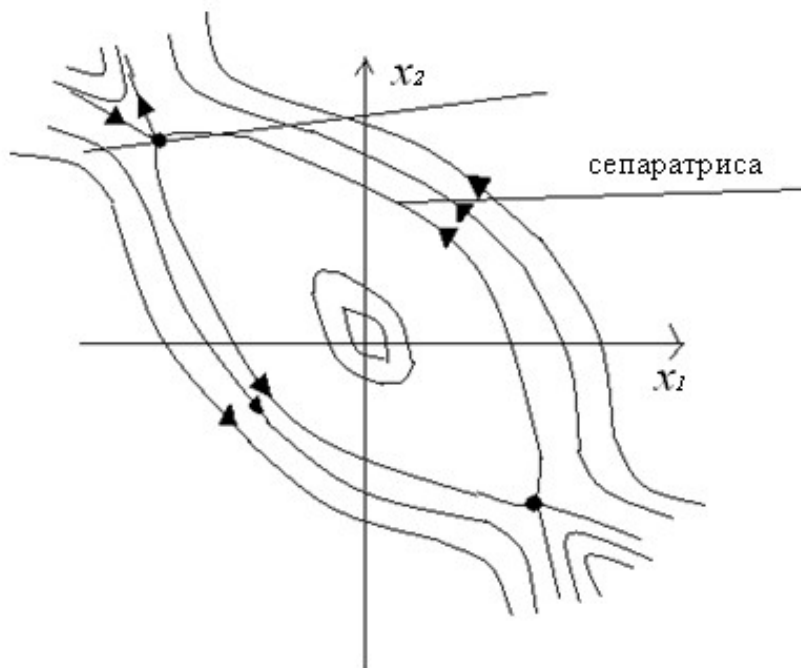


Рис. 3.18. Фазові траєкторії руху системи до прикладу 3.6

Методом ізоклін можна уточнити обриси фазових траєкторій. Відповідні даній системі рівняння ізоклін мають такий вигляд:

$$\frac{x_1 + x_2}{-x_1(1 - x_1^2) - 2x_2} = C,$$

тут C – крутизна кута нахилу $\frac{dx_2}{dx_1}$ фазових траєкторій, які перетинають ізокліну.

Насамкінець відзначимо такі особливості нелінійних систем:

1. Наявність більш ніж одного рівноважного стану. На фазовій площині формується кілька областей з різними типами фазових траєкторій. Криві, що розділяють ці області, називаються *сепаратрисами* (див. рис. 3.18).

2. У нелінійних системах можуть мати місце *граничні цикли* – замкнені криві на фазовій площині, відповідні наявним там періодичним процесам. Розрізняють стійкі та нестійкі граничні цикли (див. рис. 3.19).

Фізичний зміст стійких граничних циклів – автоколивання в системі, причому параметри цих автоколивань не залежать від початкових умов.

У той же час, характер перехідних процесів у нелінійній системі залежить від початкових умов, оскільки в ній може мати місце кілька особливих точок різного типу.

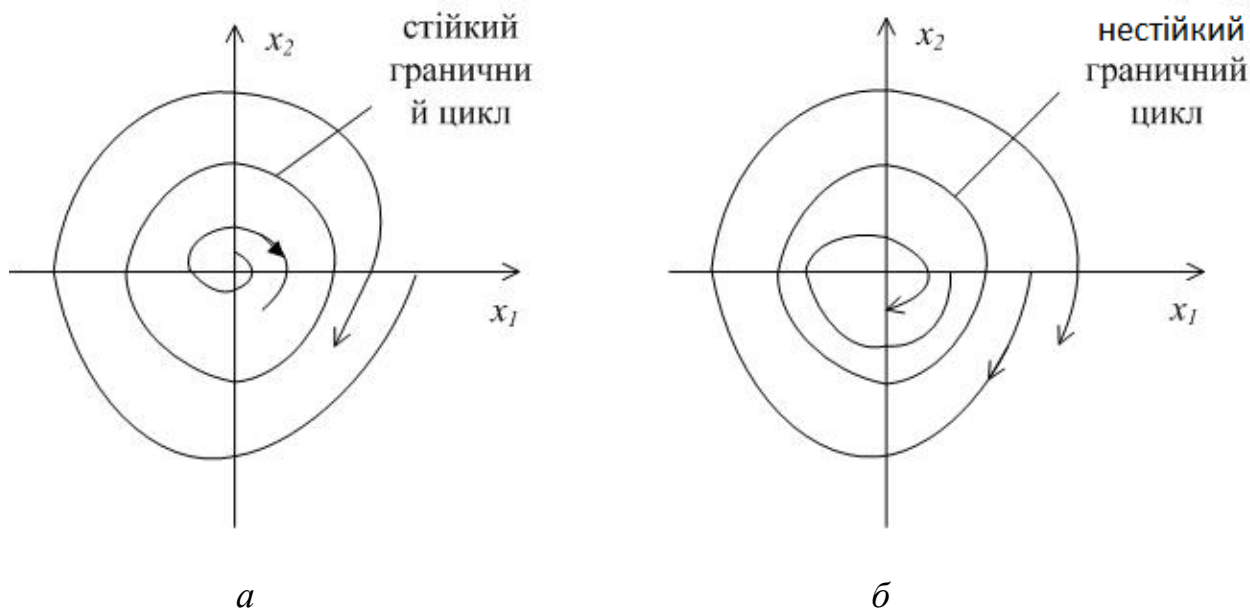


Рис. 3.19. Фазові портрети граничних циклів: *a* – стійкого; *б* – нестійкого

§ 3.4. Поняття про стійкість лінеаризованих систем. Критерії стійкості Гурвіца та Михайлова

Стійкість системи керування є однією з важливих умов її роботоздатності, оскільки вона включає в себе вимоги загасання перехідних процесів у часі. Очевидно, що система, якій властивий розбіжний перехідний процес, буде нероботоздатною. На рис. 3.20 зображено графіки розбіжного (рис. 3.20, *б*) й згасального (рис. 3.20, *а*) процесів.

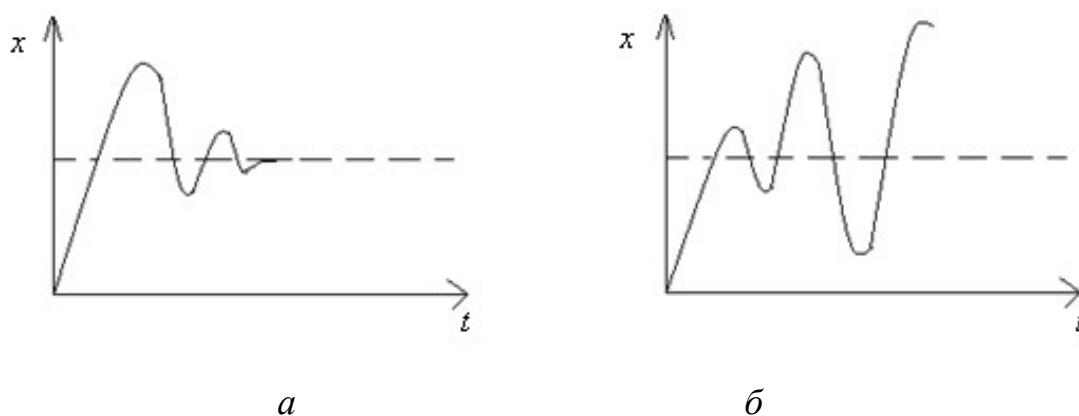


Рис. 3.20. Графіки процесів керування: *a* – згасального; *б* – розбіжного

Зауважимо, що всі реальні системи в природі та в техніці є нелінійними, тобто мають нелінійну статичну характеристику. Однак, в обмеженому діапазоні зміни входу $[x_{\min} \div x_{\max}]$ багато реальних систем можна вважати лінійними (див. рис. 3.21).

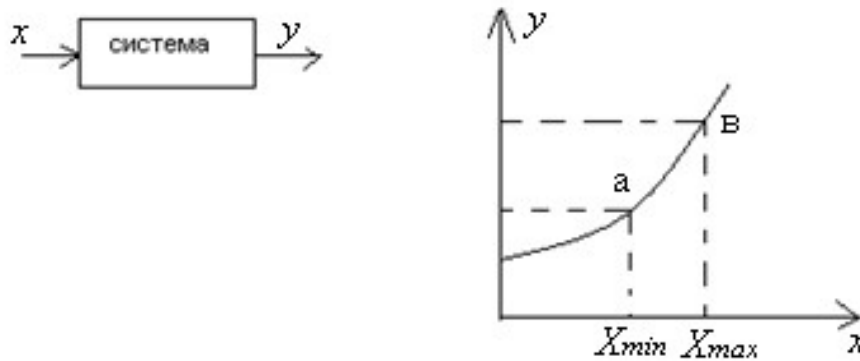


Рис. 3.21. Графічне подання лінеаризації об'єкта в певному діапазоні

При цьому виконується їх *лінеаризація*, тобто заміна нелінійної робочої ділянки характеристики ($a \div b$) лінійною функцією.

Отримана після цього лінійна система є наближеною математичною моделлю реальної системи. У цьому розділі ми розглянемо поняття стійкості лінійних (лінеаризованих) систем.

Під *стійкістю лінійної системи* розуміють властивість згасання перехідного процесу з плином часу, інакше кажучи, це така ознака власного (вільного) руху системи:

$$Y_{cv.}(t) \rightarrow 0, \quad \text{коли} \quad t \rightarrow \infty, \quad (3.13)$$

тут $Y_{cv.}(t)$ – розв'язок диференціального рівняння без правої частини, а саме:

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(n-i)} = 0. \quad (3.14)$$

Властивість (3.13) має місце в тому випадку, коли всі корені $p_i, i = \overline{1, n}$, такого характеристичного рівняння:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0, \quad (3.15)$$

відповідного системі (3.14), мають від'ємні дійсні частини.

Якщо хоча б один дійсний корінь рівняння додатний чи хоча б одна пара комплексних коренів має додатну дійсну частину, то процес буде розбіжним (рис. 3.22 б, г).

Коли в характеристичному рівнянні (3.15) хоча б один корінь нульовий: $p_i = 0$, або хоча б одна пара чисто уявних коренів $p_{i,i+1} = \pm j\omega$, а решта мають від'ємні дійсні частини, то система перебуває на межі стійкості.

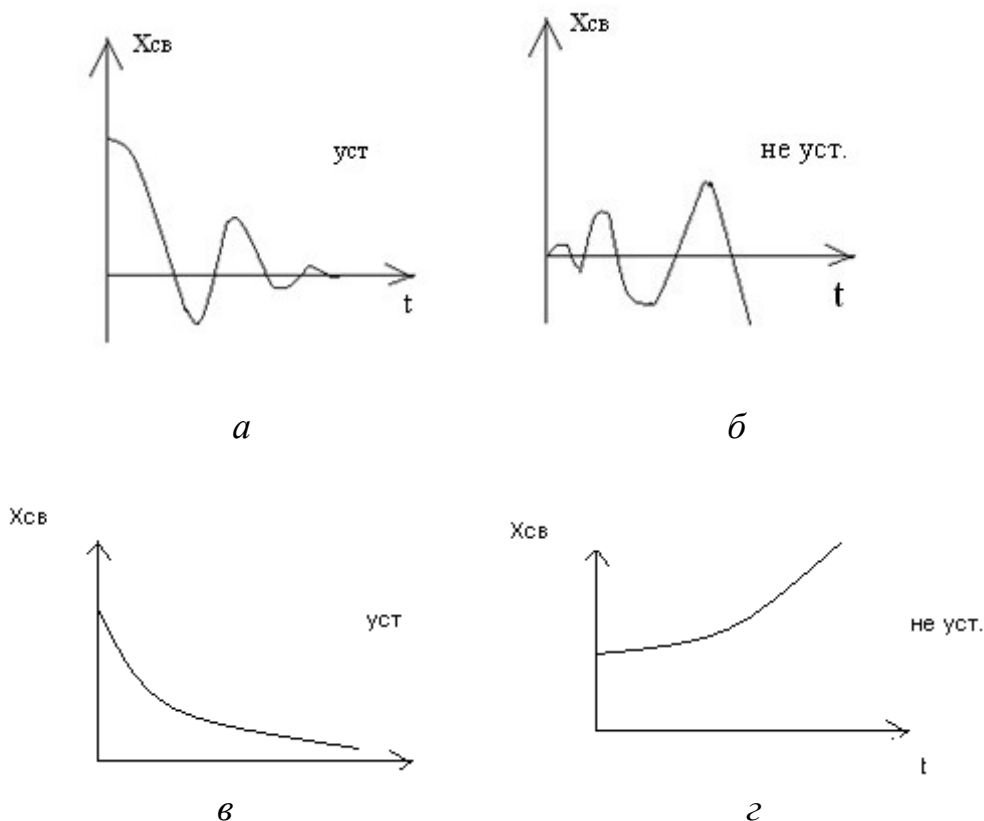


Рис. 3.22. Графічне подання перехідного процесу в системі, залежно від коренів характеристичного рівняння: *а* – корені комплексні, процес збіжний; *б* – корені комплексні, процес розбіжний; *в* – корені дійсні, процес збіжний; *г* – корені дійсні, процес розбіжний

Таким чином, умова стійкості лінійної системи виражається в тому, що всі корені: $p_{i,i+1} = \pm j\omega$, характеристичного рівняння (3.15) мають розташовуватися в лівій півплощині комплексної змінної (рис. 3.23). При цьому уявна вісь $w \in$ *межєю* стійкості.

Припустимо, що вільний рух лінійної (лінеаризованої) системи описується диференціальним рівнянням, а саме:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y + a_n y = \sum_{i=0}^n a_i y^{(i)} = 0.$$

Виконати дослідження такої лінійної системи на стійкість можна із використанням описаних нижче підходів.

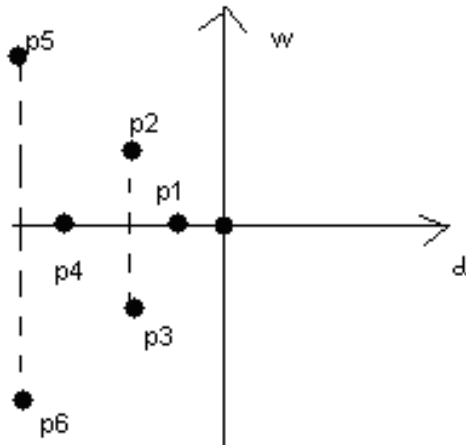


Рис. 3.23. Розташування коренів характеристичного рівняння стійкої лінійної системи.

Перший полягає в безпосередньому обчисленні всіх коренів її характеристичного рівняння, а саме

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0.$$

Якщо всі вони розташовуються в лівій півплощині комплексного змінного ($p = \alpha \pm j\omega$), то система стійка.

Цей спосіб потребує розв'язування алгебраїчного рівняння n -го порядку, що викликає певні труднощі. Тому для аналізу стійкості систем використовують інші підходи – так звані критерії стійкості.

Розглянемо їх докладніше.

Критерій стійкості Гурвіца. *Необхідну умову стійкості Гурвіца можна сформулювати таким чином: усі коефіцієнти характеристичного рівняння системи повинні бути додатними, тобто $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, якщо $a_0 > 0$.*

Щоб це довести, розкладемо характеристичне рівняння (3.15) на множники, тобто

$$a_0(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n) = 0, \quad a_0 > 0,$$

де p_1, p_2, \dots, p_n – дійсні й комплексні пов'язані корені.

Нехай усі корені мають від'ємну дійсну частину (що впливає із умови стійкості системи), а саме:

$$p_1 = -|\alpha_1|; p_{2,3} = -|\Delta\alpha_2| \pm j\omega_2; \dots; p_n = -|\Delta\alpha_n|.$$

Підставивши їх у характеристичне рівняння, отримуємо такий вираз:

$$a_0(p + |\alpha_1|)(p + |\alpha_2| - j\omega_2)(p + |\alpha_2| + j\omega_2) \dots (p + |\alpha_n|) = 0.$$

Оскільки результатом добутку середніх співмножників буде вираз: $[(p + |\alpha_2|)^2 + \omega^2]$, то після перемноження всіх співмножників отримаємо в рівнянні тільки додатні коефіцієнти a_i , що й потрібно було довести.

Практичний висновок з цієї умови такий: якщо хоча б один коефіцієнт a_i характеристичного рівняння (3.15) від'ємний, коли $a_0 > 0$, то система нестійка. Коли ж усі вони додатні, то система може бути як стійкою, так і нестійкою, а тому необхідна подальша перевірка.

Аби визначити стійкість, застосовують критерій Гурвіца: *для стійкості лінійної системи необхідно й достатньо, щоб були додатними n головних визначників матриці, складеної із коефіцієнтів цієї системи:*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}, \quad (a_0 > 0).$$

Вони мають такий вигляд:

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \dots,$$

і називаються *визначниками Гурвіца*.

Приклад 3.7. Систему подано у вигляді такої моделі: $-\ddot{y} - 2\dot{y} + 4y - 5y = 0$. Дослідити її на стійкість.

Розв'язування. Спочатку перевіримо виконання необхідної умови стійкості Гурвіца. Оскільки $a_0 < 0$, то перетворимо вихідне рівняння таким чином: $\ddot{y} + 2\dot{y} - 4y + 5y = 0$, тоді характеристичне рівняння буде мати такий вигляд: $p^3 + 2p^2 - 4p + 5 = 0$. Коефіцієнти цього рівняння: $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = -4$, $a_3 = 5$. Як бачимо, $a_2 < 0$, тому система нестійка.

Приклад 3.8. Дослідити систему на стійкість, якщо її описано таким чином: $\ddot{y} + 6\dot{y} + 11y + 6y = 0$.

Розв'язування. Перевіримо необхідну умову стійкості Гурвіца. Із цією метою складемо характеристичне рівняння системи. Воно матиме такий вигляд:

$$p^3 + 6p^2 + 11p + 6 = 0.$$

Коефіцієнти характеристичного рівняння: $a_0 = 1$, $a_1 = 6$, $a_2 = 11$, $a_3 = 6$. Усі коефіцієнти додатні, отже, система може бути як стійкою, так і нестійкою.

Використаємо критерій Гурвіца. Для цього складемо й обчислимо визначники Гурвіца, відповідні цій системи, а саме:

$$\Delta_1 = a_1 = 6 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} = 66 - 6 = 60 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 1 & 11 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot 11 \cdot 6 - 6 \cdot 6 \cdot 1 = 360 > 0.$$

Усі вони додатні, отже, система стійка.

Критерій стійкості Михайлова. Замінімо в характеристичному рівнянні комплексну змінну: $p = \alpha \pm j\omega$, на уявну $j\omega$. У результаті отримуємо таку функцію:

$$A(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n. \quad (3.16)$$

Зауважимо, що функцію (3.16) можна подати і в такий спосіб:

$$A(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (3.17)$$

тут $U(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 \dots$ – дійсна частина функції;
 $V(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 \dots$ – уявна частина функції; $A(\omega) = \sqrt{U^2 + V^2}$ – модуль, а $\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{V}{U}\right)$ – аргумент функції.

Характеристичне рівняння системи можна записати у вигляді такого добутку:

$$a_0(p - p_1)(p - p_2)\dots(p - p_n) = 0,$$

тут p_1, p_2, \dots, p_n – корені характеристичного рівняння. Якщо $p = j\omega$, то рівняння набуває такого вигляду:

$$a_0(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)\dots(j\omega - p_n) = 0. \quad (3.18)$$

Або, застосовуючи інший запис,

$$a_0 A_1(\omega) \cdot e^{j\varphi_1(\omega)} \cdot A_2(\omega) \cdot e^{j\varphi_2(\omega)} \cdot \dots \cdot A_n(\omega) e^{j\varphi_n(\omega)} = 0;$$

$$a_0 A_1(\omega) \cdot A_2(\omega) \cdot \dots \cdot A_n(\omega) \cdot e^{j[\varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots + \varphi_n(\omega)]} = 0.$$

На площині коренів кожному співмножнику (3.18) відповідає певний вектор (див. рис. 3.24). При зміні параметра ω від 0 до ∞ будь-який з векторів дійсних коренів лівої півплощини повернеться (проти годинникової стрілки) на кут $\frac{\pi}{2}$, а вектори, розташовані на правій напівплощині, – на кут $-\frac{\pi}{2}$ (за годинниковою стрілкою).

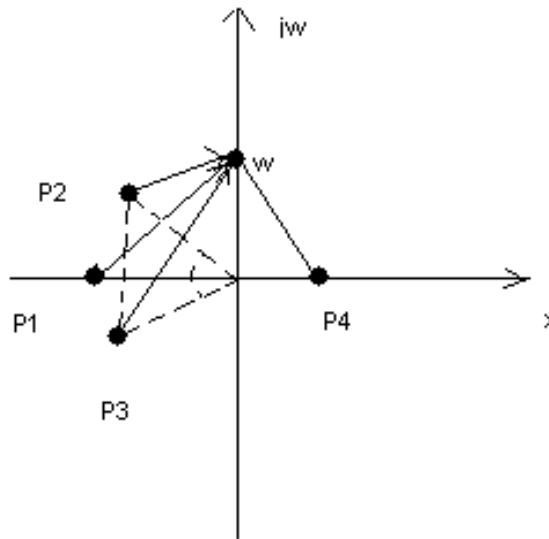


Рис. 3.24. Схема розташування коренів характеристичного рівняння на площині

Сумарна величина кута зміни аргументу функції $\varphi(\omega)$ буде дорівнювати $n\frac{\pi}{2}$, якщо всі корені характеристичного рівняння розташовуються в лівій півплощині (тобто якщо система стійка). Коли ж у системі n -го порядку m коренів розміщені в правій півплощині, то сумарна величина кута повороту $\varphi(\omega)$ дорівнює $(n - 2m) \cdot \frac{\pi}{2}$.

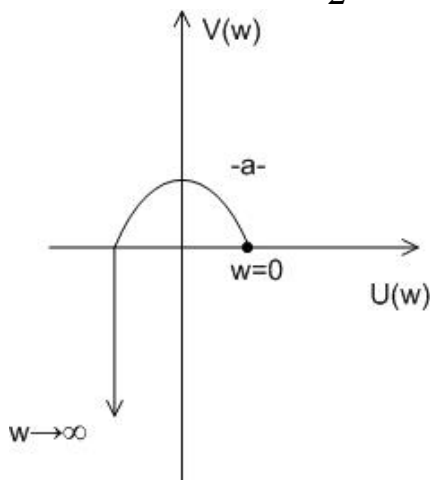


Рис. 3.25. Годограф Михайлова

Цей факт покладено в основу розглянутої нижче практичної методики.

У площині координат $U(\omega)$, $V(\omega)$ будуємо криву, яка відповідає зміні параметра ω від 0 до ∞ . Ця крива називається *годографом Михайлова* (рис. 3.25).

Аналіз поведінки цієї кривої дає змогу зробити висновки відносно стійкості системи.

Сформулюємо *критерій Михайлова*: лінійна система n -го порядку *стійка*, якщо при зміні параметра ω від 0 до ∞ годограф Михайлова послідовно обходить n квадрантів комплексної площини проти годинникової стрілки, починаючи з точки $(a_n, 0)$ на додатній дійсній напівосі, і рухається, минаючи точку $(0, 0)$ (рис. 3.26, *а*).

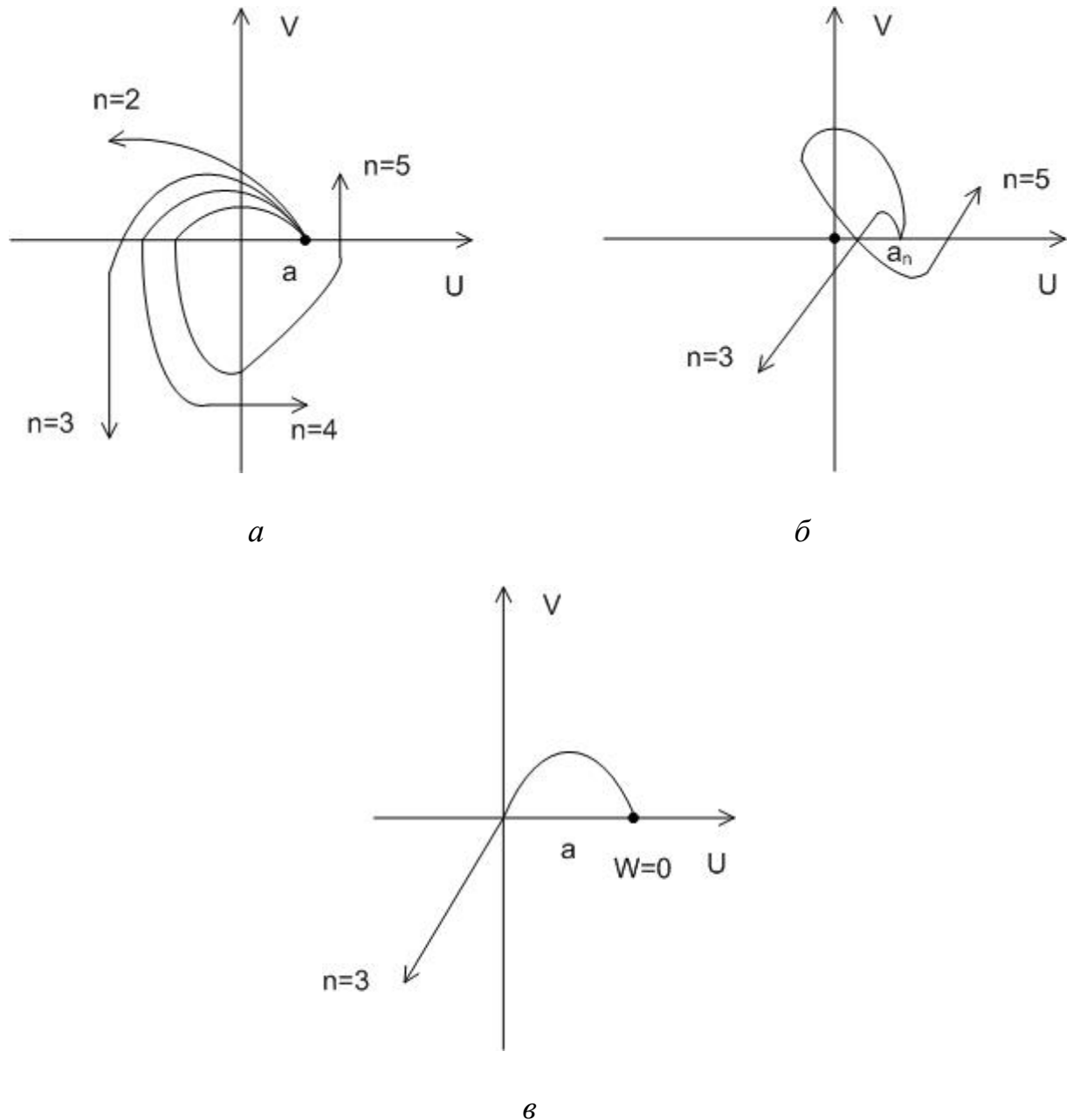


Рис. 3.26. Годограф Михайлова: *а* – стійкої системи; *б* – нестійкої системи; *в* – системи, яка перебуває на межі стійкості

Якщо годограф Михайлова проходить через початок координат, то кажуть, що система перебуває на межі стійкості (рис. 3.26, *в*).

Межа стійкості означає виконання умов: $U(\omega) = 0$ та $V(\omega) = 0$. Останні вирази використовуються для побудови областей стійкості системи при варіюванні значень коефіцієнтів $a_i, i = \overline{1, n}$.

§ 3.5. Стійкість нелінійних систем. Теорема Ляпунова

Розглянемо динамічну систему, вільний рух якої описується системою диференціальних рівнянь у змінних стану, тобто

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.19)$$

Будемо вважати, що $x_i, i = \overline{1, n}$ відхилення від заданого руху.

Рух такої системи можна зобразити у вигляді інтегральної кривої $X(t)$, що являє собою розв'язок системи (3.19), її вигляд зображено на рис. 3.27.

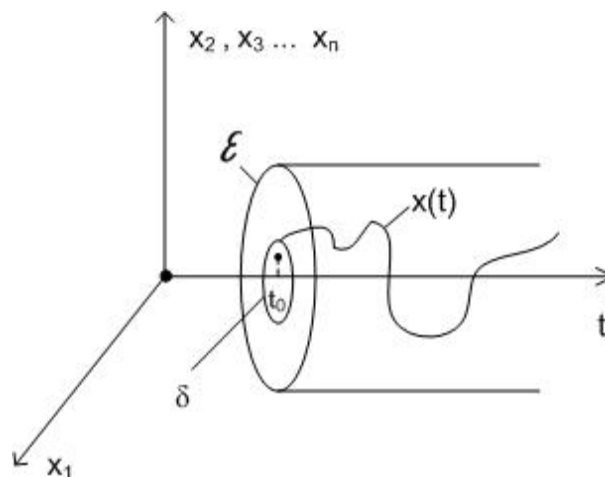


Рис. 3.27. Графічне подання умов стійкості за Ляпуновим. $X(t)$ – інтегральна крива

Вільний рух системи називається *стійким*, коли, взявши трубку як завгодно малого n -вимірного перерізу ϵ , можна підібрати в початковий момент t_0 таку область початкових умов δ , залежну від параметра ϵ , що зі збільшенням часу t збурений рух $x_i(t)$ не вийде за межі трубки заданого перерізу ϵ (див. рис. 3.19).

Аналітичне визначення стійкості за Ляпуновим формулюється таким чином: *рух системи називається стійким, якщо для заданого значення числа $\epsilon > 0$, наскільки б малим воно не було, завжди існує таке значення $\delta > 0$, залежне від ϵ , що коли початкові умови задовольняють нерівності: $|x_i(t_0)| < \delta$,*

$i = \overline{1, n}$, то в подальшому русі для всіх значень $t_0 < t < \infty$ буде виконано такі умови: $|x_i(t)| < \varepsilon$, $i = \overline{1, n}$.

Рух буде *нестійким*, якщо зазначена умова не виконується хоча б для однієї координати $x_i(t)$.

Рух називається *асимптотично стійким*, коли сформульовані умови виконано і при цьому $x_i \rightarrow 0$, якщо $t \rightarrow \infty$.

Коли $x_i \rightarrow 0$, за умови, що $t \rightarrow \infty$, після будь-яких початкових відхилень, то система називається *стійкою в цілому*.

У фазовому просторі розмірності n траєкторія руху $X(t)$ стійкої за Ляпуновим системи матиме вигляд, зображений на рис. 3.28.

Дослідження стійкості нелінійних систем має певні особливості. Якщо стійка лінійна система залишиться такою за будь-яких початкових відхилень, то рух нелінійної системи може бути стійким в одній області фазового простору і нестійким в іншій.

Отже, описуючи нелінійні системи, розрізняють такі поняття стійкості:

- у *малому* – тобто поблизу деякої точки рівноважного стану на фазовій площині;
- у *великому* – тобто в робочому діапазоні значень, яких набувають змінні стану системи;
- у *цілому* – тобто на всьому фазовому просторі.

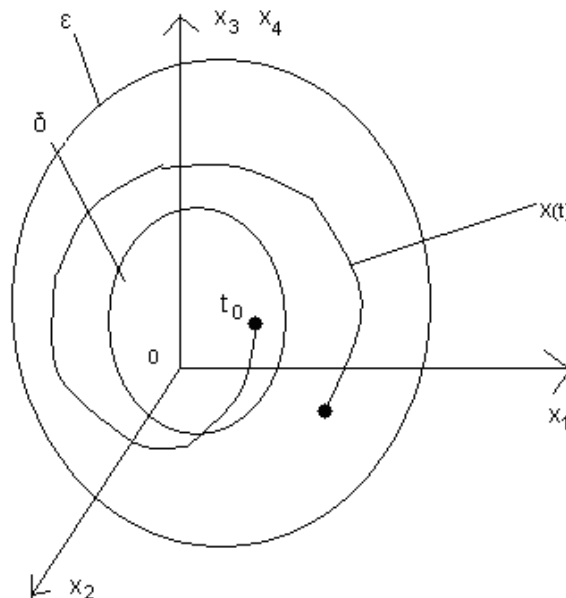


Рис. 3.28. Траєкторія руху $X(t)$ стійкої за Ляпуновим системи

Для аналізу стійкості нелінійних систем «у малому» використовується *перший метод Ляпунова*, відповідно якому систему поблизу особливої точки необхідно лінеаризувати. Після цього отриману лінеаризовану систему

досліджують на стійкість одним з методів, які було розглянуто у § 3.4 стосовно лінійних СК. Наприклад, якщо всі корені характеристичного рівняння, відповідного системі, мають від'ємні дійсні частини, то вона буде стійкою.

Приклад 3.9. Нехай систему описано поданою нижче моделлю, а саме:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 + x_2. \end{cases}$$

Необхідно дослідити її на стійкість поблизу точки рівноважного стану $(-1; 1)$.

Розв'язування

Коли $x_1 = -1$, $x_2 = +1$, то буде правильною така система:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ -x_1^2 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Складемо рівняння лінеаризованої системи поблизу точки $(-1; 1)$. Для цього задамо малі прирощення змінним x_1 , x_2 і зробимо таку підстановку: $x_1 = -1 + \Delta x_1$, $x_2 = 1 + \Delta x_2$. Тоді, нехтуючи старшими степенями Δx_1 і Δx_2 , отримуємо такі залежності:

$$\Delta \dot{x}_1 = -1 + \Delta x_1 + 1 + \Delta x_2 = \Delta x_1 + \Delta x_2,$$

$$\Delta \dot{x}_2 = -(1 - 2\Delta x_1 + \Delta x_1^2) + 1 + \Delta x_2 = -1 + 2\Delta x_1 - \Delta x_1^2 + 1 + \Delta x_2 = 2\Delta x_1 + \Delta x_2,$$

і система набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} \Delta \dot{x}_1 = \Delta x_1 + \Delta x_2, \\ \Delta \dot{x}_2 = 2\Delta x_1 + \Delta x_2. \end{cases}$$

Запишемо її характеристичне рівняння.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 2 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0.$$

Розв'язавши його, отримуємо такі корені: $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$, тобто тип особливої точки – сідло.

Корінь: $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$. Він дійсний, додатний, а це означає, що система нестійка «в малому», поблизу точки $(-1; 1)$.

Для аналізу стійкості нелінійних систем «у великому» застосовується *другий (прямий) метод Ляпунова*. Опишемо його ідею.

Уведемо неперервну функцію координат стану системи: $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що має таку властивість: $V = 0$, коли $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Функція V називається *знаковизначеною*, коли у всьому фазовому просторі, який розглядається, вона зберігає один і той самий знак та дорівнює нулю в початку координат (при цьому вона може бути додатно чи від'ємно визначеною).

Наприклад: функція $V = 2x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2$, знаковизначена (додатно визначена).

Якщо функція V зберігає один і той самий знак, але дорівнює нулю не тільки в початку координат, то її називають *знакосталою* (може бути додатною або від'ємною).

Наприклад, функція $V = (x_1 - x_2)^2 + 2x_3^2$, додатна знакостала (дорівнює нулю, коли $x_1 = x_2$ і $x_3 = 0$); $V = x_1 + x_2 + x_3$ – знаковмінна.

Описані функції від координат стану системи, які дорівнюють нулю в початку координат, відіграють важливу роль у теоремах Ляпунова про стійкість і нестійкість систем, їх називають *функціями Ляпунова*.

Складемо похідну функції Ляпунова за часом, тобто

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}. \quad (3.20)$$

З урахуванням рівнянь системи (3.16)

$$W = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} F_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} F_n. \quad (3.21)$$

Оскільки вектор $\text{grad } V = \left\{ \frac{\partial V}{\partial x_1}; \frac{\partial V}{\partial x_2}; \dots; \frac{\partial V}{\partial x_n} \right\}$, то похідну функції

Ляпунова: $W = \frac{dV}{dt}$, можна подати як скалярний добуток її градієнта і вектора фазової швидкості: $F = \{\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n\}$, а саме:

$$W(x) = \frac{dV}{dt} = (\text{grad } V, F). \quad (3.22)$$

Вектор $\text{grad } V$ перпендикулярний поверхням: $V = \text{const}$, і спрямований в бік зростання функції V . Якщо $\frac{dV}{dt} > 0$, то відповідно до залежності (3.22) вектор F утворює з $\text{grad } V$ гострий кут, тобто фазова траєкторія перетинає поверхню: $V = \text{const}$, в бік збільшення значень функції V (з середини назовні). Коли ж $\frac{dV}{dt} < 0$, то кут між $\text{grad } V$ і F тупий, і, відповідно, фазова траєкторія йде в бік зменшення значень V (ззовні – всередину), див. рис. 3.29.

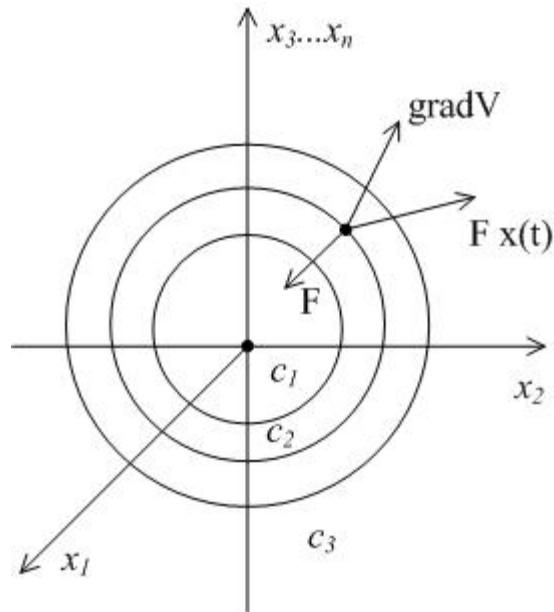


Рис. 3.29. Фазова траєкторія і вектор-градієнт функції Ляпунова

Ці міркування і лягли в основу так званого *прямого методу Ляпунова* аналізу стійкості систем.

Мають місце наведені нижче твердження.

Теорема про стійкість. Якщо для системи рівнянь (3.22) існує знаковизначена функція $V(x)$, похідна якої: $W = \frac{dV}{dt}$, знакостала з протилежним знаком, то має місце стійкий розв'язок системи: $x = 0$.

Теорема про асимптотичну стійкість. Якщо для системи рівнянь (3.19) існує знаковизначена функція $V(x)$, похідна якої: $W(x) = \frac{dV}{dt}$, також знаковизначена, але з протилежним знаком, то має місце асимптотично стійкий розв'язок системи: $x = 0$.

З практичних міркувань другий метод Ляпунова не є універсальним для аналізу стійкості будь-якої нелінійної системи «у великому», оскільки труднощі викликає вибір функції Ляпунова стосовно конкретної нелінійної системи. У зв'язку з цим найчастіше в практиці прямий метод Ляпунова використовують для обґрунтування умов стійкості якогось певного класу нелінійних систем.

Приклад 3.10. Дослідити, подану нижче систему на стійкість «у великому».

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + f(x_3), \\ \dot{x}_2 = -f(x_3), \\ \dot{x}_3 = (\gamma - 1)x_1 + \gamma x_2 - zf(x_3), \end{cases}$$

тут γ, z – параметри системи, причому $\gamma > 1$; $f(x_3)$ – нелінійна функція, розташована в I і III квадрантах, тобто така, що має вигляд, зображений на рис. 3.30.

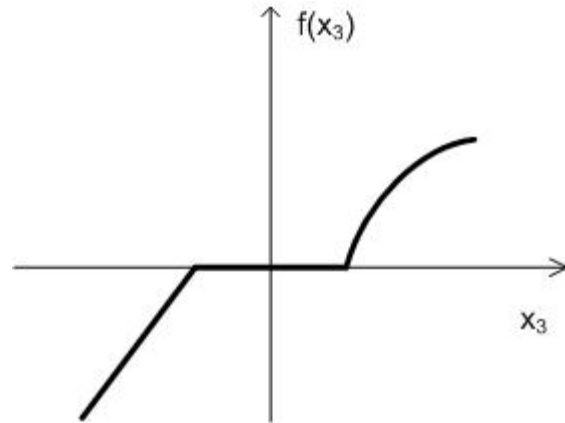


Рис. 3.30. Вигляд функції $f(x_3)$

Складемо структурну схему системи відповідно до заданої в умові системи рівнянь (див. рис. 3.31).

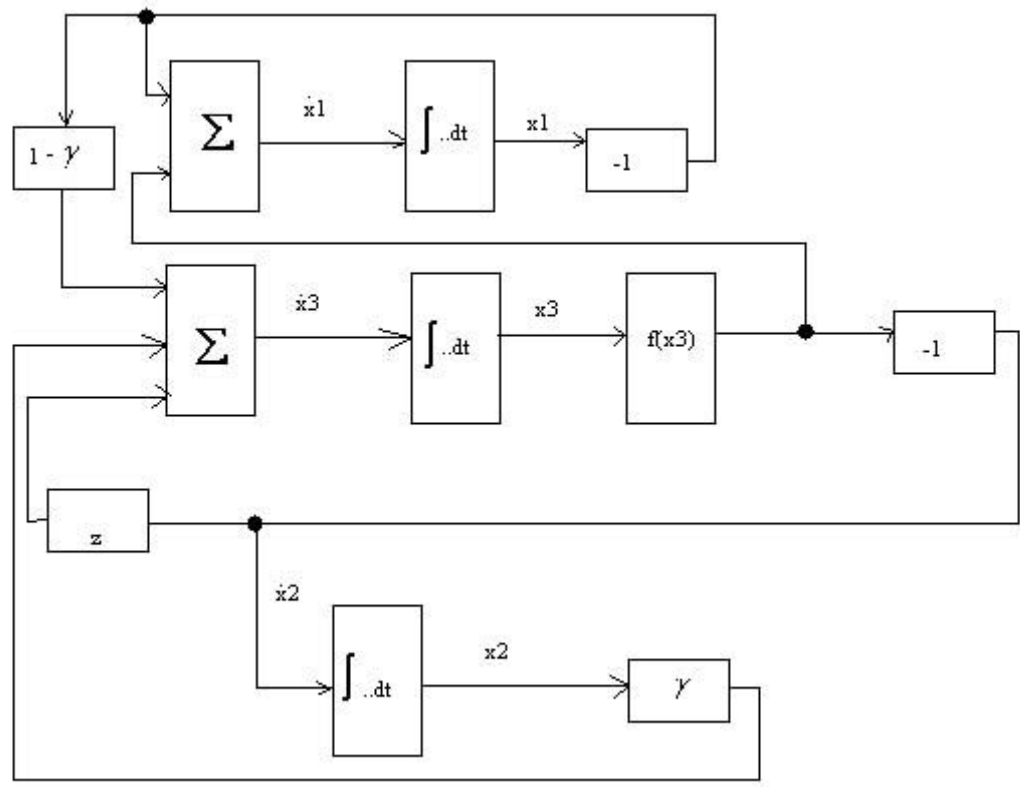


Рис. 3.31. Структурна схема системи до прикладу 3.10

Функцію Ляпунова беремо в такому вигляді:

$$V(x) = \frac{\gamma-1}{2}x_1^2 + \frac{\gamma}{2}x_2^2 + \int_0^{x_3} f(x_3)dx_3.$$

Вона являє собою додатну знаковизначену функцію, похідна якої

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} = (\gamma-1)x_1\dot{x}_1 + \gamma x_2\dot{x}_2 + f(x_3)\dot{x}_3 = \\ &= (\gamma-1)x_1(-x_1 + f(x_3)) + \gamma x_2(-f(x_3)) + f(x_3)((\gamma-1)x_1 + \gamma x_2 - zf(x_3)) = \\ &= -(\gamma-1)[f(x_3) - x_1]^2 - (z - \gamma + 1)[f(x_3)]^2. \end{aligned}$$

Функція $W(x)$ буде від'ємною знаковизначеною, якщо $z > \gamma - 1$.

Згідно з теоремою Ляпунова ця умова і буде умовою стійкості вихідної системи «у великому», коли $\gamma > 1$.

§ 3.6. Чутливість систем керування

Параметри системи керування, а саме, коефіцієнти посилення, сталі часу, залежать від фізичних параметрів, тобто від елементів, які входять у систему (наприклад, ємність, опір, індуктивність в електричних системах; жорсткість, маса – у механічних). Ці параметри мають суттєвий розкид значень унаслідок врахування допусків на виготовлення (технологічний розкид). Крім того, вони змінюються в процесі роботи системи (експлуатаційні зміни).

Отже, виникає потреба дослідити вплив описаних явищ на властивості процесу керування (показники його якості).

Ступінь впливу розкиду значень параметрів системи на її статичні та динамічні властивості (якість керування) називається *чутливістю системи*.

Чутливість визначається кількісно. Існують методи її аналізу та підходи до проектування систем, що забезпечують їхню малу чутливість до зміни певних параметрів.

Нехай рух системи описується такою моделлю в змінних стану:

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.23)$$

Крім того, система характеризується низкою параметрів, які можуть змінюватися в процесі її роботи, а саме: $\alpha_j, j = \overline{1, m}$.

У зв'язку з цим, система (3.23) буде мати такий вигляд:

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.24)$$

При зміні параметрів α_j на величини $\Delta\alpha_j$ отримуємо нову систему рівнянь, а саме:

$$\frac{d\tilde{x}_i}{dt} = \varphi_i(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \dots \tilde{x}_n, \alpha_1 + \Delta\alpha_1, \alpha_2 + \Delta\alpha_2, \dots, \alpha_m + \Delta\alpha_m), \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.25)$$

Розв'язок $x_1(t), x_2(t) \dots x_n(t)$ системи (3.24), називається *вихідним рухом*, а розв'язок $\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t) \dots \tilde{x}_n(t)$ системи (3.25) – *варіаційним рухом*.

Різниця у перебігу цих процесів за рахунок зміни параметрів, тобто коли $\alpha_j - \Delta x_i(t) = \tilde{x}_i(t) - x_i(t)$, називається *додатковим рухом*.

При незначних змінах параметрів α_j додатковий рух

$$\Delta x_i(t) = \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_1} \Delta \alpha_1 + \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_2} \Delta \alpha_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_m} \Delta \alpha_m, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.26)$$

або

$$\Delta x_i(t) = u_{i1} \Delta \alpha_1 + u_{i2} \Delta \alpha_2 + \dots + u_{im} \Delta \alpha_m, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.27)$$

Величини: $u_{ij}(t) = \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j}$, $i = \overline{1, n}$ $j = \overline{1, m}$, називаються *функціями*

чутливості.

Якщо ж оцінюється вплив розкиду значень параметрів α_j на показник якості [наприклад, $Y = \int_0^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) dt$], то величини u_{ij} будуть являти собою коефіцієнти, а не функції.

Визначення функцій чутливості проводиться у поданій нижче послідовності.

Продиференціюємо вираз (3.24) за параметрами α_j , а саме:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{dx_i}{dt} \right) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_j} + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_j}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.28)$$

Змінюючи в лівій частині порядок диференціювання і підставляючи функції чутливості u_{ij} , отримуємо такий результат:

$$\frac{du_{ij}}{dt} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} u_{1j} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} u_{2j} + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} u_{nj} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_j}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.29)$$

Вирази (3.29) називаються *рівняннями чутливості*.

У результаті розв'язування системи диференціальних рівнянь (3.29) отримуємо функції: $u_{ij}(t)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$. Зміна руху системи обчислюється за формулою (3.27).

Приклад 3.11. Модель системи в координатах «вхід – вихід» має такий вигляд: $\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = ku$. Визначити функції чутливості і функції руху системи.

Запишемо рівняння системи у змінних стану, тобто

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = ku - a_1x_2 - a_0x_1, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (3.30)$$

Позначимо параметри системи таким чином: $k = \alpha_1$, $a_0 = \alpha_2$, $a_1 = \alpha_3$, тоді вона набуде такого вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varphi_1(x_1, x_2) = x_2, \\ \dot{x}_2 = \varphi_2(x_1, x_2) = \alpha_1 u - \alpha_2 x_1 - \alpha_3 x_2. \end{cases}$$

$$\Delta x_i(t) = \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_1} \Delta \alpha_1 + \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_2} \Delta \alpha_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_m} \Delta \alpha_m, \quad n = 2, \quad m = 3.$$

Визначимо функції чутливості, а саме:

$$u_{11} = \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}; \quad u_{12} = \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2}; \quad u_{13} = \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_3};$$

$$u_{21} = \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}; \quad u_{22} = \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}; \quad u_{23} = \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_3}.$$

Рівняння чутливості мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{du_{11}}{dt} &= 0 + 1 \cdot u_{12} + 0 = u_{12}; & \frac{du_{21}}{dt} &= -\alpha_2 u_{11} - \alpha_3 u_{21} + u(t); \\ \frac{du_{12}}{dt} &= 0 + 1 \cdot u_{22} + 0 = u_{22}; & \frac{du_{22}}{dt} &= -\alpha_2 u_{12} - \alpha_3 u_{22} + x_1(t); \\ \frac{du_{13}}{dt} &= 0 + 1 \cdot u_{23} + 0 = u_{23}; & \frac{du_{23}}{dt} &= -\alpha_2 - \alpha_3 u_{23} - x_2(t). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Розв'язок системи (3.30) при заданих параметрах на вході $u(t)$ дає рух $x_1(t)$, $x_2(t)$.

Розв'язок системи (3.31) визначає функції чутливості $u_{ij}(t)$, $i = \overline{1,2}$; $j = \overline{1,3}$.

Додатковий рух системи за рахунок зміни параметрів $\alpha_j, j = \overline{1,3}$ визначається за формулою (3.27), а саме:

$$\Delta x_1(t) = u_{11}(t)\Delta\alpha_1 + u_{12}(t)\Delta\alpha_2 + u_{13}(t)\Delta\alpha_3;$$

$$\Delta x_2(t) = u_{21}(t)\Delta\alpha_1 + u_{22}(t)\Delta\alpha_2 + u_{23}(t)\Delta\alpha_3.$$

Приклади до розділу 3

Приклад 3.12. Систему керування реактивним літаком описано структурною схемою (див. на рис. 3.32). Дослідити її на стійкість.

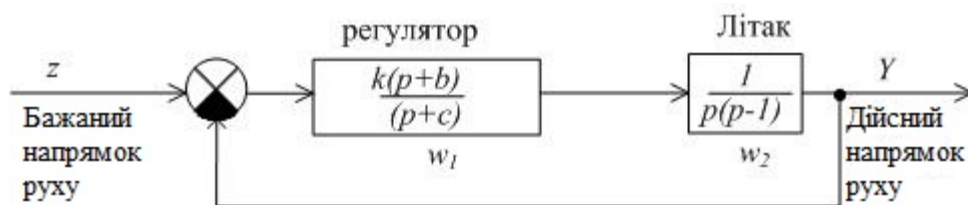


Рис. 3.32. Структурна схема системи керування реактивним літаком

Розв'язування

Припустимо, що $b > 0$; $c > 0$.

Зауважимо, що в розімкненому стані система нестійка. Дійсно, її характеристичне рівняння має такий вигляд:

$$(p + c)p(p - 1) = p(p^2 + (c - 1)p - c) = 0.$$

Оскільки значення одного коефіцієнта ($-c$) від'ємне, то принаймні один з коренів рівняння перебуває у правій півплощині.

Передавальна функція замкненої системи буде такою:

$$W_3 = \frac{w_1 w_2}{1 + w_1 w_2} = \frac{k(p + b)}{(p + c)p(p - 1) + k(p + b)} = \frac{k(p + b)}{p^3 + (c - 1)p^2 + (k - c)p + kb}.$$

Дослідимо її характеристичне рівняння:

$$p^3 + (c - 1)p^2 + (k - c)p + kb = 0.$$

Це кубічне рівняння: $a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$, коефіцієнти якого

$$a_0 = 1; a_1 = c - 1; a_2 = k - c; a_3 = kb.$$

Для визначення умов стійкості скористаємося критерієм Гурвіца.

Для цього обчислимо визначники Гурвіца, а саме:

Визначник першого порядку $a_1 > 0$, тобто

$$a_1 = c - 1 > 0 \rightarrow c > 1. \quad (3.32)$$

Визначник другого порядку: $\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0$, $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$, враховуючи значення коефіцієнтів,

$$(c - 1)(k - c) - kb > 0 \rightarrow k > \frac{c(c - 1)}{(c - 1) - b}. \quad (3.33)$$

I, нарешті, визначник третього порядку $\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0$;

$$a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 = a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) > 0,$$

оскільки $a_3 > 0$, то останній вираз також приводить до необхідності умови (3.33).

Таким чином, для того, щоб система була стійкою, необхідне виконання умов (3.32) і (3.33).

Приклад 3.13. Розглянемо систему зчитування інформації з диска, схему якої подано на рис. 3.33.

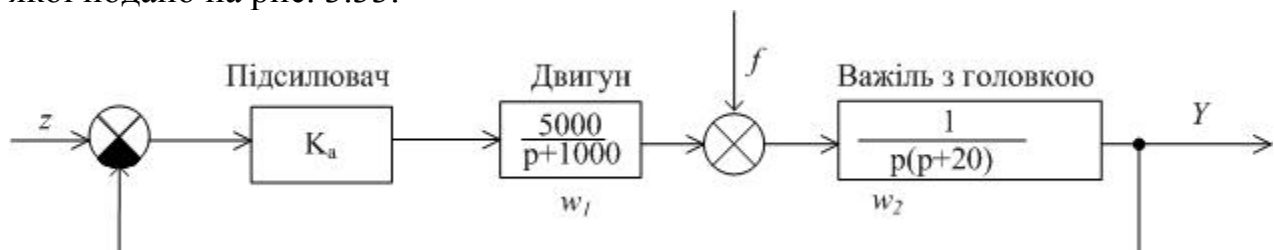


Рис. 3.33. Схема системи зчитування інформації з диска

Знайти граничне значення коефіцієнта підсилення k_a , при якому система втрачає стійкість.

Розв'язування

Запишемо передавальну функцію замкненої системи. Вона буде мати такий вигляд:

$$W = \frac{k_a W_1 W_2}{1 + k_a W_1 W_2} = \frac{5000 k_a}{p(p + 20)(p + 1000) + 5000 k_a}.$$

Тепер складемо й розв'яжемо характеристичне рівняння, а саме:

$$p^3 + 1020 p^2 + 20000 p + 5000 k_a = 0,$$

Його коефіцієнти: $a_0 = 1; a_1 = 1020; a_2 = 20000; a_3 = 5000 \cdot k_a$.

Якщо система стійка, то за критерієм Гурвіца будуть виконані такі умови:

$$a_1 > 0; a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0,$$

$$\text{тобто } 1020 \cdot 20000 - 5000 \cdot k_a > 0 \rightarrow k_a < 4080. \quad (3.34)$$

Оскільки $a_3 > 0$, то умова $a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 > 0$ (визначник третього порядку), буде еквівалентною умові (3.34). Це означає, що для того, аби система була стійкою, коефіцієнт підсилення k_a не повинен перевищувати 4080.

Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення понять керованості й спостережуваності системи.
2. Сформулюйте критерії повної керованості й спостережуваності лінійної системи.
3. Якими будуть розмірності матриць керованості й спостережуваності лінійної системи 4-го порядку із трьома входами та двома виходами?
4. Як визначають розмірність фазового простору системи?
5. Яким чином визначають координати особливих точок системи?
6. Назвіть типи особливих точок, які вам відомі.
7. Як визначають тип особливої точки й характер перехідного процесу в її околі?
8. Дайте визначення ізокліни.
9. У чому полягають особливості аналізу нелінійних систем методом фазової площини?
10. Дайте визначення стійкості лінійної системи.
11. Якими методами можна виконати аналіз стійкості лінійної системи?
12. Сформулюйте критерій Гурвіца стійкості лінійної системи.
13. Що називається годографом Михайлова? Який вигляд він має у застосуванні до стійкої системи?
14. Дайте визначення стійкості нелінійної системи за Ляпуновим.
15. Що означає стійкість нелінійної системи «у малому»? «у великому»? «у цілому»?
16. У чому полягає перший метод Ляпунова аналізу стійкості систем «у малому»?
17. Дайте визначення функції Ляпунова.
18. Сформулюйте другий (прямий) метод Ляпунова для аналізу стійкості систем «у великому».
19. Дайте визначення поняття чутливості СК.
20. Який сенс мають функції чутливості?

Задачі до самостійного розв'язування

1. Побудувати матриці керованості й спостережуваності для системи, заданої у нормальній формі Коші.

$$a) \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 + U, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - U, \\ y = x_2; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + U, \\ y = x_2; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} \dot{x}_1 = 3U, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 5x_2, \\ y = x_1; \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + U, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 2x_2, \\ y = x_1 + x_2; \end{cases}$$

$$д) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + U, \\ y = x_1 + x_2; \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + U, \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_2, \\ y = x_1 + x_2 + x_3 + U; \end{cases}$$

$$з) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + 3U, \\ \dot{x}_2 = x_2 + U, \\ y = x_2 + U; \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1, \\ \dot{x}_2 = x_2, \\ \dot{x}_3 = x_3 + U, \\ y = x_1 + x_3 + U; \end{cases}$$

$$к) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 2U, \\ y = x_1 + 3x_2 + 5U; \end{cases}$$

$$л) \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 + x_3 + 3U, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 2x_3 + 7U, \\ \dot{x}_3 = 5U, \\ y = x_1 + x_2 + 3x_3 + 2U. \end{cases}$$

2. Дослідити подані нижче системи на керованість і спостережуваність.

$$a) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3 + U, \\ \dot{x}_3 = 3U, \\ y = x_2 + x_3; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 + 3U, \\ \dot{x}_2 = x_1 + U, \\ \dot{x}_3 = x_3 + 2U, \\ y = 2x_1 + 3x_2; \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{в)} \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 + x_3, \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1 + 2x_3 + U, \\ y = x_1 + U; \end{cases} & \text{з)} \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + U, \\ \dot{x}_2 = x_3 + 2U, \\ \dot{x}_3 = x_2 + U, \\ y = x_2 + U; \end{cases} \\
\\
\text{д)} \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 + x_3 + U, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1 + 3x_2, \\ y = x_1 + U; \end{cases} & \text{е)} \begin{cases} \dot{x}_1 = x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + U, \\ \dot{x}_3 = x_3 + 2x_1 + U, \\ y = x_2 + x_3; \end{cases} \\
\\
\text{з)} \begin{cases} \dot{x}_1 = 5x_2 + 4U, \\ \dot{x}_2 = 2x_2 + 3U, \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_3 + U, \\ y = 4x_2 + 3x_3 + U; \end{cases} & \text{і)} \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2, \\ \dot{x}_2 = x_2 + 2x_3 + U, \\ \dot{x}_3 = 3x_1 + x_3, \\ y = x_1 + 2U. \end{cases}
\end{array}$$

3. Дано лінійну систему. Дослідити її рух методом фазової площини.

а) $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0; \quad y(0) = 2; \quad \dot{y}(0) = 0.$

б) $\ddot{y} + 4\dot{y} - y = 0; \quad y(0) = -2; \quad \dot{y}(0) = -1.$

в) $\ddot{y} + 5\dot{y} + y = 0; \quad y(0) = 5; \quad \dot{y}(0) = -1.$

г) $\ddot{y} + 6\dot{y} + 7y = 0; \quad y(0) = 5; \quad \dot{y}(0) = -1.$

д) $\ddot{y} - 3\dot{y} - 6y = 0; \quad y(0) = 3; \quad \dot{y}(0) = -1.$

4. Визначити особливу точку і її тип, у кожній з поданих нижче систем.

а) $\ddot{y} + 4\dot{y} + 2y = 0; \quad y(0) = 0; \quad \dot{y}(0) = -1.$

б) $\ddot{y} + 5\dot{y} - 2y = 0; \quad y(0) = -2; \quad \dot{y}(0) = 0.$

в) $\ddot{y} + 6\dot{y} + y = 0; \quad y(0) = 4; \quad \dot{y}(0) = 0.$

г) $\ddot{y} - 4\dot{y} + 3y = 0; \quad y(0) = 1; \quad \dot{y}(0) = 3.$

5. Задано модель нелінійної системи. Дослідити характер її особливих точок та визначити фазові траєкторії їхнього руху.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1^3 + x_1^2 x_2 - 2x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 + 4x_2. \end{cases}$$

6. Дослідити кожну систему на стійкість, обчислюючи корені її характеристичного рівняння.

a) $\ddot{y} + 2\dot{y} + 10y = 0;$

б) $\ddot{y} + 3\dot{y} + 4y = 0;$

в) $2\ddot{y} + 5\dot{y} + 7y = 0;$

г) $3\ddot{y} + 6\dot{y} + 4y = 0;$

д) $5\ddot{y} + 2\dot{y} + 10y = 0;$

е) $5\ddot{y} + 2\dot{y} + 3y + 10y = 0.$

7. За допомогою критерію Гурвіца дослідити на стійкість системи із завдання 6.

8. Дослідити системи із завдання 6 на стійкість, використовуючи критерій Михайлова.

РОЗДІЛ 4

СИНТЕЗ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ. КЛАСИЧНИЙ ПІДХІД

Мета розділу: *ознайомлення з основними інженерними методами синтезу СК за наявності декількох показників якості керування*

Метою синтезу є побудова математичної моделі СК, яка буде задовольняти вимоги до її поведінки. У класичному підході до синтезу СК задають бажані значення таких показників якості: часу регулювання, перерегулювання, коливальності, усталеної помилки в задачі, чутливості вхідних параметрів СК до збурення і т. ін. Крім того, до СК висувають додаткові вимоги якісного характеру, тобто синтезована система повинна мати показники якості не гірші від бажаних (заданих).

Відзначимо, що задача синтезу в такій постановці може мати кілька (зокрема, нескінченну множину) розв'язків, а може й не мати їх зовсім. У першому випадку обирають один з таких розв'язків, а в другому – коректують постановку задачі, змінюючи вимоги до СК, її структуру або параметри ОК (якщо це можливо).

Найчастіше на практиці застосовують такі методи синтезу:

1. Метод частотних характеристик (моделювання залежності амплітуди і фази виходу системи від частоти вхідного сигналу одиничної амплітуди).

В основі цього підходу лежить однозначна залежність між видами частотних характеристик і перехідною функцією системи. Структуру й параметри керувальної частини системи підбирають таким чином, щоб частотні характеристики всієї замкненої системи задовольняли задані вимоги.

2. Методи модального керування, тобто забезпечення заданого розташування коренів характеристичного рівняння системи на комплексній площині.

3. Застосування одного з типових законів керування і розрахунок його параметрів.

4. Використання коригувальних пристроїв довільної структури для забезпечення заданих значень показників якості.

У цьому розділі розглядаються деякі з цих методів.

§ 4.1. Метод кореневого годографа

Цей метод синтезу СК відноситься до методів модального керування. Нагадаємо, що стійкість і якість перехідних процесів СК безпосередньо пов'язані з положенням коренів її характеристичного рівняння на комплексній площині.

Для того, щоб забезпечити належне розташування цих коренів, часто необхідно налаштувати один або декілька параметрів системи. Тому має сенс

дослідити, як рухаються на P -площині корені характеристичного рівняння при зміні параметрів системи.

Кореневий годограф – це сукупність траєкторій руху коренів характеристичного рівняння системи на P -площині при зміні будь-якого її параметра.

Приклад 4.1. Розглянемо систему (її схему подано на рис. 4.1).

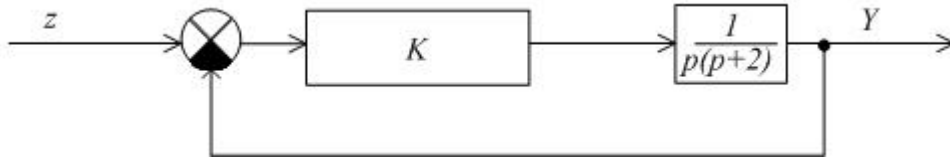


Рис. 4.1. Схема системи до прикладу 4.1

Передавальна функція розімкненої системи має такий вигляд:

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{k}{p(p+2)},$$

а замкненої:

$$W(p) = \frac{W_{\text{раз}}}{1 + W_{\text{раз}}} = \frac{Y(p)}{z(p)} = \frac{\frac{K}{p(p+2)}}{1 + \frac{k}{p(p+2)}}.$$

Запишемо характеристичне рівняння системи, а саме:

$$p^2 + 2p + K = 0.$$

Його корені $p_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - K}$.

Якщо змінювати значення коефіцієнта передачі K від 0 до ∞ , то кореневий годограф буде мати вигляд, зображений на рис. 4.2.

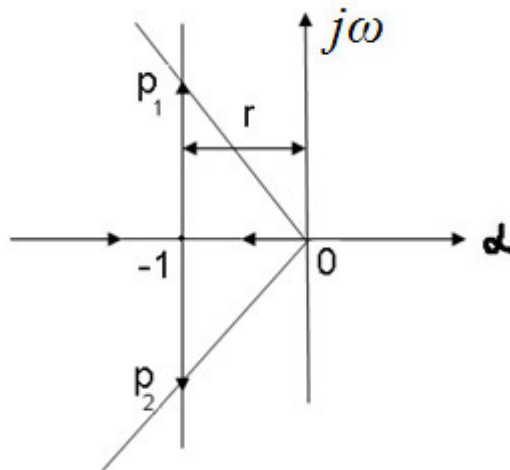


Рис. 4.2. Вигляд кореневого годографа при зміні значення K від 0 до ∞

Коли $K = 1$, то $p_1 = p_2 = -1$. Якщо $K > 1$, то корені p_1 і p_2 – комплексні спряжені.

Існують такі відповідності між положенням коренів і показниками якості перехідного процесу:

1. Збільшення коефіцієнта передачі K приводить до зменшення усталеної помилки δ .

2. Якщо корені дійсні, то перехідний процес аперіодичний (без перерегулювання); а коли корені комплексні, то перехідний процес коливальний.

3. Чим менший кут φ , тим меншою буде величина перерегулювання перехідного процесу (рис. 4.3).

4. Чим більша відстань r від найближчого кореня до осі $j\omega$, тим менший час регулювання і більший запас стійкості системи.

Як бачимо, вимоги до якості системи керування пов'язані із розташуванням коренів характеристичного рівняння в допустимій області (її показано на рис. 4.3 штрихуванням).

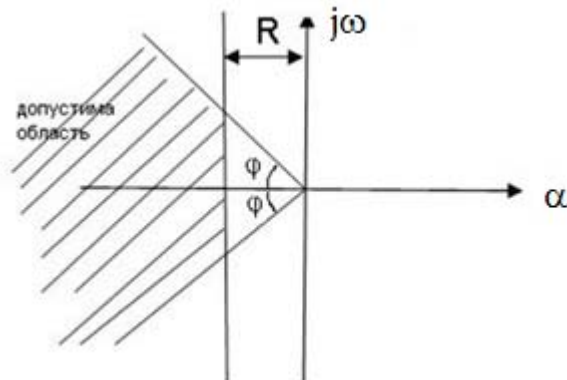


Рис. 4.3. Допустима область розташування коренів характеристичного рівняння

Корені характеристичного рівняння, розташовані якнайближче до меж допустимої області, називаються *домінантними*, оскільки саме вони визначають показники якості процесу керування.

Приклад 4.2. Розглянемо СК лазерним маніпулятором (див. схему на рис. 4.4.) У хірургії лазер використовується для висвердлювання заглиблень у кістках. Отже, ця установка повинна мати добру швидкість і високу точність позиціонування. У СК лазерний маніпулятор керується двигуном постійного струму.

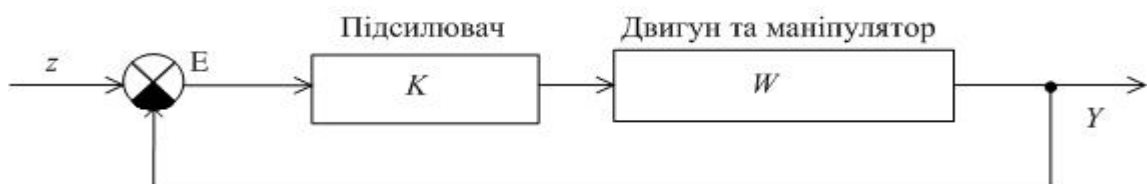


Рис. 4.4. Схема СК лазерним маніпулятором

Передавальна функція даної системи має такий вигляд:

$$W = \frac{1}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}.$$

Необхідно дібрати таке значення коефіцієнта підсилення K , щоб коли вхідний сигнал буде лінійним, тобто $Z(t) = A \cdot t$ (де $A = 1$ мм/с), то усталена помилка не перевищувала б $0,1$ мм і при цьому система залишалася б стійкою.

Для забезпечення швидкодії двигун підбираємо такий, у якого стала часу $T_1 = 0,1$ с і електромеханічна стала $T_2 = 0,2$ с. Тоді передавальна функція замкненої СК

$$W_{zy} = \frac{K \cdot W}{1 + K \cdot W} = \frac{K}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + K} = \frac{50 \cdot K}{p^3 + 15p^2 + 50p + 50K} = \frac{Y(p)}{Z(p)}.$$

Помилка $\varepsilon = Z - Y$:

$$\varepsilon(p) = Z(p) - Y(p) = Z(p) - Z(p) \cdot W_{zy} = (1 - W_{zy}) \cdot Z(p).$$

Зображення лінійного сигналу ($Z = At$) має такий вигляд:

$$Z(p) = \frac{A}{p^2}.$$

Отже, усталене значення помилки при лінійному сигналі $Z(t)$ обчислюється за такою формулою:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} [p \varepsilon(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[p \frac{A}{p^2} \cdot \left(1 - \frac{50 \cdot K}{p^3 + 15p^2 + 50p + 50K} \right) \right] = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{A}{p} \cdot \left(\frac{p^3 + 15p^2 + 50p + 50K - 50K}{p^3 + 15p^2 + 50p + 50K} \right) \right] = \frac{A}{K}. \end{aligned}$$

За умовою $\frac{A}{K} < 0,1$ мм, тому коли $A = 1$ мм/с, то необхідно, щоб значення коефіцієнта K перебувало в таких межах: $0 \leq K \leq 10$.

Побудуємо кореневий годограф, за умови, що $0 \leq K \leq 10$.

Запишемо характеристичне рівняння системи, тобто

$$p^3 + 15p^2 + 50p + 50K = 0.$$

Воно має три корені. Коли $K = 0$, то $p_1 = 0$; $p_2 = -5$; $p_3 = -10$. Траєкторії руху коренів, які відповідають збільшенню коефіцієнта K , показано на рис. 4.5.

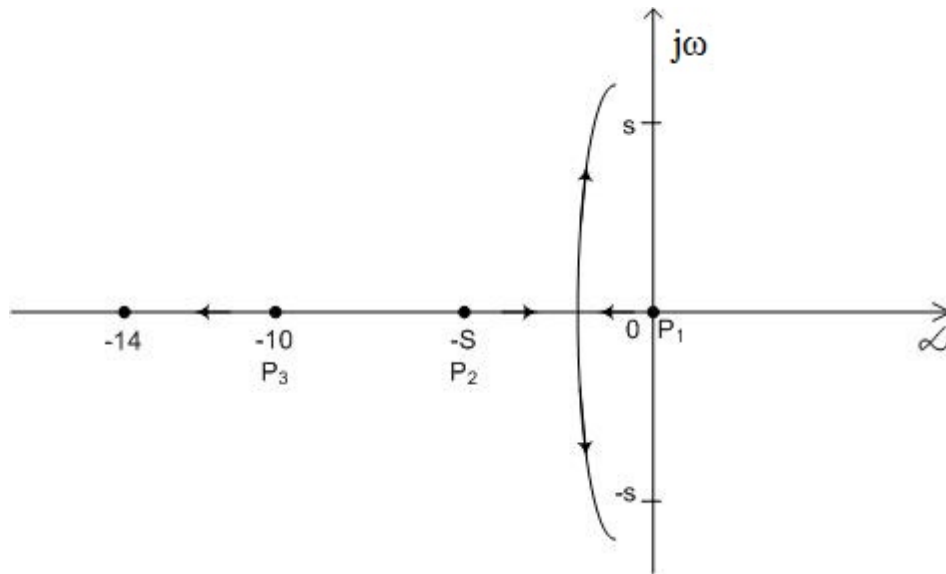


Рис. 4.5. Траєкторії руху коренів характеристичного рівняння, $0 \leq K \leq 10$ (до прикладу 4.2)

Коли $K = 10$, то корені рівні, а саме: $p_{1,2} = -0,51 \pm 5,96 \cdot j$, $p_3 = -13,98$.

Отже, якщо $K = 10$, то система залишається стійкою і має запас стійкості: $r = 0,51$, визначений положенням доміантних коренів p_1 й p_2 .

Реакцію $y(t)$ системи на лінійний вхідний сигнал: $Z(t) = 1 \cdot t$, зображено на рис. 4.6. Коли $K = 10$, то вона являє собою розв'язок такого диференціального рівняння:

$$\ddot{y} + 15\dot{y} + 50y = 50 \cdot 10t, \quad y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0.$$

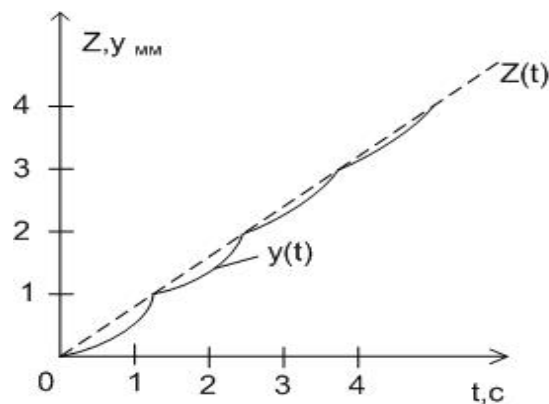


Рис. 4.6. Реакція системи $y(t)$ на лінійний вхідний сигнал $Z(t)$ (до прикладу 4.2)

§ 4.2. Типові закони керування (типові регулятори)

Розглянемо замкнену СК, схему якої зображено на рис. 4.7.

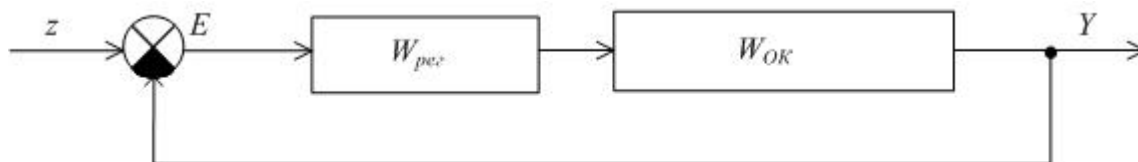


Рис. 4.7. Замкнена система керування

Якщо об'єкт керування не надто складний (описується диференціальним рівнянням 2-го або 3-го порядку), то часто обирають регулятор цілком визначеної структури. Іншими словами, реалізують один з типових законів керування, а саме:

1. Пропорційний (П), за яким керувальний вплив $U(t)$ пропорційний помилці ε , тобто

$$U(t) = K_1 \cdot \varepsilon(t). \quad (4.1)$$

2. Інтегральний (І), коли керування $U(t)$ пропорційне інтегралу за часом, взятому від помилки, а саме:

$$U(t) = K_2 \cdot \int \varepsilon(t) dt. \quad (4.2)$$

3. Пропорційно-інтегральний (ПІ), відповідно до якого

$$U(t) = K_1 \cdot \varepsilon(t) + K_2 \cdot \int \varepsilon(t) dt. \quad (4.3)$$

4. Пропорційно-диференціальний (ПД), згідно з яким

$$U(t) = K_1 \cdot \varepsilon(t) + K_3 \cdot \dot{\varepsilon}(t). \quad (4.4)$$

5. Пропорційно-інтегрально-диференціальний (ПІД), тобто коли

$$U(t) = K_1 \cdot \varepsilon(t) + K_2 \cdot \int \varepsilon(t) dt + K_3 \cdot \dot{\varepsilon}(t). \quad (4.5)$$

Найбільш універсальним є ПІД закон регулювання, а інші можна розглядати, як окремі його випадки.

Опишемо один із найбільш поширених методів вибору закону керування та визначення його параметрів.

Об'єкт керування апроксимують аперіодичною ланкою із запізненням, тобто передавальною функцією такого вигляду:

$$W_{oy}(p) = \frac{k_0 \cdot e^{-p\tau}}{T_0 p + 1} = \frac{\bar{Y}}{U}. \quad (4.6)$$

Значення параметрів ОК, зокрема K_0, T_0, τ підбирають таким чином, щоб крива, яка апроксимує перехідний процес, максимально збігалася з експериментальними даними (див. рис. 4.8).

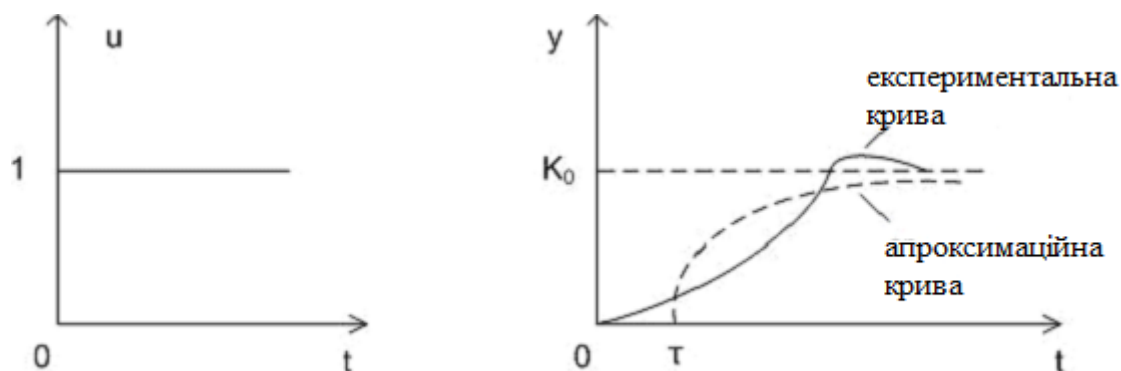


Рис. 4.8. Апроксимація перехідного процесу

Потім задають бажаний вид перехідного процесу в регульованій замкненій системі. Бажаними зазвичай вважають один із таких процесів

- аперіодичний (без перерегулювання);
- з перерегулюванням, яке не перевищує 20 %;
- із мінімальним квадратом відхилення вихідної реакції $y(t)$ від заданого

значення Z протягом часу регулювання: $\int [Z - y(t)]^2 dt \rightarrow \min$.

Нарешті, враховуючи певні значення параметрів K_0, T_0, τ моделі ОК, вид бажаного перехідного процесу, а також дані таблиць і графіків із спеціальної літератури, спочатку визначають тип закону регулювання (4.1) – (4.5), а потім його параметри K_1, K_2, K_3 .

Для налаштування параметрів регулятора часто застосовують метод кореневого годографа.

Приклад 4.3. Розглянемо задачу синтезу системи керування положенням головки зчитувального пристрою. Припустимо, що для цієї системи задано такі необхідні показники якості:

- перерегулювання не перевищує 5 %;
- час регулювання становить менше 250 мс;
- реакція на одиничне збурення не перевищує $5 \cdot 10^{-3}$.

Розв'язування

Заданих показників якості досягнемо шляхом використання типового закону регулювання.

Структурну схему замкненої СК зображено на рис. 4.9.

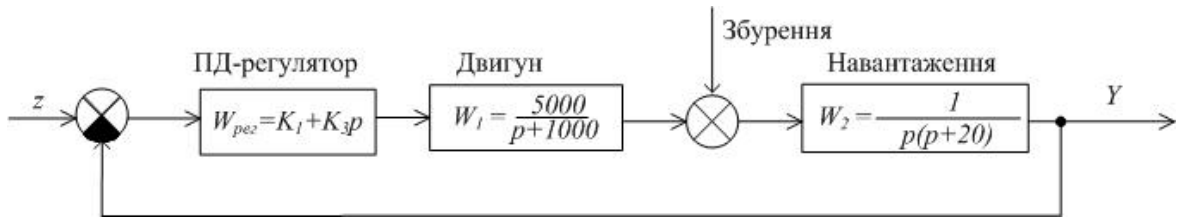


Рис. 4.9. Структурна схема системи керування до прикладу 4.3

У цій СК застосований не ПІД-регулятор, а ПД-регулятор, оскільки операція інтегрування виконується в ланці W_2 ($1/p$).

Запишемо передавальну функцію замкненої системи, тобто

$$W_3(p) = \frac{W_{pez} \cdot W_1 \cdot W_2}{1 + W_{pez} \cdot W_1 \cdot W_2} = \frac{5000(K_1 + K_3 p)}{(p + 1000) \cdot p \cdot (p + 20) + 5000(K_1 + K_3 p)}$$

Для спрощення завдання будемо вважати, що $K_1 = K_3$, тоді:

$$W_3 = \frac{5000 \cdot K_3 \cdot (1 + p)}{(p + 1000) \cdot p \cdot (p + 20) + 5000 \cdot K_3 \cdot (1 + p)}$$

Характеристичне рівняння системи буде мати такий вигляд:

$$(p + 1000) \cdot p \cdot (p + 20) + 5000 \cdot K_3 \cdot (1 + p) = 0.$$

Побудуємо кореневий годограф системи керування, за умови, що значення параметра K_3 змінюється від 0 до 100.

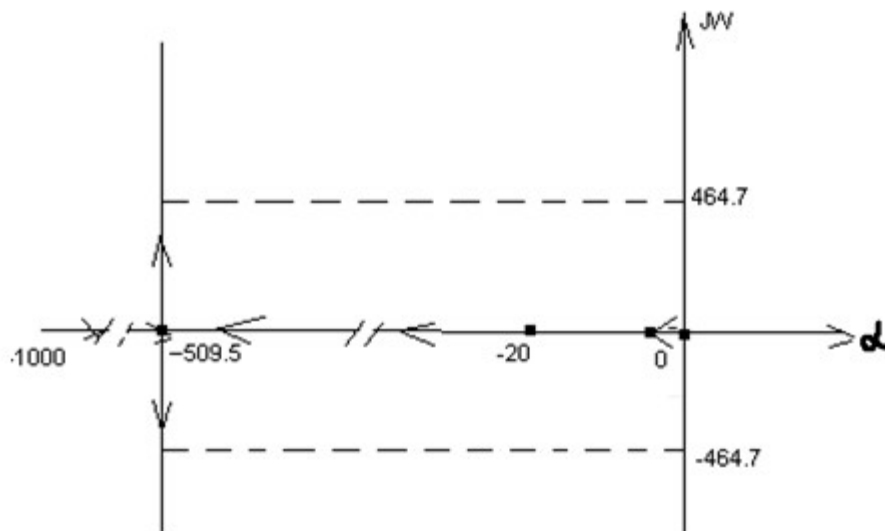


Рис. 4.10. Кореневий годограф системи до прикладу 4.3

Коли $K_3 = 0$, то корені рівняння $p_1 = 0; p_2 = -20; p_3 = -100$.

Якщо $K_3 = 100$, то корені набувають таких значень: $p_1 = -0,96$;
 $p_{2,3} = -509,5 \pm 464,7 \cdot j$.

Коли $K_1 = K_3 = 100$, то мають місце такі показники якості:

- відносне перегулювання – 0 %;
- час регулювання становить 20 мс;
- реакція на одиничне збурення дорівнює $2 \cdot 10^{-3}$.

§ 4.3. Використання коригувальних пристроїв у системах керування

Якщо об'єкт керування складний і найбільш придатний для цього випадку типовий регулятор не забезпечує необхідної якості керування, то вводять у дію додаткові функціональні блоки для корекції динамічних властивостей системи або розділяють такий об'єкт (якщо можливо) на кілька контурів регулювання, скориставшись окремими регуляторами і коригувальними пристроями для кожного з контурів.

Коригувальні пристрої можуть підмикатися послідовно, паралельно й зустрічно-паралельно до ланок системи, тим самим змінюючи її структуру.

Якщо необхідно, перераховані способи можуть поєднуватися. Вибір конкретного виду коригувальних пристроїв і способу їх вмикання являє собою структурний синтез.

1. Послідовне вмикання пристроїв відповідає зображеній на рис. 4.11 схемі.

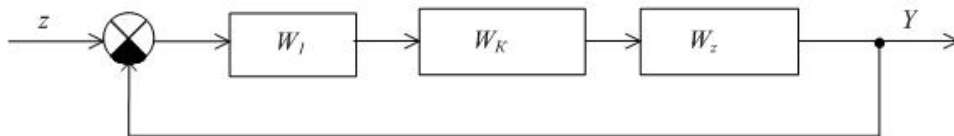


Рис. 4.11. Схема послідовного вмикання коригувальних пристроїв

Тут W_1, W_2 – ланки об'єкта; W_k – передавальна функція коригувального пристрою.

При цьому способі вмикання передавальна функція замкненої системи буде мати такий вигляд:

$$W_{зам}(p) = \frac{\bar{y}(p)}{z(p)} = \frac{W_1 W_2 W_k}{1 + W_1 W_2 W_k}.$$

Звідси, враховуючи вигляд заданої (бажаної) передавальної функції замкненої системи, знайдемо передавальну функцію послідовно ввімкненого коригувального пристрою, а саме:

$$W_K = \frac{W_{зам}}{W_1 W_2 (1 - W_{зам})}$$

2. Зустрічно-паралельне вмикання відбувається за схемою, показаною на рис. 4.12.

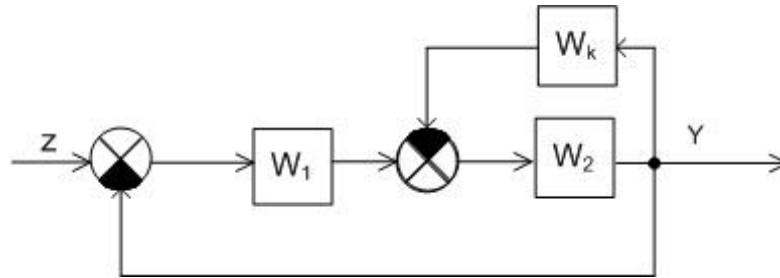


Рис. 4.12. Схема зустрічно-паралельного вмикання коригувальних пристроїв

У цьому випадку передавальна функція замкненої системи

$$W_{зам}(p) = \frac{W_1 W_2}{1 + W_1 W_2 + W_1 W_k}$$

Передавальна функція коригувального пристрою

$$W_K = \frac{W_1 W_2 - W_{зам} (1 + W_1 W_2)}{W_{зам} W_2}$$

3. Комбінований спосіб вмикання пристроїв передбачає поетапне виконання корекції.

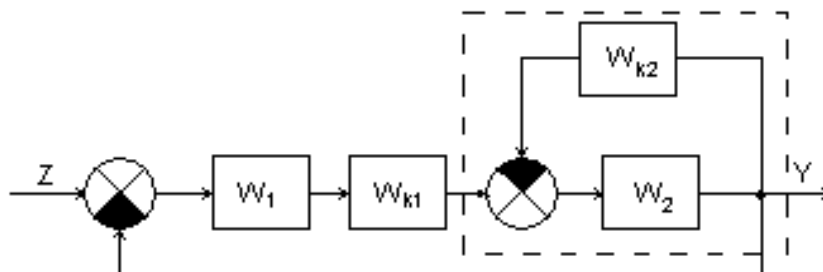


Рис. 4.13. Схема комбінованого способу корекції замкненої системи

Наприклад, за схемою поданою на рис. 4.13, корекція проводиться таким чином:

а) Якщо бажана передавальна функція частини системи $W = \frac{W_2}{(1 + W_2 W_{k_2})}$,

то передавальна функція коригувального пристрою K_2

$$W_{k_2} = \frac{W_2 - W}{W W_2}.$$

б) Бажана передавальна функція замкненої системи $W_{зам} = \frac{W_1 W_{k_1} W}{1 + W_1 W_{k_1} W}$,

звідси передавальна функція коригувального пристрою K_1

$$W_{k_1} = \frac{W_{зам}}{W_1 W (1 + W_{зам})}.$$

Класичний підхід до синтезу СК розглянемо на прикладі системи з аперіодичною реакцією та з використанням коригувальних пристроїв.

Системами з *аперіодичною реакцією* називають системи, яким властиві такі показники:

1. Усталена помилка – 0 %.
2. Мінімальний час регулювання.
3. Перерегулювання в межах 0,1 – 2 %.

Для визначення параметрів системи, які забезпечують аперіодичну реакцію, спочатку зведемо передавальну функцію до нормованого вигляду.

Наприклад, у системі третього порядку

$$W(p) = \frac{\varpi^3}{p^3 + \alpha \varpi p^2 + \beta \varpi^2 p + \varpi^3},$$

або

$$W(p) = \frac{1}{\frac{p^3}{\varpi^3} + \alpha \frac{p^2}{\varpi^2} + \beta \frac{p}{\varpi} + 1}.$$

Уведемо таке позначення: $\bar{p} = \frac{p}{\varpi}$, тоді

$$W(p) = \frac{1}{\bar{p}^3 + \alpha \bar{p}^2 + \beta \bar{p} + 1}.$$

Останній вираз називається *нормованою передавальною функцією* системи 3-го порядку. Аналогічно визначають нормовану передавальну функцію систем більш високого порядку. У табл. 4.1 наведено значення параметрів $\alpha, \beta, \gamma \dots$, за яких система буде мати аперіодичну реакцію. Оскільки у виразі для визначення передавальної функції $W(p)$ аргумент: $\bar{p} = \frac{p}{\varpi}$, є нормованим, то параметр ϖ визначають з урахуванням заданого часу регулювання $T_{p.зад}$.

Наприклад: якщо заданий час регулювання $T_{p.зад} = 1,2$ с, то для системи третього порядку $\varpi T_{p.зад} = T_p = 4,04$ і параметр $\varpi = \frac{T_p}{T_{p.зад}} = \frac{4,04}{1,2} = 3,37^{-1}$ с.

Після визначення параметра ϖ передавальна функція бажаної системи записується в нормованому вигляді. Потім обирають структуру, схему вмикання коригувальних пристроїв та визначають їх параметри для заданого об'єкта керування.

Таблиця 4.1

Значення параметрів, за якими система буде мати аперіодичну реакцію

Порядок системи	Коефіцієнти					Відносне перерегулювання, %	Час регулювання, с $T_p = \varpi T_{p.зад}$
	α	β	γ	δ	ϵ		
2	1,82					0,1	4,82
3	1,9	2,2				1,65	4,04
4	2,2	3,5	2,8			0,89	4,81
5	2,7	4,9	5,4	3,4		1,29	5,43
6	3,15	6,5	8,7	7,55	4,05	1,63	6,04

Приклад 4.5. Нехай ОК має таку передавальну функцію:

$$W_{OK}(p) = \frac{2}{p(p+1)}.$$

Потрібно синтезувати систему з аперіодичною реакцією, час регулювання якої дорівнює 2 с.

Розв'язування

Застосуємо комбіновану схему вмикання коригувальних пристроїв, зображену на рис. 4.14.

Очевидно, що $W_{1k}(p) = \frac{a}{p+a}$, $W_{2k}(p) = \frac{K(p+a)}{p+b}$.

Завдання полягає у відшуванні таких значень параметрів коригувальних пристроїв a, b, K , які забезпечують аперіодичну реакцію системи за каналом "Z – Y".

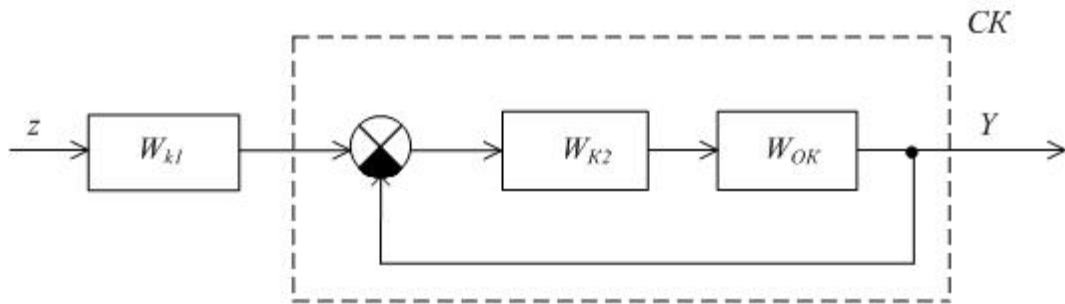


Рис. 4.14. Комбінована схема вмикання коригувальних пристроїв (до прикладу 4.5)

Визначимо передавальну функцію всієї системи, а саме:

$$\begin{aligned}
 W(p) &= \frac{W_{k1} W_{OK}}{(1 + W_{k1} W_{OK})} W_{k1} = \frac{2}{p(p+1)} \cdot \frac{K(p+a)}{(p+b)} \cdot \frac{a}{(p+a)} = \\
 &= \frac{2Ka}{(p+b)p(p+1) + 2K(p+a)} = \frac{2Ka}{p^3 + (1+b)p^2 + (2K+b)p + 2Ka}.
 \end{aligned}$$

Уведемо таке позначення: $\omega^3 = 2K \cdot a$ і знайдемо параметр ω , тобто

$$\omega = \frac{T_p}{T_{p.зад}} = \frac{4,04}{2} = 2,02^{-1}c$$

Визначимо нормовану передавальну функцію системи, тобто

$$\bar{W}(p) = \frac{1}{\bar{p}^3 + \frac{1+b}{\omega} \bar{p}^2 + \frac{2K+b}{\omega^2} \bar{p} + 1} = \frac{1}{\bar{p}^3 + \frac{1+b}{2,02} \bar{p}^2 + \frac{2K+b}{2,02} \bar{p} + 1}$$

Для забезпечення аперіодичної реакції необхідно, щоб $\alpha = 1,9$ і $\beta = 2,2$, тоді

$$(1+b)/2,02 = 1,9, \quad \text{звідки } b = 2,84;$$

$$(2K+b)/4,08 = 2,2, \quad \text{звідки } K = (2 \cdot 4,08 - b)/2 = 3,07;$$

$$W^3 = 2Ka = 2,02^3 = 8,24, \quad \text{звідки } a = 8,24/(2K) = 1,34.$$

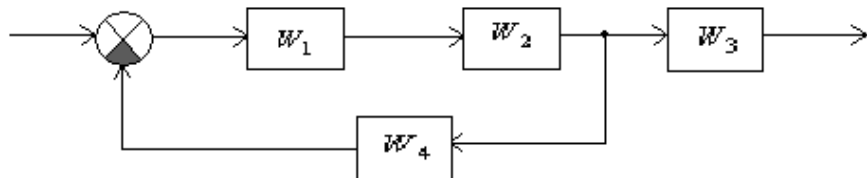
Питання для самоконтролю

1. Які методи синтезу застосовують у класичній теорії керування?
2. Що являє собою кореневий годограф?
3. Як формується допустима область розташування коренів характеристичного рівняння СК?
4. Які існують типові закони керування?
5. У яких випадках застосовують типові закони керування?
6. Які існують способи вмикання коригувальних пристроїв?
7. Яким показником якості має відповідати перехідний процес, що називається аперіодичною реакцією?
8. Який вигляд має нормована передавальна функція системи?
9. Яка структура ПД-закону керування?
10. Який існує зв'язок між показниками якості процесу керування і розташуванням коренів характеристичного рівняння системи на комплексній площині?

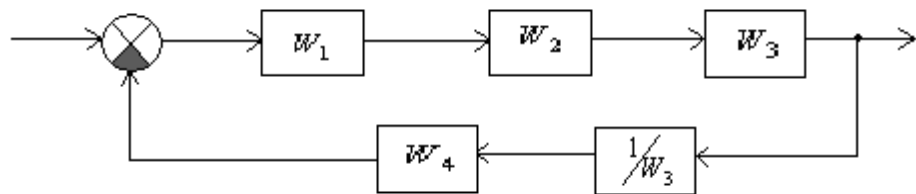
Задачі до самостійного розв'язування

1. У застосуванні до зображених нижче структурних схем системи, з'ясувати, для яких значень коефіцієнтів усталена помилка не буде перевищувати заданої величини.

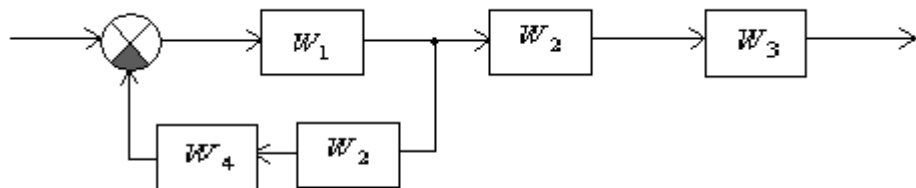
а)



б)



в)



2. Об'єкт керування має передавальну функцію такого вигляду:

$$W_{ov}(p) = \frac{k_1}{T_2 p^2 + T_1 p + 1}.$$

Необхідно синтезувати систему керування з аперіодичною реакцією та часом регулювання $T_{p.зад}$. Побудувати перехідну функцію системи з аперіодичною реакцією $H(t)$, за таких умов:

а) $T_{p.зад} = 2,5$; $T_1 = 1$; $T_2 = 2$; $k_1 = 3$; б) $T_{p.зад} = 1,5$; $T_1 = 1,5$; $T_2 = 2,5$; $k_1 = 2$;

в) $T_{p.зад} = 2$; $T_1 = 2$; $T_2 = 1,5$; $k_1 = 2,5$; г) $T_{p.зад} = 2,5$; $T_1 = 2,5$; $T_2 = 2$; $k_1 = 1,5$;

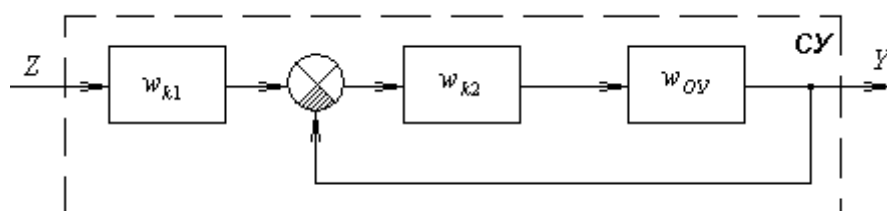
д) $T_{p.зад} = 3$; $T_1 = 0$; $T_2 = 3$; $k_1 = 2$; е) $T_{p.зад} = 1,5$; $T_1 = 0$; $T_2 = 2$; $k_1 = 1,5$;

ж) $T_{p.зад} = 3,5$; $T_1 = 1,5$; $T_2 = 3$; $k_1 = 2,5$; з) $T_{p.зад} = 4$; $T_1 = 2$; $T_2 = 3,5$; $k_1 = 3,5$;

к) $T_{p.зад} = 2$; $T_1 = 2,5$; $T_2 = 3$; $k_1 = 2$; л) $T_{p.зад} = 3,5$; $T_1 = 1,5$; $T_2 = 2$; $k_1 = 4$;

Вказівки:

1) Застосувати таку схему вмикання коригувальних пристроїв:



2) Застосувати коригувальні пристрої, передавальні функції котрих мають такий вигляд:

$$W_{k_1}(p) = \frac{cT_2}{p+a};$$

$$W_{k_2}(p) = \frac{k_2(p+a)}{p+b}.$$

Інакше кажучи, необхідно обчислити значення параметрів a, b, c, k_2 .

3) Систему диференціальних рівнянь для визначення перехідної функції $H(t)$ розв'язати методом Рунге – Кутта.

РОЗДІЛ 5

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Мета розділу: вивчення типових задач варіаційного числення і застосування методів їх розв'язування для синтезу оптимальних систем керування

§ 5.1. Варіація функціонала. Необхідна умова існування екстремуму

У класичному варіаційному численні основним об'єктом дослідження є такий функціонал:

$$I = \int_a^b F(t, y, \dot{y}) dt, \quad (5.1)$$

де t – незалежна змінна; $y(t)$ – шукана функція від t , що забезпечує екстремум функціоналу I .

Визначимо необхідну умову існування екстремуму функціонала (5.1). Припустимо, що його мінімум існує і забезпечується деякою функцією $y(t)$ класу C_1 . (мінімум взято для визначеності). З'ясуємо, яким умовам має відповідати функція $y(t)$, аби функціонал (5.1) досягав мінімуму. Для цього розглянемо близьку до $y(t)$ функцію, а саме:

$$y(t) + \alpha\eta(t),$$

де α – мале число, $\eta(t)$ – довільна функція класу C_1 , яка задовольняє таку умову:

$$\eta(a) = \eta(b) = 0.$$

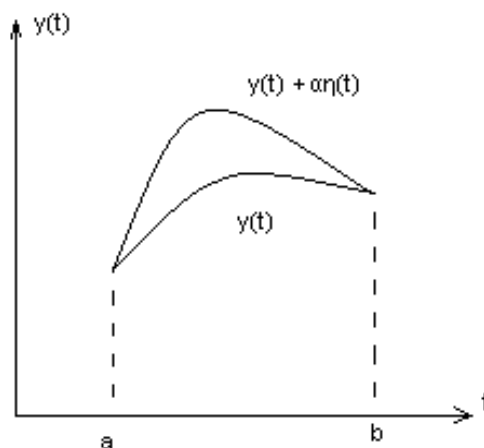


Рис. 5.1. Функція $y(t)$ та її варіація

Визначимо прирощення функціонала (5.1), коли функцію $y(t)$ замінено на її варіацію $y(t) + \alpha\eta(t)$, тобто

$$\Delta I = \int_a^b F(t, y + \alpha\eta, \dot{y} + \alpha\dot{\eta}) dt - \int_a^b F(t, y, \dot{y}) dt \geq 0. \quad (5.2)$$

Оскільки $y(t)$ забезпечує мінімум функціоналу (5.1), то значення $\Delta I \geq 0$.

Прирощення функціонала ΔI є функцією від α і може бути розкладено в ряд Тейлора в околі точки $\alpha = 0$, а саме:

$$I = \alpha \frac{\partial I}{\partial \alpha} + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} \frac{\partial^2 I}{\partial \alpha^2} + \frac{\alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\partial^3 I}{\partial \alpha^3} + \dots + \frac{\alpha^i}{i!} \frac{\partial^i I}{\partial \alpha^i} + \dots \quad (5.3)$$

У вираз (5.3) уведемо такі позначення:

$$\delta I = \alpha \frac{\partial I}{\partial \alpha} - \text{перша варіація функціонала};$$

$$\delta^2 I = \frac{\alpha^2}{2} \frac{\partial^2 I}{\partial \alpha^2} - \text{друга варіація функціонала};$$

$$\delta^3 I = \frac{\alpha^3}{6} \frac{\partial^3 I}{\partial \alpha^3} - \text{третя варіація функціонала}.$$

Першою варіацією функціонала називається головна лінійна частина його прирощення. Вона має найбільше практичне значення, оскільки, коли $\alpha \rightarrow 0$, то решта варіацій у виразі (5.3) спадають швидше від лінійного члена ряду $\alpha \frac{\partial I}{\partial \alpha}$,

і можна вважати, що $\Delta I \approx \alpha \frac{\partial I}{\partial \alpha}$, коли $\alpha \rightarrow 0$.

$$\text{Тоді} \quad \alpha \frac{\partial I}{\partial \alpha} \geq 0. \quad (5.4)$$

Умова (5.4) буде виконуватися за будь-яких значень числа α в тому випадку, коли $\frac{\partial I}{\partial \alpha} = 0$, а тому й $\delta I = 0$. Дійсно, якщо $\frac{\partial I}{\partial \alpha} > 0$, то коли $\alpha > 0$, буде правильним твердження: $\delta I > 0$, але якщо $\alpha < 0$, то умова (5.4) не буде виконуватися, а це суперечить твердженню про досягнення мінімуму на кривій $y(t)$.

Таким чином, необхідною умовою мінімуму (а в загальному випадку, екстремуму) функціонала є рівність нулю його першої варіації, а саме:

$$\delta I = \frac{\partial I}{\partial \alpha} = 0. \quad (5.5)$$

§ 5.2. Рівняння Ейлера

З умови (5.5) можна вивести рівняння, яке дозволяє фактично визначати функції, які забезпечують екстремум функціоналу. Продиференціюємо (5.2) за α під знаком інтеграла, а саме:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\alpha} &= \int_b^a \frac{d}{d\alpha} F(t, y + \alpha\eta, \dot{y} + \alpha\dot{\eta}) dt = \\ &= \int_b^a \left[\frac{\delta F}{\delta(y + \alpha\eta)} \frac{d(y + \alpha\eta)}{d\alpha} + \frac{\delta F}{\delta(\dot{y} + \alpha\dot{\eta})} \frac{d(\dot{y} + \alpha\dot{\eta})}{d\alpha} \right] dt = \int_b^a \left[\frac{\delta F}{\delta y} \eta + \frac{\delta F}{\delta \dot{y}} \dot{\eta} \right] dt. \end{aligned}$$

Другий доданок під інтегралом проінтегруємо за частинами, тобто

$$\int_b^a \frac{\delta F}{\delta \dot{y}} \dot{\eta} dt = \left[\begin{array}{l} u = \frac{\delta F}{\delta \dot{y}}, du = \frac{d}{dt} \frac{\delta F}{\delta \dot{y}} dt \\ dv = d\eta, v = \eta \end{array} \right] = \frac{\delta F}{\delta \dot{y}} \eta \Big|_a^b - \int_b^a \eta \frac{d}{dt} \frac{\delta F}{\delta \dot{y}} dt.$$

Враховуючи, що $\eta(a) = \eta(b) = 0$, отримуємо такий результат:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\alpha} &= \int_b^a \left(\frac{\delta F}{\delta y} - \frac{d}{dt} \frac{\delta F}{\delta \dot{y}} \right) \eta dt; \\ \delta I &= \alpha \frac{dI}{d\alpha} = \int_b^a \left(\frac{\delta F}{\delta y} - \frac{d}{dt} \frac{\delta F}{\delta \dot{y}} \right) \alpha \eta dt. \end{aligned}$$

Відповідно до умови (5.5) для існування екстремуму необхідно, щоб похідна $\delta I = 0$, тобто

$$\int_b^a \left(\frac{\delta F}{\delta y} - \frac{d}{dt} \frac{\delta F}{\delta \dot{y}} \right) \alpha \eta dt = 0,$$

а це можливо, коли

$$\frac{\delta F}{\delta y} - \frac{d}{dt} \frac{\delta F}{\delta \dot{y}} = 0, \tag{5.6}$$

тут t – незалежна змінна, F – підінтегральна функція виразу (5.1), $y(t)$ – шукана функція.

Вираз (5.6) називають *рівнянням Ейлера*.

Отже, якщо функція $y(t)$ класу C_1 забезпечує екстремум функціоналу (5.1), то вона має задовольняти рівняння Ейлера (5.6).

Розв'язки цього рівняння називають *екстремальми*. Тут має місце подане нижче твердження.

Теорема Ейлера. Якщо екстремум функції (5.1) існує і забезпечується в класі функцій C_1 , то він може досягатися тільки на екстремальях.

Приклад 5.1. Знайти екстремаль функціонала: $I = \int_1^4 t^2 \dot{y}^2(t) dt$, за таких умов: $y(1) = 4, y(4) = 1$.

Розв'язування

Екстремаль являє собою розв'язок рівняння Ейлера (5.6), тобто $\frac{\delta F}{\delta y} - \frac{d}{dt} \frac{\delta F}{\delta \dot{y}} = 0$. У даному прикладі $F = t^2 \dot{y}^2(t)$, тому $\frac{\delta F}{\delta y} = 0$; $\frac{\delta F}{\delta \dot{y}} = 2\dot{y}t^2$.

Отже, рівняння набуває такого вигляду: $\frac{d}{dt}(2\dot{y}t^2) = 0$.

Розв'яжемо його, а саме:

$$\frac{d}{dt}(2\dot{y}t^2) = 0;$$

$$2\dot{y}t^2 = c;$$

$$dy = \frac{c}{2t^2} dt \rightarrow y = \int \frac{c}{2t^2} dt = c_1 - \frac{c}{2t}.$$

Таким чином, екстремальми є гіперболи. Константи c_1 і c знаходимо з граничних умов, тобто

$$\begin{cases} y(1) = c_1 - \frac{c}{2} = 4; \\ y(4) = c_1 - \frac{c}{8} = 1. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему знаходимо, що $c_1 = 0, c = -8$, і отримуємо рівняння екстремалі: $y = \frac{4}{t}$.

Обчислимо тепер значення функціонала на екстремалі, враховуючи, що $\dot{y} = -\frac{4}{t^2}$, а саме:

$$I = \int_1^4 t^2 \left(-\frac{4}{t^2}\right)^2 dt = \int_1^4 \frac{16}{t^2} dt = 12 - \frac{16}{t} \Big|_1^4 = 16 - \frac{16}{4} = 12.$$

Як бачимо, значення функціонала на екстремалі дорівнює 12.

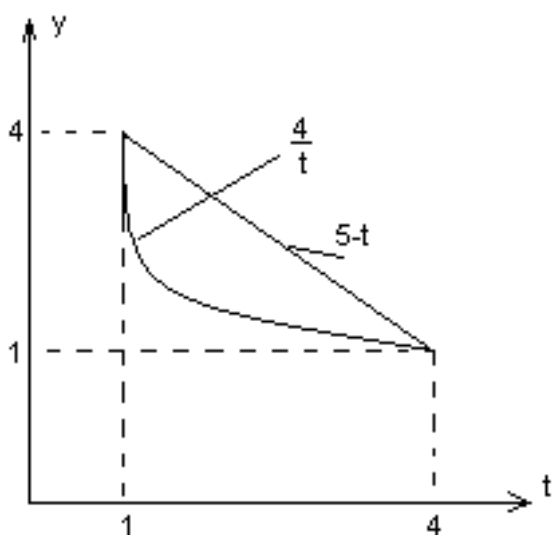


Рис. 5.2. Экстремаль і пряма, яка проходить через точки (1; 4) і (4; 1)

Для порівняння обчислимо значення функціонала на прямій, яка проходить через ті самі точки: (1; 4) і (4; 1) (див. рис. 5.2).

Рівняння прямої: $y(t) = 5 - t$, відповідно, $\dot{y} = -1$.

Виконаємо розрахунок значення функціонала, тобто

$$I = \int_1^4 t^2 (-1)^2 dt = \int_1^4 t^2 dt = 21.$$

Як бачимо, це значення більше, ніж отримане на екстремалі.

Приклад 5.2. Визначити найкоротшу лінію, яка з'єднає дві точки на площині, коли відомо їх координати, а саме: (0; 0) і (2; 2) (див. рис. 5.3).

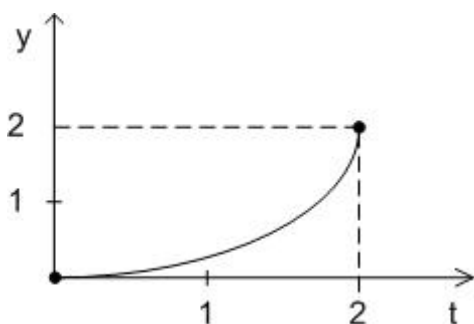


Рис. 5.3. Ілюстрація до прикладу 5.2

Розв'язування

Прирошення довжини лінії можна описати таким рівнянням:

$$(dl)^2 = (dt)^2 + (dy)^2;$$

$$dl = \sqrt{(dt)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{1 + \dot{y}^2}.$$

$$\text{Отже, } l = I = \int_0^2 \sqrt{1 + \dot{y}^2} dt, \text{ за умови,}$$

що $y(0) = 0$, $y(2) = 2$. Тоді $F = \sqrt{1 + \dot{y}^2}$ і, відповідно,

$$\frac{\delta F}{\delta y} = 0;$$

$$\frac{\delta F}{\delta \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} 2\dot{y};$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta F}{\delta \dot{y}} = \frac{\ddot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = 0.$$

Отже, $\ddot{y} = 0$, значить, $\dot{y} = c$ й $y = ct + c_1$, тобто екстремалі являють собою прямі. Обчислимо константи c й c_1 , враховуючи початкові умови, а саме:

$$y(0) = c_1 = 0;$$

$$y(2) = 2c + c_1 = 2.$$

Це означає, що $c = 1$. Таким чином, рівняння екстремалі буде мати такий вигляд: $y = t$.

Зауважимо, що рівняння Ейлера не дозволяє вирішувати питання, про те, чи буде на екстремалі досягтися мінімум або, навпаки, максимум. Для розрізнення максимуму й мінімуму потрібно дослідити другу варіацію функціонала.

Дійсно, якщо δI дорівнює 0, то знак виразу ΔI буде в основному залежати від другої варіації $\delta^2 I$ відповідно до розкладання в ряд Тейлора (5.3).

Для перевірки цього питання слугує умова Лежандра, а саме: для того, аби функція $y(t)$ забезпечувала максимум функціоналу: $I = \int_a^b F(t, y, \dot{y}) dt$, необхідно, щоб на екстремалі було виконано таку нерівність:

$$\frac{\delta^2 F}{\delta \dot{y} \delta \dot{y}} \leq 0.$$

Досягнення мінімуму забезпечує виконання умови: $\frac{\delta^2 F}{\delta \dot{y} \delta \dot{y}} \geq 0$.

Наприклад, визначимо вид екстремуму такого функціонала: $I = \int_a^b t^2 \dot{y}^2 dx$.

Тут $F = t^2 \dot{y}^2$, відповідно $\frac{\delta^2 F}{\delta \dot{y}^2} = 2t^2 > 0$, а це означає, що на екстремалі-гіперболі: $y = \frac{4}{t}$ функціонал досягає свого мінімуму.

Насамкінець слід зауважити, що визначити характер екстремалі у багатьох задачах можна, спираючись на їхній фізичний сенс, не досліджуючи умови Лежандра.

§ 5.3. Рівняння Ейлера – Лагранжа та Ейлера – Пуассона

У загальному випадку функціонал може залежати від декількох змінних (функцій). Розглянемо загальний вираз для запису функціонала, що залежить від n невідомих функцій, тобто

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f(t_1, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) dt. \quad (5.7)$$

Функції $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, що забезпечують екстремум функціоналу (5.7) мають задовольняти систему диференціальних рівнянь Ейлера – Лагранжа, а саме:

$$\frac{\delta f}{\delta x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\delta f}{\delta \dot{x}_i} = 0; \quad i = 1, n. \quad (5.8)$$

Іншим узагальненням найпростішої задачі є визначення екстремуму функціонала, який залежить не тільки від першої, але й від старших похідних шуканої функції.

Припустимо, що функціонал має такий вигляд:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n)}) dt.$$

Крива, яка забезпечує екстремум цьому функціоналу, повинна задовольняти рівняння Ейлера – Пуассона, тобто

$$\frac{\delta f}{\delta y} - \frac{d}{dt} \frac{\delta f}{\delta \dot{y}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\delta f}{\delta \ddot{y}} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \frac{\delta f}{\delta y^{(n)}} = 0.$$

Приклад 5.3. Розглянемо електродвигун постійного струму, який переміщує виконавчий механізм пристрою. Відомо, що нагрівання якоря пропорційне квадрату сили струму. З іншого боку, струм якоря пропорційний сумі сил опору та сил інерції, які залежать від прискорення, тобто $i = a\ddot{x} + b$, де i – сила струму якоря, x – положення механізму; a – момент інерції, b – момент сили статичного опору, яку вважаємо сталою. Тоді задача полягає у пошуку сили струму $i(t)$, яка забезпечує мінімальне значення такому інтегралу:

$$I = \int_0^T i^2 dt = \int_0^T (a\ddot{x} + b)^2 dt,$$

враховуючи задані граничні умови.

Розв'язування

Складемо рівняння Ейлера – Пуассона, а саме:

$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{\delta f}{\delta \ddot{x}} = 0,$$

тут $f = (a\ddot{x} + b)^2$.

Враховуючи, що $\frac{d^2}{dt^2} (a\ddot{x} + b) = 0$, отримуємо таку рівність: $x^{(4)} = 0$. Звідси мають місце такі залежності:

$$\ddot{x} = c_1;$$

$$\ddot{x} = c_1 t + c_2;$$

$$x = \frac{c_1 t^3}{6} + \frac{c_2 t^2}{2} + c_3 t + c_4.$$

Тоді $i = a\ddot{x} + b = ac_1 t + ac_2 + b$, тобто мінімальне нагрівання досягнуто шляхом регулювання струму якоря за лінійним законом. Перевіряємо умову Лежандра: $\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta y} = 2a^2 > 0$, отже, на екстремалі забезпечено мінімум функціонала.

§ 5.4. Умовний екстремум функціонала

Будемо вважати, що об'єкт керування описано рівняннями в змінних стану або рівняннями фазових координат (x_1, x_2, \dots, x_n) . Тоді й у виразі, який описує функціонал, змінні (x_1, x_2, \dots, x_n) мають бути. У попередніх параграфах розглядалися задачі на відшукування безумовного екстремуму функціонала, тобто для функції $y(t)$ не висувалося жодних обмежень. При цьому було розглянуто випадки застосування фіксованих або нефіксованих граничних умов. Інших обмежень на вибір функцій не було. Однак, розв'язуючи прикладні задачі прийняття того чи іншого рішення, у тому числі оптимального, завжди доводиться враховувати сукупність вимог з енергоспоживання, швидкодії, точності (поточної або кінцевої), надійності і т. ін. Ці вимоги завжди будуть зумовлювати обмеження на вибір допустимих варіацій. Пошук екстремуму функціонала за наявності додаткових обмежень (зв'язків) називається задачею на *умовний екстремум*. У цьому параграфі ми розглянемо методи розв'язування оптимізаційних задач, коли для функції $y(t)$ висунуто умови, задані у вигляді *рівнянь зв'язку*.

Тут, зазвичай розрізняють зв'язки трьох типів:

- а) голономні – тобто ті, що не містять похідних шуканих функцій, їх записують таким чином: $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$;
- б) неголономні, котрі мають такий вигляд: $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) = 0$ (вони містять похідні шуканих функцій);
- в) ізопериметричні (інтегральні зв'язки).

Залежно від типу цих зв'язків виділяють кілька видів задач оптимізації.

Розглянемо їх послідовно.

Умовний екстремум функціонала при неголономних зв'язках. Знайти екстремум такого функціонала:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) dt, \quad (5.9)$$

коли обмеження задано у вигляді алгебраїчних рівнянь, а саме:

$$\varphi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad m \leq n. \quad (5.10)$$

Зазвичай рівняння (5.10) описують деякий об'єкт керування.

Такі задачі, як правило, розв'язують шляхом їх зведення до задач безумовної оптимізації, наприклад, використовуючи метод множників Лагранжа. Для цього вводять допоміжну функцію такого вигляду:

$$F^*(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(t, x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(t, x), \quad (5.11)$$

тут $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ – множники Лагранжа.

Стосовно функції F^* складають і розв'язують таку систему рівнянь:

$$\frac{\partial F^*}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}_j} = 0; \quad j = \overline{1, n}, \quad (5.12)$$

доповнивши її системою рівнянь (5.10) відносно змінних $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$.

Приклад 5.4. Знайти мінімум поданого нижче функціонала:

$$I = \int_0^1 (x_1^2 + \gamma_1 x_2^2 + \gamma_2 \dot{x}_2^2) dt,$$

з урахуванням такого обмеження: $x_1 + x_2 = A$.

Розв'язування

Скориставшись уведеними вище позначеннями, можемо записати, що

$$f = x_1^2 + \gamma_1 x_2^2 + \gamma_2 \dot{x}_2^2;$$

$$\varphi = x_1 + x_2 - A.$$

Тоді допоміжний функціонал буде мати такий вигляд:

$$F(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + \gamma_1 x_2^2 + \gamma_2 \dot{x}_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - A).$$

У загальному вигляді систему можна подати таким чином:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} = 0, \\ \frac{dF}{d\lambda} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{dF}{d\dot{\lambda}} = 0. \end{cases}$$

Конкретизована система буде такою:

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda = 0; \\ 2\gamma_1 x_2 + \lambda - 2\gamma_2 \ddot{x}_2 = 0; \\ x_1 + x_2 - A = 0. \end{cases}$$

Перетворимо її таким чином:

$$\begin{cases} \lambda = -2x_1 = -2A + 2x_2; \\ x_1 = A - x_2; \\ 2\gamma_1 x_2 + 2x_2 - 2A - 2\gamma_2 \ddot{x}_2 = 0. \end{cases}$$

У результаті чого отримуємо рівняння:

$$\ddot{x}_2 - \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_2} \cdot x_2 + \frac{A}{\gamma_2} = 0.$$

Його розв'язком слугує екстремаль $x_2^*(t)$. При цьому

$$\lambda(t) = -2A + 2x_2^*(t);$$

$$x_1(t) = A - x_2^*(t).$$

Умовний екстремум за наявності голономних зв'язків. У цьому випадку задачу буде сформульовано таким чином: знайти екстремум поданого нижче функціонала.

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f(t_1, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) dt, \quad (5.13)$$

коли задано обмеження у вигляді диференціальних рівнянь, а саме:

$$\Phi_i(t_1, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (5.14)$$

Для її розв'язування складемо допоміжну функцію, тобто

$$F^*(t_1, x, \dot{x}, \lambda) = f(t_1, x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(t_1, x, \dot{x}).$$

Далі запишемо і розв'язуємо стосовно цієї функції систему диференціальних рівнянь Ейлера:

$$\frac{\partial F^*}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}_j} = 0; \quad j = \overline{1, n}, \quad (5.15)$$

доповнивши її системою (5.14) відносно змінних $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$.

Приклад 5.5. Знайти мінімум наведеного нижче функціонала.

$$I = \int_0^t (y^2 + \gamma U^2) dt,$$

за наявності такого обмеження: $\ddot{y} + By = kU$.

Розв'язування

Перейдемо до фазових координат (змінних стану), тобто запишемо таку систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x}_2; \\ \dot{x}_2 = kU - Bx_1; \\ y = x_1. \end{cases}$$

Після перетворення вона набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 - x_2 = 0; \\ \dot{x}_2 + Bx_1 - kU = 0, \end{cases} \quad m = 2.$$

Цільовий функціонал $I = \int_0^t (x_1^2 + \gamma U^2) dt$, тому в наших позначеннях

$$f(t, x_1) = x_1^2 + \gamma U^2.$$

Складемо функцію Лагранжа за таким правилом:

$$F^*(t_1, x, \dot{x}, \lambda) = f(t_1, x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(t_1, x, \dot{x}).$$

Беручи до уваги вигляд функціонала, у даній задачі вона буде такою:

$$F^*(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \lambda_1, \lambda_2) = x_1^2 + \gamma U^2 + \lambda_1(\dot{x}_1 - x_2) + \lambda_2(\dot{x}_2 + Bx_1 - kU),$$

а система рівнянь Ейлера набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_2 B - \dot{\lambda}_1 = 0, \\ -\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2 = 0, \\ 2\gamma U - \lambda_2 k = 0, \\ \dot{x}_1 - x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 + Bx_1 - kU = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знаходимо функції $U^*(t)$, $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$ та числа λ_1^* , λ_2^* , причому функції $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$ являють собою екстремалі.

§ 5.5. Ізопериметрична задача. Задача Майєра і Больца

У попередньому параграфі було розглянуто найбільш загальний випадок пошуку умовного екстремуму функціонала – так звану задачу Лагранжа [див. формулювання (5.13), (5.14)]. Залежно від вигляду функціонала (5.13) та з огляду на обмеження (5.14) розрізняють кілька характерних типів задач варіаційного числення. Розглянемо тепер, як вони формулюються та які методи застосовують до їх розв'язування.

1. Ізопериметрична задача.

Знайти екстремум такого функціонала:

$$I = \int_a^b f(t, x, \dot{x}) dt, \quad (5.16)$$

за умови, що інший функціонал зберігає задане значення, тобто

$$\int_a^b K(t, x, \dot{x}) dt = C. \quad (5.17)$$

Цю задачу можна легко звести до задачі Лагранжа в описаний нижче спосіб.

Уведемо таке позначення:

$$\psi(t) = \int_a^t K(t, x, \dot{x}) dt,$$

тоді рівняння зв'язку можна записати в такому вигляді:

$$\dot{\psi}(t) = K(t, x, \dot{x}). \quad (5.18)$$

Знайдемо функції $x(t)$ і $\psi(t)$, котрі забезпечують екстремум функціоналу (5.16) за наявності зв'язку у вигляді рівняння (5.18).

Перепишемо рівняння зв'язку таким чином:

$$\dot{\psi}(t) - K(t, x, \dot{x}) = 0,$$

і складемо функціонал Лагранжа, а саме:

$$F^* = f(t, x, \dot{x}) + \lambda(\psi(t) - K(t, x, \dot{x})).$$

Відповідна умова оптимуму буде такою:

$$\frac{\partial F^*}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}} = 0.$$

Отже, $\frac{\partial F^*}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F^*}{\partial \dot{\psi}} = \frac{d\lambda}{dt} = 0$, тобто в застосуванні до ізопериметричної задачі $\lambda = \text{const}$.

Приклад 5.6. Задача Дідони⁴.

Припустимо, що маємо шнур заданої довжини l . Необхідно знайти таку криву $y(t)$ довжиною l , щоб площа S , обмежена нею, була максимальною (див. рис. 5.4).

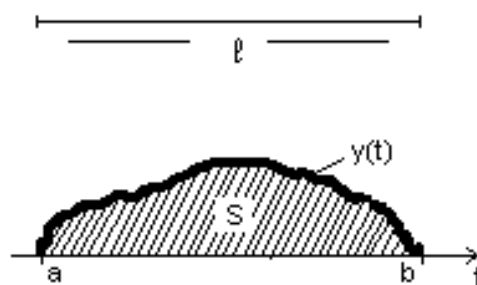


Рис. 5.4. Задача "пояс Дідони"

Математична постановка цієї задачі зводиться до визначення екстремуму такого функціонала:

$$I(y) = \int_a^b y(t) dt$$

за граничними умовами $y(a) = 0$; $y(b) = 0$, і фіксованого значення параметра l (довжини), тобто має структуру ізопериметричної задачі. Отже,

⁴ Задача Дідони вважається початком історії варіаційного числення. Її виникнення пов'язують із стародавньою легендою про заснування міста Карфагена. За відтворюваним у поемі Вергілія «Енеїда» міфом, майбутня засновниця Карфагена Дідона (імовірно, IX ст. до н. е.) тікала від переслідувань власного брата, тирана фінікійського міста Тір, на кораблі з невеликим загonom вірних їй людей. Утікачі висадилися на північно-африканському узбережжі, принесли багаті дари місцевому царю і попросили його про виділення їм земельної ділянки; цар погодився за умови надати землі лише «стільки, скільки займає волова шкура». Тоді Дідона порізала шкуру на довгий тонкий ремінь й обгородила ним значну територію на березі моря, де й виникло місто Карфаген. Традиційно задача Дідони полягає у визначенні форми ділянки, котра буде мати найбільшу площу при заданій довжині ременя.

$$\int_a^b \sqrt{d^2 t + dy^2} dt = l,$$

тут a і b – точки закріплення ременя.

Результатом розв'язку задачі є дуга кола, за умови, що кінці ременя не можна рухати по узбережжю, а в протилежному випадку – півколо.

Приклад 5.7. Припустимо, рівняння об'єкта має такий вигляд:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = U. \quad (5.19)$$

Потрібно знайти керування U , яке задовольняє такі умови:

– швидкість зміни вихідної координати $y(t)$ на початку і наприкінці керування має дорівнювати нулю, тобто $\dot{y}(0) = \dot{y}(T) = 0$;

– величина зміни вихідної координати протягом часу керування T має відповідати заданому значенню a_0 , тобто

$$\int_0^T y'(t) dt = a_0, \quad (5.20)$$

і забезпечувати мінімальні витрати енергії на керування, а саме:

$$\int_0^T U^2 dt \rightarrow \min, \quad (5.21)$$

Для розв'язування задачі перетворимо модель (5.19) у нормальну форму, увівши такі позначення: $y = x_1$, $\dot{y} = \dot{x}_2$.

Тепер задача буде мати такий вигляд:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ x_2 = U; \end{cases} \quad (5.22)$$

$$\int_0^T x_2 dt = a_0; \quad (5.23)$$

$$x_2(0) = x_2(T) = 0; \quad (5.24)$$

$$\int_0^T U^2 dt \rightarrow \min. \quad (5.25)$$

Потрібно знайти таке керування U , яке забезпечить виконання умов (5.22), (5.23), (5.24) і мінімізує функціонал (5.25).

Розв'язування

Згідно з системою (5.22) $U = \dot{x}_2$, тому функціонал (5.25) набуває такого вигляду:

$$\int_0^T \dot{x}_2^2 dt \rightarrow \min,$$

Таким чином, маємо розв'язати ізопериметричну задачу, тобто мінімізувати функціонал

$$\int_0^T \dot{x}_2^2 dt,$$

з огляду на таке обмеження:

$$\int_0^T x_2 dt = \alpha_0.$$

Уведемо таке позначення: $\psi(t) = x_2$, після чого перепишемо обмеження, а саме: $\psi(t) - x_2 = 0$.

Тепер утворимо функцію Лагранжа, тобто

$$F^* = \dot{x}_2^2 + \lambda(\psi - x_2),$$

а далі складемо рівняння Ейлера, а саме:

$$\frac{\partial F^*}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}_2} = 0;$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F^*}{\partial \dot{\psi}} = 0.$$

З огляду на друге рівняння, $\frac{d\lambda}{dt} = 0$ і, відповідно $\lambda = \text{const}$.

Далі, враховуючи, що $\frac{dF}{dx_2} = -\lambda$; $\frac{dF}{dx_2} = 2\dot{x}_2$; $\frac{d}{dt} \frac{dF}{d\dot{x}_2} = 2\ddot{x}_2$, отримуємо таку

рівність: $-\lambda - 2\ddot{x}_2 = 0$ і, відповідно, $\ddot{x}_2 = \frac{-\lambda}{2}$, звідси

$$\dot{x}_2 = \frac{-\lambda}{2}t + c_1; \quad (5.26)$$

$$x_2 = \frac{-\lambda}{4}t^2 + c_1t + c_2. \quad (5.27)$$

Система (5.26), (5.27) включає три невідомі сталі, а саме: λ , c_1 , c_2 . Використаємо для їх визначення початкові умови. Підставивши в рівняння (5.27) таку початкову умову: $x_2(0) = 0$, знайдемо сталу c_2 , отже, $c_2 = 0$. Тепер підставимо в рівняння (5.27) значення $t = T$, і, враховуючи, що $x_2(T) = 0$, маємо таку рівність:

$$\frac{-\lambda}{4}T^2 + c_1T = 0. \quad (5.28)$$

Проінтегруємо вираз (5.27) у межах від 0 до T і, з урахуванням умови (5.23), тобто

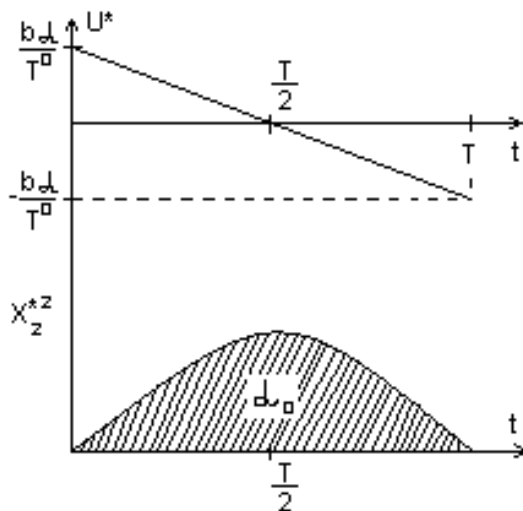
$$\int_0^T x_2(t) dt = \int_0^T \left(\frac{-\lambda}{4}t^2 + c_1t \right) dt = -\frac{\lambda}{12}T^3 + \frac{c_1}{2}T^2 = a_0, \quad (5.29)$$

Розв'язавши спільно рівняння (5.28) і (5.29), знайдемо значення сталих, а саме:

$$\lambda = \frac{24\alpha_0}{T^3}; \quad (5.30)$$

$$c_1 = \frac{6\alpha_0}{T^2}.$$

З урахуванням цих результатів рівняння, що описують оптимальні процеси (рис. 5.5), набувають остаточного вигляду, а саме:



$$\begin{cases} U^*(t) = \frac{6\alpha_0}{T^2} - \frac{12\alpha_0}{T^3}t, \\ x_2^* = \frac{6\alpha_0}{T^2}t - \frac{6\alpha_0}{T^3}t^2. \end{cases}$$

Рис. 5.5. Графічні інтерпретації оптимальних процесів до прикладу 5.7

Приклад 5.8. Задача Майєра. Знайти функції $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, котрі задовольняють такі рівняння зв'язку:

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n), \quad i = \overline{1, m}, \quad m < n, \quad (5.31)$$

причому одна з них, наприклад x_1 , у момент часу $t = T$ досягає максимального (мінімального) значення (прикладом може слугувати задача про розгін двигуна, який у момент часу T має досягти максимальної швидкості обертання ωT).

Описана постановка еквівалентна задачі Лагранжа з функціоналом такого вигляду: $I = \int_0^T \dot{x}_1 dt$. Дійсно, оскільки $\int_0^T \frac{dx_1}{dt} dt = x_1$, то $I = x_1$.

Тобто задача полягає у знаходженні екстремального значення функціонала:

$$I = \int_0^T \dot{x}_1 dt,$$

коли задано рівняння зв'язку (5.31).

Приклад 5.9. Задача Больца. Знайти функції $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, котрі задовольняють рівняння зв'язку (5.31) і забезпечують екстремум такому функціоналу:

$$I = \int_0^T f(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) dt + R[x_1(T)].$$

Її також можна звести до задачі Лагранжа шляхом здійснення заміни змінних. Дійсно, позначимо, що $U = \frac{dR(x_1)}{dt}$, звідси $U dt = dR$ і $R[x_1(T)] = \int_0^T U dt$.

Тоді задача набуває такого вигляду:

$$I = \int_0^T [f(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) + U] dt \rightarrow \text{extr},$$

коли задано рівняння зв'язку (5.31).

Вочевидь, це задача Лагранжа, а функція Лагранжа для неї має такий вигляд:

$$F^* = f(t, X, \dot{X}) + U + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(X, \dot{X}).$$

§ 5.6. Синтез оптимальних систем керування за допомогою варіаційних методів

Методику синтезу оптимальних СК на основі варіаційних методів розглянемо на прикладі.

Нехай маємо об'єкт керування, описаний диференціальним рівнянням у координатах вхід – вихід, тобто

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = U, \quad y(0) = x_{10}, \quad \dot{y}(0) = x_{20}. \quad (5.32)$$

Потрібно синтезувати керувальний вплив $U(t)$, котрий переводить об'єкт керування (5.32) з початкового стану в положення: $y(\infty) = \dot{y}(\infty) = 0$, і при цьому такий критерій:

$$I = \int_0^{\infty} (q_1 y^2 + q_2 \dot{y}^2 + U^2) dt; \quad q_1 > 0, q_2 > 0, \quad (5.33)$$

набуває мінімального значення.

Розв'яжемо сформульовану задачу в поданій нижче послідовності.

1. Запишемо математичну модель об'єкта у змінних стану, а саме:

$$\begin{cases} y = x_1, \\ \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -a_2 x_1 - a_1 x_2 + U, \end{cases}$$

$$x_1(0) = x_{10};$$

$$x_2(0) = x_{20}.$$

2. Тоді функціонал набуває такого вигляду:

$$I = \int_0^{\infty} (q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + U^2) dt, \quad (5.34)$$

тут $x_1 = y$; $x_2 = \dot{y}$.

3. Складемо функцію Лагранжа, тобто

$$F^* = q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + U^2 + \lambda_1 (\dot{x}_1 - x_2) + \lambda_2 (\dot{x}_2 + a_2 x_1 + a_1 x_2 - U). \quad (5.35)$$

4. Запишемо систему рівнянь Ейлера – Лагранжа, а саме:

$$\begin{cases} \frac{\partial F^*}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F^*}{\partial x_1} = 0; \\ \frac{\partial F^*}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F^*}{\partial x_2} = 0; \\ \frac{\partial F^*}{\partial U} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F^*}{\partial U} = 0; \\ \frac{\partial F^*}{\partial \lambda_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F^*}{\partial \lambda_1} = 0; \\ \frac{\partial F^*}{\partial \lambda_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F^*}{\partial \lambda_2} = 0. \end{cases} \quad (5.36)$$

Конкретизуємо систему (5.36), обчисливши похідні, тобто

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = 2q_1x_1 + a_2\lambda_2; \\ \dot{\lambda}_2 = 2q_2x_2 + a_1\lambda_2 - \lambda_1; \\ U = \lambda_2/2; \\ \dot{x}_1 - x_2 = 0; \\ \dot{x}_2 + a_2x_1 + a_1x_2 - U = 0. \end{cases} \quad (5.37)$$

Розв'язування отриманої системи рівнянь (5.37) дозволить визначити екстремалі $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$, $U^*(t)$, $\lambda_1^*(t)$, $\lambda_2^*(t)$.

5. Складемо й обчислимо характеристичний визначник системи (5.37), а саме:

$$\begin{aligned} \det(pE - A) &= \begin{vmatrix} p & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & p + a_1 & 0 & -0,5 \\ -2q_1 & 0 & p & -a_2 \\ 0 & -2q_2 & 1 & p - a_1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{matrix} = \\ &= p^4 + 2 \left[a_2 - \frac{q_2}{2} - \frac{a_1^2}{2} \right] p^2 + (q_1 + a_2^2) = 0. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Отже, отримуємо таке характеристичне рівняння:

$$p^4 + 2Bp^2 + C = 0,$$

тут $B = a_2 - \frac{q_2}{2} - \frac{a_1^2}{2}$, $C = q_1 + a_2^2$.

6. Залежно від співвідношення між величинами B і C можуть мати місце кілька ситуацій. Розглянемо їх.

Випадок 1. $B^2 \geq C$.

Коли $B > 0$, то всі корені рівняння (5.38) чисто уявні й оптимального регулятора не існує.

Коли $B < 0$, корені рівняння (5.38) будуть такими:

$$p_{12} = \pm\gamma_1; p_{34} = \gamma_2,$$

тут
$$\gamma_1 = \left(-B + (B^2 - C)^{1/2} \right)^{1/2};$$

$$\gamma_2 = \left(-B - (B^2 - C)^{1/2} \right)^{1/2}.$$

Загальний розв'язок системи (5.37) має такий вигляд:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{-\gamma_1 t} + C_3 e^{\gamma_2 t} + C_4 e^{-\gamma_2 t}; \\ x_2(t) = \dot{x}_1(t) &= \gamma_1 C_1 e^{\gamma_1 t} - \gamma_1 C_2 e^{-\gamma_1 t} + \gamma_2 C_3 e^{\gamma_2 t} - \gamma_2 C_4 e^{-\gamma_2 t}. \end{aligned}$$

Оскільки $x_1(\infty) = x_2(\infty) = 0$, то $C_1 = C_2 = 0$, і відповідно,

$$\begin{cases} x_1(t) = C_2 e^{-\gamma_1 t} + C_4 e^{-\gamma_2 t}, \\ x_2(t) = -\gamma_1 C_2 e^{-\gamma_1 t} - \gamma_2 C_4 e^{-\gamma_2 t}, \end{cases} \quad (5.39)$$

значення сталих C_2 і C_4 знаходять, використовуючи початкові умови (5.32), коли $t = 0$, тобто

$$\begin{cases} C_2 + C_4 = x_{10}, \\ -\gamma_1 C_2 - \gamma_2 C_4 = x_{20}. \end{cases}$$

Знайдемо похідну, а саме:

$$\dot{x}_2(t) = C_2 \gamma_1^2 e^{-\gamma_1 t} + C_4 \gamma_2^2 e^{-\gamma_2 t}, \quad (5.40)$$

тоді оптимальне керування буде визначено таким чином:

$$\begin{aligned} U(t) &= \dot{x}_2(t) + a_2 x_1(t) + a_1 x_2(t) = \\ &= C_2 \gamma_1^2 e^{-\gamma_1 t} + C_4 \gamma_2^2 e^{-\gamma_2 t} + a_2 C_2 e^{-\gamma_1 t} - a_2 C_4 e^{-\gamma_2 t} - a_1 \gamma_1 C_2 e^{-\gamma_1 t} - a_1 \gamma_2 C_4 e^{-\gamma_2 t}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Рівняння (5.41) являє собою залежність керувального впливу $U^*(t)$ від часу. Таку форму подання результатів оптимізації, тобто у вигляді явної функції часу, називають *оптимальним програматором*.

Отримаємо рівняння *оптимального регулятора*, тобто знайдемо функцію $U(x_1, x_2)$.

Для цього перетворимо систему рівнянь таким чином (5.39):

$$\begin{cases} e^{-\gamma_1 t} = -(x_1 \gamma_1 + x_2) / (C_2 \gamma_1 - C_2 \gamma_2), \\ e^{-\gamma_2 t} = -(x_1 + x_2 \gamma_1) / (C_4 \gamma_1 - C_4 \gamma_2). \end{cases} \quad (5.42)$$

Підставимо отримані вирази для визначення $e^{-\gamma_1 t}$ й $e^{-\gamma_2 t}$ з (5.42) у рівність (5.40), а саме:

$$\dot{x}_2(t) = -[\gamma_1 \gamma_2 x_1(t) + (\gamma_1 + \gamma_2) x_2(t)]. \quad (5.43)$$

Тоді

$$U(t) = \dot{x}_2(t) + a_2 x_1(t) + a_1 x_2(t) = (a_2 - \gamma_1 \gamma_2) x_1(t) + (a_1 - \gamma_1 - \gamma_2) x_2(t). \quad (5.44)$$

Вираз (5.44) являє собою рівняння оптимального регулятора.

Випадок 2. $B^2 < C$.

У цьому разі корені рівняння (5.38) будуть комплексними, а саме:

$$p_{1,2} = \gamma \pm jS, \quad p_{3,4} = -\gamma \pm jS,$$

тут

$$\gamma = \left[\frac{(C^{1/2} - B)}{2} \right]^{1/2}, \quad S = \left[\frac{(C^{1/2} + B)}{2} \right]^{1/2}.$$

Загальний розв'язок системи (5.37) має такий вигляд:

$$x_1(t) = e^{\gamma t} (C_1 \cos St + C_2 \sin St) + e^{-\gamma t} (C_3 \cos St + C_4 \sin St);$$

$$x_2(t) = -\gamma \cdot e^{-\gamma t} (C_3 \cos St + C_4 \sin St) + e^{-\gamma t} (C_4 S \cos St - C_3 S \sin St).$$

Враховуючи, що $x_1(\infty) = x_2(\infty) = 0$, отримуємо значення сталих C_1, C_2 , а саме: $C_1 = C_2 = 0$. Тоді

$$x_1(t) = e^{-\gamma t} (C_3 \cos St + C_4 \sin St);$$

$$x_2(t) = -\gamma \cdot e^{-\gamma t} (C_3 \cos St + C_4 \sin St) + e^{-\gamma t} (C_4 S \cos St - C_3 S \sin St).$$

Значення сталих C_3 й C_4 знаходимо з початкових умов, тобто

$$\begin{cases} x_{10} = C_3, \\ x_{20} = -\gamma C_3 + C_4 S. \end{cases}$$

Запишемо похідну $\dot{x}_2(t)$ через функції $x_1(t)$ і $x_2(t)$, тобто

$$\dot{x}_2(t) = -(\gamma^2 + S^2)x_1(t) - 2\gamma x_2(t).$$

Тепер одержимо рівняння оптимального регулятора, а саме:

$$U(t) = (a_2 - \gamma^2 - S^2)x_1(t) + (a_1 - 2\gamma)x_2(t). \quad (5.45)$$

Таким чином, для оптимізації об'єкта (5.32) відповідно до критерію (5.33) необхідно замкнути об'єкт керування додатним зворотним зв'язком за змінними x_1 й x_2 з такими координатами:

для першого випадку $k_1 = a_2 - \gamma_1\gamma_2$; $k_2 = a_1 - \gamma_1 - \gamma_2$;

для другого випадку $k_1 = a_2 - \gamma^2 - S^2$; $k_2 = a_1 - 2\gamma$.

З урахуванням того, що $y = x_1$ і $\dot{y} = x_2$, структурна схема оптимальної системи буде мати вигляд, який зображено на рис. 5.6.

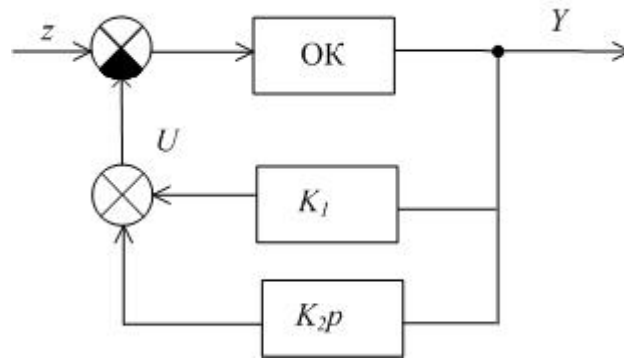


Рис. 5.6. Структурна схема оптимальної системи (до прикладу в § 5.6)

Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте необхідні умови існування екстремуму функціонала.
2. Який порядок має рівняння Ейлера стосовно найпростішої варіаційної задачі?
3. Дайте визначення екстремалі.
4. Яким чином визначають сталі загального розв'язку рівняння Ейлера?
5. Сформулюйте задачу умовної оптимізації Лагранжа.
6. Яким чином будують функцію Лагранжа?
7. Які існують узагальнення найпростішої варіаційної задачі?
8. Скільки невідомих сталих може включати загальний розв'язок рівняння Ейлера? У який спосіб можна їх визначити?
9. Від чого залежить кількість рівнянь Ейлера – Лагранжа в системі відповідної задачі умовної оптимізації Лагранжа?
10. Сформулюйте ізопериметричну задачу, задачі Майєра і Больца. Яким чином вони пов'язані між собою?
11. Який алгоритм синтезу оптимального регулятора?

Задачі до самостійного розв'язування

1. Знайти екстремалі кожного із заданих функціоналів.

a) $J = \int_{-1}^1 (\dot{y}^2 + 4y^2) dt$; $y(-1) = -1$; $y(1) = 1$;

$$\text{б)} J = \int_0^1 (\dot{y}^2 + ty) dt; \quad y(0) = 1; y(1) = 2;$$

$$\text{в)} J = \int_0^1 (1+t)\dot{y}^2 dt; \quad y(0) = 0; y(1) = 1;$$

$$\text{г)} J = \int_0^2 (2y + y^2 - \dot{y}^2) dt; \quad y(0) = 0; y(2) = 1;$$

$$\text{д)} J = \int_0^1 (4\dot{y}^2 + y^2 + 8y) dt; \quad y(0) = 1; y(1) = 2.$$

2. Знайти мінімум кожного з функціоналів завдання 1.

3. Скласти рівняння Ейлера – Лагранжа для сформульованих нижче задач.

$$\text{а)} J = \int_0^1 (48y - \dot{y}^2) dt; \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0; y(1) = 1; \dot{y}(1) = 4;$$

$$\text{б)} J = \int_0^1 (24ty - \dot{y}^2) dt; \quad y(0) = \dot{y}(0) = y(1) = 0; \dot{y}(1) = 1;$$

$$\text{в)} J = \int_0^1 e^{-t} \dot{y}^2 dt; \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0; y(1) = \dot{y}(1) = 2;$$

$$\text{г)} J = \int_0^1 (t+1)\dot{y}^2 dt; \quad y(0) = \dot{y}(0) = \dot{y}(1) = 0; y(1) = 1;$$

$$\text{д)} J = \int_1^2 t^2 \dot{y}^2 dt; \quad y(1) = 2; y(2) = 4; \int_1^2 ty dt = 1;$$

$$\text{е)} J = \int_0^2 (\dot{y}^2 + y^2) dt; \quad y(0) = 1; y(2) = 0; \int_0^2 y^2 dt = 1;$$

$$\text{ж)} J = \int_1^2 (\dot{y}^2 + 2y^2 - y) dt; \quad y(1) = 1; y(2) = 2; \int_1^2 \dot{y}^2 dt = 1.$$

4. Знайти мінімум функціонала з урахуванням заданих обмежень.

$$\text{а)} J = \int_{t_0}^{t_k} (y^2 + g_1 \dot{y} + g_2 \dot{y}^2 + U^2) dt; \quad \ddot{y} + Ty = kU;$$

$$\text{б)} J = \int_{t_0}^{t_k} (y^2 + g_1 \dot{y}^2 + U^2) dt; \quad \ddot{y} + \dot{y} = kU;$$

$$\text{в)} J = \int_{t_0}^{t_k} (y^2 + gU^2) dt; \quad \ddot{y} = kU;$$

$$з) J = \int_{t_0}^{t_k} (y^2 + g\dot{y}^2 + U^2) dt; \quad y + \dot{y} = U;$$

$$д) J = \int_{t_0}^{t_k} (y^2 + g\dot{y}^2 + \dot{y}^2) dt; \quad \dot{y} = U.$$

5. Визначити рівняння оптимального програматора і регулятора та скласти структурну схему оптимальної системи керування об'єктом другого порядку, описаного рівнянням: $\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y = U$, якщо задано такі граничні умови: $y(0) = y_0$; $\dot{y}(0) = y_1$; $y(\infty) = \dot{y}(\infty) = 0$, а критерій ефективності

$J = \int_0^{\infty} (g_1y^2 + g_2\dot{y}^2 + U^2) dt$. Варіанти значень параметрів задачі подано нижче.

а) $a_1 = 3$; $a_2 = 2$; $g_1 = 0,5$; $g_2 = 1,5$; $y_0 = 1$; $y_1 = 0$;

б) $a_1 = 2$; $a_2 = 5$; $g_1 = 0,8$; $g_2 = 2$; $y_0 = 0$; $y_1 = 2$;

в) $a_1 = 1,5$; $a_2 = 2$; $g_1 = 1$; $g_2 = 1,5$; $y_0 = 1$; $y_1 = -1$;

г) $a_1 = 4$; $a_2 = 1,5$; $g_1 = 2$; $g_2 = 2$; $y_0 = 2$; $y_1 = 0$;

д) $a_1 = 3$; $a_2 = 1$; $g_1 = 2$; $g_2 = 0,5$; $y_0 = 2$; $y_1 = 1$;

е) $a_1 = 2$; $a_2 = 6$; $g_1 = 0,5$; $g_2 = 3$; $y_0 = 1$; $y_1 = 1$;

ж) $a_1 = 2,5$; $a_2 = 6$; $g_1 = 1$; $g_2 = 2$; $y_0 = 2$; $y_1 = -1$;

з) $a_1 = 3$; $a_2 = 4$; $g_1 = 2$; $g_2 = 0,5$; $y_0 = 0$; $y_1 = 1$;

к) $a_1 = 2$; $a_2 = 3,5$; $g_1 = 0,5$; $g_2 = 0,5$; $y_0 = 3$; $y_1 = 1$;

л) $a_1 = 0,5$; $a_2 = 0,8$; $g_1 = 0,8$; $g_2 = 1$; $y_0 = -2$; $y_1 = 1$.

РОЗДІЛ 6

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ПРИНЦИПУ МАКСИМУМУ Л.С. ПОНТРЯГІНА

Мета розділу: *вивчення методики, особливостей та сфер застосування принципу максимуму Понтрягіна до розв'язування задач оптимального керування*

При використанні методів класичного варіаційного числення було зроблено такі припущення:

1. Змінні, що входять до функціонала, не мали обмежень II виду;
2. Варіації функціоналів вважалися неперервними (без розривів).

У практичних задачах керування ці умови не завжди виконуються. Так, функції керувальних впливів U , що входять у функціонал, можуть бути кусково-неперервними, тобто зазнавати розривів I роду (рис. 6.1). Як приклад описаної ситуації можна згадати релейні впливи.

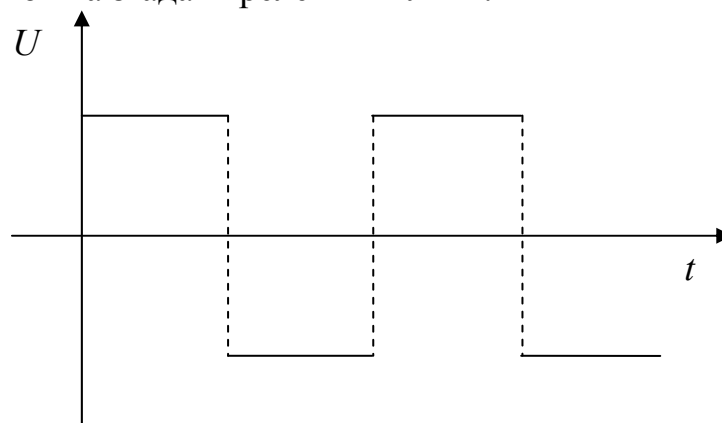


Рис. 6.1. Графік кусково-неперервних керувальних впливів

Зауважимо, що порушення згаданих вище умов, на яких базується класичне варіаційне числення, не дозволяє використовувати описані методи до розв'язування багатьох практичних задач.

Ці труднощі можна подолати, застосовуючи принцип максимуму Понтрягіна (ПМП), розроблений академіком Понтрягіним Л. С. і його учнями.

§ 6.1. Принцип максимуму

Точне доведення принципу максимуму базується на положеннях теорії множин, функціонального аналізу і є досить складним. Враховуючи ж практичну спрямованість цього посібника, тут буде зосереджено увагу на розгляді методики визначення функцій оптимального керування, а теорему

ПМП сформульовано без доведення. Ті, хто зацікавлений у вивченні строгого математичного обґрунтування ПМП, можуть звернутися до літератури [14], де міститься детальна інформація стосовно цього питання.

Через наявність розривів першого роду варіація функції $U(t)$ може бути великою, а це означає, що так само великою може бути і варіація функціонала, тому при розкладанні в ряд Тейлора прирощення функціонала ΔI (див. розділ 5.1) вже не можна обмежуватися тільки лінійними членами розкладання.

За таких умов розробники ПМП ввели поняття голчастої варіації.

Голчаста варіація являє собою приріст варійованої функції оптимального керування $U(t)$ на нескінченно малому відрізку часу ε в момент, коли $t = \tau$ (рис. 6.2).

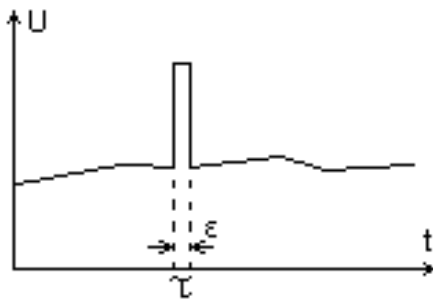


Рис. 6.2. Зображення голчастої варіації функціонала

Як бачимо на графіку, площа цього імпульсу дуже мала, тому й прирощення функціонала буде незначним. Воно буде обертатися на нуль, якщо голчаста варіація функції проводиться відносно оптимального керування $U(t)$. На цьому міркуванні й побудовано доведення теореми ПМП.

Нехай математична модель об'єкта оптимізації задана у вигляді рівнянь стану, а саме:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, U_1, U_2, \dots, U_r), \quad i = \overline{1, n}, \quad (6.1)$$

тут r – кількість координат керування, або у векторній формі, тобто

$$\dot{X} = f(X, U). \quad (6.2)$$

Керувальні впливи можуть мати обмеження стосовно всіх координат, тобто

$$|U_j| \leq U_{j \max}, \quad j = \overline{1, r}. \quad (6.3)$$

Необхідно, щоб під дією керувального впливу U зображальна точка з початкового положення: $X_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$, перемістилася в положення X_k , із координатами $(x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk})$, і при цьому функціонал:

$$I = \int_0^T f_0(X, U) dt, \quad T = t_k, \quad (6.4)$$

набував мінімального значення.

Опишемо методіку розв'язування поставленої задачі.

1. Уведемо нову змінну x_0 , а саме, задамо, що $x_0 = I$.

Тоді з рівності (6.4) випливає, що

$$\dot{x}_0 = f_0(X, U). \quad (6.5)$$

Вектор $\tilde{X} = [x_0(t), x_1(t), \dots, x_n(t)]$ називають *розширеним вектором змінних стану*.

2. Складемо функцію Гамільтона, а саме:

$$H = \sum_{i=0}^n \psi_i(t) f_i(X, U), \quad (6.6)$$

тут $\psi(t) = [\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_n(t)]$, це $(n+1)$ -вимірний вектор, ортогональний розширеному вектору змінних стану.

3. Функція Гамільтона досягає максимуму коли $U(t)$ являє собою оптимальне керування. Тому його необхідно підібрати таким чином, щоб функціонал H , визначений згідно з виразом (6.6), досягав максимуму. Для цього зручно виділити з виразу (6.6) ту частину доданків, котра явно залежить від керування $U(t)$. Її називають *понтрягіаном*.

При максимізації функціонала H оптимальне керування буде визначене через функції $\psi(t)$, які називаються *перемикальними*.

4. Визначимо функції $\psi_i(t)$, $i = 0, 1, \dots, n$ скориставшись канонічними рівняннями Гамільтона, а саме:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \frac{dH}{d\psi_i}; \\ \frac{d\psi_i}{dt} = \frac{dH}{dx_i} = -\sum_k^n \psi_k(t) \frac{df_k}{dx_i}. \end{cases} \quad (6.7)$$

$$i = 0, 1, \dots, n.$$

Теорема Л.С. Понтрягіна. Для того, щоб керування $U(t)$ було оптимальним, необхідне існування такої ненульової вектор-функції $\psi(t)$, котра відповідає згідно з рівняннями (6.7) функціям $U(t)$ і $X(t)$ і забезпечує виконання таких умов:

1. Коли $0 \leq t \leq T$, то функція H досягає максимуму для оптимального керування $U^*(t)$, тобто

$$H[\psi^*(T), x^*(T), U^*(T)] = \max_U H[\psi^*(T), x^*(T), U(T)]. \quad (6.8)$$

2. У кінцевий момент часу, коли $t = T$, виконуються такі співвідношення:

$$\psi_0(T) \leq 1;$$

$$\max H^*[\psi(T), x^*(T)] = 0.$$

Очевидно, що оптимальне керування $U(t)$ виражено через допоміжні функції $\psi(t)$.

Важливо підкреслити, що друге рівняння в системі (6.7) є визначенням функцій $\psi_i(t)$, $i=0,1,\dots,n$. Тому на питання: «Що являють собою функції $\psi(t)$?» – відповідь буде такою: це функції, які задовольняють рівняння (6.7). Ці рівняння називають *канонічно сполученими*.

Особливістю принципу максимуму є те, що варіаційну задачу відшукування функції $U^*(t)$, яка забезпечує екстремум функціоналу, замінено набагато простішою задачею математичного аналізу – визначенням параметра $U^*(t)$, який забезпечує максимум допоміжної функції H . Звідси і назва методу.

§ 6.2. Застосування ПМП для синтезу оптимальних систем

Методику синтезу проілюструємо на конкретному прикладі.

Приклад 6.1. Розглянемо систему керування двигуном постійного струму з незалежним збудженням (схему подано на рис. 6.3). При незмінному магнітному потоці Φ залежність кута повороту вала α від струму якоря i описано таким рівнянням:

$$ic\Phi = I \frac{d^2\alpha}{dt^2} + M_o, \quad (6.9)$$

тут i – струм у якорі, Φ – магнітний потік, c – коефіцієнт, I – момент інерції якоря і навантаження, α – кут повороту вала, M_o – момент опору.

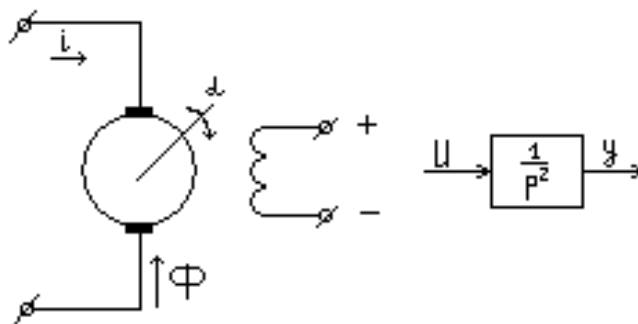


Рис. 6.3. Схема системи керування двигуном (до прикладу 6.1)

Припустимо, що $M_o \approx 0$. Критерієм оптимальності виступає час перехідного процесу, тобто

$$I = \int_0^T dt = T \rightarrow \min. \quad (6.10)$$

При цьому необхідно, щоб вал повернувся на заданий кут α_0 . На величину керувального впливу накладено природні обмеження, тобто $|i| \leq i_{\max}$. Уведемо такі позначення: $i \rightarrow U$, $\alpha \rightarrow y$.

Обираючи відповідний масштаб, рівняння (6.9) можна записати таким чином:

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= U, \quad |U| \leq 1; \\ I &= \int_0^T dt = T \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Запишемо модель об'єкта у змінних стану. Позначимо, що $x_1 = y$, тоді

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= U; \\ |U| &\leq 1. \end{aligned} \quad (6.11)$$

1. Введемо змінну $x_0 = I$, тоді розширена система рівнянь набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= 1; \\ \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= U. \end{aligned}$$

2. Складемо функцію Гамільтона, тобто

$$H = \sum_{i=0}^2 \psi_i f_i = \psi_0 \cdot 1 + \psi_1 x_2 + \psi_2 U.$$

3. Виділимо із цієї функції частину, залежну від керування U , а саме:

$$H' = \psi_2 U.$$

Очевидно, що для максимізації функції H' необхідно максимізувати добуток $\psi_2(t) \cdot U$, а саме:

$$\psi_2(t) \cdot U \rightarrow \max_{|U| \leq 1}.$$

Значення U необхідно обирати на межі інтервала, тобто, щоб $U = +1$ або $U = -1$, тоді

$$U = \begin{cases} -1, & \text{коли } \psi_2(t) < 0, \\ 1, & \text{коли } \psi_2(t) > 0. \end{cases}$$

Отже, цей закон керування можна записати таким чином: $U = \text{sign } \psi_2(t)$.

4. Для визначення функцій $\psi_i(t)$, $i = 0, 1, 2$ складемо та розв'яжемо диференціальні рівняння, а саме:

$$\dot{\psi}_0 = -\frac{dH}{dx_0} = 0, \text{ значить, } \psi_0 = \text{const} = C_0;$$

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{dH}{dx_1} = 0, \text{ отже, } \psi_1 = \text{const} = C_1;$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{dH}{dx_2} = -\psi_1, \text{ тоді } \psi_2 = C_2 - C_1 t.$$

Тепер остаточний результат має такий вигляд: $U = \text{sign} (C_2 - C_1 t)$.

Оскільки функція $(C_2 - C_1 t)$ може змінювати свій знак не більше одного разу, то оптимальне керування буде являти собою кусково-сталу функцію, котра набуває граничних значень $+1$ або -1 і має не більше двох інтервалів сталості. Залежно від початкового стану, керувальні послідовності будуть мати такий вигляд: $\{+1\}$, $\{-1\}$, $\{+1, -1\}$, $\{-1, +1\}$.

Припустимо, що необхідно знайти керування, яке переводить об'єкт з деякого початкового стану: $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$, у початок координат, тобто $x_1(T) = x_2(T) = 0$. Тоді маємо таку систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = U; \end{cases}$$

$$x_1(0) = x_{10}; \quad x_2(0) = x_{20}.$$

Визначимо загальний розв'язок цієї системи, вважаючи, що керування є кусково-сталою функцією, тобто

$$\begin{cases} x_2(t) = Ut + C_1, \\ x_1(t) = U \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2; \end{cases}$$

$$t = \frac{x_2 - x_{20}}{U}.$$

З урахуванням початкових умов обчислюємо сталі: $C_1 = x_{20}$, $C_2 = x_{10}$. Вилучивши параметр t з останньої системи рівнянь, маємо такий вираз для опису фазових траєкторій:

$$x_1 - x_{10} = \frac{1}{2U} (x_2^2 - x_{20}^2). \quad (6.12)$$

Зобразимо фазові траєкторії системи, відповідні рівнянню (6.12). Кожна точка на фазовій площині (див. рис. 6.4) відповідає деяким початковим умовам, а саме: коли точки лежать на кривій AO , то оптимальне керування буде таким: $U = \{-1\}$ (див. рис. 6.5, *a*), коли вони перебувають на кривій BO , то керування $U = \{+1\}$ (рис. 6.5, *б*), якщо точки, перебувають під кривою AOB , то оптимальним буде керування $U = \{+1, -1\}$ (рис. 6.5, *в*); а коли над кривою AOB , то $U = \{-1, +1\}$ (рис. 6.5, *г*).

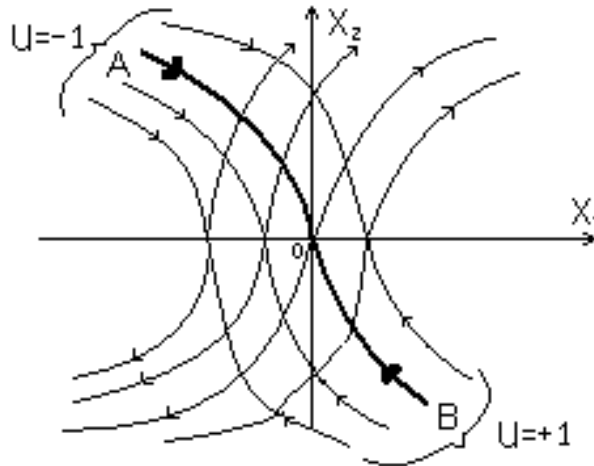


Рис. 6.4. Зображення фазових траєкторій СК до прикладу 6.1

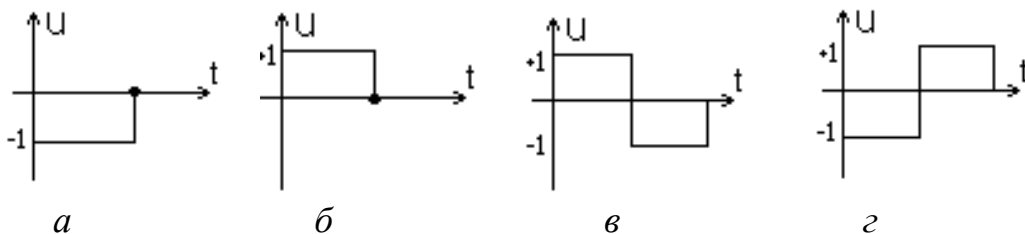


Рис. 6.5. Графічна інтерпретація оптимального керування залежно від початкових даних

Отже, закон керування регулятора реалізується в такому вигляді:

$$U^*(x_1, x_2) = \text{sign} \left(-x_1 - \frac{(x_2 \cdot |x_2|)}{2} \right).$$

Крива AOB на фазовій площині називається *лінією перемикання* (рис. 6.6).

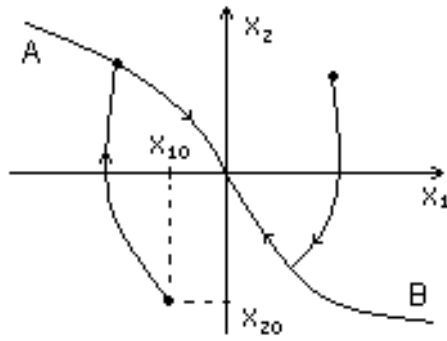


Рис. 6.6. Лінія перемикання

Структурну схему оптимальної системи керування показано на рис. 6.7, тут $F(x_2) = \frac{x_2 \cdot |x_2|}{2}$.

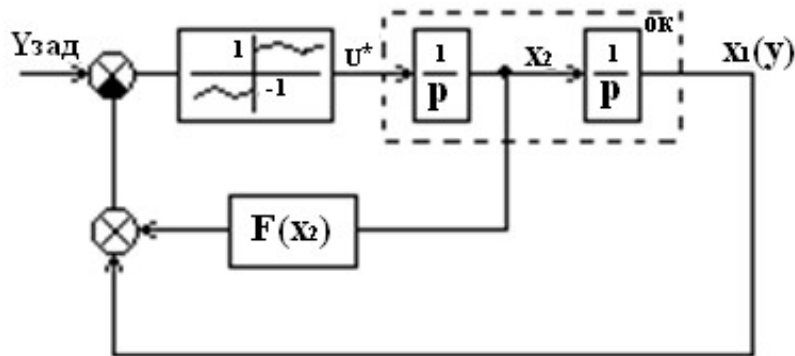


Рис. 6.7. Структурна схема оптимальної системи керування до прикладу 6.1

Наведемо ще один приклад.

Приклад 6.2. Розглянемо систему виробництва деякої продукції. Нехай вихідний показник y об'єкта керування – це кількість продукції, що випускається. Тоді задачу максимізації такого функціонала:

$$I = \int_0^T \dot{y}(t) dt \rightarrow \max,$$

можна інтерпретувати як задачу про максимальний випуск продукту протягом даного періоду $0 \div T$.

Рівняння: $\ddot{y} = U$, яке описує рух ОК, являє собою обмеження першого виду, а нерівність $|U| \leq 1$ – це обмеження другого виду.

Для розв'язування задачі синтезу оптимальної СК спочатку перейдемо до змінних стану, а саме: $y = x_1$, тоді

$$I = \int_0^T x_2 dt \rightarrow \max;$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = U.$$

Далі застосовуємо методику, описану в попередньому параграфі, а саме:

1. Записуємо розширену систему, тобто

$$\dot{x}_0 = x_2; \dot{x}_1 = x_2; \dot{x}_2 = x_3; \dot{x}_3 = U.$$

2. Функція Гамільтона буде мати такий вигляд:

$$H = \sum_{i=0}^3 \psi_i f_i = \psi_0 x_2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 x_3 + \psi_3 U.$$

3. Виділимо частину функції H , яка залежить від U , а саме: $H' = \psi_3 U$.

Звідси $U = \text{sign } \psi_3$.

4. Тепер складемо й розв'яжемо рівняння для визначення функцій $\psi_i(t)$, $i = 0, \dots, 3$, а саме:

$$\frac{d\psi_0}{dt} = -\frac{dH}{dx_0} = 0, \quad \psi_0 = \text{const} = C_0;$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{dH}{dx_1} = 0, \quad \psi_1 = \text{const} = C_1;$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{dH}{dx_2} = -(\psi_0 + \psi_1), \quad \psi_2 = -(C_0 + C_1)t + C_2;$$

$$\frac{d\psi_3}{dt} = -\frac{dH}{dx_3} = -\psi_2, \quad \psi_3 = \frac{(C_0 + C_1)t^2}{2} - C_2t + C_3.$$

Беручи до уваги вигляд функції ψ_3 , робимо висновок, що оптимальне керування являє собою кусково-сталу функцію, яка набуває граничних значень $+1$ або -1 , маючи не більше трьох інтервалів сталості.

§ 6.3. Зв'язок оптимального керування з енергією, накопиченою в об'єкті керування

Розглянемо процес зміни струму в електричному RL -колі (див. схему на рис. 6.8).

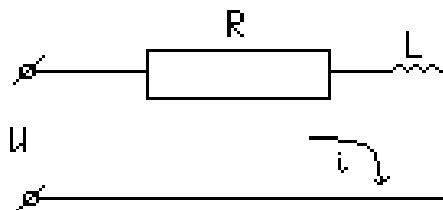


Рис. 6.8. Схема RL -кола

Процес можна описати таким рівнянням: $L \frac{di}{dt} + Ri = 0$.

Припустимо, що $i(0) = 0$, $U = E = \text{const}$ – задане значення напруги;
 $I = \frac{E}{R}$ – задане (усталене) значення струму, тоді

$$\frac{Ldi}{Rdt} + i = \frac{1}{R}E.$$

Позначимо силу струму i через x , тепер рівняння набуває такого вигляду:

$$\frac{L}{R}\dot{x} + x = \frac{1}{R}E.$$

Його розв'язок має такий вигляд:

$$x(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-pt}),$$

тут $p = \frac{R}{L}$, це корінь характеристичного рівняння.

Процес зміни струму при подачі на вхід у коло напруги $U(t)$ і за нульових початкових умов показано на рис. 6.9.

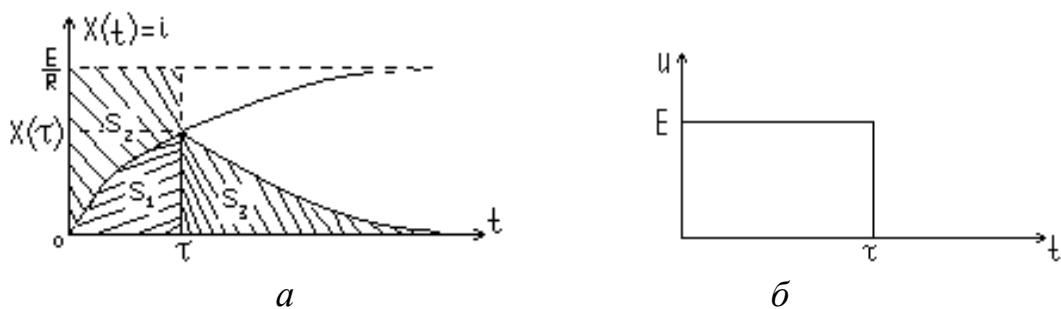


Рис. 6.9. Графічна інтерпретація: *a* – процесу зміни струму в колі; *б* – напруги

Площі заштрихованих ділянок на рис. 6.9 обчислюються за наведеними нижче формулами.

$$S_1 = \int_0^{\tau} x(t) dt = \frac{E}{R} \int_0^{\tau} (1 - e^{-pt}) dt,$$

$$S_2 = \int_0^{\tau} \left[\frac{E}{R} - x(t) \right] dt = \int_0^{\tau} \left[\frac{E}{R} - \frac{E}{R}(1 - e^{-pt}) \right] dt = \frac{E}{R} \int_0^{\tau} e^{-pt} dt = -\frac{E}{pR} e^{-pt} \Big|_0^{\tau} =$$

$$= \frac{E}{pR} (1 - e^{-p\tau}).$$

Обчислимо площу S_3 , враховуючи, що $x(t - \tau) = \frac{E}{R}(1 - e^{-p\tau}) \cdot e^{-p(t-\tau)}$, коли $t \geq \tau$, а саме:

$$S_3 = \int_{\tau}^{\infty} x(t - \tau) dt = \int_{\tau}^{\infty} \frac{E}{R}(1 - e^{-p\tau}) \cdot e^{-p(t-\tau)} dt = \frac{E}{R}(1 - e^{-p\tau}) \cdot e^{p\tau} \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} dt =$$

$$= -\frac{E}{pR}(1 - e^{-p\tau}) \cdot e^{p\tau} \cdot e^{-pt} \Big|_{\tau}^{\infty} = -\frac{E}{pR}(1 - e^{-p\tau}) \cdot e^{p\tau} \cdot (0 - e^{-p\tau}) = \frac{E}{pR}(1 - e^{-p\tau}) = S_2.$$

Рівність площ S_2 і S_3 означає, що накопичена до моменту τ в котушці магнітна енергія після зняття напруги виділяється у вигляді тепла на активному елементі R .

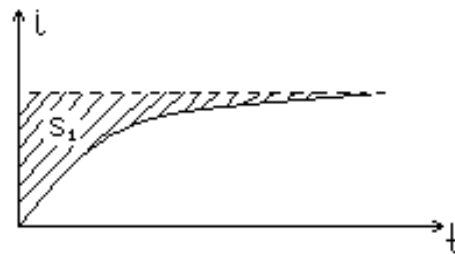


Рис. 6.10. Графік процесу зміни струму в RL -колі

Причому, коли $T \rightarrow \infty$, то площа $S_2 = \frac{E}{Rp}$.

Тепер магнітну енергію, збережену в інерційному елементі L , можна описати таким чином: $\frac{E_1 S_2}{2} = \frac{E^2}{2Rp} = \frac{E^2 L}{2R^2} = \frac{i_0^2 L}{2}$.

Це означає, що для того, аби інерційна система досягла сталого режиму на виході, вона має накопичити певну кількість енергії S_2 .

Подамо на вхід в електричне коло максимально можливу напругу живлення, тобто $U = E_{\max}$ (див. рис. 6.11).

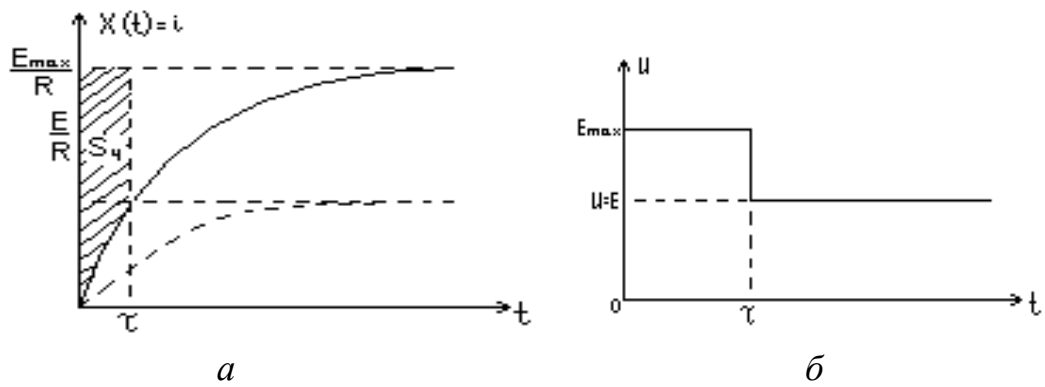


Рис. 6.11. Графік зміни: *a* – сили струму залежно від напруги на вході,

тобто $x(t) = \frac{E_{\max}}{R}(1 - e^{-pT})$; *б* – напруги

У момент досягнення вихідною координатою заданого значення, тобто, коли $x = \frac{E}{R}$, знизимо напругу на вході до заданої (рис. 6.11, б). Визначимо кількість енергії, нагромадженої системою під впливом такого керування до моменту часу τ . Очевидно, на графіку їй відповідає площа S_4 (рис. 6.4, а). Обчислимо її таким чином:

$$x_{1\text{зад}} = \frac{E}{R} = \frac{E_{\max}}{R}(1 - e^{-p\tau}) \rightarrow (1 - e^{-p\tau}) = \frac{E}{E_{\max}};$$

$$S_4 = \int_0^T \frac{E_{\max}}{R} e^{-pt} dt = \frac{E_{\max}}{Rp}(1 - e^{-p\tau}) = \frac{E}{Rp}.$$

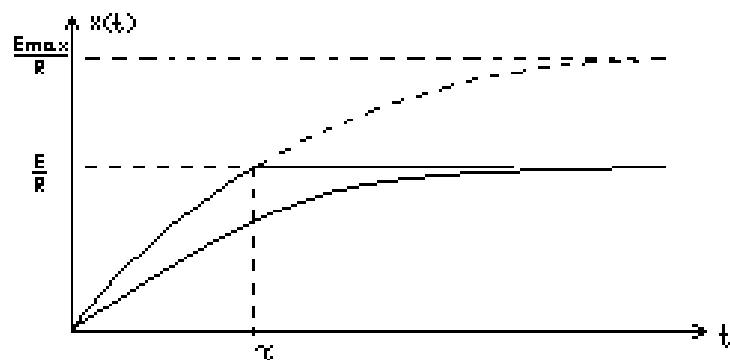


Рис. 6.12. Графік процесу на виході об'єкта при оптимальному керуванні

Значить $S_4 = S_2$ і система накопичує під впливом форсованого керування необхідну кількість енергії.

Таким чином, якщо на вхід об'єкта подати східчастий вплив із заданою напругою U , то перехідний процес триває нескінченно довго. При дії форсованого керування ми отримуємо усталене значення вихідної координати протягом скінченного часу, а саме протягом мінімального часу для даної напруги E_{\max} .

Розглянемо поведінку об'єкта, який описується таким диференціальним рівнянням другого порядку: $T_1 T_2 \ddot{x} + (T_1 + T_2) \dot{x} + x = kU$. Процеси на вході й виході такого об'єкта зображено на рис. 6.13.

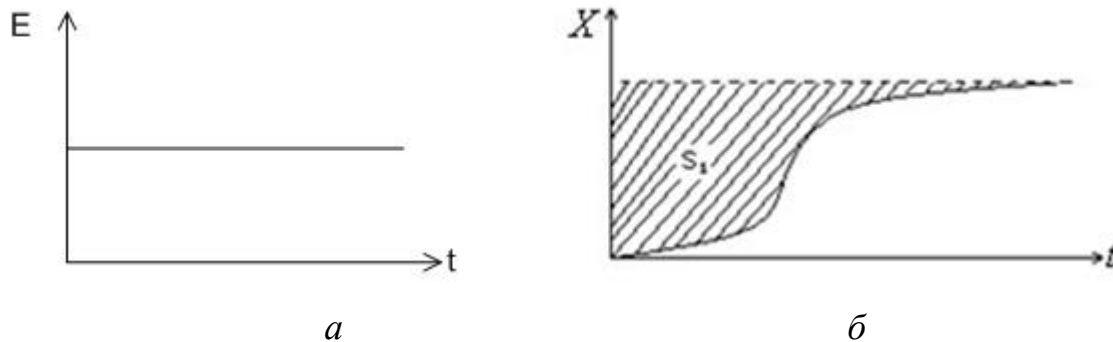


Рис. 6.13. Графіки перебігу процесів: *a* – на вході; *б* – на виході об'єкта другого порядку

Припустимо, що $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, напруга $U = E$ – задана, тоді $x_{\text{зад}} = kE$.

Перехідний процес, котрий підлягає такому керуванню, прямує до заданого значення нескінченно довго.

Застосуємо форсоване керування до моменту досягнення вихідною координатою заданого значення (рис. 6.14).

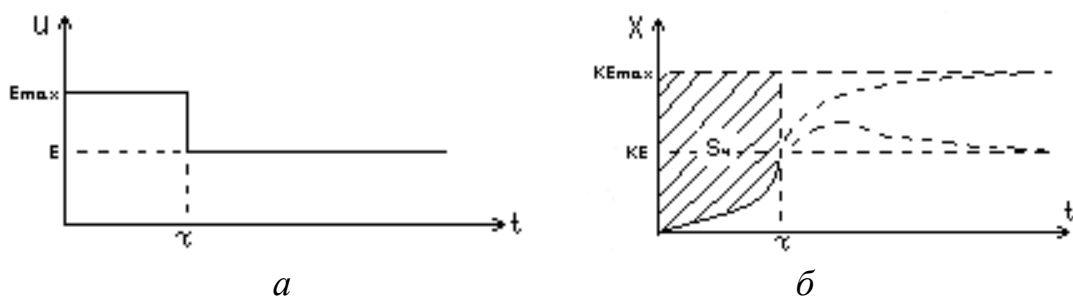


Рис. 6.14. Графіки: *a* – форсованого керування об'єктом другого порядку; *б* – перехідного процесу під впливом такого керування

Виконуючи обчислення, аналогічні тим, що проводились для об'єкта першого порядку, можна довести, що стосовно об'єктів другого порядку і вище $S_4 > S_2$. Оскільки в момент часу τ , коли вихідна величина досягла номінального значення, відбулося накопичення енергії до рівня, який перевищує рівень номінального режиму S_2 , то навіть при зміні регульованої величини від E_{\max} до E в момент часу τ вихідна величина матиме

перерегулювання і буде нескінченно довго прямувати до заданого значення. Якщо ж перемикання робити, коли $t \leq \tau$, то буде спостерігатися «дотягування», котре також буде тривати нескінченно довго. Тому за описаних умов чинять так: у проміжку часу $(t_1 - t_2)$ витрачається надлишок запасу енергії шляхом застосування на вході кола впливу $(-E_{\max})$. Таким чином, у процесі керування об'єктом другого порядку відбуваються два перемикання (див. рис. 6.15).

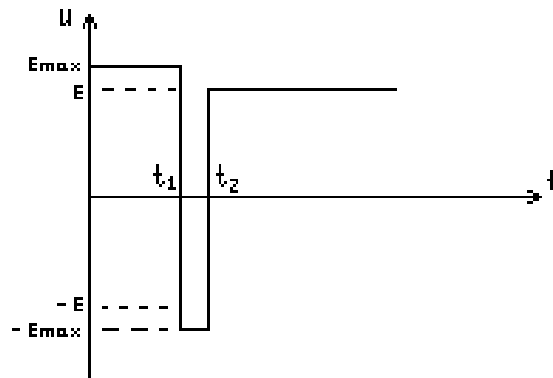


Рис. 6.15. Графік оптимального керування об'єктом другого порядку

§ 6.4. Теорема про n інтервалів

Як свідчить матеріал прикладів, розглянутих у § 6.3, особливість оптимального керування, полягає в тому, що керувальний вплив є кусково-сталю функцією, котра набуває граничних значень і має не більше двох або трьох інтервалів сталості. Зауважимо, що обидві розглянуті задачі є лінійними, тобто лінійними є рівняння системи та функціонал, а крім того, в обох задачах характеристичні рівняння мають дійсні корені.

Отже, можемо сформулювати теорему.

Теорема (про n інтервалів). Для лінійної системи n -го порядку, всі корені характеристичного рівняння якої дійсні, а для керування задано обмеження у вигляді нерівності $|U| \leq 1$, оптимальне керування $U(t)$, що забезпечує екстремум лінійному функціоналу, являє собою кусково-сталу функцію, яка набуває граничних значень $+1$, -1 і має не більше n інтервалів сталості.

Приклад 6.3. Розглянемо лінійний об'єкт (його схему подано на рис. 6.16), якому властива передавальна функція такого вигляду:

$$W(p) = \frac{K_1 K_2 K_3}{p(p + \alpha_1)(p + \alpha_2)}.$$

Задача оптимального керування описується в цьому разі таким чином:

$$I = \int_0^T dt \rightarrow \min, |U| \leq 1.$$

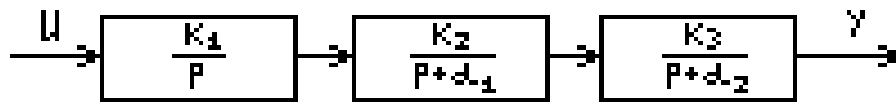


Рис. 6.16. Схема об'єкта керування до прикладу 6.3

Вочевидь, оптимальним буде керування, котре, згідно з теоремою про n інтервалів, являє собою кусково-сталу функцію, яка набуває значення $+1$ або -1 , та має не більше трьох інтервалів сталості (наприклад, як на рис. 6.17).

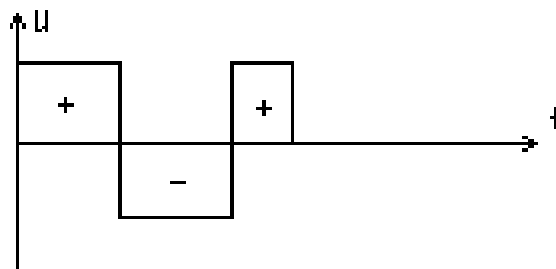


Рис. 6.17. Схема кусково-сталого керування

Теорема про n інтервалів була вперше сформульована і доведена в 1949 р. А.А. Фельдбаумом. Нижче подаємо доведення цієї теореми за допомогою принципу максимуму Понтрягіна.

Доведення

Нехай лінійний об'єкт керування n -го порядку описується таким диференціальним рівнянням:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = bU, \quad (6.13)$$

причому $|U| \leq U_{\max}$.

Крім того припустимо, що функціонал лінійний і для спрощення будемо вважати його незалежним від функції керування U . Цим умовам буде відповідати такий функціонал:

$$I = \int_0^T dt \rightarrow \min.$$

Позначимо, що $y = x_1$, і перейдемо від рівняння (6.13) до моделі в змінних стану, тобто

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dots \\ \dot{x}_n = -a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \dots - a_n x_1 + bU. \end{cases}$$

Складемо розширену систему, а саме:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = 1, \\ \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dots \\ \dot{x}_n = -a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \dots - a_n x_1 + bU. \end{cases}$$

Тепер запишемо функцію Гамільтона, тобто

$$H = \sum_{i=1}^n \psi_i f_i = \psi_0 \cdot 1 + \psi_1 x_2 + \psi_2 x_3 + \dots + \psi_n (-a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \dots - a_n x_1) + \psi_n bU.$$

У виразі, котрий описує функцію Гамільтона, від керування залежить тільки останній доданок, тому

$$H' = \psi_n bU..$$

Очевидно, що функція керування U , яка забезпечує максимум функції H' , має такий вигляд:

$$U(t) = U_{\max} \text{sign } \psi_n(t).$$

Тобто функція $U(t)$ набуває тільки двох значень $\{+U_{\max}; -U_{\max}\}$ і змінює знак стільки разів, скільки графік функції $\psi_n(t)$ перетинає вісь часу t . Для визначення $\psi_n(t)$ складемо відповідну систему рівнянь, а саме:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0 = -\frac{dH}{dx_0} = 0, \\ \dot{\psi}_1 = -\frac{dH}{dx_1} = \psi_n a_n, \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{dH}{dx_2} = \psi_n a_{n-1} - \psi_1, \\ \dot{\psi}_3 = -\frac{dH}{dx_3} = \psi_n a_{n-2} - \psi_2, \\ \dots \\ \dot{\psi}_n = -\frac{dH}{dx_n} = \psi_n a_1 - \psi_{n-1}. \end{cases} \quad (6.14)$$

З першого рівняння системи випливає, що $\psi_0 = \text{const}$.

Віднімемо від першого рівняння системи (6.14) решту рівнянь, попередньо продиференціювавши друге рівняння один раз і помноживши його на $(-1)^1$, третє – двічі і помноживши його на $(-1)^2$ і т. д. до останнього рівняння, продиференціювавши його $(n-1)$ раз і помноживши на $(-1)^{n-1}$. У результаті проведених операцій отримаємо таке рівняння:

$$(-1)^{n-1} \psi_n^{(n)} = a_n \psi_n + (-1) a_{n-1} \dot{\psi}_n + (-1)^2 a_{n-2} \ddot{\psi}_n + \dots + (-1)^{n-1} a_1 \psi_n^{(n-1)}. \quad (6.15)$$

Відповідне йому характеристичне рівняння буде мати такий вигляд:

$$(-1)^n p^n + (-1)^{n-1} a_1 p^{n-1} + (-1)^{n-2} a_2 p^{n-2} + \dots + (-1) a_{n-1} p + a_n = 0,$$

а його корені, з огляду на теорему Вієта, відрізняються від коренів характеристичного рівняння системи (6.13) тільки знаком, тому

$$\psi_n(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}. \quad (6.16)$$

З рівності (6.16) очевидно, що $\psi_n(t)$ як сума складена з n експонент не більше $(n-1)$ разів може змінювати свій знак, тому керування $U = U_{\max} \text{sign } \psi_n(t)$, і буде мати не більше ніж n інтервалів сталості. Теорему доведено.

§ 6.5. Визначення моментів перемикання керувальної функції в задачі про швидкодію. Метод «склеювання» рішень

Проілюструємо використання згаданого методу на прикладі процесу керування об'єктом другого порядку. Розглянемо систему, описану такою моделлю:

$$T_1 T_2 \ddot{y} + (T_1 + T_2) \dot{y} + y = kU; \quad y(0) = y_0; \quad \dot{y}(0) = 0; \quad (6.17)$$

$$J = \int_0^T dt \rightarrow \min; \quad y(T) = y_K; \quad \dot{y}(T) = 0;$$

$$|U| \leq U_{\max}.$$

Складемо характеристичне рівняння, тобто

$$T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2) p + 1 = 0,$$

та визначимо його корені, а саме:

$$p_1 = -\frac{1}{T_1}, \quad p_2 = -\frac{1}{T_2}.$$

Як бачимо, корені характеристичного рівняння об'єкта дійсні, а це означає, що оптимальне керування буде мати не більше двох інтервалів сталості (див. рис. 6.18). Знак керувального впливу на першому інтервалі визначається таким чином:

$$\text{sign}(U) = \text{sign}(y_k - y_0).$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (6.17), коли $U = \text{const}$, має такий вигляд:

$$y(t) = C_1 e^{-\frac{t}{T_1}} + C_2 e^{-\frac{t}{T_2}} + C_0. \quad (6.18)$$

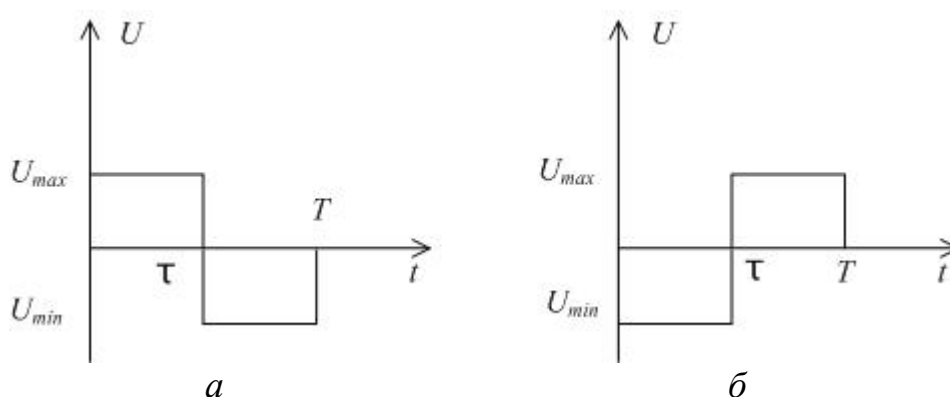


Рис. 6.18. Можливий вигляд оптимального керування системою, що описана моделлю (6.17)

Припустимо, що функція керування на першому інтервалі має від'ємне значення, тобто $U = -U_{\max}$. Тоді рівняння (6.18) стосовно першого інтервалу буде мати такий вигляд:

$$y_1(t) = C_{11} e^{-\frac{t}{T_1}} + C_{12} e^{-\frac{t}{T_2}} - kU_{\max}, \quad (6.19)$$

а відносно другого інтервалу:

$$y_2(t) = C_{21} e^{-\frac{t}{T_1}} + C_{22} e^{-\frac{t}{T_2}} + kU_{\max}. \quad (6.20)$$

Крім того, при керуванні об'єктом другого порядку в момент перемикання τ мають виконуватися умови стикування, а саме:

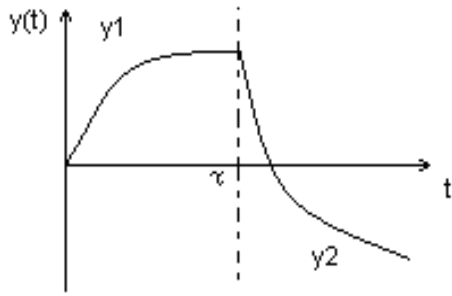


Рис. 6.19. Графічна інтерпретація умови стикування функцій

$$\begin{cases} y_1(\tau) = y_2(\tau), \\ \dot{y}_1(\tau) = \dot{y}_2(\tau). \end{cases} \quad (6.21)$$

У рівняннях (6.19), (6.20), (6.21) маємо шість невідомих змінних: C_{11} , C_{12} , C_{21} , C_{22} , T , τ .

Для їх визначення скористаємося початковими умовами та умовами стикування (6.21).

Продиференціюємо рівняння (6.19), а саме:

$$\dot{y}_1(t) = -\frac{C_{11}}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{C_{12}}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}},$$

а потім скористаємося початковими умовами, тобто

$$y(0) = C_{11} + C_{12} - KU_{\max} = y_0;$$

$$\dot{y}(0) = -\frac{C_{11}}{T_1} - \frac{C_{12}}{T_2} = 0.$$

Отже, маємо таку систему рівнянь для визначення сталих C_{11}, C_{12} :

$$\begin{cases} C_{11} + C_{12} = y_0 + kU_{\max}, \\ -\frac{1}{T_1} C_{11} - \frac{1}{T_2} C_{12} = 0. \end{cases}$$

Продиференціюємо вираз (6.20) і скористаємося кінцевими умовами, а саме:

$$\dot{y}_2(t) = -\frac{C_{21}}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{C_{22}}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}};$$

$$\begin{cases} y(T) = -e^{-\frac{T}{T_1}} - e^{-\frac{T}{T_2}} kU_{\max} = y_k, \\ y(T) = -\frac{C_{21}}{T_1} e^{-\frac{T}{T_1}} - \frac{C_{22}}{T_2} e^{-\frac{T}{T_2}} = 0. \end{cases} \quad (6.22)$$

Із системи (6.22) виведемо вираз для визначення сталих C_{21} й C_{22} через $e^{-\frac{T}{T_1}}$ і $e^{-\frac{T}{T_2}}$.

Скористаємося тепер рівняннями стикування (6.21), тобто

$$\begin{cases} C_{11}e^{-\frac{\tau}{T_1}} + C_{12}e^{-\frac{\tau}{T_2}} - kU_{\max} = C_{21}e^{-\frac{\tau}{T_1}} + C_{22}e^{-\frac{\tau}{T_2}} + kU_{\max}, \\ -\frac{C_{11}}{T_1}e^{-\frac{\tau}{T_1}} - \frac{C_{12}}{T_2}e^{-\frac{\tau}{T_2}} = -\frac{C_{21}}{T_1}e^{-\frac{\tau}{T_1}} - \frac{C_{22}}{T_2}e^{-\frac{\tau}{T_2}}. \end{cases} \quad (6.23)$$

Підставимо в систему (6.23) раніше визначені коефіцієнти C_{11} , C_{12} , C_{21} , C_{22} , в результаті чого одержимо систему двох рівнянь з двома невідомими τ і T .

Зауважимо, що об'єкт третього порядку буде мати три інтервали керування, а невідомих буде дванадцять і, відповідно, об'єкт n -го порядку – $n(n+1)$ невідомих і $n(n+1)$ умов для їх визначення.

§ 6.6. Задача про керування консервативним об'єктом

Якщо корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені або задача керування нелінійна, то теорема про n інтервалів не може бути застосована. Переконаємося в цьому на прикладі.

Приклад 6.4. Розглянемо об'єкт, описаний таким рівнянням:

$$\dot{y} + y = U.$$

Необхідно протягом мінімального часу перевести його з початкового стану $y(0)$, $\dot{y}(0)$ в кінцевий $y(T)$, $\dot{y}(T)$, тобто розв'язати задачу мінімізації такого функціонала:

$$J = \int_0^T dt \rightarrow \min,$$

коли задане обмеження на керування $|U| \leq 1$.

Розв'язування

Спочатку запишемо задачу в змінних стану, тобто

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = U - x_1, \\ y = x_1. \end{cases}$$

Тепер дослідимо систему на керованість і спостережуваність. Для цього запишемо відповідні даній системі матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 0).$$

Щоб оцінити керованість системи, необхідно визначити ранг такої матриці: $G = (B:AB)$, тобто

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$G = (B:AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Її визначник $\det G = -1 \neq 0$, отже, $\text{rang } G = 2$ і система повністю керована.

Для дослідження спостережуваності системи обчислимо таку матрицю: $H = (C^T : A^T C^T)$, та її ранг, а саме:

$$A^T C^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$H = (C^T : A^T C^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Її визначник $\det H = 1 \neq 0$, $\text{rang } H = 2$, отже, система повністю спостережувана.

Тепер складемо функцію Гамільтона і виділимо частину, яка залежить від керування U , тобто

$$H = \sum_{i=1}^2 \psi_i \dot{x}_i = \psi_1 x_2 - \psi_2 x_1 + \psi_2 U,$$

$$H' = \psi_2 U.$$

Очевидно, що функція H' досягає максимального значення, коли

$$U = 1 \cdot \text{sign } \psi_2.$$

Для визначення функцій ψ_1 , ψ_2 складемо систему диференціальних рівнянь, а саме:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1. \end{cases}$$

Далі переходимо від оригіналів до їхніх зображень:

$$\begin{cases} p\psi_1(p) - \psi_1(0) = \psi_2(p), \\ p\psi_2(p) - \psi_2(0) = -\psi_1(p). \end{cases}$$

Після перетворення останньої системи

$$\psi_2(p) = \frac{-\psi_1(0) + \psi_2(0)}{p^2 + 1}.$$

Повертаючись до оригіналів, маємо такий результат:

$$\psi_2(t) = A \sin(t + \alpha_0);$$

$$\psi_1(t) = -A \cos(t + \alpha_0).$$

Отже, $U = \text{sign} [\sin(t + \alpha_0)]$.

Таким чином, кількість інтервалів сталості керування U може бути і більшою двох, що залежить від початкових умов (див. рис. 6.20).

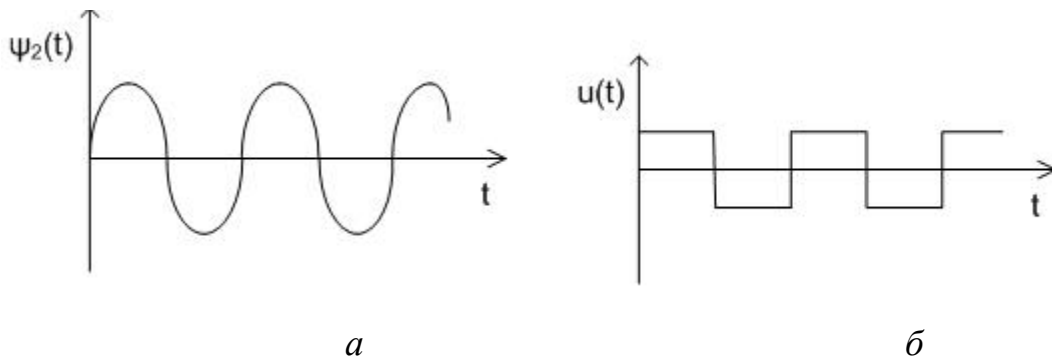


Рис. 6.20. Графічне зображення: *a* – функції ψ_2 ; *б* – відповідного їй керування

§ 6.7. Аналітичний синтез оптимальних регуляторів відповідно до квадратичного критерію якості за допомогою принципу максимуму Понтрягіна

Постановка задачі. Припустимо, що об'єкт керування описується системою рівнянь у змінних стану, а саме:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{k=1}^r b_{ik} U_k, \quad i = \overline{1, n},$$

або у векторній формі

$$\dot{X} = A \times X + B \times U, \quad (6.24)$$

тут A – матриця коефіцієнтів розміру $n \times n$; B – матриця розміру $n \times r$; X – n -вимірний вектор координат станів; U – r -вимірний вектор керування.

Потрібно синтезувати регулятор стану, тобто визначити таке правило (закон) перетворення вектора X на вектор U , щоб функціонал:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (X^T Q X + U^T R U) dt,$$

набував мінімального значення.

Тут X^T , U^T – транспоновані вектори станів і керування відповідно; Q – симетрична квадратна матриця вагових коефіцієнтів розміру $n \times n$; g_{ij} – коефіцієнт перед доданком $x_i x_j$; R – симетрична квадратна матриця розміру $r \times r$; r_{ij} – коефіцієнт перед доданком $U_i U_j$.

У багатьох практичних задачах матриці Q і R є діагональними. Тоді в підінтегральному виразі функціонала присутні тільки квадрати змінних x_i^2 , $i = 1, 2, \dots, n$, і U_j^2 , $j = 1, 2, \dots, r$, із відповідними коефіцієнтами.

Конкретизуємо описане завдання.

Приклад 6.5. Нехай маємо таку задачу пошуку оптимального керування:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + q_3 x_3^2 + r_2 u_2^2) dt \rightarrow \min, \quad (6.25)$$

$$\text{тут } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Відповідно, } X^T = [x_1 \quad x_2 \quad x_3], \quad U^T = [u_1 \quad u_2].$$

У матричному записі інтеграл набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (X^T Q X + U^T R U) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left([x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [u_1 \quad u_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \right) dt. \end{aligned}$$

Дійсно, виконавши перетворення останнього виразу, отримуємо рівність (6.25).

Для синтезу оптимального регулятора скористаємося методикою ПМП, застосувавши її до векторно-матричних рівнянь.

1. Уведемо допоміжну змінну, і перетворимо вираз, який описує функціонал, таким чином:

$$x_0 = I, \quad \dot{x}_0 = \frac{1}{2} (X^T Q X + U^T R U), \quad (6.26)$$

2. Приєднаємо рівняння (6.26) до векторного рівняння об'єкта (6.24), унаслідок чого отримаємо розширену систему, тобто

$$\dot{x}_0 = \frac{1}{2}(X^T Q X + U^T R U);$$

$$\dot{X} = A \times X + B \times U.$$

3. Складемо функцію Гамільтона, а саме:

$$H = \frac{1}{2}\psi_0(X^T Q X + U^T R U) + \psi^T A X + \psi^T B U, \quad (6.27)$$

тут ψ_0 – скаляр; ψ – n -вимірний допоміжний вектор, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$; ψ^T – транспонований вектор ψ .

4. Оскільки змінної x_0 у правій частині виразу (6.27) немає, то з рівності: $\dot{\Psi}_0 = -\frac{\partial H}{\partial x_0} = 0$, випливає, що $\Psi_0 = \text{const}$. Припустимо, що $\Psi_0 = 1$.

Виділимо в рівності (6.27) частину доданків, які залежать від керування U , а саме:

$$H^1 = \frac{1}{2}U^T R U + \psi^T B U. \quad (6.28)$$

Відповідно до ПМП вектор U^* , який забезпечує максимум функції H^1 (а значить, і функції H), буде оптимальним стосовно критерію I . Для його визначення скористаємося необхідною умовою існування екстремуму функції, а саме:

$$\frac{\partial H^1}{\partial U} = U^T R + \psi^T B = 0.$$

Звідси

$$U^* = -R^{-1}B^T \psi, \quad (6.29)$$

тут R^{-1} – зворотна до R матриця.

5. Для визначення перемикального вектора Ψ складемо канонічно спряжену систему рівнянь, а саме:

$$\dot{X}^* = A X + B U.$$

З огляду на рівність (6.29)

$$\dot{X}^* = A X - B R^{-1} B^T \Psi; \quad (6.30)$$

$$\dot{\Psi}^* = -\frac{\partial H}{\partial x} = -Q X - A^T \Psi. \quad (6.31)$$

Функцію Ψ будемо шукати в такому вигляді:

$$\Psi = K X. \quad (6.32)$$

тут K – деяка квадратна симетрична матриця розміру $n \times n$.

$$\text{Тоді} \quad \dot{\Psi} = K\dot{X}. \quad (6.33)$$

Підставимо вирази (6.30) і (6.31) у рівняння (6.33), а саме:

$$-QX - A^T\Psi = KAX - KBR^{-1}B^T\Psi.$$

Замість функції Ψ , використаємо її вираз з рівності (6.32), тоді

$$-QX - A^TKX = KAX - KBR^{-1}B^TKX.$$

Скоротимо отриманий результат на X й перенесемо доданки в ліву частину виразу. Таким чином, отримаємо нелінійне матричне рівняння Ріккати, а саме:

$$KA + A^TK - KBR^{-1}B^TK + Q = 0. \quad (6.34)$$

Розв'язавши це рівняння, знаходимо матрицю K , це дозволяє записати керування U через функцію X . Відповідно до рівності (6.29) та з урахуванням виразу (6.32) маємо такий результат:

$$U^* = -R^{-1}B^T\Psi = -R^{-1}B^TKX. \quad (6.35)$$

Рівняння (6.35) визначає структуру й параметри шуканого регулятора. Структурну схему оптимальної системи керування зображено на рис. 6.21.

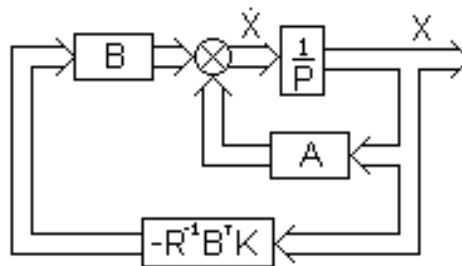


Рис. 6.21. Структурна схема оптимальної системи керування до прикладу 6.5

Слід мати на увазі, що рівняння (6.34) має не єдиний розв'язок. Отже, з усіх розв'язків вибирається той, що задовольняє критерій Сильвестра, а саме:

$$k_{11} > 0; \quad \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} > 0 \quad \dots \text{і т. д.} \quad (6.36)$$

Такий розв'язок буде єдиним.

Розглянуту нами задачу називають *задачею синтезу оптимального стаціонарного лінійного регулятора стану* або коротко – *стаціонарною задачею*. Тут матриці A , B , Q , R – сталі, а верхня межа інтегрування $T = \infty$. Якщо час T – скінченний, то незалежно від того, чи матриці A , B , Q , R сталі, чи залежні від часу, задача синтезу відноситься до *нестаціонарних*. Тоді оптимальне керування U^* матиме більш складний вигляд, а матрицю K знаходитимуть з диференціального матричного рівняння Ріккати.

Приклад 6.5. Для моделі, заданої в змінних стану, тобто

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = U, \end{cases}$$

необхідно синтезувати оптимальний регулятор, використовуючи квадратичний критерій якості, а саме:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x_1^2 + qx_2^2 + ru^2) dt, \quad q > 0, \quad r > 0.$$

Розв'язування

У даному випадку

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}, \quad R = r, \quad U - \text{скаляр.}$$

Знайдемо матрицю K , розв'язавши рівняння Ріккати (6.34), тобто

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 0 & k_{11} \\ 0 & k_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_{11} & k_{12} \end{bmatrix} - \frac{1}{r} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 0 & k_{11} \\ k_{11} & 2k_{12} \end{bmatrix} - \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 & k_{12} \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & k_{11} \\ k_{11} & 2k_{12} + q \end{bmatrix} - \frac{1}{r} \begin{bmatrix} k_{12}k_{12} & k_{12}k_{22} \\ k_{22}k_{12} & k_{22}k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$1 - \frac{k_{12}^2}{r} = 0 \rightarrow k_{12} = \pm\sqrt{r};$$

$$k_{11} - \frac{k_{12}k_{22}}{r} = 0 \rightarrow k_{11} = \frac{k_{12}k_{22}}{r};$$

$$2k_{12} + q - \frac{k_{22}^2}{r} = 0 \rightarrow k_{22} = \pm\sqrt{r(q + 2k_{11})}.$$

Критерію Сильвестра (6.36) відповідає такий розв'язок:

$$k_{21} = k_{12} = \sqrt{r};$$

$$k_{22} = \sqrt{r(q + 2\sqrt{r})};$$

$$k_{11} = \sqrt{q + 2\sqrt{r}}.$$

Дійсно, $k_{11} > 0$, оскільки $q > 0$ і $r > 0$, тоді

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} = k_{11}k_{22} - k_{12}^2 = \sqrt{r}(q + 2\sqrt{r}) - r = q\sqrt{r} + r > 0,$$

тобто умови критерію (6.36) виконуються.

Оптимальне керування, виражене через вектор X , знайдемо, скориставшись рівнянням (6.35), тобто

$$\begin{aligned} U^* &= -\frac{1}{r}[0;1] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{r}[0;1] \begin{bmatrix} k_{11}x_1 & k_{12}x_2 \\ k_{12}x_1 & k_{22}x_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{r}(k_{12}x_1 + k_{22}x_2) = \\ &= -\frac{1}{r} \left[\sqrt{r}x_1 + \sqrt{r(q + 2\sqrt{r})}x_2 \right]. \end{aligned}$$

Структурна схема системи оптимального керування має вигляд, зображений на рис. 6.22.

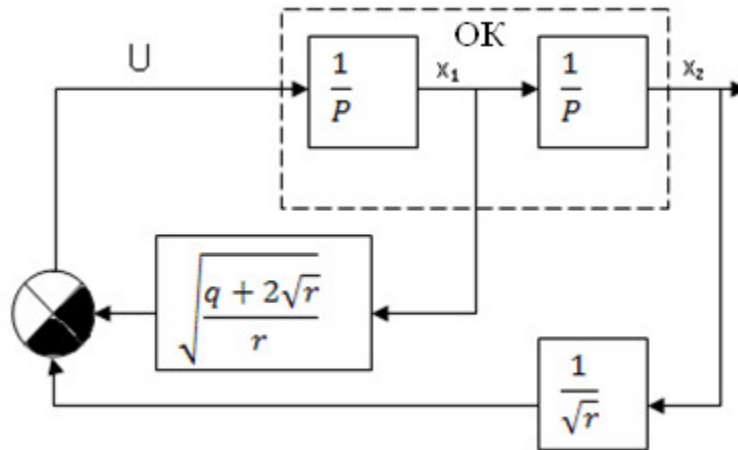


Рис. 6.22. Структурна схема системи оптимального керування до прикладу 6.5

§ 6.8. Встановлення початкових значень перемикальних функцій $\Psi(t)$

У всіх розглянутих прикладах за допомогою ПМП вдалося визначити оптимальний закон керування як функцію від змінних $\Psi_i(t)$, тобто $U_{\text{опт}} = f[\Psi_i(t)]$.

У даний час не відомі замкнені (задані у вигляді формул) способи встановлення початкових значень $\Psi_i(0)$ функцій $\Psi_i(t)$, $i = 0, 1, \dots, n$. У той же час їх необхідно знати для розв'язування системи рівнянь: $\frac{d\Psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial X_i}$, $i = 0, 1, \dots, n$, яка слугує для визначення функцій $\Psi_i(t)$. Усі відомі сьогодні процедури пошуку $\Psi_i(0)$, $i = 0, 1, \dots, n$, базуються на послідовних наближеннях (ітераціях) від деякого вихідного набору значень $\Psi_i^0(0)$, $i = 0, 1, \dots, n$, до остаточної сукупності, що описує розв'язок задачі оптимізації.

Розглянемо один із способів визначення функцій $\Psi_i^*(0)$, $i = 0, 1, \dots, n$. Взнявши довільне нульове наближення $\Psi_i^0(0)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, знаходять відповідні йому керування $U^0(t)$ і траєкторію $Y^0(t)$ у фазовому просторі. Якщо значення $\Psi_i^0(0)$ взято навмання, то мало шансів, що траєкторія $Y^0(t)$ потрапить у задану кінцеву точку (скажімо, у початок координат). Тут за міру близькості беруть відстань r_0 від початку координат до цієї траєкторії. Наступні наближення функцій $\Psi_i^k(0)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, підбирають таким чином, аби відстань r_k зменшувалася від ітерації до ітерації. Очевидно, що шуканим значенням $\Psi_i^*(0)$ відповідає відстань: $r_* = 0$.

Питання для самоконтролю

1. Для розв'язування яких задач застосовується принцип максимуму Понтрягіна?
2. Яким чином формується розширений вектор змінних стану?
3. Що являє собою лінія перемикання на фазовій площині?
4. Які основні умови застосування теореми про n інтервалів?
5. Який алгоритм визначення перемикальних функцій Ψ ?
6. Скільки умов стикування необхідно для опису керування в системі третього порядку?
7. За яких умов динамічний об'єкт буде перебувати в стані рівноваги (сталого режиму відносно виходу системи)?
8. Від чого залежить розмір матриці K в алгебраїчному рівнянні Ріккати?
9. Яким умовам мають відповідати елементи матриці K в рівнянні Ріккати?
10. Сформулюйте основну теорему ПМП.

Задачі до самостійного розв'язування

1. Виконати синтез оптимальної системи керування на основі ПМП, критерій оптимальності керування задано у такому вигляді:

$$a) J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2u_1^2 + 4u_2^2) dt \rightarrow \min;$$

$$б) J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + u_1^2 + 2u_2^2) dt \rightarrow \min.$$

2. В умовах задачі про максимальну швидкодію визначити оптимальне керування й оптимальні траєкторії руху системи на фазовій площині, скориставшись наведеними нижче вихідними даними.

$$a) J = \int_0^T dt; \quad \ddot{y} = U; \quad |U| \leq 0,5; \quad y(0) = \dot{y}(0) = 1; \quad y(T) = 2; \quad \dot{y}(T) = 0;$$

$$б) J = \int_0^T dt; \quad \ddot{y} = 3U; \quad |U| \leq 1,5; \quad y(0) = 0; \quad \dot{y}(0) = -1; \quad y(T) = \dot{y}(T) = 2;$$

$$в) J = \int_0^T dt; \quad \ddot{y} = 2U; \quad |U| \leq 1; \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0; \quad y(T) = 2; \quad \dot{y}(T) = -1;$$

$$г) J = \int_0^T dt; \quad \ddot{y} = 4U; \quad |U| \leq 0,5; \quad y(0) = 0; \quad \dot{y}(0) = -2; \quad y(T) = -2; \quad \dot{y}(T) = 1;$$

$$д) J = \int_0^T dt; \quad \ddot{y} = 2U; \quad |U| \leq 1,5; \quad y(0) = \dot{y}(0) = -1; \quad y(T) = 0; \quad \dot{y}(T) = 5;$$

$$e) J = \int_0^T dt; \quad \ddot{y} = 0,5U; \quad |U| \leq 4; \quad y(0) = 2; \quad \dot{y}(0) = -1; \quad y(T) = \dot{y}(T) = -3.$$

3. Skorистavshись наведеними нижче вихідними даними, визначити вид оптимального керувального впливу в задачі про максимальну швидкодію, застосувавши теорему про n інтервалів; скласти систему рівнянь для встановлення моментів перемикання.

$$a) \ddot{y} = U; \quad |U| \leq 1; \quad y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0; \quad y(T) = 3; \quad \dot{y}(T) = \ddot{y}(T) = 0;$$

$$б) 2\ddot{y} + \dot{y} = 4U; \quad |U| \leq 0,5; \quad y(0) = 0; \quad \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 2; \\ y(T) = -2; \quad \dot{y}(T) = \ddot{y}(T) = 0;$$

$$в) \ddot{y} + \dot{y} = U; \quad |U| \leq 2; \quad y(0) = 2; \quad \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0; \quad y(T) = 0; \\ \dot{y}(T) = \ddot{y}(T) = 1;$$

$$г) \ddot{y} + 4\dot{y} + 3y = U; \quad |U| \leq 3; \quad y(0) = 2; \quad \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0; \quad y(T) = 3; \\ \dot{y}(T) = \ddot{y}(T) = 0;$$

$$д) \ddot{y} + 8\dot{y} + 17y = U; \quad |U| \leq 2; \quad y(0) = \dot{y}(0) = 2; \quad \ddot{y}(0) = 0; \quad y(T) = -2; \\ \dot{y}(T) = \ddot{y}(T) = 0;$$

$$е) \ddot{y} + 4\dot{y} + 3y = U; \quad |U| \leq 1; \quad y(0) = 8; \quad \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = y(T) = \dot{y}(T) = \ddot{y}(T) = 0;$$

$$ж) 4\ddot{y} + 20\dot{y} + 24y = 2U; \quad |U| \leq 4; \quad y(0) = -2; \quad \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = \dot{y}(T) = \ddot{y}(T) = 0; \\ y(T) = 2.$$

4. З огляду на заданий критерій та об'єкт керування, модель якого подано у змінних «вхід – вихід», здійснити синтез стаціонарного регулятора стану.

$$a) J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (y^2 + 1,5\dot{y}^2 + 2U^2) dt; \quad \ddot{y} + 2y = U;$$

$$б) J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (y^2 + \dot{y}^2 + 3U^2) dt; \quad \ddot{y} + y = 3U;$$

$$в) J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (y^2 + 5U^2) dt; \quad 2\ddot{y} + 3\dot{y} = U;$$

$$г) J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (y^2 + 2\dot{y}^2 + U^2) dt; \quad \ddot{y} + 2\dot{y} + 0,5y = U;$$

$$д) J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (3y^2 + \dot{y}^2 + U^2) dt; \quad \ddot{y} = 2U;$$

$$е) J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (y^2 + \dot{y}^2 + 2U^2) dt; \quad \ddot{y} + \dot{y} = 2U.$$

РОЗДІЛ 7

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ МЕТОДОМ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Мета розділу: вивчення методу динамічного програмування і особливостей його застосування для розв'язування дискретних і неперервних задач керування

§ 7.1. Дискретна форма варіаційної задачі. Принцип оптимальності Р. Беллмана

Припустимо, що функцію в такому функціоналі: $I(f) = \int_{t_0}^T f(u, y, t) dt$,

можна замінити ламаною лінією із вершинами: $U_0 = U(t_0)$, $U_1 = U(t_0 + \Delta t)$, $U_2 = U(t_0 + 2\Delta t)$... $U_n = U(t_0 + n\Delta t)$ і т. д., а інтеграл подати у вигляді такої суми:

$$I = \sum_{i=0}^n f(u_i, y_i, t_i) \Delta t.$$

Після цього варіаційну задачу можна приблизно вважати звичайною задачею на пошук екстремуму такої функції від n змінних: $I(f) = I(t_1, t_2, \dots, t_n)$. При збільшенні числа n розв'язок цієї задачі все більше наближатиметься до розв'язку вихідної варіаційної задачі. Сам процес розв'язування розглядається як одиничний акт і називається однокроковим.

Однак, класичні методи визначення екстремуму функції багатьох змінних, особливо при великій їх кількості, можуть виявитися непридатними; тому зручніше знаходити значення функцій $U(t_i)$ не відразу (за один крок), а поступово, крок за кроком. Такі процеси розв'язування називають багатокроковими. Математичним апаратом вивчення процесу прийняття багатокрокових оптимальних рішень є динамічне програмування, розроблене американським ученим Р. Беллманом та його учнями в п'ятдесятих роках минулого століття.

Р. Беллман так пояснює назву методу: «програмування» – задача прийняття рішень; «динамічне» – вказує на те, що ми цікавимося процесами, у яких істотну роль відіграє час і в яких порядок виконання операцій може виявитися вирішальним».

Динамічне програмування призначене для розв'язування як дискретних, так і неперервних оптимізаційних задач. Розглянемо покроковий процес керування, його схему подано на рис. 7.1.

$$U_{opt} = (U_{1opt}, U_{2opt} \dots U_{Nopt}).$$

Для кожної фіксованої стратегії керування функція мети (7.2) залежить тільки від початкового стану x_0 і відображає втрати, які виникають при переході системи від початкового стану x_0 в кінцевий x_N у разі використання цієї стратегії. Якщо ж стратегія оптимальна, то вираз (7.2) показує, якими будуть можливі мінімальні втрати при переході системи від початкового стану x_0 у кінцевий x_N , тобто

$$f_N(x_0) = R(x_0, U_{1opt}, U_{2opt}, \dots, U_{Nopt}) = \min_{U \in U^0} R_N(x_0, U_1, U_2, \dots, U_N), \quad (7.3)$$

тут U^0 – множина можливих стратегій керування у початковому стані x_0 .

Розглянемо тепер процес керування, починаючи з другого кроку, тобто припустивши, що система вже перебуває у стані x_1 . Тоді сумарні втрати при переході системи від стану x_1 до кінцевого стану x_N можна виразити таким чином:

$$R_{N-1} = r_2(x_2, U_2) + r_3(x_3, U_3) + \dots + r_N(x_N, U_N). \quad (7.4)$$

Або

$$R_{N-1} = R_{N-1}(x_1, U_2, U_3 \dots U_N). \quad (7.5)$$

За аналогією з (7.3)

$$f_{N-1}(x_1) = R(x_1, U_{2opt}, \dots, U_{Nopt}) = \min_{U \in U^1} R_{N-1}(x_1, U_2, \dots, U_N), \quad (7.6)$$

тут U^1 – множина можливих стратегій керування в стані x_1 .

Як бачимо, оптимізаційні задачі (7.3) і (7.6) мають однакову структуру і відрізняються тільки розмірністю.

Очевидно, що сумарні втрати за N кроків дорівнюють сумі втрат на першому кроці та протягом всіх наступних, а саме:

$$R_N(x_0, U_1, U_2, \dots, U_N) = r_1(x_0, U_1) + R_{N-1}(x_1, U_2, U_3, \dots, U_N).$$

Отже, для оптимальної стратегії керування буде справедливим таке співвідношення:

$$\min_{U \in U^0} R_N(x_0, U_1, U_2, \dots, U_N) = \min_{U \in U^0} [r_1(x_0, U_1) + R_{N-1}(x_1, U_2, \dots, U_N)]. \quad (7.7)$$

З урахуванням залежності (7.3)

$$f_N(x_0) = \min_{U_1 \in U} \left[r_1(x_0, U_1) + \min_{U \in U^1} R_{N-1}(x_1, U_2, \dots, U_N) \right]. \quad (7.8)$$

У виразі (7.8) мінімізація першого доданка в дужках здійснюється відносно змінної U_1 безпосередньо, а другого доданка – побічно (через стан x_1 , який залежить від керування U_1). Нарешті, вираз (7.8) можна записати в такому вигляді:

$$f_N(x_0) = \min_{U_1 \in U} \left[r_1(x_0, U_1) + f_{N-1}(x_1) \right],$$

тут U – множина можливих стратегій керування у початковому стані x_0 .

Останній вираз справедливий не тільки для початкового стану, але й для будь-якого іншого, а саме:

$$f_i(x_{N-i}) = \min_{U_{N-i+1} \in U^{N-i+1}} \left[r_{N-i+1}(x_{N-i}, U_{N-i+1}) + f_{i-1}(x_{N-i+1}) \right], \quad (7.9)$$

тут U^{N-i+1} – множина можливих керувань у стані x_{N-i} .

Вираз (7.9) являє собою *рекурентне співвідношення Р. Беллмана*. Це математичний запис *принципу оптимальності Беллмана*, сформульованого нижче.

Незалежно від того, яким чином система потрапила у нинішній стан, керування на даному кроці має бути таким, аби при цьому сумарні втрати на ньому і на всіх наступних кроках були б мінімальними.

Згідно з методом динамічного програмування, розв'язування задачі починають з останнього кроку. При цьому розраховують функції мінімальних втрат у застосуванні до кожного кроку керування, а саме: $f_i(x_{N-i})$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$.

На останньому кроці, коли $i = 1$, співвідношення Беллмана буде мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} f_1(x_{N-1}) &= \min_{U_N} \left[r_N(x_{N-1}, U_N) + f_0(x_N) \right], \\ f_0(x_N) &= 0. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Вираз (7.10) показує, що керування неможливе за межами останнього кроку, тоді

$$f_1(x_{N-1}) = \min_{U_N} r_N(x_{N-1}, U_N). \quad (7.11)$$

Задача (7.11) має одну змінну, за якою і виконують оптимізацію. Розв'язуючи його, знаходять значення $U_{N_{opt}}$ для стану x_{N-1} .

Тепер задача, сформульована на передостанньому кроці, набуває такого вигляду:

$$f_2(x_{N-2}) = \min_{U_{N-1}} [r_{N-1}(x_{N-2}, U_{N-1}) + f_1(x_{N-1})]. \quad (7.12)$$

Оскільки функцію $f_1(x_{N-1})$ вже визначено, задача (7.12) також буде мати лише одну змінну. Розв'язавши її, знаходимо оптимальне керування $U_{(N-1)opt}$, і т. д. Процедура триває до тих пір, поки не буде обчислене оптимальне керування, яке відповідає початковому стану x_0 . Таким чином, буде сформована оптимальна стратегія керування.

§ 7.2. Неперервна задача динамічного програмування

Розглянемо об'єкт керування, змодельований за допомогою змінних стану у векторній формі, а саме:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad x(t_0) = x_0. \quad (7.13)$$

Об'єкт необхідно перевести з початкового стану x_0 у кінцевий таким чином, щоб забезпечити мінімальне значення критерію, тобто

$$I = \int_{t_0}^{t_k} G(x, u, t) dt \rightarrow \min. \quad (7.14)$$

Зауважимо, що за малих значень прирощення Δt модель об'єкта можна наближено подати в такому вигляді:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = f(x, u), \quad (7.15)$$

а функцію мінімальних втрат, відповідну початковому стану x_0 , обчислюють таким чином:

$$S_0(x_0, t_0) = \min_u \int_{t_0}^{t_k} G(x, u, t) dt. \quad (7.16)$$

Функцію втрат, відповідну стану $x(\tau)$, близькому до початкового (див. рис. 7.2), в момент часу: $\tau = t_0 + \Delta t$, можна описати таким виразом:

$$S(x(\tau), \tau) = \min_u \int_{\tau}^{t_k} G(x, u, t) dt. \quad (7.17)$$

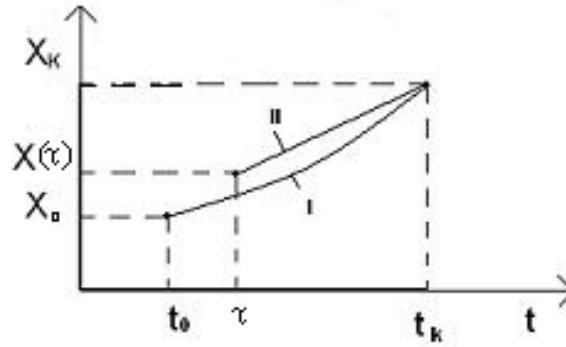


Рис. 7.2. Рух системи від початкового стану x_0 до стану x_k на інтервалі часу $t_0 \div t_k$.

Тоді, відповідно до принципу оптимальності Беллмана, можна записати, що

$$\min_u \left[\int_{t_0}^{\tau} G(x, u, t) dt + \int_{\tau}^{t_k} G(x, u, t) dt \right] = S(x_0, t_0). \quad (7.18)$$

Оскільки значення $\Delta t \rightarrow 0$, то

$$\min_u \left\{ G(x_0, u, t_0) \cdot (\tau - t_0) + S[x(\tau), \tau] \right\} = S(x_0, t_0).$$

Розкладемо функцію $S[x(\tau), \tau]$ в ряд Тейлора, а саме:

$$S[x(\tau), \tau] = S(x_0, t_0) + \left. \frac{\partial S}{\partial x} \right|_{x_0, t_0} \cdot \Delta x + \left. \frac{\partial S}{\partial t} \right|_{x_0, t_0} \cdot (\tau - t_0).$$

Тоді

$$S(x_0, t_0) = \min_u \left\{ G(x_0, u, t_0) \cdot (\tau - t_0) + S(x_0, t_0) + \left. \frac{\partial S}{\partial x} \right|_{x_0, t_0} \cdot \Delta x + \left. \frac{\partial S}{\partial t} \right|_{x_0, t_0} \cdot (\tau - t_0) \right\}. \quad (7.19)$$

Доданок $S(x_0, t_0)$ не залежить від змінної u , за якою проводиться мінімізація, тому його можна винести за знак мінімуму й скоротити.

Враховуючи рівняння (7.13), $\frac{\Delta x}{\Delta t} \approx f(x_0, u_0)$. Звідси

$$\Delta x = f(x_0, u_0, t_0)(\tau - t_0). \quad (7.20)$$

Підставимо вираз (7.20) у (7.19) й отримуємо таке рівняння:

$$0 = \min_u \left\{ G(x_0, u_0, t_0) \cdot (\tau - t_0) + \frac{\partial S}{\partial x} \Big|_{x_0, t_0} \cdot f(x_0, u_0, t_0) (\tau - t_0) + \frac{\partial S}{\partial t} \Big|_{x_0, t_0} \cdot (\tau - t_0) \right\}. \quad (7.21)$$

Тепер скорочуємо вираз (7.21) на $(\tau - t_0)$, унаслідок чого

$$0 = \min_u \left\{ G(x_0, u_0, t_0) + \frac{\partial S}{\partial x} \Big|_{x_0, t_0} \cdot f(x_0, u_0, t_0) + \frac{\partial S}{\partial t} \Big|_{x_0, t_0} \right\}. \quad (7.22)$$

Зважаючи на довільність вибору моменту часу t_0 рівняння (7.22) можна вважати справедливим для будь-якого моменту часу t , тобто

$$\min_u \left\{ G(x, u, t) + \frac{\partial S}{\partial x} \cdot f(x, u, t) + \frac{\partial S}{\partial t} \right\} = 0. \quad (7.23)$$

Для розв'язування задачі мінімізації (7.23) запишемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} G(x, u, t) + \frac{\partial S}{\partial x} \cdot f(x, u, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial G(x, u, t)}{\partial u} + \frac{\partial S}{\partial x} \cdot \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial u} = 0. \end{cases} \quad (7.24)$$

Система (7.24) являє собою функціональні рівняння Р. Беллмана. Якщо в інтегралі (7.14) верхня межа дорівнює нескінченності або переведення системи з початкового стану в кінцевий виконується за довільний нефіксований час, то в першому виразі системи (7.24) не буде доданка $\frac{\partial S}{\partial t}$, тобто

$$\begin{cases} G(x, u, t) + \frac{\partial S}{\partial x} \cdot f(x, u, t) = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial u} + \frac{\partial S}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} = 0. \end{cases} \quad (7.25)$$

Зауважимо, що метод динамічного програмування дозволяє синтезувати системи, які є не тільки оптимальними, але й стійкими.

Покажемо, що функція мінімальних втрат S являє собою функцію Ляпунова (див. розділ 3.5).

По перше, за своєю побудовою ця функція додатно визначена. Справді,

$$G(x, u, t) > 0; \quad I = \int_{t_0}^{t_k} G(x, u, t) dt, \quad S(x_0, t_0) = \min_u I > 0.$$

З іншого боку, перший вираз системи (7.25), а саме:

$$G(x,u,t) + \frac{\partial S}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = 0, \text{ оскільки } \frac{dx}{dt} = f(x,u,t),$$

але $\frac{\partial S}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t}$, значить, $\frac{\partial S}{\partial t} = -G(x,u,t) < 0$.

Таким чином, наведені міркування підтверджують, що S – це функція Ляпунова. Вона додатно визначена, а її повна похідна за часом – від’ємно визначена.

Отже, система, синтезована за допомогою динамічного програмування, буде стійкою.

Приклад 7.1. Припустимо, що необхідно стабілізувати спрямованість осі супутника на Сонце за допомогою керування реактивними двигунами. Схему такої системи показано на рис.7.3.

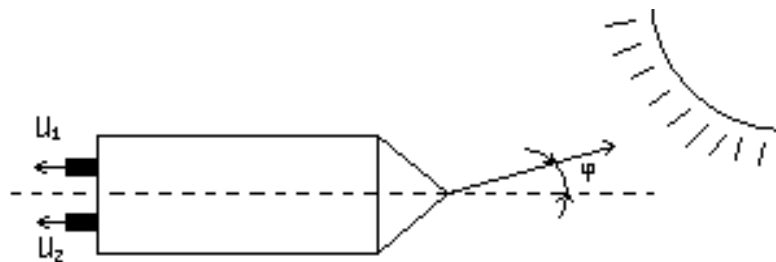


Рис. 7.3. Схема системи керування до прикладу 7.1

Модель даного об’єкта керування має такий вигляд:

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = c \cdot l \cdot u; \quad u = u_1 - u_2.$$

Тут J – момент інерції супутника щодо його осі; φ – кут відхилення напрямку осі супутника від напрямку на Сонце; c – швидкість витікання газів із сопла двигуна; l – довжина плеча; u – різниця між витратою газу двома соплами двигуна.

Введемо такі позначення: $y = \varphi$, $b = \frac{c \cdot l}{J}$.

Тоді модель об’єкта буде виглядати таким чином:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = bu, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1. \quad (7.26)$$

Двигунами необхідно керувати так, аби забезпечити мінімальне значення функціонала, тобто

$$I = \int_0^{\infty} (g_1 y^2 + g_2 \dot{y}^2 + u^2) dt \rightarrow \min. \quad (7.27)$$

Запишемо задачу (7.26), (7.27) у змінних стану, а саме:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = b \cdot u, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = y_0, \\ x_2(0) = y_1. \end{cases} \quad (7.28)$$

$$I = \int_0^{\infty} (g_1 x_1^2 + g_2 x_2^2 + u^2) dt \quad ; \quad g_1 > 0; g_2 > 0. \quad (7.29)$$

Складемо відповідне задачі (7.28), (7.29) рівняння Беллмана, а саме:

$$g_1 x_1^2 + g_2 x_2^2 + u^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} \cdot x_2 + \frac{\partial S}{\partial x_2} \cdot bu = 0. \quad (7.30)$$

Продиференціюємо його за змінною u , тобто

$$2u + b \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0,$$

й отримаємо з нього керування u в явному вигляді, а саме:

$$u = -\frac{b}{2} \frac{\partial S}{\partial x_2}. \quad (7.31)$$

Після конкретизації функції витрат S вираз (7.31) буде описувати оптимальне керування. Підставимо вираз (7.31) у рівняння (7.30), тобто

$$g_1 x_1^2 + g_2 x_2^2 + \frac{b^2}{4} \left(\frac{\partial S}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} \cdot x_2 - \frac{b^2}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial x_2} \right)^2 = 0;$$

$$g_1 x_1^2 + g_2 x_2^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} \cdot x_2 - \frac{b^2}{4} \left(\frac{\partial S}{\partial x_2} \right)^2 = 0. \quad (7.32)$$

Функцію Ляпунова будемо шукати в такому вигляді:

$$S = A_{11} x_1^2 + A_{12} x_1 x_2 + A_{22} x_2^2, \quad (7.33)$$

тут визначенню підлягають коефіцієнти A_{11} , A_{12} , A_{22} .

За критерієм Сильвестра, функція S має бути додатно визначеною, що й забезпечується шляхом вибору значень A_{11} , A_{12} , A_{22} .

Для їх обчислення перетворимо функцію S таким чином (виділимо повний квадрат):

$$S = \left(\sqrt{A_{11}}x_{11} + \frac{A_{12}}{2\sqrt{A_{11}}} \cdot x_2 \right)^2 + \left(A_{22} - \frac{A_{12}^2}{4A_{11}} \right) \cdot x_2^2 > 0.$$

Очевидно, що $S > 0$, коли буде виконано таку умову:

$$A_{22} - \frac{A_{12}^2}{4A_{11}} > 0.$$

Звідси $A_{11} \cdot A_{22} > \frac{A_{12}^2}{4}$ й $A_{11} > 0$.

У загальному випадку буде справедливим критерій Сильвестра.

Для того, щоб квадратична форма S залежна від змінних x_1, x_2, \dots, x_n була додатно визначеною, необхідно і достатньо, аби матриця, складена з коефіцієнтів цієї квадратичної форми, задовольняла таку умову: головні діагональні мінори мають бути додатними.

Продиференціюємо функцію S за x_1 і x_2 , а саме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x_1} &= 2A_{11}x_1 + A_{12}x_2; \\ \frac{\partial S}{\partial x_2} &= A_{12}x_1 + 2A_{22}x_2. \end{aligned} \tag{7.34}$$

Підставимо вирази (7.34) у формулу (7.32), тобто

$$g_1x_1^2 + g_2x_2^2 - \frac{b^2}{4}(A_{12}x_1 + 2A_{22}x_2)^2 + x_2(2A_{11}x_1 + A_{12}x_2) = 0.$$

Розкриємо квадрат суми і згрупуємо члени із множниками x_1^2 , x_2^2 та x_1x_2 , а саме:

$$\left(g_1 - \frac{b^2}{4}A_{12}^2 \right) x_1^2 + \left(2A_{11} - b^2A_{12} \cdot A_{22} \right) x_1 \cdot x_2 + \left(g_2 - b^2A_{22}^2 + A_{12} \right) x_2^2 = 0. \tag{7.35}$$

Оскільки досліджуваний об'єкт здійснює рух у просторі, то змінні x_1 і x_2 не дорівнюють нулю. Тому для забезпечення рівності (7.35) необхідно, щоб коефіцієнти при множниках x_1^2 , x_2^2 і x_1x_2 завжди дорівнювали нулю, тобто

$$\begin{cases} g_1 - \frac{b^2}{4} A_{12}^2 = 0; \\ 2A_{11} - b^2 A_{12} \cdot A_{22} = 0; \\ g_2 - b^2 A_{22}^2 + A_{12} = 0. \end{cases} \quad (7.36)$$

Розв'яжемо систему (7.36) відносно змінних A_{11} , A_{12} , A_{22} , а саме:

$$\begin{aligned} A_{12} &= \pm \frac{2}{b} \sqrt{g_1}; \\ A_{22} &= \pm \frac{1}{b} \sqrt{g_2 + A_{12}} = \pm \frac{1}{b} \sqrt{g_2 \pm \frac{2}{b} \sqrt{g_1}}; \\ A_{11} &= \pm \frac{b^2}{2} \cdot \frac{2}{b^2} \sqrt{g_1 \left(g_2 \pm \frac{2}{b} \sqrt{g_1} \right)}. \end{aligned}$$

Тепер виберемо ті розв'язки, котрі задовольняють умови Сильвестра, тобто

$$\begin{cases} A_{11} = \sqrt{g_1 \left(g_2 + \frac{2}{b} \sqrt{g_1} \right)}; \\ A_{12} = \frac{2}{b} \sqrt{g_1}; \\ A_{22} = \frac{1}{b} \sqrt{g_2 + \frac{2}{b} \sqrt{g_1}}. \end{cases} \quad (7.37)$$

Підставимо отримані вирази (7.37) для коефіцієнтів A_{12} і A_{22} в друге рівняння (7.34), а саме:

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} = \frac{2}{b} \sqrt{g_1} \cdot x_1 + \frac{2}{b} \sqrt{g_2 + \frac{2}{b} \sqrt{g_1}} \cdot x_2. \quad (7.38)$$

Тепер підставимо вираз (7.38) у рівняння (7.31) й отримаємо формулу для визначення оптимального керування, тобто

$$u_{opt} = -\sqrt{g_1} \cdot x_1 - \sqrt{g_2 + \frac{2}{b} \sqrt{g_1}} \cdot x_2. \quad (7.39)$$

Вираз (7.39) визначає вигляд оптимального керувального впливу, тобто є розв'язком задачі (7.28), (7.29).

Підставивши вираз (7.39) у математичну модель об'єкта (7.28), отримуємо систему для визначення оптимальної траєкторії руху об'єкта, а саме:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -b\sqrt{g_1} \cdot x_1 - b\sqrt{g_2 + \frac{2}{b}\sqrt{g_1}} \cdot x_2, & x_2(0) = y_1; \\ y = x_1. & x_1(0) = y_0; \end{cases} \quad (7.40)$$

Виконаємо дослідження оптимальної системи (7.40) на стійкість. Для цього запишемо її характеристичний визначник, тобто

$$\begin{vmatrix} p & -1 \\ b\sqrt{g_1} & p + b\sqrt{g_2 + \frac{2}{b}\sqrt{g_1}} \end{vmatrix} = 0.$$

Відповідне йому характеристичне рівняння буде мати такий вигляд:

$$p^2 + b\sqrt{g_2 + \frac{2}{b}\sqrt{g_1}} p + b\sqrt{g_1} = 0. \quad (7.41)$$

Корені характеристичного рівняння системи розташовані в лівій напівплощині, тому коефіцієнти рівняння (7.41) завжди додатні.

У даному випадку дослідити систему на стійкість можна, скориставшись другим методом Ляпунова, а саме:

$$S = A_{11}x_1^2 + A_{12}x_1x_2 + A_{22}x_2^2;$$

$$S = 0, \text{ коли } x_1 = 0 \text{ й } x_2 = 0;$$

$$S > 0, \text{ коли } x_1 \neq 0 \text{ та } x_2 \neq 0.$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial S}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} = 2A_{11}x_1 \cdot \dot{x}_1 + A_{12}x_2 \cdot \dot{x}_1 + A_{12}x_1 \cdot \dot{x}_2 + 2A_{22}x_2 \cdot \dot{x}_2 =$$

$$= 2A_{11}x_1 \cdot x_2 + A_{12}x_2^2 + (A_{12}x_1 + 2A_{22}x_2) \left(-\frac{b^2}{2} \right) \cdot (A_{12}x_1 + 2A_{22}x_2) =$$

$$= -\frac{b^2}{2} A_{12}x_1^2 + (2A_{11} - 2b^2 A_{12}A_{22}) x_1 \cdot x_2 + (A_{12} - 2b^2 A_{22}^2) x_2^2 =$$

$$= B_{11}x_1^2 + B_{12}x_1 \cdot x_2 + B_{22}x_2^2 \leq 0.$$

Отже, оптимальна система (7.40) стійка.

Структурну схему створеної оптимальної системи зображено на рис. 7.4.

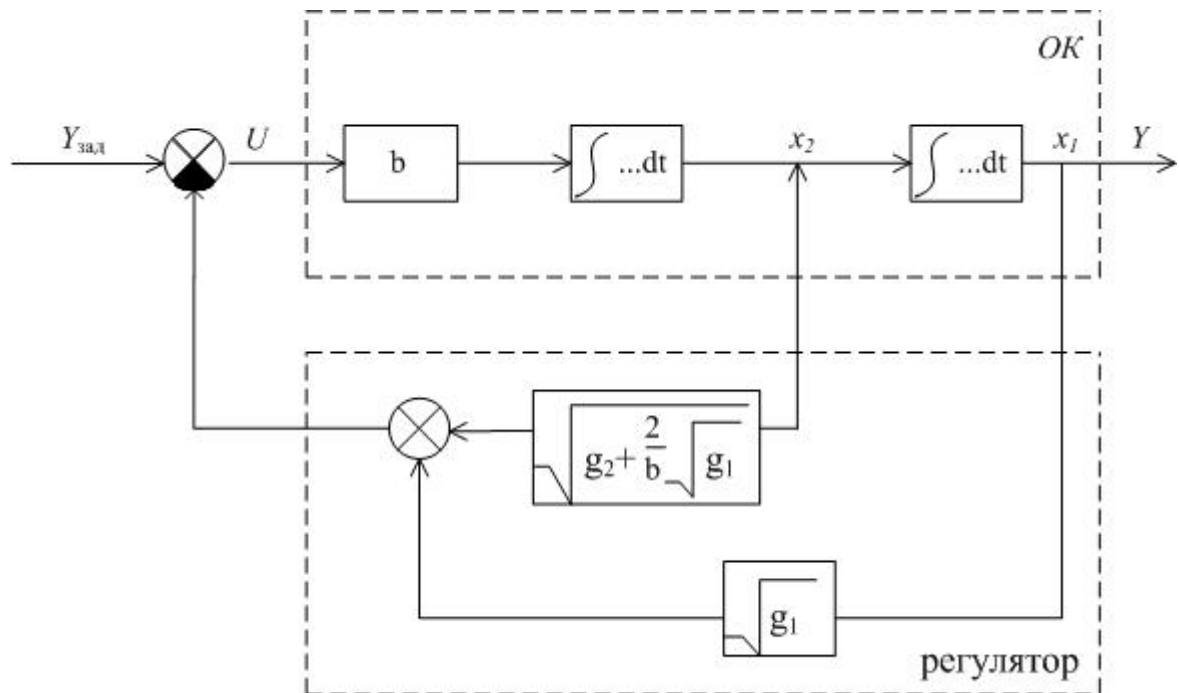


Рис. 7.4. Структурна схема оптимальної системи керування до прикладу 7.1

Якщо змінну x_2 (швидкість зміни кута φ) виміряти неможливо, то її оцінюють шляхом диференціювання змінної x_1 , тобто $x_2 = \dot{x}_1$.

Питання для самоконтролю.

1. Які припущення необхідно зробити для застосування методу динамічного програмування?
2. У чому полягає принцип оптимальності Р. Беллмана?
3. Яка послідовність розв'язування дискретних оптимізаційних задач методом динамічного програмування?
4. Який сенс має функція мінімальних втрат?
5. Чому метод динамічного програмування забезпечує стійкість оптимальної системи?
6. Чи залежатиме оптимальна стратегія керування від передісторії функціонування системи?
7. Від чого залежить кількість невідомих у системі алгебраїчних рівнянь при розв'язуванні неперервних задач динамічного програмування?

Задачі до самостійного розв'язування

Задано критерій J та об'єкт керування. Необхідно синтезувати методом динамічного програмування оптимальний регулятор, який переводить об'єкт у початок фазових координат. З урахуванням наведених нижче початкових умов побудувати оптимальний перехідний процес.

$$a) \ddot{y} + 2y = 3U; \quad J = \int_0^{\infty} (y^2 + 0,5\dot{y}^2 + U^2)dt; \quad y(0) = 2; \quad \dot{y}(0) = 0;$$

$$б) 3\ddot{y} + y = 4U; \quad J = \int_0^{\infty} (3y^2 + U^2)dt; \quad y(0) = 3; \quad \dot{y}(0) = 1;$$

$$в) 2\ddot{y} + 3y = U; \quad J = \int_0^{\infty} (y^2 + 2\dot{y}^2 + 2U^2)dt; \quad y(0) = \dot{y}(0) = 2;$$

$$г) \ddot{y} + 5y = 2U; \quad J = \int_0^{\infty} (2y^2 + U^2)dt; \quad y(0) = -2; \quad \dot{y}(0) = 0;$$

$$д) 4\ddot{y} + 3y = U; \quad J = \int_0^{\infty} (5y^2 + \dot{y}^2 + 3U^2)dt; \quad y(0) = 1; \quad \dot{y}(0) = -1;$$

$$e) \ddot{y} + 2\dot{y} = U; \quad J = \int_0^{\infty} (2y^2 + U^2)dt; \quad y(0) = \dot{y}(0) = 1;$$

$$ж) 2\ddot{y} + \dot{y} = 3U; \quad J = \int_0^{\infty} (y^2 + 0,5\dot{y}^2 + 2U^2)dt; \quad y(0) = 1; \quad \dot{y}(0) = 0;$$

$$у) 3\ddot{y} + 2\dot{y} = U; \quad J = \int_0^{\infty} (2y^2 + \dot{y}^2 + 3U^2)dt; \quad y(0) = -1; \quad \dot{y}(0) = 0;$$

$$к) \ddot{y} + 3\dot{y} = 5U; \quad J = \int_0^{\infty} (y^2 + 3U^2)dt; \quad y(0) = \dot{y}(0) = 2;$$

$$л) 2\ddot{y} + 3\dot{y} = 5U; \quad J = \int_0^{\infty} (y^2 + \dot{y}^2 + 2U^2)dt; \quad y(0) = 0; \quad \dot{y}(0) = 1.$$

РОЗДІЛ 8

АДАПТИВНІ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ

Мета розділу: *вивчення структури, принципів побудови та особливостей застосування адаптивних систем керування нестационарними об'єктами.*

§ 8.1. Загальна характеристика адаптивних систем та їх класифікація

Вихідними даними класичної задачі синтезу системи керування є інформація про структуру і параметри об'єкта керування та про критерії керування. Якщо апріорна інформація повна, то за допомогою методів теорії оптимальних систем виконують синтез керувальної частини системи, причому таким чином, аби забезпечити екстремальне значення критерію якості керування, базуючись на заданій структурі й параметрах об'єкта. Однак, на практиці найчастіше має місце невизначеність (або неповнота) апріорної інформації про об'єкт. У цьому разі необхідно розв'язати задачу довизначення об'єкта в режимі функціонування та здійснити відповідну корекцію керувальної частини з огляду на отриману інформацію. Це завдання покликані виконати *адаптивні системи*. Саме їх буде розглянуто в цьому розділі.

Зауважимо, що дослідження адаптивних систем ми будемо проводити, вважаючи справедливими такі припущення:

1. Адаптивне керування здійснюють у замкненому просторі станів керованого об'єкта і коефіцієнтів його рівнянь. Питання про виведення об'єкта на розрахунковий режим тут не досліджують, бо воно не є предметом вивчення теорії оптимального керування.

2. Нестационарний об'єкт керування замінюють квазістационарним на цілком обмеженому інтервалі часу, який називають *періодом квазістационарності*. Передбачається, що його достатньо для завершення процесу адаптивного налаштування системи. Іншими словами, припускаємо, що швидкість перебігу процесів налаштування системи вища, ніж швидкість процесів зміни параметрів об'єкта.

Розглянемо тепер, яку інформацію потрібно мати для проектування адаптивних систем.

Необхідними будуть такі відомості:

1. Про структуру зв'язків керованої частини системи (об'єкта). При цьому можливі такі випадки:

- структура зв'язків відома повністю;
- структура зв'язків відома частково;
- структура зв'язків невідома.

2. Про параметри моделі об'єкта. Можливі такі варіанти:

– відомі номінальні значення параметрів і діапазони їх відхилення від номінальних;

– інформація про параметри моделі повністю відсутня.

3. Про вплив і характеристики збурень на об'єкт, де можливі такі ситуації:

– збурення доступні для прямого вимірювання за допомогою датчиків;

– відомі закони розподілу та характеристики збурень як випадкових процесів;

– інформації про збурення немає.

4. Про можливість прямих вимірювань фізичних параметрів керованого процесу, в тому числі: безперервних; циклічних; одноразових та епізодичних вимірювань.

З огляду на кількість і види отриманої інформації застосовують той чи інший підхід до побудови адаптивної системи, однак, у будь-якому випадку, необхідність побудови саме такої системи зумовлена *апріорною невизначеністю* об'єкта. Пояснимо це поняття. На рис. 8.1 зображено звичайний контур керування об'єктом за допомогою регулятора, який працює за деяким законом регулювання.

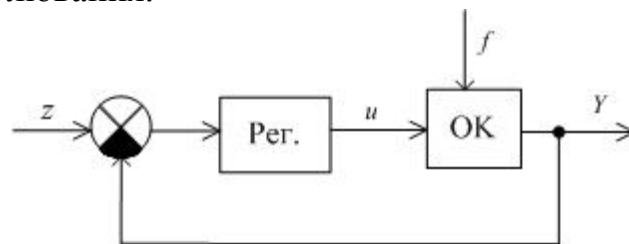


Рис. 8.1. Схема звичайного контуру керування об'єктом за допомогою регулятора

У задачах адаптивного керування особливої уваги варті випадки, коли коефіцієнти моделі об'єкта, входні дії z та f змінюються в часі, тобто система належить до нестационарних (квазістационарних).

Залежно від характеру та обсягу недостатньої інформації про об'єкт зовнішні впливи розрізняють таким чином:

– адаптація, зумовлена невизначеністю даних про зовнішні сигнали z , f ;

– адаптація, викликана невизначеністю інформації про об'єкт;

– адаптація, пов'язана з невизначеністю даних як про зовнішні сигнали z , f , так і про об'єкт.

Отже, за функціональною ознакою можна виділити такі класи адаптивних систем:

1. Якщо в процесі роботи системи цілеспрямовано змінюються параметри її керувальної частини (регулятора), то така адаптивна система називається *самоналаштувальною* (СНС).

2. Коли під час роботи системи цілеспрямовано змінюється структура керувальної частини, то така адаптивна система називається

самоорганізувальною (СОС). При цьому можуть змінюватися також і її параметри.

3. Якщо адаптивна система змінює свої параметри, структуру та алгоритм функціонування (керування), то вона називається *самонавчальною*.

Найбільш наочною є комплексна класифікація адаптивних систем за двома ознаками: складністю об'єкта та кількістю апріорної інформації про нього, її показано в табл. 8.1

Таблиця 8.1

Комплексна класифікація адаптивних систем в індексованому позначенні

Ступінь складності ОК	Кількість апріорної інформації		
	велика	середня	мала
простий	1.1	1.2	1.3
середній	2.1	2.2	2.3
складний	3.1	3.2	3.3

Тип застосовуваної адаптивної системи в основному залежить від складності системи та кількості апріорної інформації про об'єкт. Наприклад, для випадків 1.1, 1.2, 2.1, 2.2 рішення найчастіше відшукується в класі СНС; для випадків 2.1, 2.2, 3.1 – у класі самоорганізувальних; 1.3, 2.3 – серед екстремальних систем (їх буде розглянуто у розділі 9); 3.2, 2.3, 3.3 – самонавчальних.

Якщо об'єкт керування складний, то його неможливо ідентифікувати за допомогою адекватної математичної моделі. Тоді адаптивну систему будують лише на основі вимірювання всіх доступних координат керування об'єктом. У процесі тривалої експлуатації встановлюють відповідність між мінливими сукупностями вхідних координат і критерієм якості керування (сукупності вихідних координат).

У скінченній кількості таких відповідностей є «погані» та «хороші» ситуації на об'єкті. Якщо весь набір можливих ситуацій визначено, то оператор, спостерігаючи за показами приладів, оцінює ситуацію, визначає її місце в класифікації та приймає рішення, змінюючи керувальні дії.

Керування об'єктами такого виду може відбуватися у межах класу адаптивних навчальних і самонавчальних систем, причому однією із задач адаптації в них є розпізнавання та класифікація ситуацій. Зауважимо, що при цьому задачі адаптації з навчанням є найбільш складними.

На закінчення сформулюємо основні характерні риси адаптивного керування:

1. Його доцільно застосовувати до тих систем, де мають місце неконтрольовані зміни параметрів і зовнішніх збурювальних впливів.

2. Адаптивне керування необхідне тоді, коли наявна апріорна невизначеність ситуації (невідомо структуру моделі, її параметри або цілі).

3. Розв'язок задач оптимізації в умовах апріорної невизначеності залежить від її рівня. У зв'язку з цим виділяють три рівні адаптивних систем: СНС, СОС і адаптивні системи з навчанням.

4. Адаптивні системи керування належать до нелінійних систем високого порядку. Вони характерні мінливими параметрами і, зазвичай, випадковим характером сигналів, що ускладнює задачу їх синтезу.

§ 8.2. Типи самоналаштувальних систем керування

Кількість апріорної інформації про об'єкт може бути різною (згідно з таблицею попереднього параграфу ми виділяємо такі її рівні «велика», «середня», «мала»). Цей розподіл відповідає переліченим нижче випадкам.

1. «Велика» кількість – структура й рівняння об'єкта визначені, відомі розрахункові значення параметрів керування, відносно яких відбуваються неконтрольовані їх зміни.

2. «Середня» – структура та рівняння об'єкта відомі, а параметри повністю або частково не визначені й змінюються неконтрольованим чином.

3. «Мала» – структура й рівняння об'єкта апріорно не визначені і не можуть бути встановлені в робочому режимі.

Адаптація до мінливих параметрів, а також до зовнішніх збурень у перших двох випадках може бути здійснена в межах класу СНС, а в найбільш несприятливих випадках – класу СОС. Розв'язування задач адаптації, у яких кількість інформації відповідає третьому випадку, здійснюється в рамках класу адаптивних систем з навчанням.

Розглянемо клас СНС. Припустимо, що критерій якості роботи основного контуру Q_1 системи вибрано. Коли відомі розрахункові параметри об'єкта, то оптимальні параметри налаштування регулятора $\{b_j^*\}$ можна вибрати таким чином, щоб $Q_1(x^*, b^*, t) = Q_{1 \min}$. При зміні параметрів об'єкта $\{C_i\}$ результатом адаптації є утримання поточного значення критерію на цьому рівні, тобто необхідно забезпечити виконання такої умови: $Q_{1 \text{ пот}}(t) = Q_{1 \min}$.

Коли ж структура об'єкта відома, а параметри керування частково або повністю не визначені, то оптимізація основного контуру апріорі не може бути здійснена. У цьому випадку процес адаптації включає в себе обчислення значення критерію $Q_{1 \min}(t)$, $Q_{1 \text{ пот}}(t)$ і розробку такого впливу, що забезпечить перехід $Q_{1 \text{ пот}}(t) \rightarrow Q_{1 \min}(t)$.

Оскільки при використанні СНС передбачено, що відома структура об'єкта, тобто його модель, то СНС називають *системами з моделлю*.

Розрізняють СНС у яких наявна налаштувальна й еталонна модель.

Припустимо, що в результаті попередніх досліджень, набуто інформацію про структуру об'єкта керування, а значить, про вид і порядок диференціального рівняння, яке його описує. Відомо також, що параметри об'єкта, тобто коефіцієнти рівняння $\{C_i\}$ змінюються довільно в деякій обмеженій області і ця зміна суттєво впливає на якість роботи системи в

цілому. Тоді для підтримки роботи системи відповідно до необхідного критерію якості виникає потреба перебудувати параметри $\{b_j\}$ регулятора.

Додатково до основного контуру системи (він включає регулятор та об'єкт, поєднані зворотним зв'язком) СНС з налаштувальною моделлю має такі елементи (див. рис. 8.2):

- контур налаштувальної моделі, який складається з блока налаштування моделі (БНМ) і моделі об'єкта (МО);
- контур самоналаштування, котрий включає обчислювальний пристрій (ОП) та виконавчий орган (ВО).

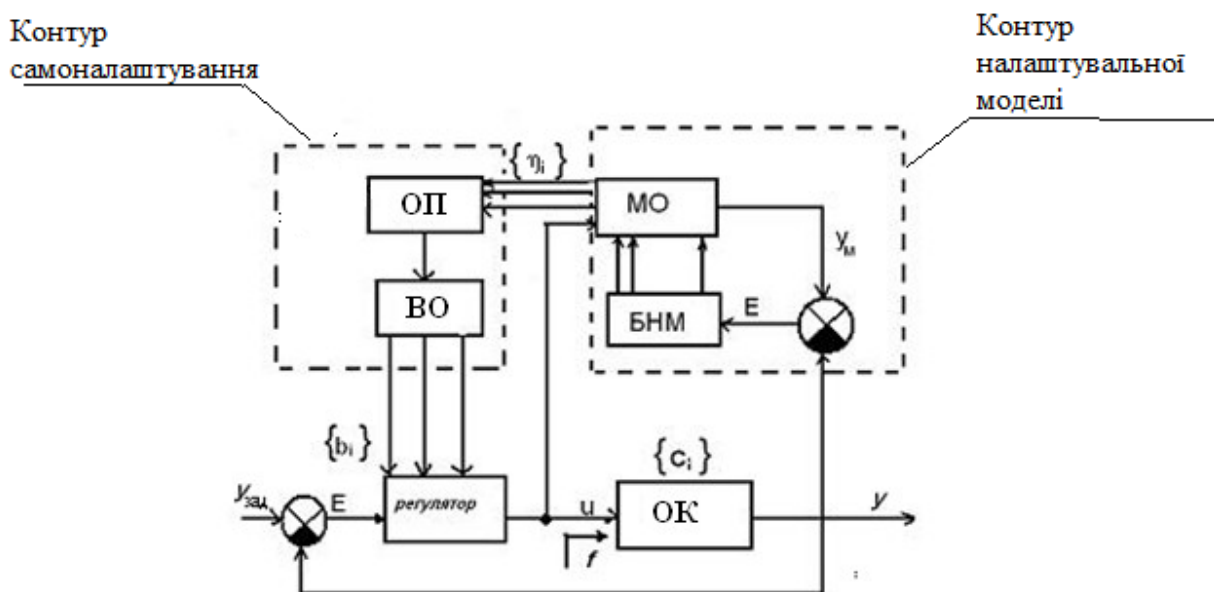


Рис. 8.2. Схема СНС з налаштувальною моделлю

Параметри моделі $\{\eta_i\}$ підлаштовуються з огляду на результат порівняння сигналів ОК й моделі. За допомогою ОП відповідно до критерію якості роботи основного контуру розраховується значення параметрів регулятора $\{b_j\}$ за поточними значеннями коефіцієнтів $\{\eta_i\}$.

У цій системі розв'язують відразу три оптимізаційні задачі, а саме:

1. Оптимізація процесу регулювання в основному, вихідному контурі, який містить об'єкт.
2. Оптимізація процесу налаштування моделі об'єкта.
3. Оптимізація в контурі самоналаштування.

Система з еталонною моделлю (ЕМ) (див. рис. 8.3) передбачає відповідність параметрів моделі деяким бажаним значенням, а отже, і перехідні процеси (Y_m) також відповідають бажаним характеристикам. Крім відмінностей у блоці моделі, системи на рис. 8.2 і рис. 8.3 істотно різняться одна від одної контурами самоналаштування, насамперед, сигналом на вході в ОП, а саме: у СНС з еталонною моделлю контур самоналаштування здійснює зміну

параметрів $\{b_j\}$ регулятора відповідно до сигналу: E_M ($E_M = Y_M - Y$), котрий виникає як в результаті змін параметрів ОК, так і внаслідок впливу збурень f .

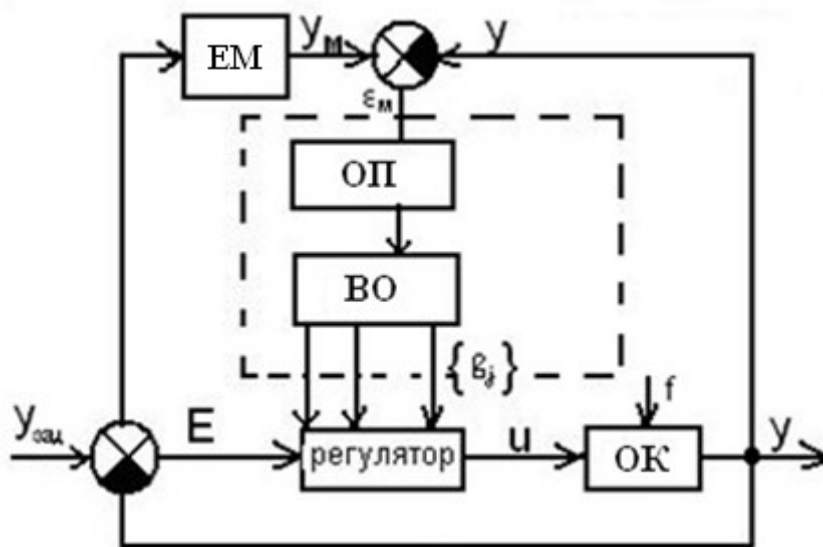


Рис. 8.3. Схема СНС з еталонною моделлю

§ 8.3. Аналітичні СНС з еталонною моделлю. Метод допоміжних операторів

Вважаючи, що основний контур СНС відповідає умовам квазістаціонарності, а його передавальна функція по каналу « $Y_{\text{зад}} - Y$ »: $\Phi(p, t) = \Phi(p)$, (див. рис. 8.3), робимо такий висновок:

$$Y(p) = \Phi(p) Y_{\text{зад}}(p). \quad (8.1)$$

Вектор налаштувальних параметрів регулятора $\{b_j\}$, відповідно до умов квазістаціонарності, змінюється повільно порівняно зі швидкістю перебігу перехідних процесів у контурі. Припустимо, що

$$\frac{db}{dt} = -\gamma \frac{dQ}{db}. \quad (8.2)$$

Вираз (8.2) являє собою рівняння градієнтного методу. Тут γ – скалярний множник; Q – критерій ефективності керування; вектори $\frac{db}{dt} = \left\{ \frac{db_j}{dt} \right\}$, $j = \overline{1, m}$, $\frac{dQ}{db} = \left\{ \frac{\partial Q}{\partial b_j} \right\}$, $j = \overline{1, m}$; мінус у рівнянні (8.2) означає, що проводиться пошук мінімуму ($\text{extr } Q = \min Q$).

Перетворимо рівняння (8.2) таким чином:

$$\frac{db}{dt} = -\gamma \frac{dQ}{dE_M} \frac{dE_M}{db}, \quad (8.3)$$

тут $E_M = Y_M - Y$, це різниця між рухами на виході моделі та основного контуру. Оскільки $E_M(p) = [\Phi_M(p) - \Phi(p)] \cdot Y_{зад}(p)$ і передавальна функція $\Phi_M(p)$ еталонної моделі не залежить від параметрів регулятора $\{b_j\}$, то

$$\frac{dE_M}{db} = -\frac{dY(p)}{db} = -\frac{d\Phi(p)}{db} \cdot Y_{зад}(p); \quad (8.4)$$

$$\frac{d\Phi(p)}{db} = \left\{ \frac{\partial \Phi(p)}{\partial b_j} \right\}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Остаточно рівняння набуває такого вигляду:

$$\frac{db}{dt} = \gamma \frac{dQ}{dE_M} \left[\frac{d\Phi(p)}{db} \right] Y_{зад}(p). \quad (8.5)$$

Компоненти вектора: $\frac{d\Phi(p)}{db} = \{W_j(p)\} = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial b_j} \right\}, j = \overline{1, m}$, носять назву

допоміжних операторів. Фактично рівняння (8.5) описують структуру контуру самоналаштування.

Основна складність у реалізації цього контуру – це потреба обчислювати значення вектора $\frac{dE_M}{db}$ або (що те саме) $\frac{d\Phi(p)}{db}$. Компоненти цього вектора:

$W_j = \frac{\partial \Phi(p, b, c)}{\partial b_j}$ (допоміжні оператори), являють собою функції чутливості до

параметрів регулятора $\{b_j\}$. Оскільки передавальна функція $\Phi(p)$ залежить не

тільки від параметрів $\{b_j\}$, а й від параметрів об'єкта $\{C_i\}$, то строге

обчислення похідних $\frac{\partial \Phi(p, b, c)}{\partial b_j}$ практично неможливе. Тому виникає потреба

в їх наближеному оцінюванні. Для цього застосовують метод стаціонарних

допоміжних операторів. Він полягає в тому, що у функції чутливості $\frac{\partial \Phi(p, b, c)}{\partial b_j}$, замість параметрів об'єкта $\{C_i\}$, підставляються відповідні

коефіцієнти з передавальної функції моделі замкненого контуру $\Phi_M(p)$. Таким

чином, шукані функції чутливості відповідають дійсним тільки тоді, коли $\Phi_M(p) = \Phi(p)$. Однак, при такому підході значно спрощується реалізація контуру самоналаштування СНС.

Приклад 8.1. Необхідно синтезувати адаптивну систему (СНС) з еталонною моделлю, якщо ОК має передавальну функцію такого вигляду:

$$W_0(p) = \frac{k_0}{T_0 p + 1},$$

і застосовано ПІ-регулятор, тобто

$$W_p(p) = k_{II} \left(1 + \frac{1}{T_{II} p} \right).$$

Розв'язування

Уведемо такі позначення: $C_1 = \frac{k_0}{T_0}$; $C_2 = \frac{1}{T_0}$; $b_1 = k_{II}$; $b_2 = \frac{1}{T_{II}}$.

Структурну схему основного контуру показано на рис. 8.4.

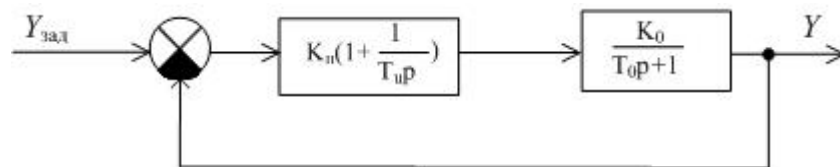


Рис. 8.4. Структурна схема основного контуру системи до прикладу 8.1

Обчислимо передавальну функцію замкненої системи, а саме:

$$W_0(p) \cdot W_p(p) = \frac{k_{II} \cdot (T_{II} p + 1)}{T_{II} p} \cdot \frac{k_0}{(T_0 p + 1)}.$$

Припустимо, що $T_{II} = T_0$, $C_2 = b_2$, тоді

$$W_0 \cdot W_p = \frac{k_{II} \cdot k_0}{T_{II} p} = \frac{C_1 \cdot b_1}{p}.$$

У замкненій САК передавальна функція $\Phi(p) = \frac{C_1 \cdot b_1}{p + C_1 \cdot b_1}$, і основний

контур має, таким чином, властивості аперіодичної ланки із сталою часу, значення якої може бути задане і забезпечує бажані характеристики перехідного процесу.

Еталонну модель виберемо з такою передавальною функцією:

$\Phi_M(p) = \frac{\alpha_M}{p + \alpha_M}$. Тоді метою самоналаштування буде підтримка таких

рівностей:

$$\begin{aligned}\alpha_m &= C_1 b_1; \\ C_2 &= b_2.\end{aligned}\tag{8.6}$$

За критерій оптимальності контуру самоналаштування зазвичай обирають інтегральну квадратичну оцінку, а саме:

$$Q = 0,5 \int_0^t E_m^2 dt.\tag{8.7}$$

Якщо рівності (8.6) порушуються, то передавальна функція замкненого основного контуру буде такою:

$$\Phi(p) = \frac{b_1 C_1 (p + b_2)}{p^2 + p(C_2 + C_1 b_1) + C_1 b_1 b_2}.\tag{8.8}$$

Процес налаштування параметрів регулятора b_1 і b_2 будемо здійснювати за таким законом:

$$\frac{db_i}{dt} = -\gamma \frac{dQ}{db_i}; \quad i = 1, 2,\tag{8.9}$$

тут γ – скалярний множник.

Оскільки значення похідних $\frac{dQ}{db_i}$, $i = 1, 2$, невідомі через невизначеність параметрів b_1 і b_2 , то рівняння (8.9) замінюємо на такі:

$$\frac{db_i}{dt} = -\gamma \frac{dQ}{dE_m} \cdot \frac{dE_m}{db_i}; \quad i = 1, 2,\tag{8.10}$$

але

$$\frac{dE}{db_i} = \frac{d(Y_m - Y)}{db_i} = -\frac{dY}{db_i} = -\frac{d\Phi}{db_i} Y_{зад}(p); \quad i = 1, 2,$$

тоді

$$\frac{db_i}{dt} = -\gamma \frac{dQ}{dE} \left[-\frac{d\Phi}{db} \right] Y_{зад}(p); \quad i = 1, 2.\tag{8.11}$$

Скориставшись виразом (8.8), виконаємо обчислення похідних, а саме:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b_1} = \frac{C_1 p (p^2 + p(C_2 + b_2) + C_2 b_2)}{(p^2 + p(C_2 + C_1 b_1) + C_1 b_1 b_2)^2},\tag{8.12}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b_2} = \frac{C_1 b_1 p (p + C_2)}{(p^2 + p(C_2 + C_1 b_1) + C_1 b_1 b_2)^2}.$$

Припускаючи, що рівності (8.6) підтверджуються, з виразу (8.12) випливає, що

$$W_1^* = \frac{\partial \Phi}{\partial b_1} = \frac{1}{b_1} \cdot \frac{\alpha_M}{(p + \alpha_M)} \cdot \frac{p}{(p + \alpha_M)};$$

$$W_2^* = \frac{\partial \Phi}{\partial b_2} = \frac{1}{(p + b_2)} \cdot \frac{\alpha_M}{(p + \alpha_M)} \cdot \frac{p}{(p + \alpha_M)}.$$

Похідна $\frac{dQ}{dE} = \int_0^t E_M dt$, а з урахуванням визначення (8.11)

$$pb_1 = \gamma \left[\int_0^t E_1 dt \right] W_1^* Y_{зад}(p);$$

$$pb_2 = \gamma \left[\int_0^t E dt \right] W_2^* Y_{зад}(p).$$

Рівняння (8.14), розв'язані відносно параметрів b_1 і b_2 , визначають структуру контуру самоналаштування СНС (див. рис. 8.5), де пунктиром виділено блоки, відповідні блокам на рис. 8.3.

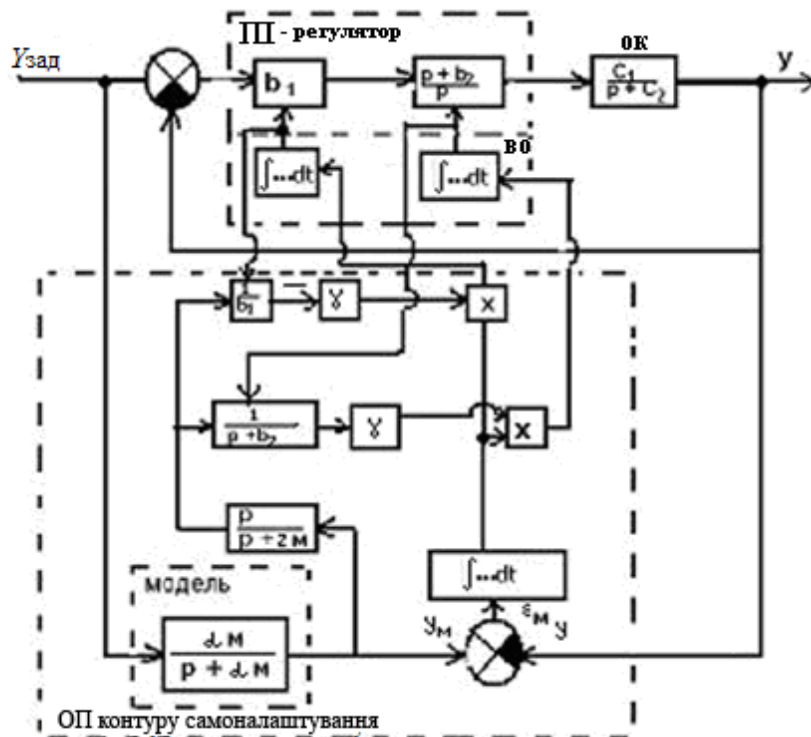


Рис. 8.5. Структурна схема адаптивної СНС до прикладу 8.1

§ 8.4. Аналітичні СНС з моделлю варіацій рівняння об'єкта (інваріантні СНС)

В основі цього типу СНС лежать ідеї теорії інваріантності, тобто нечутливості до змін, зокрема принцип двоканальності, запропонований академіком Б. Н. Петровим. За цим принципом утворення двох каналів передачі сигналу дозволяє компенсувати збурення руху в основному контурі, породжені нестационарністю об'єкта.

Припустимо, що нестационарність об'єкта є результатом неконтрольованих довільних змін значень коефіцієнтів лінійного диференціального рівняння по відношенню до номінальних значень. Крім того, будемо вважати, що підтверджується гіпотеза про квазістационарність об'єкта, а параметри мають обмежений діапазон зміни.

Розглянемо лінійний об'єкт, який описується таким оператором:

$$A(p,t) = \frac{N(p,t)}{D(p,t)} = \frac{N_0(p) + \Delta N(p,t)}{D_0(p) + \Delta D(p,t)}. \quad (8.15)$$

Тут функції $N_0(p)$, $D_0(p)$ відображають розрахункові, незмінні або номінальні властивості об'єкта, а їхні варіації $\Delta N(p,t)$, $\Delta D(p,t)$ показують нестационарність об'єкта.

Зв'язок вхідних x_t і вихідних y_t координат об'єкта в операторній формі має такий вигляд:

$$D_0(p)y_t = N_0(p)x_t - \Delta D(p,t)y_t + \Delta N(p,t)x_t.$$

Уведемо такі позначення

$$\varphi_t = \Delta N(p,t)x_t - \Delta D(p,t)y_t, \quad (8.16)$$

тоді

$$D_0(p)y_t = N_0(p)x_t + \varphi_t. \quad (8.17)$$

При цьому складову φ_t називають *збуреним рухом*, викликаним нестационарністю коефіцієнтів диференціального рівняння, котре описує об'єкт. Рівняння (8.17) відповідає структурі, зображеній на рис. 8.6, а, або після перенесення точки підсумовування на вхід, структурі на рис. 8.6, б.

З даних рис. 8.6, б випливає, що коли вхідну координату x_t замінити сумою, тобто

$$x_t = \mu_t + y_k, \quad (8.18)$$

тут μ_t – деяка нова координата; y_k – сигнал компенсації такого вигляду:

$$y_k = -\frac{1}{N_0(p)}\varphi_t, \quad (8.19)$$

то вихідна координата об'єкта $y_t \equiv \tilde{y}_t$, де \tilde{y}_t – вихідна координата об'єкта, який має номінальні параметри N_0 і D_0 .

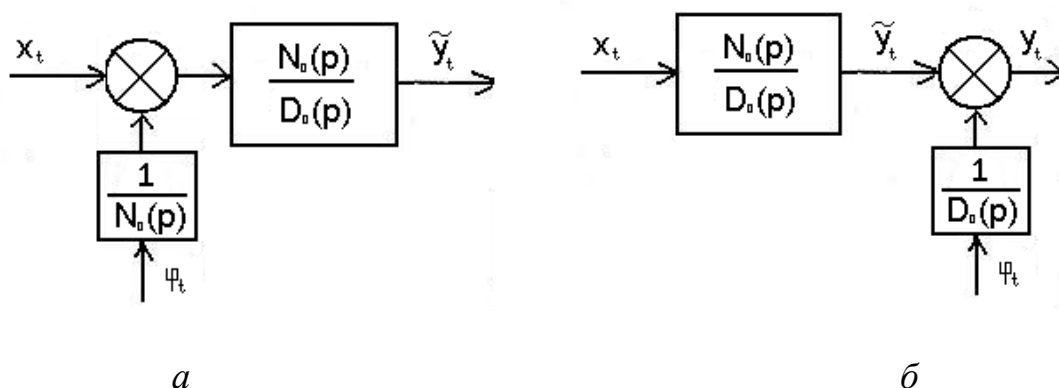


Рис. 8.6. Структура системи, описана рівнянням (8.17): *a* – початкова; *б* – після перенесення точки підсумовування на вхід

Координата y_t не залежить від зміни значень коефіцієнтів рівняння $\Delta N(p,t)$ і $\Delta D(p,t)$, тому рівність (8.19) являє собою умову абсолютної інваріантності вихідної координати y_t щодо зміни параметрів об'єкта.

Отже, для формування сигналу компенсації y_k потрібно мати ланку компенсації з такою передавальною функцією: $W_k(p) = -\frac{1}{N_0(p)}$, причому оператор $N_0(p)$ відомий. Крім того, необхідно формувати сигнал ϕ_t згідно з правилом (8.16). Структурну схему описаної побудови показано на рис. 8.7.

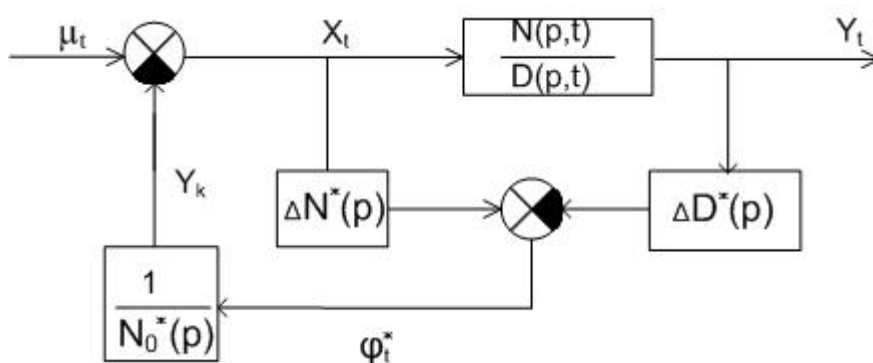


Рис. 8.7. Структурна схема системи після перетворення вихідної моделі

Тут зірочка (*) означає, що ланки з операторами $N_0^*(p)$, $\Delta N^*(p,t)$, $\Delta D^*(p,t)$ вводяться додатково і в загальному випадку (під час налаштування) не дорівнюють операторам $N_0(p)$, $\Delta N(p,t)$, $\Delta D(p,t)$.

Об'єкт, оператор якого $A(p,t) = \frac{N(p,t)}{D(p,t)}$, доповнений двома диференціально ввімкнутими зв'язками $\Delta N^*(p,t)$, $\Delta D^*(p,t)$ та ланкою компенсації $\frac{1}{N_0^*(p)}$, називають *узагальненим налагоджуваним об'єктом* (УНО). Диференціально ввімкнені зв'язки $\Delta N^*(p,t)$ і $\Delta D^*(p,t)$ являють собою моделі варіацій рівняння об'єкта.

Доповнимо УНО регулятором із сталою передавальною функцією, яка має такий вигляд: $W_p(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}$. Параметри цієї функції можна знаходити будь-яким відомим методом, який підходить для обчислення номінальних значень параметрів об'єкта $N_0(p)$, $D_0(p)$ та заданого критерію оптимальності I . За таких умов структурна схема основного контуру керування буде мати вигляд, зображений на рис. 8.8.

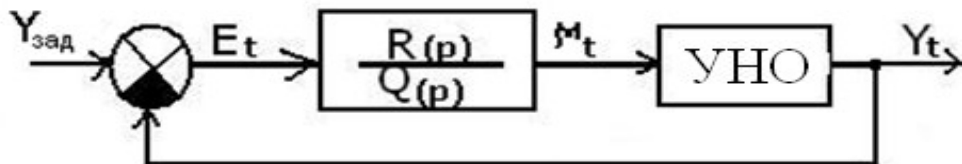


Рис. 8.9. Структурна схема основного контуру керування УНО

На інтервалі квазістаціонарності можна записати передавальну функцію замкненого контуру таким чином:

$$\Phi(p,t) \approx \Phi(p) = \frac{y(p)}{y_{зад}(p)} =$$

$$= \left[R(p) \cdot N_0^*(p) \cdot (N_0(p) + \Delta N(p)) \right] / \left[Q(p) \left((N_0^*(p) + \Delta N^*(p)) (D_0(p) + \Delta D(p)) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \Delta D^*(p) (N_0(p) + \Delta N(p)) \right) + R(p) \cdot N_0^*(p) (N_0(p) + \Delta N(p)) \right].$$

Якщо для замкненої системи будуть справедливими такі рівності:

$$\begin{cases} N_0^*(p) = N_0(p); \\ \Delta N^*(p) = \Delta N(p); \\ \Delta D^*(p) = \Delta D(p), \end{cases} \quad (8.20)$$

то її передавальна функція набуває такого вигляду:

$$\Delta\Phi(p) = \frac{R(p)N_0(p)}{Q(p)D_0(p) + R(p)N_0(p)} = \frac{\frac{R}{Q} \cdot \frac{N_0}{D_0}}{1 + \frac{R}{Q} \cdot \frac{N_0}{D_0}}.$$

Отже, налаштування моделей варіацій ΔN^* , ΔD^* і компенсуючої ланки $\frac{1}{N_0^*}$ відповідно до рівностей (8.20) дозволяє стабілізувати розрахунковий оптимальний стан замкненого контуру і забезпечує незалежність регульованої координати від змін параметрів об'єкта.

Адаптивна система буде стійкою, якщо корені характеристичного полінома

$$L(p) = Q(p) \cdot D_0(p) + R(p) \cdot N_0(p),$$

розташовані в лівій напівплощині, тобто мають від'ємні дійсні частини. Більше того, для її стійкості необхідно, аби унаслідок варіації параметрів об'єкта не відбувалося переміщення нулів функції $L(p)$ через уявну вісь у праву півплощину.

Фізична реалізованість адаптивної системи пов'язана із можливістю побудови моделей варіацій $\Delta N^*(p, t)$ й $\Delta D^*(p, t)$, котрі являють собою комбінації лінійних диференціальних операторів: $p^0, p^1, p^2 \dots (p = \frac{d}{dt})$ із змінними коефіцієнтами Δn_i та Δd_j , а саме:

$$\Delta N^*(p, t) = \sum_{i=0}^m \Delta n_i p^{(i)}; \quad \Delta D^*(p, t) = \sum_{j=0}^l \Delta d_j p^{(j)}.$$

З умов задачі відомі номінальні або розрахункові значення коефіцієнтів n_i^0, d_j^0 . Тому для обчислення коефіцієнтів Δn_i і Δd_j необхідно знати поточні значення параметрів об'єкта n_i і d_j , тоді

$$\Delta n_i = n_i - n_i^0, \quad i = \overline{0, m};$$

$$\Delta d_j = d_j - d_j^0, \quad j = \overline{0, l}.$$

Щоб знайти поточні значення параметрів моделей, в адаптивній системі використовують налаштувальну модель об'єкта (НМО) і блок налагодження моделі (БНМ).

На рис. 8.10. показано загальну структурну схему інваріантної адаптивної системи з УНО.

Алгоритмом налаштування моделі може слугувати один з адаптивних методів ідентифікації, наприклад, метод градієнтного спуску.

У нашому випадку модель об'єкта має такий вигляд:

$$\sum_{i=0}^m d_i y^{(i)} = \sum_{j=0}^l n_j x^{(j)}.$$

Підлаштування параметрів моделі $C = (n_i, d_j)$ здійснюється у відповідно до поточних значень вхідних x_t і вихідних y_t координат об'єкта. При цьому миттєву нев'язку можна обчислити таким чином:

$$g_t = \sum_{i=0}^m d_i y_t^{(i)} - \sum_{j=0}^l n_j x_t^{(j)}.$$

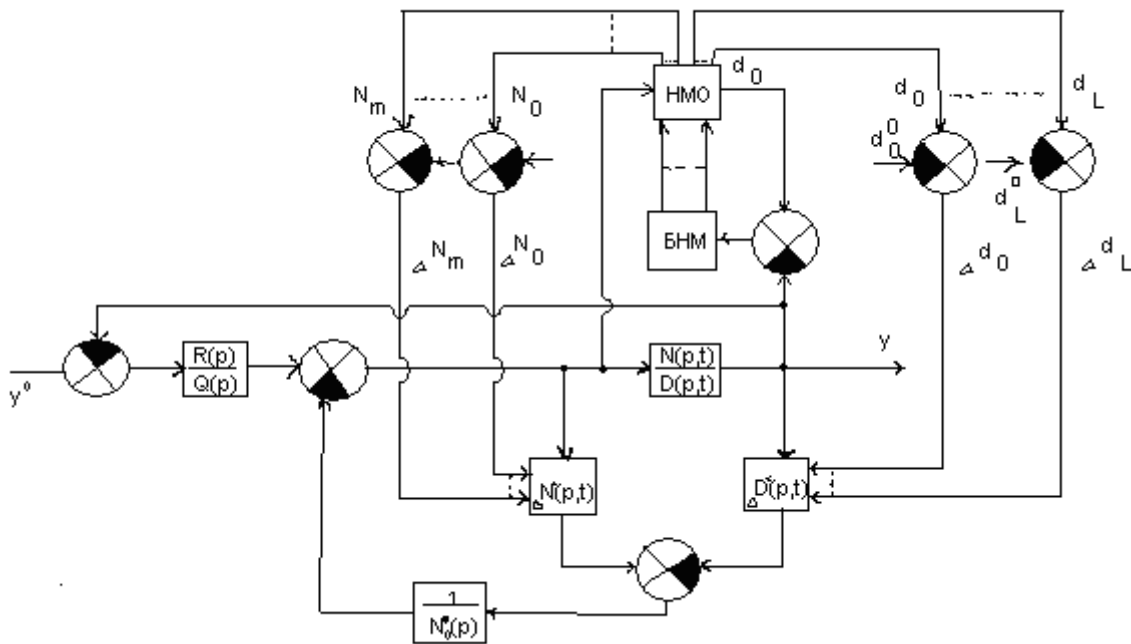


Рис. 8.10. Загальна структурна схема інваріантної адаптивної системи з УНО

Алгоритм налаштування параметрів у загальному вигляді можна записати в такий спосіб:

$$\frac{dc}{dt} = -\alpha_t \text{grad } g_t^2.$$

або більш докладно у векторному вигляді

$$\frac{dd}{dt} = -\alpha_t \text{grad } g_t^2 = 2\alpha_t \cdot g_t \cdot (y_t, y_t^0, y_t^1, \dots, y_t^{(m)});$$

$$\frac{dn}{dt} = -\alpha_t \text{grad } g_t^2 = 2\alpha_t \cdot g_t \cdot (x_t, x_t^0, x_t^1, \dots, x_t^{(l)}).$$

У скалярному вигляді

$$\begin{cases} \frac{dd_i}{dt} = -2\alpha_t \cdot g_t \cdot y_t^{(i)}, & i = \overline{0, m}; \\ \frac{dn_j}{dt} = -2\alpha_t \cdot g_t \cdot x_t^{(j)}, & j = \overline{0, l}. \end{cases}$$

При цьому значення параметра α_t вибирають, виходячи з таких умов:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_t = 0, \quad \int_0^{\infty} \alpha_t dt = \infty, \quad \int_0^{\infty} \alpha_t^2 dt < \infty.$$

Виконання цих умов забезпечує збіжність процесу налаштування параметрів моделі: $C = (n_i, d_j)$.

§ 8.5. Аналітичні СНС з самоналаштуванням за еталонною імпульсною перехідною функцією розімкненого основного контуру

Якщо об'єкт керування задовольняє умову квазістаціонарності, а сигнали на його вході і виході являють собою стаціонарні випадкові процеси, то алгоритм самоналаштування може бути отриманий шляхом розв'язування системи двох інтегральних рівнянь, а саме:

$$\begin{cases} W^{onm}(t) = \int_0^T W_p^{onm}(t - \tau) \cdot W_{ob}(\tau) d\tau; \end{cases} \quad (8.21)$$

$$\begin{cases} K_{xy}(t) = \int_0^T K_{xx}(t - \tau) \cdot W_{ob}(\tau) d\tau, \end{cases} \quad (8.22)$$

де $W^{onm}(t)$ – задана оптимальна в деякому сенсі імпульсна перехідна функція (ПФ) розімкненого основного контуру; $W_{ob}(t)$ – ПФ об'єкта; $K_{xy}(t)$ – взаємкореляційна функція сигналів x, y ; $K_{xx}(t)$ – автокореляційна функція сигналу x .

Вираз (8.22) має назву *рівняння Вінера – Хопфа*. Інтегральні рівняння (8.21), (8.22) можуть бути розв'язані числовими методами, якщо задачу подати в дискретному вигляді, зокрема час t як сукупність дискретних рівновіддалених моментів із кроком Δt , тобто $t = i\Delta t$; а неперервні функції – у формі дискретних відліків. Тоді дискретний запис рівняння (8.22) буде мати такий вигляд:

$$K_{XY}(i\Delta t) = \sum_{k=0}^{n-1} K_{XX}[(i-k)\Delta t] W_{ob}(k\Delta t) \Delta t, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (8.23)$$

тут i – номер відліку часу t ; k – номер відліку зсуву τ між перерізами процесів. Оскільки $K_{XX}(\tau) = K_{XX}(-\tau)$, то рівняння (8.23) можна записати в матричному вигляді таким чином:

$$K_{XY} = K_{XX}W_{об}, \quad (8.24)$$

$$\text{тут } K_{XX} = \begin{bmatrix} K_{xx}(0) & K_{xx}(\Delta t) & \dots & K_{xx}[(n-1) \cdot \Delta t] \\ K_{xx}(\Delta t) & K_{xx}(0) & \dots & K_{xx}[(n-2) \cdot \Delta t] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{xx}[(n-1) \cdot \Delta t] & K_{xx}[(n-2) \cdot \Delta t] & \dots & K_{xx}(0) \end{bmatrix},$$

де $W_{об}$, K_{XY} – вектори розмірності $n \times 1$.

Очевидно, що інтегральне рівняння (8.22) рівносильне матричному (8.24), котре має такий розв'язок:

$$W_{об} = K_{XX}^{-1}K_{XY}. \quad (8.25)$$

Функції K_{XX} і K_{XY} обчислюються на основі вимірювання випадкових процесів на вході $x(t)$ і виході $y(t)$ об'єкта на інтервалі $[0 \div T]$ за такими формулами:

$$K_{XX}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{x}(t) \tilde{x}(t + \tau) dt; \quad (8.26)$$

$$K_{XY}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{x}(t) \tilde{y}(t + \tau) dt, \quad (8.27)$$

де $\tilde{x}(t)$, $\tilde{y}(t)$ – центровані випадкові процеси, тобто $\tilde{x}(t) = x(t) - M_X$, $\tilde{y}(t) = y(t) - M_Y$; M_X , M_Y – математичні сподівання процесів $x(t)$, $y(t)$ відповідно.

У дискретному вигляді формули (8.26), (8.27) можна записати таким чином:

$$K_{XX}(\gamma \Delta t) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{X}_i \tilde{X}_{i+\gamma}; \quad (8.28)$$

$$K_{XY}(\gamma \Delta t) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{X}_i \tilde{Y}_{i+\gamma}, \quad (8.29)$$

тут параметр γ визначає змінний зсув, тобто $\tau = \gamma \Delta t$.

Обчислення оптимальної ПФ регулятора $W_p^{opt}(t)$ за відомою (заданою) ПФ $W^{opt}(t)$ розімкненого основного контуру та з урахуванням визначеної за

формулою (8.21) поточної ППФ об'єкта $W_{o\bar{o}}(t)$ на інтервалі $[0 \div T]$ також доцільно проводити одним із числових методів. Дискретне наближення формули (8.21) має такий вигляд:

$$W^{opt}(k\Delta t) = \sum_{l=0}^{n-1} W_p^{opt}[(k-l)\Delta t] W_{o\bar{o}}(l-\Delta t)\Delta t, \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (8.30)$$

У фізично реалізованих системах $k \geq l$, тому матриця W_p^{opt} являє собою ліву трикутну, тобто

$$W_p^{opt} W_{o\bar{o}} = W^{opt}, \quad (8.31)$$

де W_p^{opt} – матриця розмірності $n \times n$; $W_{o\bar{o}}$, W^{opt} – вектори $n \times 1$; причому

$$W_p^{opt} = \begin{bmatrix} W_p^{opt}(0) & 0 & \dots & 0 \\ W_p^{opt}(\Delta t) & W_p^{opt}(\Delta t) & \dots & 0 \\ W_p^{opt}(2 \cdot \Delta t) & W_p^{opt}(2 \cdot \Delta t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_p^{opt}(i \cdot \Delta t) & W_p^{opt}((i-1)\Delta t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_p^{opt}((n-1)\Delta t) & W_p^{opt}((n-2)\Delta t) & \dots & W_p^{opt}(0) \end{bmatrix};$$

$$W_{o\bar{o}} = \begin{bmatrix} W_{o\bar{o}}(0) \\ W_{o\bar{o}}(\Delta t) \\ \dots \\ W_{o\bar{o}}(i\Delta t) \\ \dots \\ W_{o\bar{o}}((n-1)\Delta t) \end{bmatrix}, \quad W^{opt} = \begin{bmatrix} W^{opt}(0) \\ W^{opt}(\Delta t) \\ \dots \\ W^{opt}(i\Delta t) \\ \dots \\ W^{opt}((n-1)\Delta t) \end{bmatrix}.$$

Компоненти матриці W_p обчислюються за такою формулою:

$$W_p^{opt}(i\Delta t) = \frac{w_p^{opt}(i\Delta t) - \Delta t \sum_{\gamma=1}^i w_p^{opt}[(i-\gamma)\Delta t] w_{o\bar{o}}(\gamma\Delta t)}{\Delta t \cdot w_{o\bar{o}}(0)}. \quad (8.32)$$

Після обчислення всіх ординат і оптимальної ППФ регулятора $W_p^{opt}(i\Delta t)$ здійснюється згортка сигналу неузгодженості $\varepsilon(t)$ основного контуру з обчисленою ваговою функцією $W_p^{opt}(t)$, тобто визначається регулювальний вхідний вплив $x(t)$, а саме:

$$X(k\Delta t) = \sum_{l=0}^{n-1} \varepsilon[(k-l)\Delta t] W_p^{opt}(l\Delta t) \Delta t, \quad (8.33)$$

причому $l \leq k = 0, 1, \dots, n-1$.

Таким чином, повний цикл самоналаштування складається з таких послідовних етапів:

1. За відомими (зафіксованими) вхідними $x(t)$ і вихідними $y(t)$ процесами обчислюють кореляційні функції K_{XX} і K_{XY} , скориставшись формулами (8.28) і (8.29).

2. Визначають ППФ об'єкта $W_{об}(t)$ за формулою (8.25).

3. Знаходять оптимальну ППФ регулятора $W_p^{opt}(t)$ за формулою (8.32).

4. Обчислюють оптимальний регулювальний вхідний вплив $x(t)$ [для заданої оптимальної ППФ $W_p^{opt}(t)$ розімкненого основного контуру], застосувавши формулу (8.33).

§ 8.6. Проектування СНС з еталонною моделлю на основі прямого методу Ляпунова

Розглянемо СНС, схему якої зображено на рис. 8.3. Зауважимо, що найбільш важливим етапом синтезу СНС з еталонною моделлю є розробка алгоритму контуру самоналаштування, який забезпечує зменшення або усунення відхилення ($\varepsilon_M = y_M - y$). Для цього найбільш універсальним сьогодні є підхід, який базується на прямому методі Ляпунова оцінювання стійкості систем. Зокрема, система: $\dot{y}_i = \varphi(y_1, y_2, \dots, y_n)$, $i = \overline{1, n}$, буде асимптотично стійкою, коли для неї можна підібрати знаковизначену функцію $V(y_1, y_2, \dots, y_n)$, похідна якої $\frac{dV}{dt}$ теж знаковизначена, але з протилежним знаком.

Отже, якщо для адаптивної системи вдається підібрати таку функцію Ляпунова V , залежну від власних похідних та відхилення ε_M , то це практично визначає алгоритм самоналаштування. Розглянемо застосування цього методу на прикладі.

Приклад 8.2. Нехай розімкнений основний контур відповідає схемі на рис. 8.11.

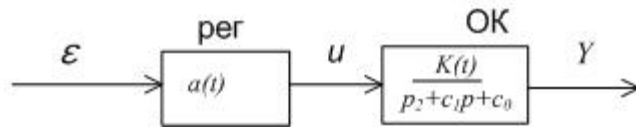


Рис. 8.11. Структурна схема основного розімкненого контуру до прикладу 8.2

Передавальна функція такої системи

$$W_{ок}(p) = \frac{k_0(t)}{p^2 + C_1p + C_0} = \frac{y(p)}{u(p)},$$

тобто

$$\ddot{y} + C_1\dot{y} + C_0y = k(t)U,$$

тут C_1, C_0 – сталі параметри об'єкта, $k(t)$ – коефіцієнт підсилення об'єкта, який змінюється в часі.

Регулятор являє собою підсилювач зі змінним коефіцієнтом $a(t)$.

Тоді модель розімкненого основного контуру буде мати такий вигляд:

$$\ddot{y} + C_1\dot{y} + C_0y = k_0(t)a(t)\varepsilon, \quad (8.34)$$

де $\varepsilon = y_{зад} - y$.

Рівняння еталонної моделі запишемо таким чином:

$$\ddot{y} + C_1\dot{y} + C_0y = k_m\varepsilon \quad (8.35)$$

Необхідно знайти такий закон зміни параметра $a(t)$, який забезпечить виконання умови: $\varepsilon_M = 0$, тобто матиме місце асимптотична стійкість системи.

Віднімемо від рівняння (8.35) вираз (8.34), а саме:

$$\ddot{\varepsilon}_M + C_1\dot{\varepsilon}_M + C_0\varepsilon_M = [k_m - a(t)k_0(t)]\varepsilon = b\varepsilon, \quad (8.36)$$

тут

$$b = [k_m - a(t)k_0(t)]. \quad (8.37)$$

Запишемо рівність (8.36) у нормальній формі Коші, тобто

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon}_2 = -C_1\varepsilon_2 - C_0\varepsilon_1 + b\varepsilon. \end{cases} \quad (8.38)$$

Згідно з методом, обираємо такий вигляд функції Ляпунова:

$$V = -C_0\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + b^2. \quad (8.39)$$

Її похідна $\frac{dV}{dt} = 2[C_0\varepsilon_1\dot{\varepsilon}_1 + \varepsilon_2\dot{\varepsilon}_2 + b\dot{b}]$, або з урахуванням системи (8.38)

$$\frac{dV}{dt} = 2 \left[C_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 - C_1 \varepsilon_2^2 - C_0 \varepsilon_1 \dot{\varepsilon}_2 + b \varepsilon \varepsilon_2 + b \dot{b} \right] = 2 \left[-C_1 \varepsilon_2^2 + b(\varepsilon \varepsilon_2 + \dot{b}) \right]. \quad (8.40)$$

Як бачимо, функція V знаковизначена й додатна. Її похідна $\frac{dV}{dt}$, коли $C_1 > 0$, буде знаковизначеною від'ємною, якщо виконано таку умову:

$$\varepsilon \varepsilon_2 + \dot{b} = 0, \text{ тобто } \dot{b} = -\varepsilon \varepsilon_2 = -\varepsilon \dot{\varepsilon}_M.$$

Будемо вважати, що коефіцієнт $k_0(t)$ змінюється повільно відносно свого номінального значення k_0^n (гіпотеза квазістаціонарності), тоді

$$\dot{b} = -k_0^n \cdot \dot{a}(t) = -\varepsilon \dot{\varepsilon}_M,$$

і, відповідно,

$$a(t) = \frac{1}{k_0^n} \int_0^t \varepsilon \dot{\varepsilon}_M dt.$$

Останній вираз визначає алгоритм і структуру контуру самоналаштування, його схему показано на рис. 8.12.

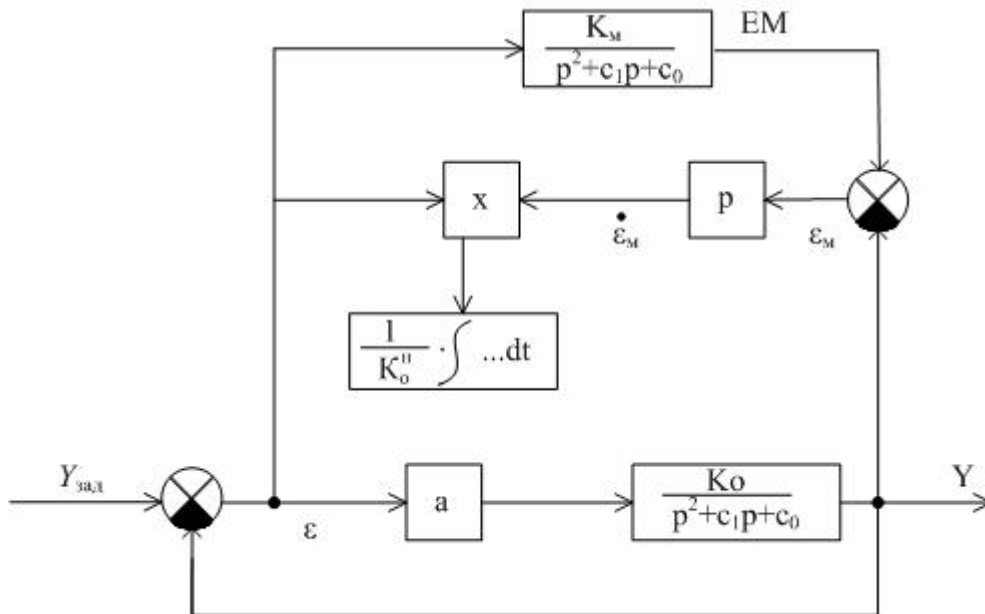


Рис. 8.12. Структурна схема контуру самоналаштування до прикладу 8.2

§ 8.7. Аналітичні СНС, у яких налаштування відбувається з огляду на зовнішні впливи

Призначенням таких систем керування є підтримка оптимального режиму роботи в умовах зміни властивостей зовнішніх впливів. Схему системи, яка виконує це завдання, подано на рис. 8.13.

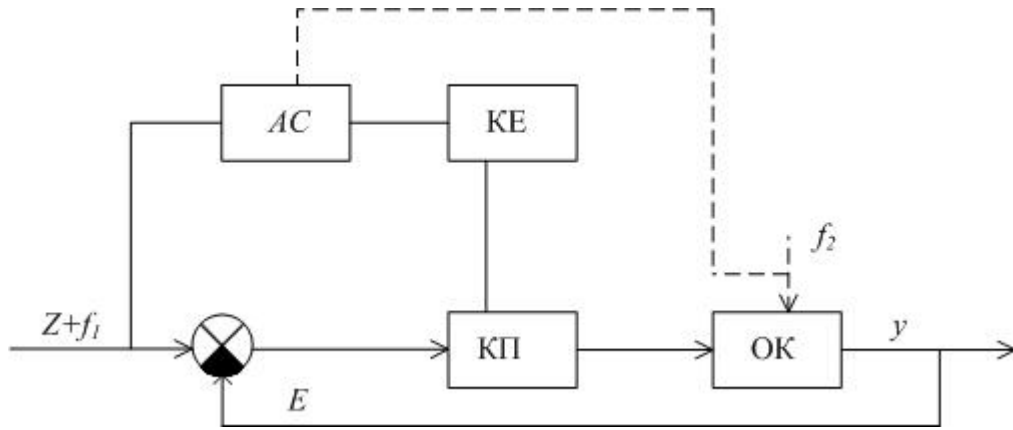


Рис. 8.13. Структурна схема СНС з налаштуванням залежно від зовнішніх впливів

На вході системи діє задавальний сигнал Z і перешкода f_1 . В аналізаторі сигналів АС оцінюються параметри і ймовірнісні характеристики корисного сигналу Z та функції збурень f_1 (f_2). Відповідно до результатів цього аналізу за допомогою керувального елемента КЕ розраховуються (обчислюються) оптимальні значення параметрів керувальної частини системи і вносяться відповідні зміни до керувальної частини (КП) основного контуру.

У цих СНС критерій оптимальності зазвичай відображає їхні точнісні властивості і має такий вигляд:

$$I = \varepsilon_{\partial}^2 + \lambda \varepsilon_c^2, \quad (8.41)$$

тут ε_{∂} – динамічна помилка, зумовлена неточним відтворенням системою корисного сигналу Z ; ε_c – випадкова складова помилки, викликаної збуреннями f_1 (f_2); λ – ваговий коефіцієнт.

Використання критерію (8.41) базується на припущенні, що сигнал $Z(t)$ являє собою поліном певного порядку від часу t з невідомими коефіцієнтами, а збурення f_1 (f_2) – випадкові процеси з відомими ймовірнісними властивостями. Параметри КП мають змінюватися (підлаштовуватися) таким чином, щоб забезпечити мінімальне значення критерію (8.41).

Припустимо, що A – вектор параметрів КП, котрі необхідно змінювати з метою мінімізації критерію (8.41). Тоді необхідно спочатку встановити аналітичну залежність критерія від вектора A , а потім знайти оптимальне значення цього вектора, виходячи з умови, що $\frac{\partial I}{\partial A} = 0$.

Якщо вхідний вплив $Z(t)$ змінюється повільно і протягом періоду квазістаціонарності апроксимується за допомогою полінома від t порядку ν , то динамічна помилка обчислюється таким чином:

$$\varepsilon_{\partial}(t) = C_0 Z + C_1 \dot{Z} + \dots + C_{\nu} Z^{(\nu)}. \quad (8.42)$$

Коефіцієнти помилок C_i , $i = \overline{0, v}$, пов'язані з передавальною функцією системи по каналу "Z – ε" і будуть мати такий вигляд:

$$\begin{aligned}
 C_0 &= W_{Z\varepsilon}(p) | p = 0; \\
 C_1 &= \frac{\partial W_{Z\varepsilon}(p)}{\partial p} | p = 0; \\
 &\dots \dots \dots \\
 C_i &= \frac{\partial^i W_{Z\varepsilon}(p)}{\partial p^i} | p = 0. \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}
 \tag{8.43}$$

Таким чином, коефіцієнти C_i виражаються через параметри A керувальної частини системи. Випадкова складова помилки ε_c виражається через спектральні щільності перешкод f_1 (f_2) та через відповідні передавальні функції, а саме:

$$\varepsilon_c^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |W_{f_1\varepsilon}(j\omega)|^2 S_{f_1}(\omega) d\omega,
 \tag{8.44}$$

тут $[W_{f_1}(j\omega)]$ – модуль частотної характеристики системи за каналом «перешкода f_1 – помилка ε »; $S_{f_1}(\omega)$ – спектральна щільність перешкоди f_1 .

Оскільки величина помилки ε_c також залежить від вектора A , то встановлюється явна залежність між критерієм I та параметрами A , а потім розв'язується таке рівняння: $\frac{\partial I}{\partial A} = 0$.

Приклад 8.3. Розглянемо СК, основний контур якої має вигляд, зображений на рис. 8.14 а, б.

Відповідні цій структурі моделі можуть бути записані таким чином:

$$\begin{aligned}
 W_{\varepsilon Y}(p) &= \frac{K(\tau p + 1)}{p(Tp + 1)}, \quad K \gg 1; \\
 W_{Z\varepsilon}(p) &= \frac{1}{1 + W_{\varepsilon Y}(p)} = \frac{p(Tp + 1)}{p(Tp + 1) + K(\tau p + 1)},
 \end{aligned}$$

тут стала часу T являє собою параметр керувальної частини системи.

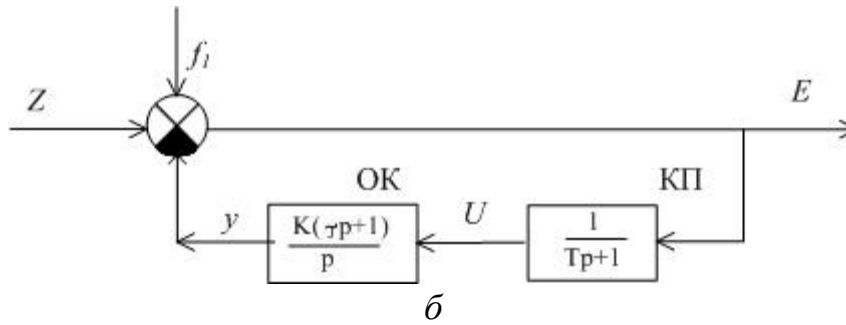
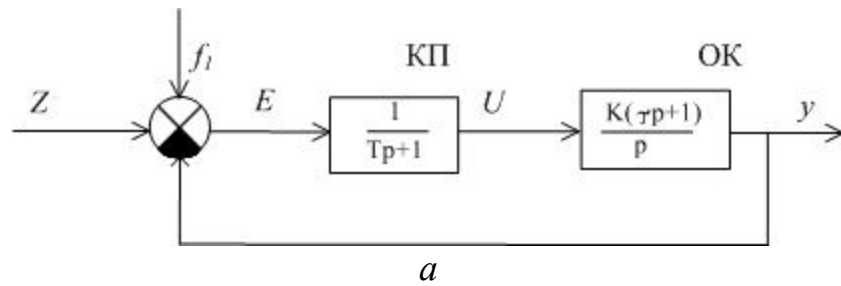


Рис. 8.14. Структурна схема системи до прикладу 8.3

Припустимо, що вхідний сигнал Z змінюється повільно і протягом періоду квазістаціонарності може бути апроксимований за допомогою полінома другого порядку, тобто $\nu = 2$, а перешкода f_1 являє собою випадковий процес типу білого шуму, спектральна щільність якого $S_{f_1} = N = \text{const}$. Потрібно визначити закон зміни T , аби система була б оптимальною в сенсі критерію (8.41), а саме:

$$I = \varepsilon_D^2 + \varepsilon_C^2 \rightarrow \min, \quad \lambda = 1.$$

Відповідно до виразу (8.42) динамічна помилка $\varepsilon_D(t) = C_0 Z + C_1 \dot{Z} + C_2 \ddot{Z}$.

Коефіцієнти $C_i, i = \overline{0,2}$, обчислюються за формулами (8.43), тобто

$$C_0 = W_{Z\varepsilon}(p)|_{p=0} = 0;$$

$$C_1 = \left. \frac{\partial W_{Z\varepsilon}(p)}{\partial p} \right|_{p=0} = \frac{1}{K};$$

$$C_2 = \frac{T-\tau}{K} - \frac{1}{K^2} \approx \frac{T-\tau}{K}, \text{ оскільки } K \gg 1,$$

тоді

$$\varepsilon_D = \frac{1}{K} \dot{Z} + \frac{T-\tau}{K} \ddot{Z}.$$

Випадкову складову помилки ε_c обчислюють за формулою (8.44). При цьому $S_{f_i}(w) = N = \text{const}$, а модуль частотної характеристики визначають за такою передавальною функцією: $W_{f_i\varepsilon}(p) = \frac{p(Tp+1)}{p(Tp+1) + K(\tau p+1)}$, шляхом заміни: $p = jw$.

Після взяття інтеграла

$$\varepsilon_c^2 = NK(K\tau + T) / [2T(K\tau + 1)].$$

При цьому критерій (8.41) має такий вигляд:

$$I = \left[\frac{1}{K} \dot{Z} + \frac{T-\tau}{K^2} \ddot{Z} \right]^2 + NK \frac{(K\tau + T)}{[2T(K\tau + 1)]} \rightarrow \min_T.$$

Оптимальне значення параметра T , яке відповідає мінімуму I відшукуємо, використовуючи таку умову:

$$\frac{\partial I}{\partial T} = \frac{2}{K^2} [\dot{Z} + (T-\tau)\ddot{Z}] \cdot \ddot{Z} - \frac{NK^2\tau}{[2T^2(K\tau + 1)]} = 0.$$

Останнє рівняння зводиться до кубічного, а саме:

$$b_0 T^3 + b_1 T^2 + b_2 T + b_3 = 0. \quad (8.45)$$

Коефіцієнти b_i , $i = \overline{0,3}$, виражаються через $K, \dot{Z}, \ddot{Z}, \tau, N$.

Отже, на кожному такті керування виконуються операції:

1. В АС оцінюються швидкість і прискорення сигналу $Z(t)$.
2. У КЕ обчислюють коефіцієнти b_i , $i = \overline{0,3}$, і знаходять корінь рівняння (8.45).

При даних природних обмеженнях на параметри K, τ, N він має бути єдиним додатним.

3. Величину параметра T в КП беруть такою, що дорівнює знайденому з рівняння (8.45) значенню кореня.

Питання для самоконтролю

1. Які основні функції виконують адаптивні системи керування?
2. У чому полягає гіпотеза квазістаціонарності?
3. За якими основними ознаками класифікують адаптивні системи?
4. У чому полягає схожість і які існують відмінності між СНС з еталонною та з налаштувальною моделлю?
5. У чому полягає метод допоміжних операторів?
6. Від чого залежить швидкість налаштування параметрів у СНС з моделлю?

7. Що прийнято називати узагальненим налаштувальним об'єктом? Яка його структура?

8. Які складові входять до узагальненої структури інваріантних СНС?

9. Яка послідовність операцій налаштування СНС за імпульсною перехідною функцією розімкненого основного контуру?

10. Яким чином застосовується прямий метод Ляпунова для встановлення алгоритму роботи контуру самоналаштування СНС?

11. Який сенс має критерій оптимізації в СНС, де передбачено налаштування з урахуванням зовнішніх впливів? Яким чином виконується його оптимізація?

РОЗДІЛ 9

СИСТЕМИ ЕКСТРЕМАЛЬНОГО РЕГУЛЮВАННЯ

Мета розділу: вивчення принципів побудови та функціональних особливостей систем екстремального регулювання

Системи екстремального регулювання (СЕР) були історично першими серед адаптивних. Їхня робота базується здебільшого на використанні оперативної (апостеріорної) інформації, яка надходить у керувальну частину системи протягом її функціонування. Апріорна інформація про об'єкт в СЕР мінімальна, проте існує можливість вимірювати (або обчислювати) поточне значення критерію ефективності її роботи, коли вхід системи підлягає дії різних впливів. СЕР часто називають пошуковими системами.

§ 9.1. Поняття про екстремальне регулювання. Класифікація СЕР. Показники якості їх роботи

Розглянемо об'єкт, який містить n керованих входів U_1, U_2, \dots, U_n (див. рис. 9.1).

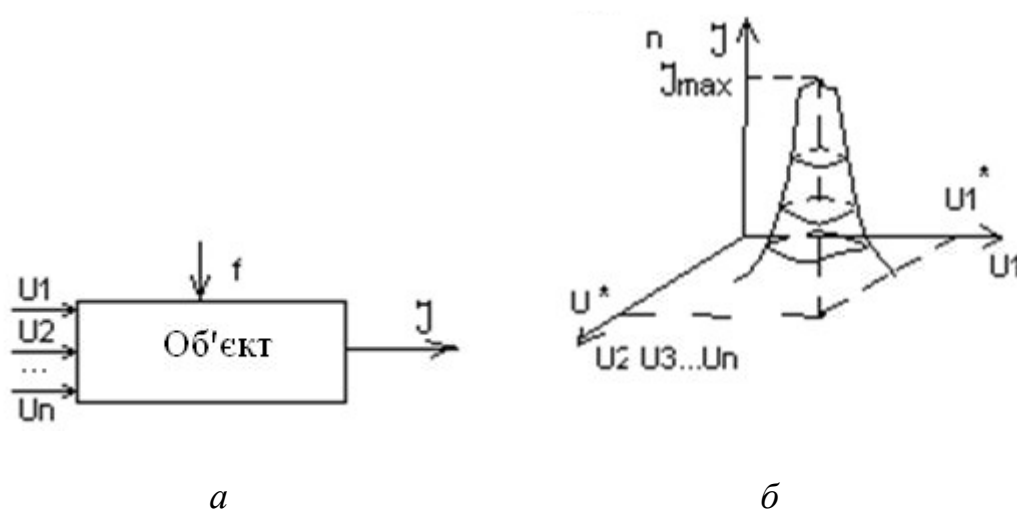


Рис. 9.1. Загальна схема: а – об'єкта з n керованими входами, б – критерію ефективності керування

Припустимо, що залежність критерію ефективності J (виходу) від змінних U має екстремальний характер. Задача керування полягає в підтримці таких значень вхідних параметрів U^* , за яких критерій J має екстремальне значення (рис. 9.1, б).

Об'єкти, котрі мають такі характеристики, називаються *екстремальними*. Екстремальну характеристику слід очікувати там, де одночасно відбуваються

процеси, які ведуть до протилежних результатів. Візьмемо для прикладу деякі з них.

1. Подача повітря у топку (U – потік повітря, J – температура склепіння печі, f – якість і кількість палива). При зростанні потоку U відбувається повне згоряння палива, але з повітрям виноситься тепло; коли потік повітря знижується, то згоряння буде неповним.

2. Автоматична система суміщення зображень, яка використовується при обробці результатів аерофотознімання. З огляду на суміщення зображень світловий потік J , який рухається через них, максимальний (див. рис. 9.2).

Критерій оптимізації в цій системі має такий вигляд:

$$J(U_1, U_2, U_3) \rightarrow \max .$$

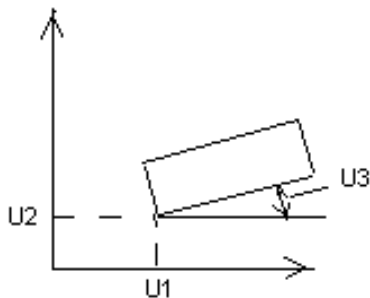


Рис. 9.2. Схема системи суміщення зображень

Задача керування ускладнюється тим, що значення вихідної характеристики $J(U)$ може дрейфувати (зміщуватися) під дією збурень f .

Графік дрейфу екстремуму, характерний для одновимірної об'єкта, показано на рис. 9.3. При цьому критерій оптимізації

$$J = J(U, f). \quad (9.1)$$

Найбільш загальний вигляд рівняння статичної частини екстремального об'єкта такий:

$$J = J(U_1, U_2, \dots, U_n, f_1, f_2, \dots, f_m), \quad (9.2)$$

тут U_1, U_2, \dots, U_n – керувальні параметри; f_1, f_2, \dots, f_m – невраховані фактори впливу (збурення).

Перелічимо ознаки, за якими класифікуються СЕР, і відповідні їм види цих систем.

а) Кількість керувальних параметрів. За цією ознакою розрізняють такі системи:

- одновимірні, їм відповідає критерій (9.1);
- багатовимірні, відповідні критерію (9.2).

б) Кількість екстремумів характеристики $J(U)$, згідно з якою системи бувають:

- однокстремальні;

– багатоекстремальні.

в) Обсяг апріорної інформації про об'єкт. Зазвичай апріорною інформацією виступають відомості про вигляд статичної характеристики, про порядок інерційності об'єкта або про характеристики збурень f . Згідно з цим і виконується класифікація систем.

з) Характер інерційності об'єкта. За цією характеристикою системи поділяються на статичні та динамічні.

д) Спосіб організації пошукового режиму роботи СЕР. Основні методи організації пошуку в СЕР буде розглянуто у наступному параграфі.

§ 9.2. Методи визначення екстремуму однопараметричних об'єктів

У цьому параграфі ми розглянемо основні методи організації пошукових режимів роботи СЕР.

1. Метод вимірювання похідної. Розглянемо об'єкт, схему якого показано на рис. 9.4.

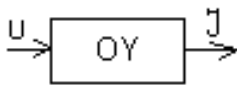


Рис. 9.4. Загальна схема об'єкта

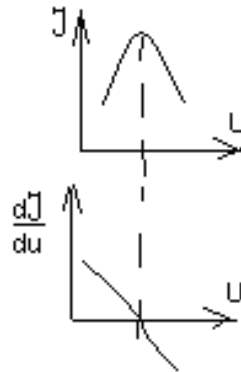


Рис. 9.5. Графічна інтерпретація відповідності значення похідної та екстремуму

Цей метод базується на факті, що похідна $\frac{dJ}{dU}$ змінює свій знак при проходженні через екстремум (рис. 9.5).

Обчислення похідної $\frac{dJ}{dU}$ виконують шляхом вимірювання похідних $\frac{dJ}{dt}$ і $\frac{dU}{dt}$, потім за допомогою визначення їх відношення, а саме:

$$\frac{dJ}{dU} = \frac{dJ}{dt} \cdot \frac{dt}{dU}.$$

Якщо $U(t) = kt$, то похідна $\frac{dJ}{dU} = \frac{1}{k} \cdot \frac{dJ}{dt}$.

2. Метод запам'ятовування екстремуму. Його центральна процедура – запам'ятовування максимального (коли проводиться пошук максимуму) або мінімального (коли відшукують мінімум) значення виходу J .

Таким чином, на вхід у запам'ятовувальний пристрій (ЗП) при пошуку максимуму надходять тільки додатні прирости критерію J . Для формування керувального впливу використовують таку різницю: $S = J - J_{ЗП}$. Якщо система рухається до екстремуму-максимуму, то $J_{ЗП} = J$ і $S = 0$. Після досягнення екстремуму-максимуму система продовжує рухатися в тому самому напрямку і $J_{ЗП} > J$, а значить $S < 0$ і коли $|S| \geq \delta$, то система реверсує. Параметр δ визначає зону нечутливості системи. У момент реверсу відбувається стирання наявної в ЗП інформації. Зазначені процедури виконує спеціальний елемент (сігнум-реле). На рис. 9.6 подано схему СЕР, у якій передбачено запам'ятовування екстремуму.

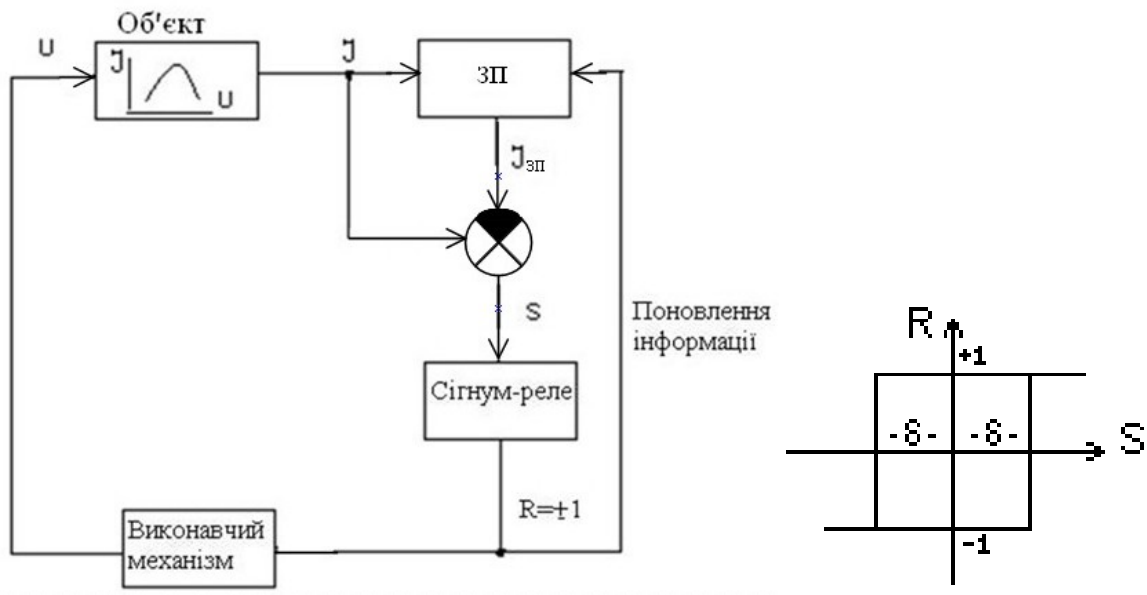


Рис. 9.6. Схема СЕР із запам'ятовуванням екстремуму:

$$U = \begin{cases} kt, & \text{коли } R = 1, \\ -kt, & \text{коли } R = -1. \end{cases}$$

Часові діаграми роботи системи подано на рис. 9.7.

3. Метод періодичного пошукового сигналу. Якщо в околі робочої точки змінювати значення параметра U за синусоїдальним законом з малою амплітудою, то критерій оптимальності (вихід) J буде також змінюватися відповідно до гармонійного закону (див. рис. 9.8).

При цьому, якщо робоча точка розташована ліворуч від екстремуму, то фази U_1 і J_1 збігаються; якщо вона лежить праворуч від екстремуму, то фази U_2 і J_1 різняться на 180° (див. рис. 9.8). В околі екстремуму сигнал J відмінний від

гармонійного. Таким чином, порівнюючи фази U і J , можна визначити необхідний напрямок руху до екстремуму.

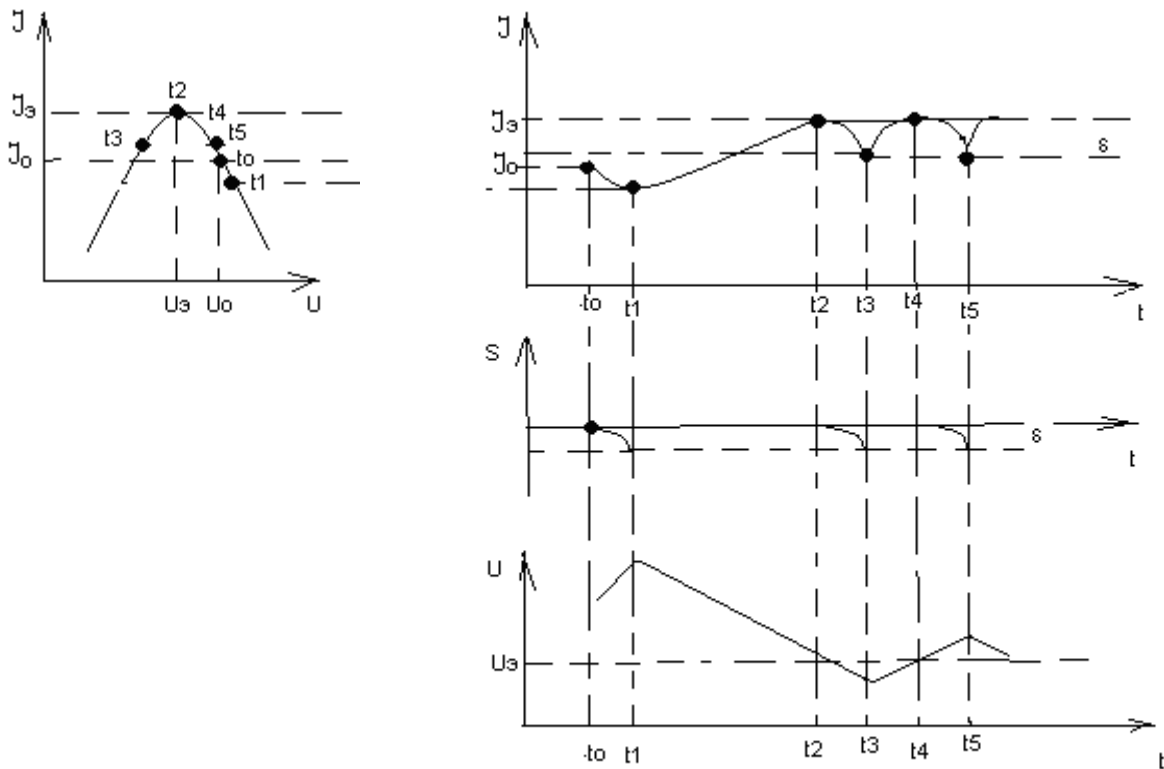


Рис. 9.7. Часові діаграми роботи СЕР, розрахованих на запам'ятовування екстремуму

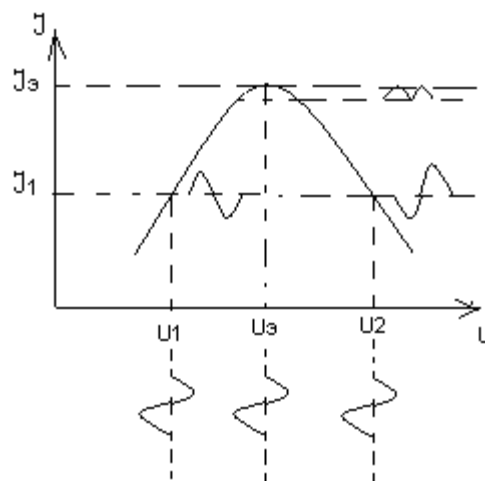


Рис. 9.8. Відповідність між законами зміни параметра U та критерію J

4. Комутатор перевіряльних реверсів. У розглянутих вище методах передбачалося, що екстремальна характеристика об'єкта статична, тобто незмінна в часі. Насправді, в екстремальних системах має місце дрейф значень характеристики $J(U)$. Розглянемо роботоздатність СЕР із запам'ятовуванням

екстремуму, коли на об'єкт діють збурення, котрі викликають зсув значень характеристики $J(U)$ угору по осі J (рис. 9.9).

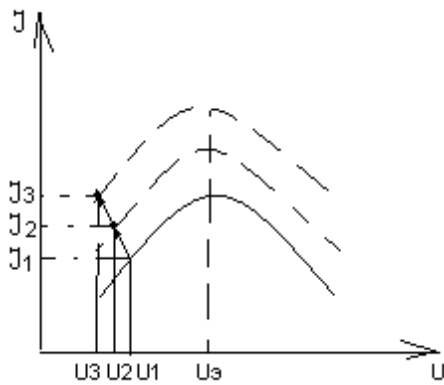


Рис. 9.9. Графічна ілюстрація зміни значень характеристики $J(U)$ за наявності їх дрейфу

Послідовність значень U_1, U_2, U_3 віддаляється від екстремуму, однак за рахунок дрейфу значень $J(U)$ угору створюється ілюзія руху в правильному напрямку (тобто до екстремуму), оскільки $J_1 < J_2 < J_3$.

Для забезпечення робото-здатності СЕР, які перебувають під впливом інтенсивних збурень, пошук екстремуму не повинен бути монотонним. Щоб забезпечити виконання цієї умови, у схему регулятора системи вводиться спеціальний блок (процедура) –

комутатор перевіряльних реверсів, який через певні проміжки часу T_k здійснює реверс виконавчого механізму незалежно від сигналу, який подає сигнал-реле.

§ 9.3. Пошукові крокові алгоритми екстремального керування однопараметричними і багатопараметричними об'єктами

Розглянемо спочатку однопараметричний об'єкт, котрий має задану екстремальну характеристику, тобто

$$J = J(U, \alpha),$$

тут α – невизначений параметр.

Значення похідної наближено можна записати таким чином:

$$\frac{\partial J}{\partial U} \approx \frac{J(U + \Delta U, \alpha) - J(U - \Delta U, \alpha)}{2\Delta U}, \quad (9.3)$$

де ΔU – мале число, яке називають величиною пробного кроку.

Значення критерію $J(U + \Delta U, \alpha)$ та $J(U - \Delta U, \alpha)$ доступні для безпосереднього виміру, тому для обчислення наближеної оцінки похідної можна скористатися формулою (9.3).

В основі пошукового алгоритму лежить метод градієнта, згідно з яким

$$\dot{U} = -a \frac{\partial J}{\partial U}, \quad (9.4)$$

де a – деякий додатний коефіцієнт.

Випробування об'єкта шляхом здійснення пробних кроків керувального впливу U потребують певного часу T , тому для цього використовують дискретний алгоритм адаптації такого вигляду:

$$U[(k+1)T] = U(kT) - \frac{a_k}{2\Delta U} [J[U(kT) + \Delta U, \alpha] - J[U(kT) - \Delta U, \alpha]], \quad (9.5)$$

тут k – номер кроку, $k = 0, 1, 2, \dots$

При цьому число $b_k = \frac{a_k}{2\Delta U}$, це *параметр робочого кроку*. Вимоги до його величини суперечливі. З одного боку, щоб підвищити швидкість прямування до екстремуму, необхідно збільшити число b_k . Однак при цьому можна минути екстремум на суттєву величину, і в системі виникнуть автоколивання великої амплітуди. Аби уникнути цього протиріччя, беруть великі значення числа b_k на початку пошуку, а потім зменшують їх при наближенні до екстремального значення U . Часто такий вибір проводять адаптивно, збільшуючи значення числа b_k тоді, коли знаки двох послідовних кроків збігаються, і зменшуючи в протилежному випадку, тобто

$$b_{k+1} = b_k (1 + \gamma \text{sign}(\Delta U_k \cdot \Delta U_{k-1})), \quad (9.6)$$

γ – деяке додатне число в діапазоні $0 \div 1$.

Тепер розглянемо багатовимірний об'єкт, описуваний такою залежністю:

$$J = J(U_1, U_2, \dots, U_n, \alpha). \quad (9.7)$$

Основою організації процесу пошуку екстремуму об'єкта (9.7) в цьому разі може бути або метод покоординатного спуску (релаксації), або градієнтний метод.

Розглянемо метод покоординатного спуску.

Він потребує таких даних: $J = J(U_1, U_2, \dots, U_n, \alpha)$ – вихідна функція (об'єкт); $U^0 = (U_1^0, U_2^0, \dots, U_n^0)$ – координати вихідної точки; ε – задана точність.

Опишемо схему методу.

Першим кроком буде розв'язування задачі максимізації критерію за першим параметром, коли всі інші параметри задано, а саме:

$$J = J(U_1, U_2^0, \dots, U_n^0) \rightarrow \max_{U_1}.$$

У результаті отримуємо оптимальне значення першого параметра. Позначимо його через U_1^1 .

Підставляємо цю величину в критерій і розв'язуємо задачу оптимізації за другим параметром, тобто

$$J = J(U_1^1, U_2, \dots, U_n^0) \rightarrow \max_{U_2}.$$

Результатом розв'язування буде оптимальне значення другого параметра, позначимо його U_2^1 .

Знову підставимо отримане значення у критерій і тепер проведемо оптимізацію за третім параметром, і т. д. Останньою задачею цього кроку буде така:

$$J = J(U_1^1, U_2^1, \dots, U_n) \rightarrow \max_{U_n}.$$

Її розв'язком буде значення останнього параметра U_n^1 .

Таким чином, після завершення першого кроку отримано такий вектор: $U^1 = (U_1^1, U_2^1, \dots, U_n^1)$.

Якщо умову досягнення точності, а саме:

$$\sum_{j=1}^n |U_j^1 - U_j^0| < \varepsilon,$$

виконано, то процес завершено, в іншому разі переходимо до другого кроку.

Припустимо, що k кроків методу вже здійснено, в результаті чого отримано вектор $U^k = (U_1^k, U_2^k, \dots, U_n^k)$.

Опишемо $(k+1)$ -й крок.

Крок $(k+1)$

1. Розв'язуємо таку задачу:

$$J = J(U_1, U_2^k, \dots, U_n^k) \rightarrow \max_{U_1},$$

і знаходимо значення першого параметра U_1^{k+1} .

2. Підставимо його у критерій і розв'язуємо задачу максимізації за наступним параметром, а саме:

$$J = J(U_1^{k+1}, U_2, \dots, U_n^k) \rightarrow \max_{U_2},$$

у результаті отримуємо оптимальне значення U_2^{k+1} другого параметра.

Продовжуємо процес, аж поки не буде проведено оптимізацію за всіма параметрами.

Остання задача кроку має такий вигляд:

$$J = J(U_1^{k+1}, U_2^{k+1}, \dots, U_n) \rightarrow \max_{U_n}.$$

Її розв'язком буде значення U_n^{k+1} останнього n -го параметра.

Таким чином, після завершення $(k+1)$ -го кроку буде отримано такий вектор: $U^{k+1} = (U_1^{k+1}, U_2^{k+1}, \dots, U_n^{k+1})$.

Якщо умову досягнення точності: $\sum_{j=1}^n |U_j^{k+1} - U_j^k| < \varepsilon$, виконано, то процес завершується, в іншому разі переходимо до наступного кроку.

Графічну інтерпретацію цього методу, коли $n = 2$, подано на рис. 9.9.

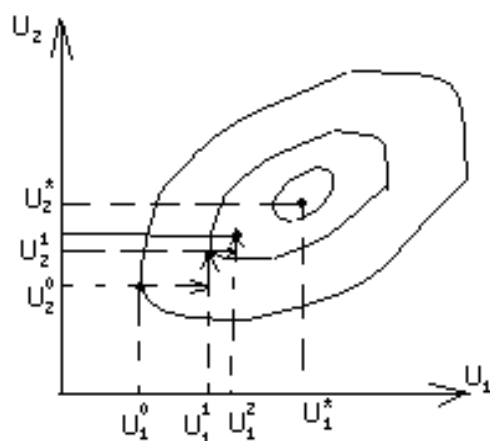


Рис. 9.9. Графічна інтерпретація роботи методу покоординатного спуску

Як бачимо, описаний метод являє собою багаторазове послідовне застосування процедури пошуку екстремуму за однією з координат.

Для розв'язування одновимірної задачі пошуку екстремуму за кожною з координат може бути використаний дискретний алгоритм, котрий відповідає виразу (9.5).

§ 9.4. Градієнтні алгоритми пошуку екстремуму багатопараметричних об'єктів

Розглянемо багатопараметричний об'єкт, описуваний таким рівнянням:

$$J = J(u_1, u_2, \dots, u_n, \alpha). \quad (9.8)$$

Зауважимо, що пошук екстремуму такого об'єкта значно складніший, ніж у випадку з однопараметричним, оскільки тут необхідно визначати не тільки величину робочого кроку, але й напрямок руху в просторі n координат.

Нагадаємо, що градієнт функції $J = J(u_1, u_2, \dots, u_n, \alpha)$ в точці $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, – це вектор, координатами якого є її частинні похідні, а саме:

$$\text{grad } J = \left(\frac{\partial J}{\partial u_1}; \frac{\partial J}{\partial u_2}; \dots; \frac{\partial J}{\partial u_n} \right).$$

Напрямок вектора-градієнта відповідає напрямку якнайшвидшого зростання функції, на цьому базується основна ідея градієнтних методів. Вона полягає в тому, що напрямок руху при відшукуванні максимуму функції збігається із напрямком градієнта функції в робочій точці.

Приклад 9.1. Нехай екстремальний об'єкт має таку характеристику:

$$J = -5u_1^2 - 6u_1u_2 - 6u_2^2 - u_1 - 2u_2.$$

Знайдемо напрямок, у якому ця характеристика збільшується найсуттєвіше, стосовно заданої точки $u = (1; -1)$. Для цього обчислимо компоненти градієнта функції J , тобто

$$\frac{\partial J}{\partial u_1} = -10u_1 - 6u_2 - 1; \quad \frac{\partial J}{\partial u_2} = -6u_1 - 12u_2 - 2.$$

Підставивши в ці вирази координати заданої точки u , маємо такий результат: $\frac{\partial J}{\partial u_1} = -5$; $\frac{\partial J}{\partial u_2} = 4$. Отже, градієнт функції J у точці: $u = (1; -1)$, буде дорівнювати $(-5; 4)$, він і описує напрямок якнайшвидшого збільшення даної функції в цій точці.

Градієнтні методи мають у своїй основі диференціальні рівняння, які визначають похідні за кожним з параметрів u_i , $i = \overline{1, n}$, тобто

$$\dot{u}_i = \alpha \frac{\partial J}{\partial u_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (9.9)$$

тут α – малий коефіцієнт.

Дискретний аналог рівнянь (9.9) і є алгоритмом пошуку екстремуму градієнтним методом, а саме:

$$u_i \left[(k+1)T \right] = u_i(kT) + \alpha_k \frac{\partial J}{\partial u_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (9.10)$$

При цьому оцінки частинних похідних можна виконувати на основі пробних кроків за кожним з параметрів, тобто

$$\frac{\partial J}{\partial u_i} = \frac{1}{2\Delta u_i} \left[J(u_1, u_2, \dots, u_i + \Delta u_i, \dots, u_n, a) - J(u_1, u_2, \dots, u_i - \Delta u_i, \dots, u_n, a) \right], \quad (9.11)$$

$$i = \overline{1, n}.$$

Розглянемо ще один метод оцінювання поточних значень частинних похідних. Як відомо, необхідною умовою екстремуму функції $f(U_1, U_2, \dots, U_n)$ є така рівність: $\text{grad } f = 0$.

Для перевірки цієї умови, а також для встановлення напрямку руху точки згідно з її статичною характеристикою необхідно оцінювати складові градієнта, тобто частинні похідні: $\frac{\partial f}{\partial u_1}$; $\frac{\partial f}{\partial u_2}$; ...; $\frac{\partial f}{\partial u_n}$. Коли визначають складові градієнта,

то пробні впливи вводять у дію по черзі на кожному із входів. Припустимо, що пробний вплив має форму, показану на рис. 9.10.

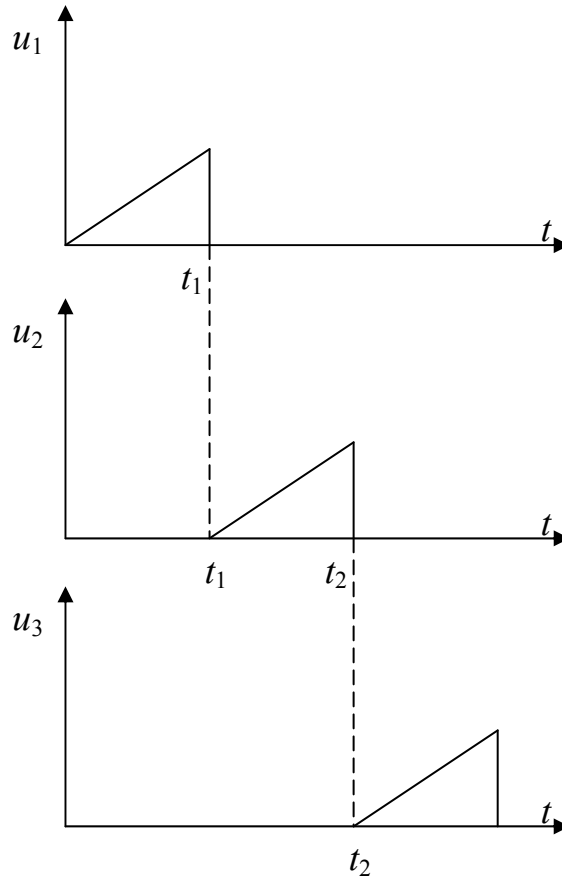


Рис. 9.10. Припустима форма пробного впливу

Повна похідна за часом $\frac{\partial f}{\partial t}$, відповідна багатопараметричному об'єкту (9.8), обчислюється в такий спосіб:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{du_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \cdot \frac{du_n}{dt}.$$

Згідно з даними рис. 9.10, у кожен момент часу всі похідні керувальних змінних, крім однієї, дорівнюють нулю. А відмінна від нуля похідна має цілком певне стає значення b_i .

Наприклад, коли $t_1 < t < t_2$, то

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{du_3}{dt} = 0, \quad \frac{du_2}{dt} = b_2.$$

Тоді $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u_2} b_2$ і, відповідно, $\frac{\partial f}{\partial u_2} = \frac{1}{b_2} \cdot \frac{df}{dt}$. Отже, вимірюючи на інтервалі $t_1 < t < t_2$ похідну за часом від вихідної величини, легко визначити відповідну частинну похідну, тобто складову вектора-градієнта $\frac{\partial f}{\partial u_2}$.

§ 9.5. Екстремальне керування в умовах перешкод

У реальних умовах на виході об'єкта діє перешкода. Вона має місце у вимірюваному сигналі $\varphi(t)$ (див. рис. 9.11).

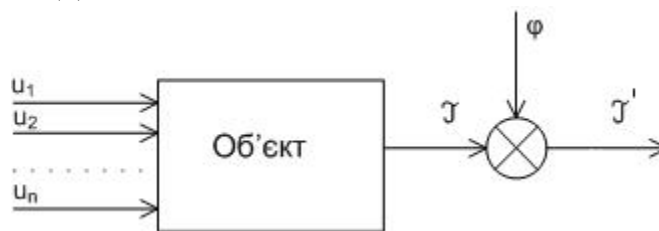


Рис. 9.11. Загальна схема об'єкта в умовах дії перешкоди

Відповідна цій ситуації модель має такий вигляд:

$$J' = J(u_1, u_2, \dots, u_n, \alpha) + \varphi,$$

або для одновимірного об'єкта

$$J' = J(u, \alpha) + \varphi.$$

При цьому функція $\varphi(t)$ являє собою випадковий процес із невідомим законом розподілу. Відомо лише, що перешкода $\varphi(t)$ має нульове математичне сподівання й обмежену дисперсію. Потрібно знайти такий алгоритм пошуку екстремуму, при якому математичне сподівання вихідного сигналу набуде найбільшого (найменшого) значення:

$$M \{ J(u, a) + \varphi \} \rightarrow \text{extr}. \quad (9.12)$$

Цю задачу можна розв'язати за допомогою методу стохастичної апроксимації. При цьому значення функції керування на черговому $(k + 1)$ -му кроці обчислюється так само, як і в методі градієнта, тобто

$$u_{k+1} = u_k \mp \frac{a_k}{2\Delta u_k} [J''(u_k + \Delta u_k, a) - J''(u_k - \Delta u_k, a)], \quad k = 0, 1, 2 \dots \quad (9.13)$$

із тією різницею, що вихідний сигнал об'єкта вимірюється з огляду на вплив перешкоди, а саме:

$$J''(u_k + \Delta u_k, a) = J(u_k + \Delta u_k, a) + \varphi'_k,$$

$$J''(u_k - \Delta u_k, a) = J(u_k - \Delta u_k, a) + \varphi''_k.$$

Тут φ'_k , φ''_k – випадкові величини, що являють собою реалізації перешкод на k -му інтервалі часу. У загальному випадку $\varphi'_k \neq \varphi''_k$, оскільки вимірювання проводяться у різні моменти часу на цьому інтервалі.

Задача (9.12) має розв'язок, якщо будуть виконані обмеження, котрі накладаються на змінні a_k і Δu_k , тобто

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{\Delta u_k} \right)^2 < \infty. \quad (9.14)$$

Останнє твердження може бути доведене, воно відображає суть методу стохастичної апроксимації [10].

На закінчення відзначимо, що умов (9.14) буде дотримано, коли, наприклад,

$$a_k = \frac{1}{k^p}; \quad \Delta u_k = \frac{1}{k^\mu}; \quad 2(p - \mu) > 1,$$

де $0 \leq p \leq 1; \mu > 0$.

§ 9.6. Ідентифікаційні алгоритми екстремального регулювання

Для застосування ідентифікаційних алгоритмів необхідно мати в розпорядженні додаткову апіорну інформацію про статичну екстремальну характеристику об'єкта. Зазвичай передбачається, що вигляд функції J відомий з точністю до параметрів.

Припустимо, є однопараметричний екстремальний об'єкт, який описується відомою функцією, тобто

$$J = J(u, \alpha), \quad (9.15)$$

і залежить від одного невизначеного параметра α . Якби величину параметра α було відомо, то для того щоб знайти оптимальне значення керування u , необхідно було б розв'язати таке рівняння:

$$\frac{\partial J}{\partial u} = 0. \quad (9.16)$$

Отже, будь-який ідентифікаційний алгоритм складається з таких трьох етапів:

1. Ідентифікація параметрів за результатами вимірювань.
2. Розв'язування рівняння (систем рівнянь) вигляду (9.16) і визначення оптимального керувального впливу u^* .
3. Реалізація керувального впливу на об'єкті.

Розглянемо застосування цієї схеми на прикладі.

Приклад 9.2. Нехай заданий об'єкт описується таким рівнянням:

$$J = (5u - a)^2.$$

Прикладемо до об'єкта випробувальний вплив u' і виміряємо відповідний вихід J' . Користуючись значеннями u' і J' , обчислимо параметр a , а саме:

$$a' = 5u' - \sqrt{J'}.$$

Знайдемо значення оптимального керувального параметра, розв'язуючи таке рівняння:

$$\frac{\partial J}{\partial u} = \frac{\partial(5u - a')^2}{\partial u} = 2(5u - a') \cdot 5 = 0.$$

В результаті отримуємо оптимальне керування u^* в такому вигляді:

$$u^* = \frac{1}{5}a' = u' - \frac{1}{5}\sqrt{J'}.$$

Приклад 9.3. Розглянемо процедуру обчислення екстремуму функції, котра має вигляд тривимірної кривої Гаусса, а саме:

$$J_i = \frac{c}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(u_i - M)^2}{2\sigma^2}}, \quad i = \overline{1,3}. \quad (9.17)$$

За результатами вимірів необхідно знайти значення параметра M , оскільки екстремум функції Гаусса досягається у точці: $u^* = M$.

У системі (9.17) поділимо перше рівняння на друге, а друге на третє, отримавши такий результат:

$$\frac{J_1}{J_2} = e^{\frac{(u_2 - M)^2 - (u_1 - M)^2}{2\sigma^2}};$$

$$\frac{J_2}{J_3} = e^{\frac{(u_3 - M)^2 - (u_2 - M)^2}{2\sigma^2}},$$

або після логарифмування

$$\frac{\ln\left(\frac{J_1}{J_2}\right)}{2\sigma^2} = (u_2 - M)^2 - (u_1 - M)^2;$$

$$\frac{\ln\left(\frac{J_2}{J_3}\right)}{2\sigma^2} = (u_3 - M)^2 - (u_2 - M)^2.$$

Поділимо перше рівняння на друге, тобто

$$\frac{\ln\left(\frac{J_1}{J_2}\right)}{\ln\left(\frac{J_2}{J_3}\right)} = \frac{(u_2 - M)^2 - (u_1 - M)^2}{(u_3 - M)^2 - (u_2 - M)^2},$$

і розв'яжемо отримане рівняння відносно M , а саме:

$$u^* = M = \frac{\ln\left(\frac{J_1}{J_2}\right) \cdot (u_3^2 - u_2^2) - \ln\left(\frac{J_2}{J_3}\right) \cdot (u_2^2 - u_1^2)}{\ln\left(\frac{J_2}{J_3}\right) \cdot (2u_3 - 2u_2) - \ln\left(\frac{J_1}{J_2}\right) \cdot (2u_2 - 2u_3)}$$

Таким чином, задачу розв'язано.

§ 9.7. Динаміка систем екстремального регулювання.

Показники якості роботи СЕР

У попередніх параграфах було розглянуто системи, які містять безінерційний об'єкт, тобто передбачалося, що зміна вхідного сигналу u викликає миттєву зміну вихідного сигналу J відповідно до статичної характеристики $J(u)$.

Однак, в реальних умовах більшості об'єктів властива інерція, тобто після зміни сигналу u зміна виходу J не відбувається миттєво, а залежність між вхідним і вихідним сигналами описується не алгебраїчним, а диференціальним рівнянням.

Зауважимо, що в застосуванні до вивчення динаміки СЕР структуру об'єкта може бути подано у вигляді однієї із схем, зображених на рис. 9.12.

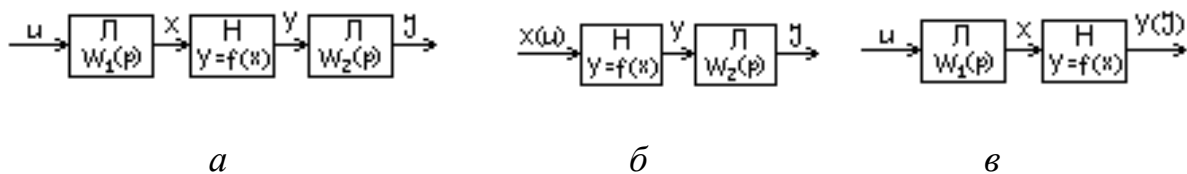


Рис. 9.12. Можливі схеми структури об'єкта: a – ЛНЛ; b – НЛ; v – ЛН

Найбільш загальним є випадок, коли структура об'єкта має вигляд з'єднання лінійної інерційної, нелінійної безінерційної та лінійної інерційної ланок, її позначено ЛНЛ (рис. 9.12, a). Коефіцієнти підсилення лінійних ланок зручно брати такими, що дорівнюють одиниці. Якщо інерція сигналу на вході набагато менша від інерції вихідного сигналу, то має місце схема типу НЛ (рис. 9.12, b), якщо навпаки – то ЛН. Власні інерційні властивості об'єкта зазвичай описують вихідною інерційною ланкою, до неї також відносять інерційність вимірювальних пристроїв системи.

Вхідна лінійна ланка з'являється в структурній схемі об'єкта тоді, коли виконавчий механізм системи впливає на об'єкт через інерційний пристрій (наприклад, параметр оптимізації – температура, яка регулюється шляхом подачі палива). До вхідної лінійної частини відносять також інерційність виконавчого механізму.

Для спрощення розглянемо роботу СЕР з інерційним об'єктом типу НЛ, припускаючи, що інерційна частина описується диференціальним рівнянням першого порядку. Структурна схема такої системи має вигляд, зображений на рис. 9.13. У даній системі пристрій керування ПК реалізує пошук екстремуму за принципом його запам'ятовування.

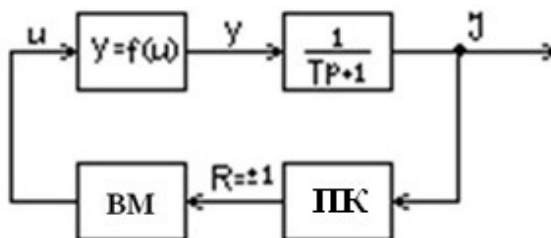


Рис. 9.13. Структурна схема об'єкта типу НЛ

Рівняння, яке описує об'єкт, має такий вигляд:

$$T \frac{dJ}{dt} + J = y = f(u) \quad \text{або} \quad \frac{dJ}{dt} = \frac{1}{T} [f(u) - J]. \quad (9.18)$$

Припустимо, що у функції $f(u)$ є екстремум-максимум. Виконавчий механізм ВМ має сталу швидкість переміщення, тобто $\frac{du}{dt} = \pm k$, і, відповідно,

$$U = U_0 \pm kt. \quad (9.19)$$

Підставимо вираз для визначення похідної $\frac{du}{dt}$ у рівняння (9.18), а саме:

$$\frac{dJ}{du} = \pm \frac{1}{kT} [f(u) - J]. \quad (9.20)$$

Нехай у початковий момент $u = u_1$ і $J = J_1$ (рис. 9.14).

Починаючи з цього моменту, значення u збільшується, тобто

$$\frac{dJ}{du} = + \frac{[f(u) - J]}{kT}.$$

Враховуючи вигляд похідної $\frac{dJ}{du}$, не важко помітити, що чим більшим буде значення (kT) , тим нижче на графіку проходить крива $M_1 M_2$, яка в разі керування інерційним об'єктом вже не буде збігатися зі статичною характеристикою $J(u)$ (див. рис. 9.14).

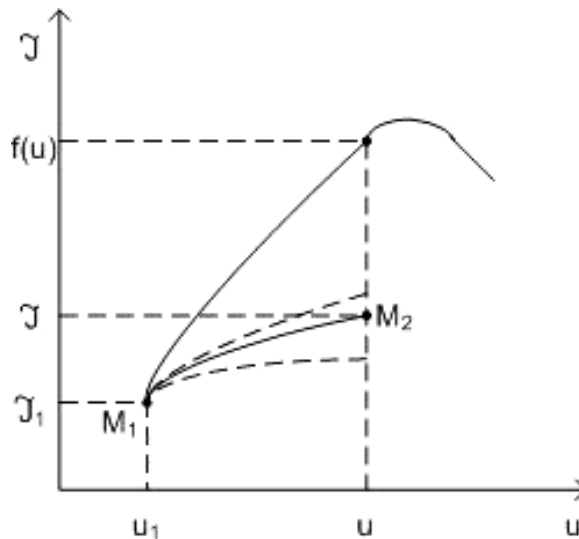


Рис. 9.14. Графічне подання статичної характеристики об'єкта J та його характеристики з урахуванням інерційної складової

Тепер розглянемо процеси, які відбуваються у всій системі при пошуку екстремуму залежно від часу. Умова перемикання в ПК із запам'ятовуванням екстремуму має такий вигляд:

$$R = -R, \quad \text{якщо } \text{sign}(J - J_{\max} + \delta) < 0. \quad (9.21)$$

ПК виконає реверс виконавчого механізму, коли поточне значення вихідного сигналу об'єкта J зменшиться порівняно з максимально досягнутим значенням у зоні нечутливості δ .

Графіки роботи системи в часі мають вигляд, зображений на рис. 9.15.

Через деякий час у системі встановлюється періодичний режим коливання навколо екстремуму, який виникає під впливом властивостей самої системи, а не за рахунок зовнішніх факторів, і тому його називають автоколивальним (див. рис. 9.16).

Процеси $J(t)$, $u(t)$, графіки яких зображено на рис. 9.15 і рис. 9.16, можна визначити, розв'язавши таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} T \frac{dJ}{dt} + J = f(u); \\ u = u_0 + ktR, \end{cases} \quad J(0) = J_0. \quad (9.22)$$

Нагадуємо, що $R = -R$, коли $\text{sign}(J - J_{\max} + \delta) < 0$, тобто виконано умову перемикання.

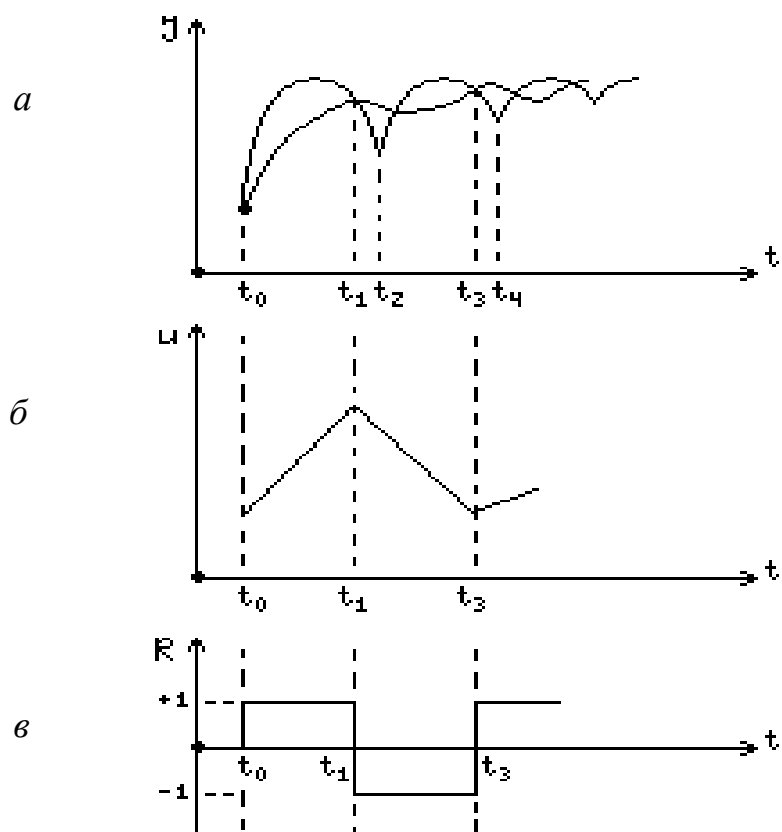


Рис. 9.15. Графіки зміни показників роботи системи за часом: *a* – критерію; *б* – керувального впливу; *в* – перемикальної функції

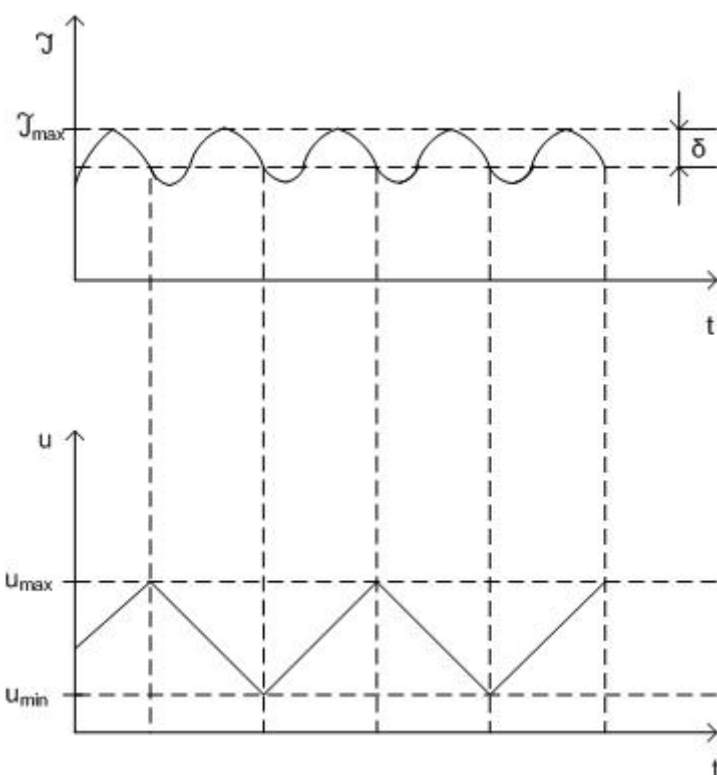


Рис. 9.16. Графіки автоколивального режиму роботи СЕР

Траєкторію руху СЕР часто зображують на фазовій площині в координатах (J, u) .

Цю побудову можна виконати, якщо скористатися таким рівнянням:

$$\frac{dJ}{du} = \frac{1}{kT} [f(u) - J] R. \quad (9.23)$$

Графік зміни процесу $J(u)$ від початкової точки M_0 , як результат розв'язування рівняння (9.23) зображено на рис. 9.17.

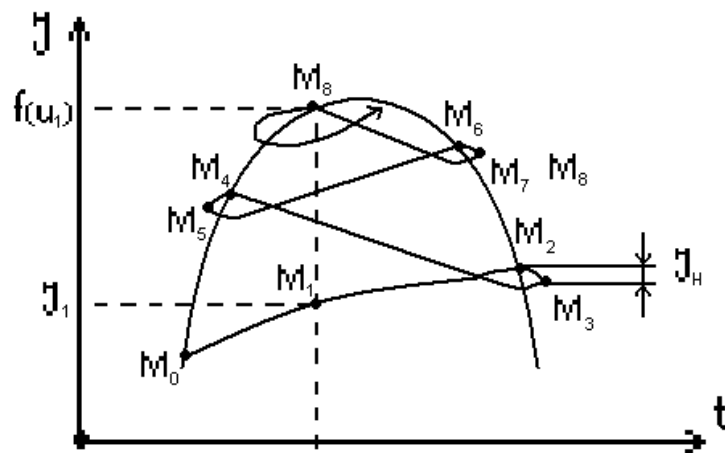


Рис. 9.17. Графік зміни процесу $J(u)$ залежно від керування u

Цей графік називають *фазовою траєкторією*. Точками максимуму фазової траєкторії будуть M_2, M_4, M_6 . У цих точках $f(u) = J$ і, згідно з рівнянням (9.23), $\frac{dJ}{du} = 0$.

Точками перемикання будуть M_3, M_5, M_7 . У них значення екстремальної характеристики $(J + \delta)$ (тут δ – зона нечутливості пристрою керування) стає меншим від максимальної величини J_{\max} , котра зберігається, і параметр R змінює знак на протилежний (відбувається реверс виконавчого механізму).

Перехідний процес на фазовій площині несе таку саму інформацію, що й процеси в часі $J(t)$ і $u(t)$, проте він має більшу наочність. Траєкторію руху $J(u)$ можна побудувати з огляду на перехідні процеси $J(t), u(t)$ шляхом вилучення параметра t .

Після виходу значень функції в окіл екстремуму в системі встановлюються періодичні автоколивання. На фазовій площині вони зображуються у вигляді вісімки, крайні точки якої u_1, u_2 відповідають моментам перемикання виконавчого механізму (див. рис. 9.18).

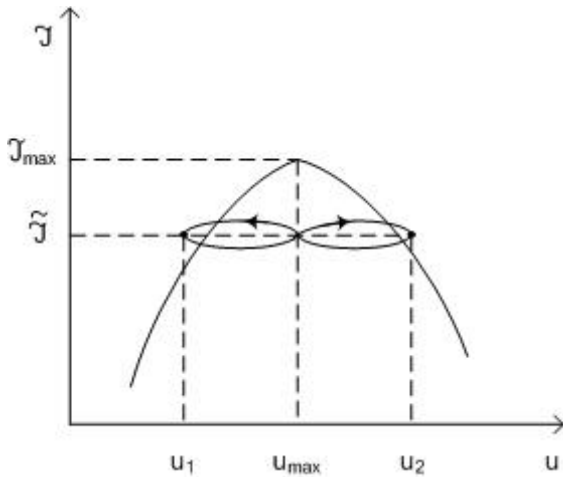


Рис. 9.18. Фазова траєкторія у режимі автоколивань

У режимі автоколивань середній рівень значень функції \tilde{J} , очевидно, нижчий від рівня екстремуму, тобто $\tilde{J} < J_{\max}$. Це наслідок того, що після відшукування екстремуму виконавчий механізм не зупиняється, а продовжує «нишпорити» навколо значення u_{\max} .

При цьому значення вихідної функції \tilde{J} відповідає такому виразу:

$$\tilde{J} = \frac{1}{u_2 - u_1} \int_{u_1}^{u_2} \varphi(u) du, \quad (9.24)$$

тут $\varphi(u)$ – функція, що описує одну гілку петлі автоколивань навколо екстремуму (від u_1 до u_2).

Різниця: $J_{II} = J_{\max} - \tilde{J}$ називається втратою на пошук. Її величина залежатиме від інерційності об'єкта (стосовно об'єкта 1-го порядку її значення зумовлено величиною параметра T), а також від швидкості переміщення виконавчого механізму k та зони нечутливості δ .

Зауважимо, що прагнучи зменшити втрати J_{II} , не можна суттєво зменшувати величину k , оскільки система буде надто швидко рухатись в область екстремуму. Не можна також занадто зменшувати зону нечутливості δ , оскільки при цьому ймовірна поява хибних реверсів зумовлена впливом перешкод та інерційністю об'єкта (див. рис. 9.19).

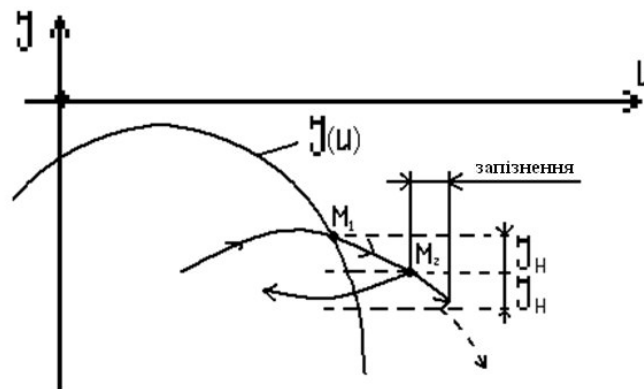


Рис. 9.19. Графічне подання впливу перешкод та інерційності об'єкта на вигляд траєкторії

На рис. 9.19 пунктиром показано можливу траєкторію руху системи з додатковим чистим запізненням. Така система буде недієздатною через можливість помилкових спрацьовувань.

Основні показники якості роботи СЕР такі:

1. Час виходу системи в екстремум – це час руху системи від крайньої точки робочого діапазону до настання стійких автоколивань.

2. Втрати на пошук $J_{II} = J_{\max} - \tilde{J}$, тобто різниця між екстремальним і середнім значеннями вихідного сигналу J в режимі сталих автоколивань.

3. Амплітуда сталих автоколивань на вході становить $\frac{u_2 - u_1}{2}$ (див. рис. 9.20).

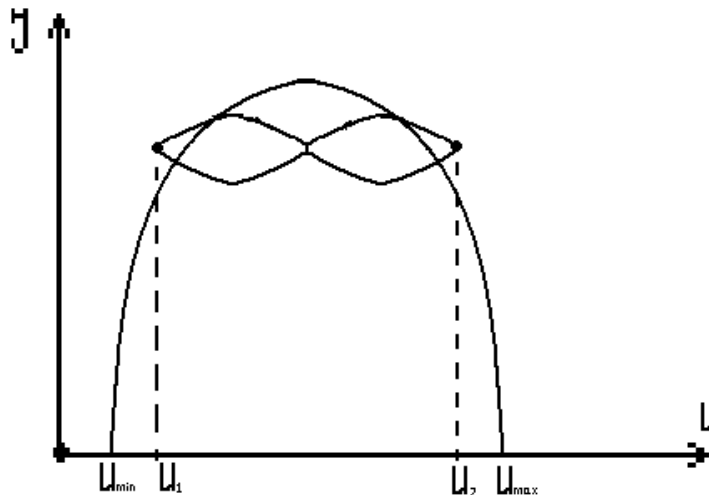


Рис. 9.20. Амплітуда сталих автоколивань на вході системи

У той же час більш об'єктивною характеристикою є відносна амплітуда автоколивань, а саме:

$$B = \frac{u_2 - u_1}{2(u_{\max} - u_{\min})}.$$

Розглянемо тепер методику розрахунку й аналітичного опису СЕР, де об'єкт має структуру загального вигляду ЛНЛ.

У літературі описано кілька методів аналітичного розрахунку (метод гармонійного балансу, метод Гальоркіна, фазової площини та ін.) [5, 7, 10], які дозволяють оцінити ефективність і якість керування в СЕР. Однак, кожен з них має певні недоліки, а головне, орієнтований на окремі варіанти структури об'єкта.

І тут універсальним можна вважати прямий числовий метод розрахунку процесів у СЕР на основі сучасних засобів переробки інформації.

Розглянемо його більш детально.

Припустимо, є детермінована СЕР, структуру якої показано на рис. 9.21.

Об'єкт керування включає послідовно з'єднані лінійні інерційні ланки з відомими операторами W_1 і W_2 а також нелінійну безінерційну ланку $f(x)$. Пристрій керування працює за відомим (заданим) законом керування у вигляді оператора перетворення: $u = L_{yy}(J)$.

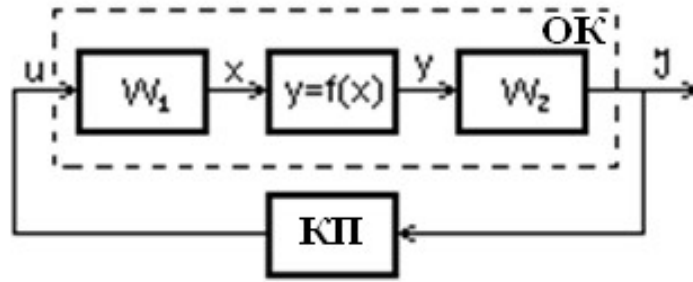


Рис. 9.21. Структурна схема СЕР типу ЛНЛ

Для розрахунку процесів у СЕР необхідно скористатися принципом Δt і одним з числових методів розв'язування диференціальних рівнянь (наприклад, Рунге – Кутта). Нижче опишемо схему алгоритму обчислень.

На k -му кроці, беручи до уваги параметр часу t_k , необхідно виконати такі дії:

1. Розрахувати значення x_{k+1} методом Рунге – Кутта для наступного моменту часу (тобто для наступного кроку), використовуючи відомі значення x_k і u_k ;
2. Обчислити значення $y_k = f(x_k)$, відповідне відомому значенню x_k ;
3. Методом Рунге – Кутта обчислити значення J_{k+1} в наступний момент часу для відомих значень y_k і J_k ;
4. За величинами J_k і J_{k+1} розрахувати значення u_{k+1} відповідно до відомого оператора пристрою керування;
5. Збільшити k на одиницю і повернутися до п.1.

Якість екстремального регулювання оцінюють, використовуючи побудовані процеси J_k і y_k , $k = 0, 1, 2 \dots$ Якщо показники якості незадовільні, то змінюють параметри закону керування або сам алгоритм (закон керування) пошуку.

Для дослідження роботи СЕР в умовах наявності перешкод необхідно використовувати методи імітаційного моделювання.

У першому наближенні перешкоди можна поділити на дві групи:

1. Високочастотні, тобто ті, що накладаються на вихідний сигнал об'єкта J . Вони можуть викликати помилкове спрацьовування СЕР, оскільки зміна вимірюваного значення J під дією перешкоди може сприйматись за рух об'єкта.

Усунути дію цих перешкод можна за допомогою введення додаткових згладжувальних пристроїв (при цьому збільшується інерційність об'єкта) або шляхом розширення зони нечутливості виходу J_H у пристрої керування.

2. Перешкоди (фактори), які викликають дрейф значень екстремальної характеристики $y = f(x)$. Вони також можуть викликати збій у роботі системи пошуку. Чим ближча частота цих перешкод до робочого частотного діапазону

об'єкта, тим складніше з ними боротися. Існують алгоритми й методи, що дозволяють зменшити вплив цих перешкод (наприклад, перевірні реверси).

Математично дрейф характеристики означає нестационарність (зміну в часі) коефіцієнтів залежності $y = f(x)$.

Якщо швидкість i , взагалі, закон зміни коефіцієнтів відомий, то їх дуже просто імітувати засобами ЕОМ.

§ 9.8. Методи поліпшення якості СЕР. Вибір параметрів керувальної частини СЕР

Найчастіше труднощі реалізації СЕР на практиці можна пояснити такими причинами:

- наявністю монотонних збурень, що викликають дрейф характеристики об'єкта;
- інерційністю і запізненням, які притаманні всім реальним промисловим об'єктам;
- існуванням випадкових перешкод у сигналі, що містить інформацію про критерій керування.

Будь-який з екстремальних регуляторів, описаних раніше, може втратити дієздатність, коли на об'єкт починають впливати інтенсивні збурення. У той же час, основне призначення СЕР якраз і полягає в тому, щоб відшукувати й підтримувати оптимальний режим роботи об'єкта під дією збурень.

Інерційність об'єкта, перш за все, проявляється в затримці його реакції на пошуковий вплив оптимізатора. Це призводить до затягування процесу виходу системи в екстремум. Спроби ж підвищення швидкодії шляхом збільшення швидкості перекладання виконавчого механізму k або скорочення відліку часу Δt (для дискретних систем) викликає збільшення втрат у сталому режимі. Крім того, значна інерційність об'єкта взагалі може спричинити помилкове спрацьовування системи і, як наслідок, втрату нею дієздатності.

Проблема виявлення корисного сигналу за наявності перешкод – це одне з основних завдань керування. Вона актуальна для забезпечення якості роботи СЕР, оскільки, вирішивши цю проблему, можна зменшити кількість помилкових спрацьовувань.

Забезпечення дієздатності та ефективності роботи СЕР досягається двома шляхами:

- удосконаленням і модифікацією алгоритмів пошуку;
- вибором налаштувань параметрів керувальної частини СЕР.

Розглянемо деякі алгоритмічні методи і прийоми поліпшення процесу пошуку екстремуму.

1. Комутатор перевірних реверсів – створює з певною періодичністю перевірні реверси в системі. Один з можливих алгоритмів такий: задається період проведення перевірних реверсів T_k . Цей час відраховують від моменту реверсу виконавчого механізму.

Якщо час між переключеннями менший від T_k , то комутатор працювати не буде. Таким чином, зазвичай значення T_k вибирають дещо більшим, ніж період автоколивань в околі екстремуму. Комутатор дещо збільшує час пошуку екстремуму, але забезпечує стійкість СЕР при дрейфі значень статичної характеристики. Величину T_k називають *періодом комутатора*. Графік на рис. 9.22 показує, що траєкторія руху СЕР з комутатором на інерційному об'єкті відрізняється від траєкторії, котра відображає рух такої самої системи без комутатора (рух відбувається уздовж однієї з гілок статичної характеристики).

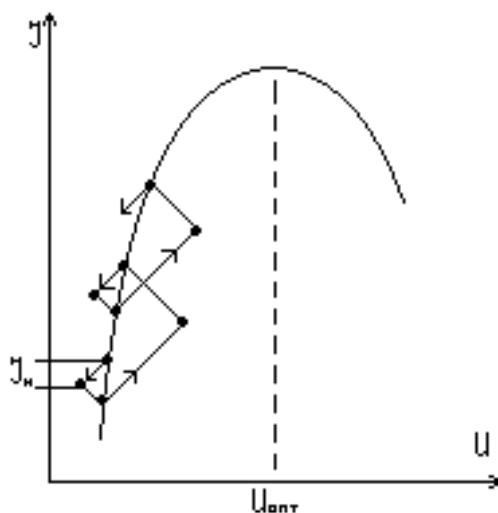


Рис. 9.22. Рух СЕР з комутатором на фазовій площині

2. **Вимірювання похідної статичної характеристики.** Розглянемо систему, структурну схему якої зображено на рис. 9.23.

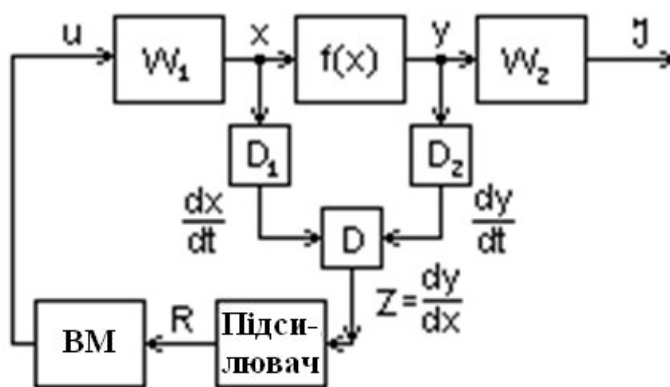


Рис. 9.23. Структурна схема системи

Виконавчий механізм таких систем має змінну швидкість керування u , пропорційну значенню похідної: $z = \frac{dy}{dx}$, тобто

$$\frac{du}{dt} = K \frac{dy}{dx}, \quad (9.25)$$

де K – коефіцієнт пропорційності.

Логіка роботи такої системи базується на властивості більшості унімодальних функцій, які описують статичні характеристики реальних об'єктів, а саме: чим ближче робоча точка x підходить до екстремуму, тим меншим за модулем буде значення похідної $\frac{dy}{dx}$, а в околі екстремуму $\frac{dy}{dx} = 0$. Тому, відповідно до залежності (9.25), чим більше буде віддалена система від точки екстремуму, тим швидше змінюватиметься керування u і навпаки.

3. Метод динамічної оптимізації. Застосовується для об'єктів структури типу НЛ, коли лінійна частина являє собою аперіодичну ланку першого порядку (див. рис. 9.24).

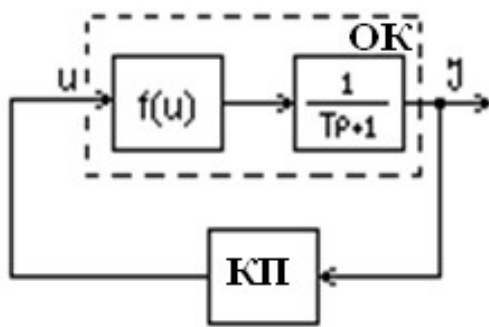


Рис. 9.24. Структурна схема системи, що має структуру типу НЛ

У даному випадку об'єкт керування описується диференціальним рівнянням такого вигляду:

$$T\dot{J} + J = f(u). \quad (9.26)$$

Рівність (9.26) має виконуватися у будь-який момент часу має. Якщо швидкість переміщення виконавчого механізму велика [тобто $u(t)$ змінюється швидко], то за малий проміжок часу при великому значенні T вихід J змінюється несуттєво і тому цим можна знехтувати. У цьому випадку максимуму функції $f(u)$ в перехідному режимі буде відповідати максимум похідної функції виходу об'єкта J , тобто

$$\max f(u) \approx \max \dot{J}. \quad (9.27)$$

За таких умов на етапі виходу системи в околі екстремуму на екстремальний регулятор слід подавати сигнал, який дорівнює похідній виходу об'єкта J .

Структурну схему описаної СЕР подано на рис. 9.25.

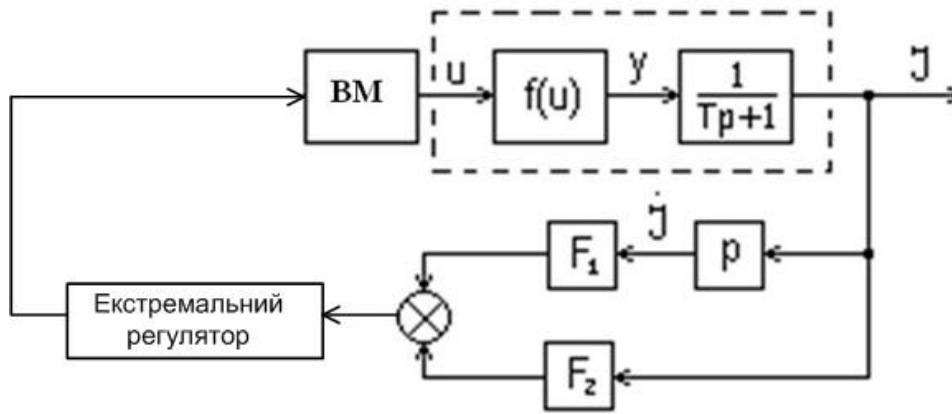


Рис. 9.25. Структурна схема СЕР, у якій застосовано динамічну оптимізацію

Зауважимо, що блоки F_1 і F_2 мають характеристики із однаковою зоною нечутливості, яка дорівнює ΔJ . Графічну інтерпретацію цих характеристик показано на рис. 9.26.

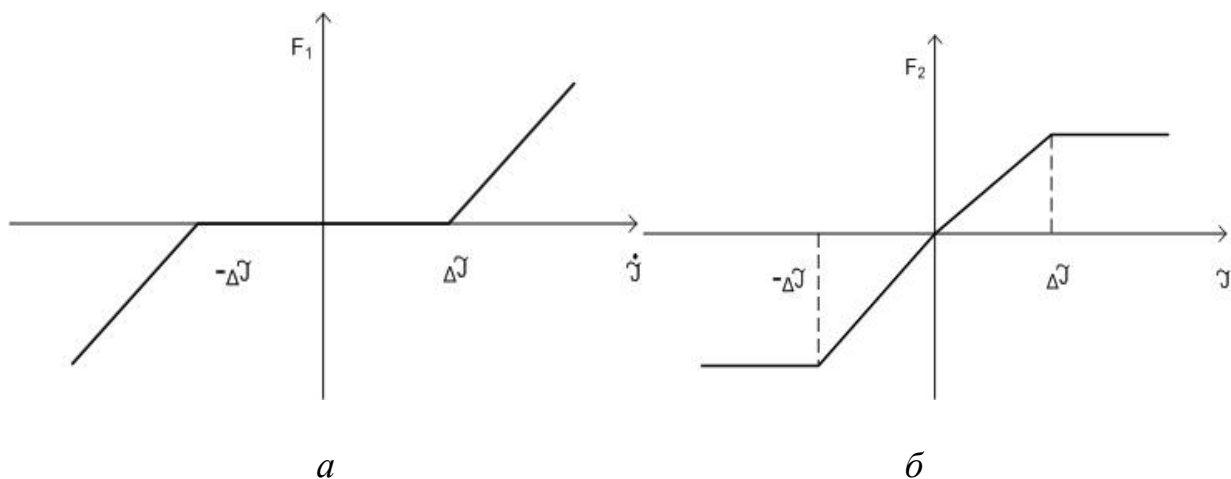


Рис. 9.26. Графічна інтерпретація статичних характеристики і зони нечутливості блоків: *a* – F_1 ; *б* – F_2

Блок F_1 працює на етапі виходу системи в окіл екстремуму, коли значення похідної характеристики \dot{J} велике; блок F_2 вступає в дію на етапі «нишпорення» в околі екстремуму, коли $\dot{J} \approx 0$.

Цей метод дозволяє істотно скоротити час виходу системи в окіл екстремуму без зниження показників якості роботи усталеного режиму і тим самим багаторазово (більш ніж у 10 разів) скорочує час пошуку екстремуму порівняно із використанням звичайних методів.

Графік процесу виходу системи в окіл екстремуму, побудований на фазовій площині, бачимо на рис. 9.27.

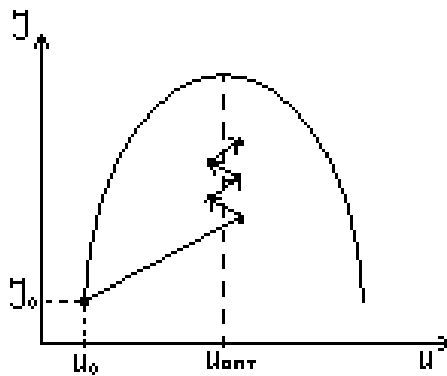


Рис. 9.27. Графічне подання процесу виходу системи в окіл екстремуму

4. **Неперервна динамічна корекція.** Метод застосовується для керування об'єктами типу НЛ. Ідея полягає у формуванні та подачі на вхід регулятора функції похідних вихідного сигналу об'єкта. Щоб реалізувати цю функцію перед регулятором встановлюють додатковий формувальний пристрій ФП (див. схему на рис. 9.28), передавальна функція $W_{\text{ФП}}$ якого буде оберненою до передавальної функції лінійної частини об'єкта, а саме:

$$W_{\text{ФП}}(p) = \frac{1}{W(p)}. \quad (9.28)$$

При дотриманні рівності (9.28) відбувається повна компенсація динаміки об'єкта, а пошук екстремуму йде за його статичною характеристикою. З огляду на компенсацію динаміки об'єкта, прискорення пошуку відбувається не за рахунок погіршення параметрів усталеного режиму. Більше того, зазвичай параметри автоколивань значно поліпшуються.

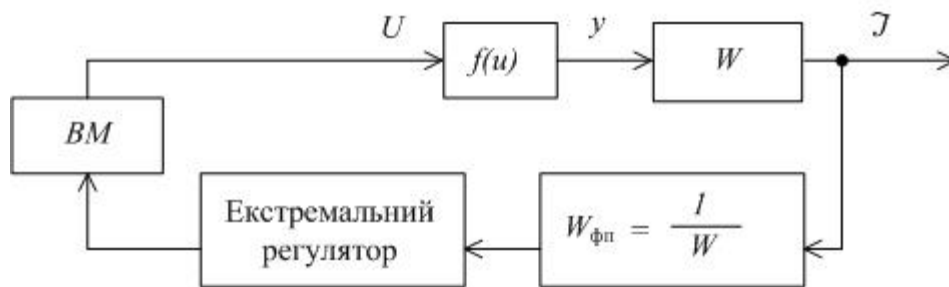


Рис. 9.28. Структурна схема системи із формувальним пристроєм

Насамкінець розглянемо проблему вибору налаштувань параметрів керувальної частини СЕР. Зокрема, система екстремального регулювання неперервного типу має два таких параметри:

1. Швидкість переключення виконавчого механізму k , а саме:

$$\frac{du}{dt} = k \quad \text{або} \quad u(t) = u_0 + kt.$$

Величина цього параметра зумовлена здебільше інерційністю об'єкта. Так коли значення k занижене, то сповільнюється час виходу системи в окіл екстремуму; а завищена швидкість k веде до погіршення параметрів автоколивань.

2. Зона нечутливості J_H .

Величина J_H залежить в основному від рівня високочастотних перешкод у вихідному сигналі об'єкта. При заниженому значенні параметра J_H зростає ймовірність помилкових спрацьовувань, а коли воно завищене, то погіршуються параметри автоколивань і зростає час виходу в окіл екстремуму.

Отже, можемо зробити висновок, що попри велику кількість описаних у літературі методик розрахунку параметрів СЕР, універсальним методом є підбір їхніх значень у ході обчислювального експерименту, проведеного із заданим об'єктом.

Питання для самоконтролю

1. Які системи керування називаються пошуковими екстремальними?
2. За якими ознаками класифікуються системи екстремального регулювання (СЕР)?
3. Які існують методи організації пошуку екстремуму в однопараметричних СЕР?
4. Із яких міркувань слід обирати величину зони нечутливості СЕР?
5. Який принцип роботи градієнтних пошукових СЕР?
6. Яким чином слід обирати величину кроку в алгоритмі пошуку екстремуму?
7. Як працюють ідентифікаційні алгоритми пошуку екстремуму?
8. У чому полягає метод стохастичної апроксимації?
9. Які основні показники якості роботи СЕР?
10. Які існують методи поліпшення процесів пошуку екстремуму?

Задачі до самостійного розв'язування

1. Для екстремального об'єкта із заданою нижче характеристикою, визначити напрям, у якому ця характеристика зростає найбільше в заданих точках.

а) $J = u_1^2 - 6u_1u_2 - u_2^2 + u_1 + 2u_2$, $u = (0; -1)$, $u = (1; 1)$;

б) $J = 2u_1u_2 + 3u_2^2 + u_1 - u_2$, $u_1 = (-1; -1)$, $u_1 = (0; 0)$;

в) $J = u_1^2 + 5u_1u_2 - 3u_2^2 + u_1 - 2u_2$, $u = (1; 3)$, $u = (1; -1)$.

РОЗДІЛ 10

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ СИТУАЦІЙНОГО КЕРУВАННЯ

Мета розділу: *вивчення основних принципів ситуаційного керування складними об'єктами*

Систему керування створюють у кілька етапів:

- опис об'єкта керування;
- опис мети існування об'єкта;
- формування критерію керування об'єктом;
- проектування й практична реалізація СК.

Варто було б очікувати, що в теорії керування однакова увага приділена всім перерахованим етапам. Однак, історично склалося інакше. Фахівці в галузі керування докладали зусиль переважно до пошуку процедури керування об'єктом, коли і сам об'єкт, і критерії вже описано із застосуванням точних термінів (тобто реалізовано тільки останній етап). Разом з тим, у теорії не враховано, що виконання попередніх етапів не завжди можливе, зокрема, коли йдеться про так звані нетрадиційні об'єкти керування (нечітко визначені або слабоструктуровані системи; організаційні системи, котрим притаманна «свобода волі» і т. д.). Визначимо основні властивості таких об'єктів.

1. *Унікальність*. Це значить, що кожен об'єкт має таку структуру і функціонує таким чином, що до нього не можна застосувати якусь типову процедуру керування. Ця обставина робить процес побудови СК дуже затратним.

2. *Невизначеність* формальної мети існування. Відомо, що неможливо чітко сформулювати таку мету стосовно всіх об'єктів, навіть створених людьми. Наприклад, невідома мета існування мегаполісів. Для чого, скажімо, виникла екосистема Чорноморсько-Азовського басейну? І це створює великі труднощі при формуванні критерію керування.

3. *Відсутність оптимальності*. Наслідком унікальності й невизначеності формальної мети існування об'єкта (п. 1,2) є те, що для об'єктів нової природи неможливо коректно сформулювати класичну задачу оптимізації. Через відсутність мети існування (у рамках теорії керування) для керування розглянутими складними об'єктами неможливо побудувати об'єктивний критерій. Отже, він стає суб'єктивним, цілком залежним від особи, яка приймає рішення (ОПР). Описану ситуацію відображає схема на рис. 10.1. Зрозуміло, що нереально вимагати, аби проектувальники створили оптимальну СК галузю або містом. Така постановка є некоректною і неправомірною. При цьому, наскільки створювана СК якісна, суб'єктивно може оцінити ОПР або її команда. Тому тут доречно говорити про ефективність результатів керування, а не про їх оптимальність.

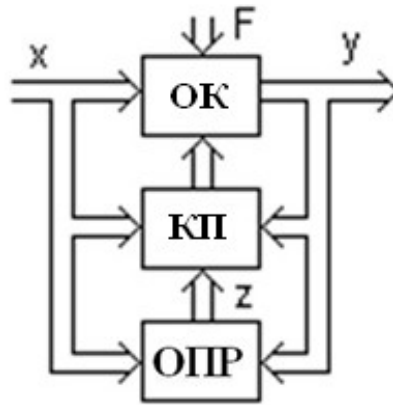


Рис. 10.1. Схема СК з використанням суб'єктивного критерію керування

4. *Динамічність.* З плином часу складні об'єкти змінюють свою структуру і функціонування, тобто вони еволюціонують у часі. Наприклад, підприємство розширюється, з'являються нові цехи і запроваджуються сучасні технології. Мережа ЕОМ розширюється, змінюється її структура і т. д. Така динамічність об'єкта має бути врахована в СК, тобто належить забезпечити адаптивність створюваних систем.

5. *Неповнота опису* властива складним об'єктам. Існують такі причини цього явища:

- неможливо чітко сформулювати допущення, котрі мають місце при складанні моделі;
- експерти-технологи не в змозі оцінити необхідний для проектувальника системи керування рівень повноти опису;
- незнання певних особливостей функціонування об'єкта самими експертами-технологами;
- неможливість кількісної оцінки багатьох особливостей функціонування об'єкта, а іноді і його структури. Часто реально зробити тільки його якісний словесний опис, перехід від якого до формального виконус управління, котрий не завжди здатен розв'язати таку складну задачу.

6. *Наявність так званої свободи волі.* У багатьох ОК люди виступають елементами структури (наприклад, в організаційних системах). Як відомо, інтереси і цілі людей можуть суттєво відрізнятись від завдань, які ставить перед ними ОПР, отже, індивідуальну поведінку кожного учасника процесу практично неможливо врахувати при створенні СК.

Психологи багато уваги приділяли дослідженню поведінки людей коли вирішувалися задачі керування подібними складними об'єктами.

Розглянемо приклади концептуальних схем, котрі імітують поведінку людини при розв'язуванні задач керування.

Найбільш груба схема носить назву *стимульно-реактивної теорії*. У її основі лежить уявлення про об'єкт керування як про «чорну скриньку». Тобто внутрішня структура ОК невідома, а спостереженню доступні тільки вхідні (стимули) і вихідні показники (реакції) ОК. Такий підхід до вирішення проблеми занадто спрощений, тому зводиться до методу проб і помилок з

поступовим нагромадженням інформації про доцільну поведінку працівника в даній ситуації.

Приклад 10.1. Припустимо, що ОК має один вихід y та два входи x_1 і x_2 . Змінні y , x_1 , x_2 – булеві. Комбінацію, коли обидва входи зазнають впливу, тобто $x_1 = 1$ і $x_2 = 1$, заборонено.

Реакція об'єкта y на збудження одного із входів може набувати значень 0 або 1 відповідно до розподілу $(p_i; 1 - p_i)$, $i = \overline{1, 2}$, тут p_i – імовірність появи нуля на виході, коли вхід x_i збуджено.

Розподіл імовірностей $(p_i; 1 - p_i)$ ОПР невідомий. Нам належить побудувати самонавчальну систему, яка була би здатна мінімізувати випадки коли вплив на входи x_1 і x_2 не приводить до збудження виходу y .

Якби ймовірності p_i були відомі, то розв'язати задачу було б просто: необхідно весь час впливати на той вхід (x_1 або x_2), для якого величина ймовірності p_i була меншою. Коли ж значення p_i , $i = \overline{1, 2}$, невідоме, розв'язок забезпечує автомат, схему якого бачимо на рис. 10.2.

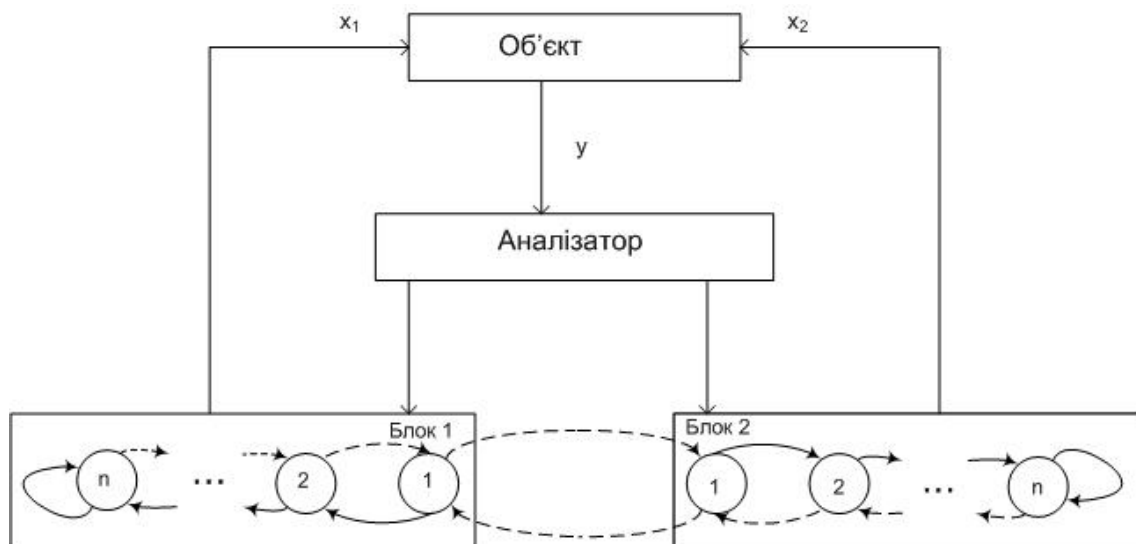


Рис. 10.2. Загальна схема самонавчального автомата (до прикладу 10.1)

У блоках 1 і 2 відображено можливі стани автомата. Якщо $y = 0$, то перехід у сусідній стан здійснюється за пунктирною лінією, якщо $y = 1$ – за суцільною. Коли автомат перебуває у станах з блоку 1 – це приводить до збудження входу x_1 , тобто $x_1 = 1$; якщо він потрапляє у стани з блоку 2 – до збудження входу x_2 .

Приклад 10.2. Розглянемо схему змодельованого умовного рефлексу під дією двох подразників: безумовного x_1 й умовного x_2 . При надходженні на вхід безумовного подразника ($x_1 = 1$) система видає реакцію: $y = 1$. У результаті

подачі на вхід тільки сигналу $x_2 = 1$ (тобто $x_1 = 0$), ненавчена система сигнал: $y = 1$, не видає. Система здатна до навчання. Це означає, що коли протягом кількох тактів на вхід подаються одночасно два сигнали: $x_1 = 1$ і $x_2 = 1$, то виникає умовний рефлекс, а саме: якщо на вхід навченої системи подається тільки сигнал: $x_2 = 1$, то реакцією буде: $y = 1$.

Описана система здатна також відтворювати процес «згасання» умовного рефлексу. Схему автомата, котрий імітує цей процес, зображено на рис. 10.3.

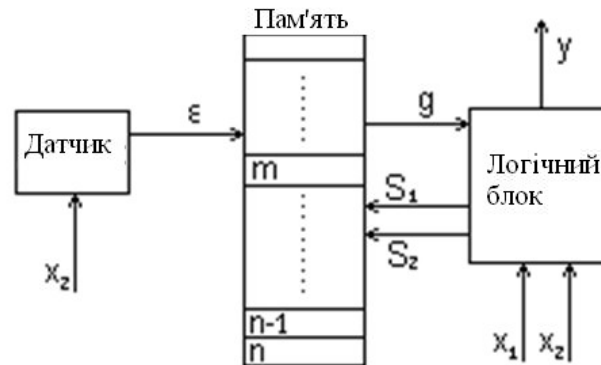


Рис. 10.3. Схема автомата для відтворення процесу формування і згасання умовного рефлексу в системі, m – поріг рефлексу, n – глибина пам'яті

Подача на вхід тільки сигналу: $x_1 = 1$, дає такий результат: $y = 1$; датчик не працює. Коли ж на вхід подаються одночасно два сигнали ($x_1 = 1$ і $x_2 = 1$), то сигнал S_1 зміщує одиницю в магазинній пам'яті на одну клітинку вниз; тоді $y = 1$. Оскільки $x_2 = 1$, то параметр ϵ набуває випадковим чином рівноймовірно одне з трьох значень $(-1; 0; 1)$, причому (-1) означає зміщення вгору; 0 – перебування на місці; 1 – рух вниз.

Коли $x_1 = 1$ і $x_2 = 1$, то сигнал S_2 зрушує одиницю в магазині на клітинку вгору; датчик працює як у попередньому випадку; сигнал g з'являється тоді, коли одиниця в пам'яті перебуває нижче m – порогу рефлексу; а сигнал g – збуджує y .

Таким чином, положення одиниці в магазині характеризує ступінь навченості системи умовному рефлексу. Як зазначалося рівень m – це поріг рефлексу. Його можна змінювати, імітуючи схильність системи до виникнення рефлексу. Незважаючи на доцільність застосування подібного підходу до керування у певних випадках, стимульно-реактивна теорія виявляється доволі грубою моделлю навчання. Кращі результати в роботі зі складними об'єктами дає *ситуаційне керування*. Розглянемо його суть.

Визначення 1. *Поточною ситуацією* на об'єкті керування називається сукупність усіх відомостей про його структуру та функціонування в даний момент часу.

Визначення 2. *Повною ситуацією* називається сукупність даних, котра містить поточну ситуацію, знання про стан системи керування в даний момент часу, а також про технологію керування.

Уведемо такі позначення: S_i – повна ситуація (i – номер); Q_j – поточна ситуація (j – її номер).

Припустимо, що в розпорядженні СК є n різних способів впливу на об'єкт. Кожне з таких можливих однокрокових рішень позначимо через U_k , $k = \overline{1, n}$. Елементарний акт керування можна тоді сформулювати таким чином:

$$S_i; Q_j \xrightarrow{U_k} Q_i.$$

Сенс цього співвідношення такий: якщо на ОК склалася ситуація Q_j ; стан СК і технологічна схема керування, які визначаються повною ситуацією S_i , допускають застосування впливу U_k , то такий вплив застосовується і поточна ситуація Q_j перетворюється на нову поточну ситуацію Q_i . Такі принципи перетворення називаються *логіко-трансформаційними* (або *кореляційними*) *правилами* (ЛТП). Маючи в розпорядженні повний список ЛТП, можна впливати на ОК.

Оскільки множина впливів $\{U_k\}$ скінченна ($k = \overline{1, n}$), то вся множина повних ситуацій $\{S_i\}$ може бути розбита на n класів, кожному з яких буде відповідати один конкретний вплив на об'єкт. Методи розбиття множини $\{S_i\}$ на n класів називаються *процедурами класифікації*.

В окремих випадках класи повних ситуацій не перетинаються. Однак, стосовно деяких повних ситуацій через недостатність даних про ОК неможливо достеменно визначити однокрокове керування; такі ситуації можуть одночасно належати до кількох класів. Отже, унаслідок перетину класів виникає задача вибору рішення з числа можливих у даній повній ситуації. Щоб здійснити подібний вибір, необхідно розробити спеціальні процедури екстраполяції наслідків прийняття того чи іншого рішення.

Таким чином, загальна схема розв'язування задачі ситуаційного керування може бути подана у вигляді схеми, зображеної на рис. 10.4.

Розглянемо роботу такої системи.

Аналізатор оцінює поточну ситуацію та визначає, чи необхідно втручання СК у процес. Якщо так, то опис поточної ситуації передається в *класифікатор*.

Використовуючи наявну в ньому інформацію, *класифікатор* відносить поточну ситуацію до одного або декількох класів, що відповідають однаковим рішенням (керуванням). Далі оброблена таким чином інформація передається в *корелятор*, де зберігаються всі ЛТП. Якщо таке правило одне, то вибір кращого з них проводиться після обробки попередніх рішень в *екстраполяторі*. Коли ж *корелятор* і *класифікатор* не можуть прийняти рішення щодо поточної ситуації, то спрацьовує блок випадкового вибору (БВВ) і вибирається одне з

рішень, які не виявляють занадто великого впливу на об'єкт. Спрацювання БВВ свідчить про недостатню навченість системи.

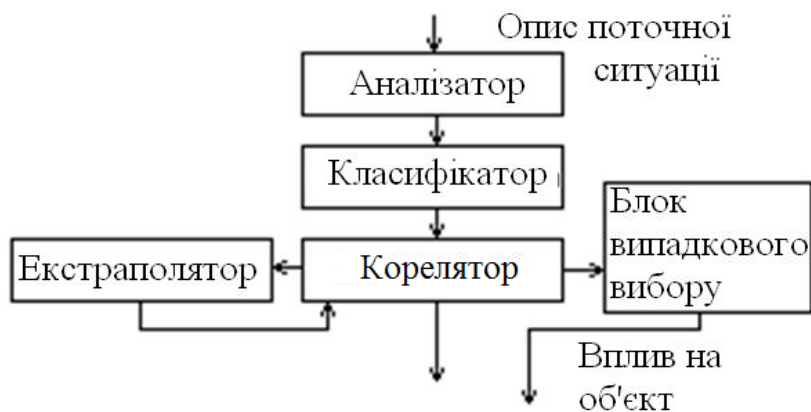


Рис. 10.4. Загальна схема розв'язування задачі ситуаційного керування

Відзначимо два моменти:

1. Оскільки ОК являє собою складну систему і немає надії на те, що вихідні дані про нього будуть повними, то система керування таким об'єктом має бути відкритою (самонавчальною).

2. Унаслідок зменшення значення параметра n (глибини пам'яті) та збільшення кількості повних ситуацій відбувається підвищення ефективності роботи СК. Такі випадки досить поширені, їх прикладом може бути керування автомобілем або робота секретаря.

На закінчення сформулюємо характерні ознаки методу ситуаційного керування.

1. Ситуаційне керування потребує великих витрат на створення попередньої бази відомостей про ОК і про способи керування ним.

Ці витрати виправдані тільки тоді, коли традиційні шляхи формалізації процесу реалізувати неможливо.

2. Для опису поточних ситуацій належить застосовувати мову, котра відображає всі параметри і зв'язки, необхідні для віднесення кожної з них до певного класу і вибору відповідного їй однокрокового рішення. При цьому необхідно правильно встановити рівень деталізації опису (не надто докладний і не надто обмежений).

3. Мова опису ситуації має давати можливість відображати не тільки кількісні, але і якісні відомості про ОК, котрі не можуть бути формалізовані звичайним шляхом. Наприклад: «коли значення X зростає, то, як правило, величина Y зменшується, але не дуже сильно».

4. Класифікація ситуацій відбувається спочатку на суб'єктивній основі, тому первинні відомості про відповідність тієї чи іншої з них конкретному рішення йде від експертів. Однак, СК має бути побудована таким чином, аби класифікація виконувалася і стосовно тих ситуацій, про які немає відомостей від експертів. Як бачимо, задача класифікації стає аналогічною формуванню понять на базі навчальних послідовностей.

Описані вимоги мають місце і при створенні ЛТП.

5. Системи ситуаційного керування не мають на меті оптимізувати сам процес керування. Вони орієнтовані на результати, які будуть не гіршими від кращих результатів керування таким об'єктом, якби його здійснювала людина.

6. Системи ситуаційного керування не окреслюють стратегію керування, оскільки вони застосовують однокрокові рішення. У необхідних випадках можливості системи можна розширити шляхом уведення процедури «склеювання» однокрокових рішень.

Список скорочень

ТК – теорія керування.

ОК – об'єкт керування.

СК – система керування.

ЗЗ – зворотний зв'язок.

ПК – пристрій керування.

АЧХ – амплітудна частотна характеристика.

ФЧХ – фазова частотна характеристика.

АФЧХ – амплітудно-фазова частотна характеристика.

ЛЧХ – логарифмічна частотна характеристика.

ЛАЧХ – логарифмічна амплітудно-частотна характеристика.

ЛФЧХ – логарифмічна фазова частотна характеристика.

ПД – пропорційно-інтегрально-диференціальний (закон регулювання).

ПМП – принцип максимуму Понтрягіна.

СНС – самоналаштувальна система.

СОС – самоорганізувальна система.

АСК – адаптивні системи керування.

СЕР – система екстремального регулювання.

ІПФ – імпульсна перехідна функція.

Список літератури

1. Бесекерский В.А. Теория систем управления / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. – М. : Наука, 1975. – 768 с.
2. Дорф Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп, пер. с англ. Б.И. Копытова. – М. : Лаборатория базовых знаний, 2002. – 832 с.
3. Ерофеев А.А. Теория автоматического управления: учебн. для вузов. – 3-е изд., стереотип / А.А. Ерофеев. – СПб. : Политехника, 2008. – 302 с.
4. Иванов В.А. Теория оптимальных систем автоматического управления / В.А. Иванов, Н.В. Фалдин. – М. : Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. – 336 с.
5. Казакевич В.В. Системы автоматической оптимизации / В.В. Казакевич, А.Б. Родов. – М. : Энергия, 1977. – 288 с.
6. Математические основы теории автоматического регулирования / Под ред. Б.К. Чемоданова. – М. : Высш. шк., 1971. – 807 с.
7. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы: учебн. пос. для вузов по спец. «Автоматика и упр. в техн. системах» / А.Г. Александров. – М. : Высш. шк., 1989. – 263 с.
8. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления / А. А. Первозванский. – М. : Наука, 1986. – 616 с.
9. Поспелов Д.А. Ситуационное управление: теория и практика. / Д.А. Поспелов. – М. : Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 288 с.
10. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. – М. : Наука, 1987. – 712 с.
11. Теория автоматического управления / Под ред. А.А. Воронова. – М. : Высш. шк., 1986. – 504 с.
12. Теория автоматического управления / Под ред. А.В. Нетушила. – М. : Высш. шк., 1976. – 430 с.
13. Чураков Е.П. Оптимальные и адаптивные системы: учеб. пос. для вузов / Е.П. Чураков. – М. : Энергоатомиздат, 1987. – 256 с.
14. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов. – 2-е изд. / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М. : Наука, 1969. – 384 с.

Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1974. — 544 с.

Предметний покажчик

- Адаптація 67
- Алгоритм керування 13
- Вагова функція ланки 20
- Варіація функціонала 131
- Вектор змінних стану розширений 156
- Визначник Гурвица 96
- Вихід системи 6
- Вхід системи 6
- Годограф Михайлова 98
- Голчаста варіація 155
- Граничні цикли 91
- Екстремаль 133
- Задача
 - нестационарна 179
 - програмного керування 65
 - синтезу оптимального регулятора 66
 - синтезу оптимального стаціонарного лінійного регулятора стану 179
 - стаціонарна 179
- Зворотний зв'язок 7
- Ізокліна 86
- Керованість 74
- Керування ситуаційне 255
- Коефіцієнт
 - загасання ланки 30
 - підсилення 19
 - статизму 58
- Коливальність 57
- Коливання
 - власні 31
 - вимушені 31
 - вільні 31
- Кореневий годограф 116
- Корінь домінантний 117
- Критерій
 - ефективності керування 58
 - оптимальності 59
 - якості керування 59
- Ланка 18, 19
 - аперіодична другого порядку 28
 - – першого порядку 26
 - безінерційна 26
 - ідеальна диференціувальна 36
 - – інтегрувальна 34
 - – підсилювальна 25
 - із запізненням 36
 - інерційна 26
 - – інтегрувальна 35
 - коливальна 30
 - немінімально-фазова 38
 - пропорційна 25
- Ланки
 - диференціувальні 39
 - інтегрувальні 39
 - немінімально-фазові 38, 39
 - позиційні 39
- Лінеаризація 93
- Лінія перемикавання 160
- Логарифмічні частотні характеристики 24, 259
- Матриця керованості 76, 77
- Межа стійкості 94
- Метод
 - ізоклін 86
 - Ляпунова перший 101
 - – прямиий 104
- Модель типу вхід – вихід 14
- Невизначеність об'єкта апріорна 199
- Нормальна форма Коші 14
- Об'єкт керування 6, 7
 - – узагальнений налаштувальний 210
- Обмеження другого виду 60
 - першого виду 60
- Оператор 7
- Передавальна функція 25
- Перерегулювання 56
- Перехідна функція ланки 21
- Період квазістаціонарності 198
- Помилка усталена 57
- Понтрягіан 156
- Правила логіко-трансформаційні 256
 - кореляційні 256
- Принцип оптимальності Беллмана 187
- Пристрій керування 6, 7
 - – ідеальний 68
- Программатор оптимальний 149
- Простір
 - станів 54
 - фазовий 54, 80
- Процедури класифікації 256

- Регулятор оптимальний 149
- Рівняння
 - виходу системи 14
 - Вінера – Хопфа 213
 - Ейлера 132
 - канонічно сполучені 157
 - стану системи 14
 - чутливості 107
- Рух
 - асимптотично стійкий 101
 - варіаційний 107
 - вихідний 107
 - збурений 208
 - нестійкий 101
 - стійкий 100
- Сепаратриса 91
- Система 6
 - адаптивна самонавчальна 200
 - самоналаштувальна 199
 - самоорганізувальна 200
 - екстремального регулювання 224
 - з аперіодичною реакцією 125
 - з програмним керуванням 7
 - керування оптимальна 59
 - оптимального регулювання 66
 - програмного керування 65
 - регулювання 7
 - стійка в цілому 101
- Системи
 - адаптивні 198
 - астатичні 57
 - статичні 58
 - з моделлю 201
 - регулювання 7
- Співвідношення Р. Беллмана 187
- Спостережуваність 74
- Сталі часу 19
- Стійкість лінійної системи 93
 - у великому 101
 - у малому 101
 - у цілому 101
- Стратегія керування 185
 - Керування оптимальне 185
- Схема структурна 39
- Теорема
 - про n інтервалів 167
 - про асимптотичну стійкість 104
 - про стійкість 104
- Теорія
 - стимульно-реактивна 253
 - керування 6
- Точка
 - зображувальна 54
 - особлива 81
- Траєкторія руху 55
 - фазова 55, 80, 242
 - оптимальна 59
- Умова
 - Лежандра 135
 - стійкості Гурвіца необхідна 95
- Фазова траєкторія 80
- Фазовий портрет 80
- Функції
 - Ляпунова 103
 - перемикальні 156
 - чутливості 107
- Функція
 - знаковизначена 103
 - імпульсна перехідна 20
 - передавальна 20, 25
 - передавальна нормована 126
- Характеристика ланки
 - динамічна 20
 - статична 20
- Час регулювання 56
- Частота резонансна 31
- Частотна характеристика
 - амплітудно – фазова 22, 259
 - амплітудна 22
 - фазова 22, 23
- Чутливість системи 106

Навчальне видання

Ігор Валерійович **Новицький**
Світлана Альбертівна **Ус**

СУЧАСНА ТЕОРІЯ КЕРУВАННЯ

Навчальний посібник

Редактор О.Н. Ільченко

Підп. до друку 28.09.2017. Формат 30x42/4.
Папір офсетний. Ризографія. Ум. друк. арк. 14,0
Обл.-вид. арк. 19,2. Тираж 50 пр. Зам. №

Підготовлено до друку та видруковано
в Державному вищому навчальному закладі
«Національний гірничий університет»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
ДК № 1842 від 11.06.2004 р.
49005 м. Дніпро просп. Д. Яворницького 19.