

делирующего программного обеспечения на основе персонального компьютера, использующего OS Windows Vista и Windows 7.

4. Проведенные расчеты показали полную пригодность результатов данных разработок для решения задачи выбора приемлемых параметров демпфирующего устройства для подавления гидроударных явлений, возникающих при имитации внезапного перекрытия проходного сечения трубопровода при помощи заслонки, устанавливаемой на удаленном конце трубопровода.

#### Список литературы

1. Robert G. Dorch, Don J. Wood, Charlene Lightner. Distributed parameters analysis of pressure and flow disturbances in rocket propellant feed systems: - NASA Technical Note.- Washington DC, - August, 1966. – 54с.
2. MATLAB Compiler, The Language of Technical Computing: - Sixth printing, Revised for Version 3.0, The MathWorks, Natick, MA. 2002. - 274с.
3. R.A. Bakar and T. Firoz. Simulation of transient flows in a hydraulic system with a long liquid line. American Journal of Applied Sciences 2 (5): 1003-1007, ISSN 1546-9239, -5с.
4. Chaudhry M.H., Hussaini M.Y., 1985, Second-order explicit finite-difference schemes for waterhammer analysis, Journal of Fluids Engineering, 107, 523-529
5. 4. Wylie E.B., Streeter V.L., 1978, Fluid Transients, McGraw-Hill, New York

*Рекомендовано до публікації д.т.н. Слесаревим В.В.  
Надійшла до редакції 16.11.13*

УДК 656:658

© И.А. Таран, М.Н. Трубицин, С.В. Крыжановская

## **РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ ПЕРЕБОРА ВЕРШИН**

Показана возможность решения транспортной задачи на основе построения, отсева и перебора вершин области определения целевой функции (N-мерного, выпуклого многогранника). Разработана стратегия выделения множества нужных для перебора угловых точек из множества всех допустимых точек на основе геометрии и известных свойств первых опорных планов. Разработанная MathCad-программа рекомендуется к применению в учебном процессе для детального исследования области определения целевой функции и сравнения начальных опорных планов.

The possibility of solving the transportation problem on the basis of construction, retention and re-boron vertices of the definition of the objective function (N-dimensional, convex polyhedron). A strategy for allocating a plurality needed for busting out of the corner points of the set of all possible points based on the geometry and the known properties of the first support of plans. MathCad-developed program is recommended for use in the learning process for the detailed study area definition of the objective function and the initial comparison of the support programs.

Показано можливість рішення транспортної задачі на підставі побудови, відсіву та перебору вершин області визначення цільової функції (N-мірного, опуклого багатогранника). Розроблено стратегію виділення множин потрібних для перебору кутових точок з множини всіх допустимих точок на основі геометрії і відомих властивостей перших опорних планів. Розроблена

MathCad-програма рекомендується до застосування в навчальному процесі для детального дослідження області визначення цільової функції та порівняння початкових опорних планів.

Современные учебные методы решения задачи линейного программирования (ЗЛП) основанные на традиционном симплекс-методе имеют итерационный характер, [1,2,3]. Эти итерации подразумевают прохождение по ребрам N-мерного многогранника (поверхность которого есть граница области определения целевой функции) от вершины с худшим значением функции, к вершине с более лучшим значением. Здесь  $N = n \cdot m$ , где  $m$  и  $n$  – количество поставщиков и потребителей. Вершины этого N-мерного выпуклого многогранника представляют собой возможные решения ЗЛП и их общее количество соизмеримо с величиной  $1,5 \cdot 2^{N-1}$ . Производство такого количества итераций не имеет смысла, даже для задачи с малыми  $m, n \leq 10$ , очевидно поэтому метод перебора вершин для достижения решения в ЗЛП до сих пор не рассматривается и не применяется.

В связи с выше изложенным, **целью** настоящей работы является применение метода прямого перебора вершин для решения транспортной задачи. **Идея** работы состоит в выделении различных множеств вершин, которые заранее не могут являться решением ЗЛП. Задача решалась с помощью MathCad, как наиболее доступным, наглядным и хорошо воспринимаемым студентами пакетом. Пример постановки закрытой ЗЛП для случая 15-ти мерного пространства показан на рис. 1.

$$\begin{array}{c}
 \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{поставщики} \\ \text{потребители} \end{array} \\
 \\
 \begin{matrix} \text{тарифы} & \text{объемы} \\ C = \begin{pmatrix} 4.3 & 2.5 & 2.8 & 1.3 & 2.1 \\ 2.1 & 3.5 & 4.7 & 3.8 & 3.2 \\ 4.6 & 4.9 & 2.3 & 3.3 & 2.1 \end{pmatrix} & b = \begin{pmatrix} 173 \\ 153 \\ 194 \end{pmatrix} \\
 \\
 \text{Целевая функция} \\
 z(x) := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (C_{i,j} \cdot x_{i,j}) \\
 \\
 \text{объемы } a = (104 \ 113 \ 203 \ 45 \ 55) \\
 \text{найти } (X_1 \dots X_{15})^T = (x_{11} \ x_{21} \ x_{31} \ x_{12} \ x_{22} \ x_{32} \ x_{13} \ x_{23} \ x_{33} \ x_{14} \ x_{24} \ x_{34} \ x_{15} \ x_{25} \ x_{35})^T \quad z \rightarrow \min
 \end{matrix}
 \end{array}$$

Рис. 1. Постановка задачи, коллаж из MathCad-документа

Рассмотрим описание области определения минимизируемой целевой функции транспортной задачи. Первая ее часть представляет собой  $m+n-1=7$  гиперплоскостей, соответствующих балансу спроса и предложений. В связи с закрытостью ЗЛП необходимо отбросить одно уравнение, выберем последнее уравнение (объем -  $b_3$ ). Для определения координат вершин  $X_1 \dots X_{15}$  (как пересечения 15 гиперплоскостей) дополним систему линейных уравнений  $m \cdot n - (m+n-1) = 8$  нулевыми (координатными) гиперплоскостями  $X_\alpha = 0, X_\beta = 0 \dots X_\omega = 0$ , где  $\alpha, \beta \dots \omega$  представляют, в общем случае, некоторое сочетание без повторов 8 цифр из 15. Всего таких сочетаний или наборов (условимся, что в дальнейшем цифры набора расположены по возрастающей), а следовательно, вершин области и решений будет

$$C_{m \cdot n}^{m \cdot n - [m+n-1]} = C_{m \cdot n}^{m+n-1} = C_{15}^8 = C_{15}^7 = \frac{15!}{7! \cdot 8!} = 6435$$

При построении всего списка сочетаний воспользуемся лексикографическим методом, [4]. Для этого в текущем сочетании брался самый правый элемент, не достигший ещё своего наибольшего значения; он увеличивался на 1, а всем последующим элементам присваивались наименьшие значения, рис. 2.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9		6427	6428	6429	6430	6431	6432	6433	6434	6435	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		7	7	7	7	7	7	7	7	7	8
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2		8	8	8	8	8	8	8	8	9	9
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3		9	9	9	9	9	9	10	10	10	10
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	...	10	10	10	10	10	11	11	11	11	11
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5		11	11	11	11	12	12	12	12	12	12
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6		12	12	13	13	13	13	13	13	13	13
7	7	7	7	7	7	7	7	7	8		13	14	14	14	14	14	14	14	14	14
8	8	9	10	11	12	13	14	15	9		14	15	15	15	15	15	15	15	15	15

Рис. 2. Полный набор сочетаний 8 из 15, построенный по лексикографическому методу. Для этого набора в текущем сочетании находится самый нижний элемент, не достигший своего наибольшего значения; он увеличивается на единицу, а всем последующим элементам присвоим наименьшие значения

На первом шаге отбрасывания вершин выделим сочетания, включающие цифры 1,2,3, а также 4,5,6 и т.д., которые не дают решения в силу вырожденности составной матрицы системы линейных уравнений,  $\det(A/A_{\text{соч}})=0$ , рис. 3.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15		1
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	104	
2	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	113	
3	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	203	
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	45	
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	55	
6	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	173	
7	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	153	
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
9	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
10	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
11	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
12	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
13	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
14	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
15	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	

Рис. 3. Пример формирования системы при  $X_1= \dots =X_8=0$

Здесь уравнение № 1 можно получить сложением уравнений № 8, № 9, № 10, а уравнение № 2 - сложением уравнений № 11, № 12, № 13, что дает вырожденность матрицы  $A/A_{\text{соч}}$ , как матрицы с двумя одинаковыми строками. Отбросив подобные сочетания (вершины) как ненужные, у нас, в рассматриваемом примере, останется 2025 вершин, рис. 4.

	1	2	3	4	5		2023	2024	2025	
1	0	0	0	0	0		-198	-188	-188	-243
2	0	0	0	0	0		108	153	98	153
3	104	104	104	104	104		94	139	194	194
4	0	0	0	0	0			113	113	113
5	0	0	0	0	0			0	0	0
6	113	113	113	113	113			0	0	0
7	0	0	0	0	0			203	203	203
8	0	0	0	0	0			0	0	0
9	203	203	203	203	203	• • •	0	0	0	0
10	0	0	0	0	45		0	45	45	45
11	0	45	153	271	0		45	0	0	0
12	45	0	-108	-226	0		0	0	0	0
13	173	173	173	173	128		55	0	0	55
14	153	108	0	-118	153		0	0	55	0
15	-271	-226	-118	0	-226			55	0	0
16	883	884	886	887	888		$6,337 \cdot 10^3$	$6,338 \cdot 10^3$	$6,339 \cdot 10^3$	

Рис. 4. Вершины, полученные в результате пересечения гиперплоскостей. Здесь и далее на рисунках в последней (16-той) строке матрицы находятся первоначальные номера вершин

На следующем шаге (в силу положительности перевозок в транспортной задаче) можно отбросить те вершины, у которых хотя бы одна координата отрицательна. В итоге останется 222 вершины, рис. 5.

Считаем целесообразным, на очередном шаге, отбросить те вершины, у которых присутствует максимальный тариф, в итоге имеем  $222-100=122$ , рис. 6.

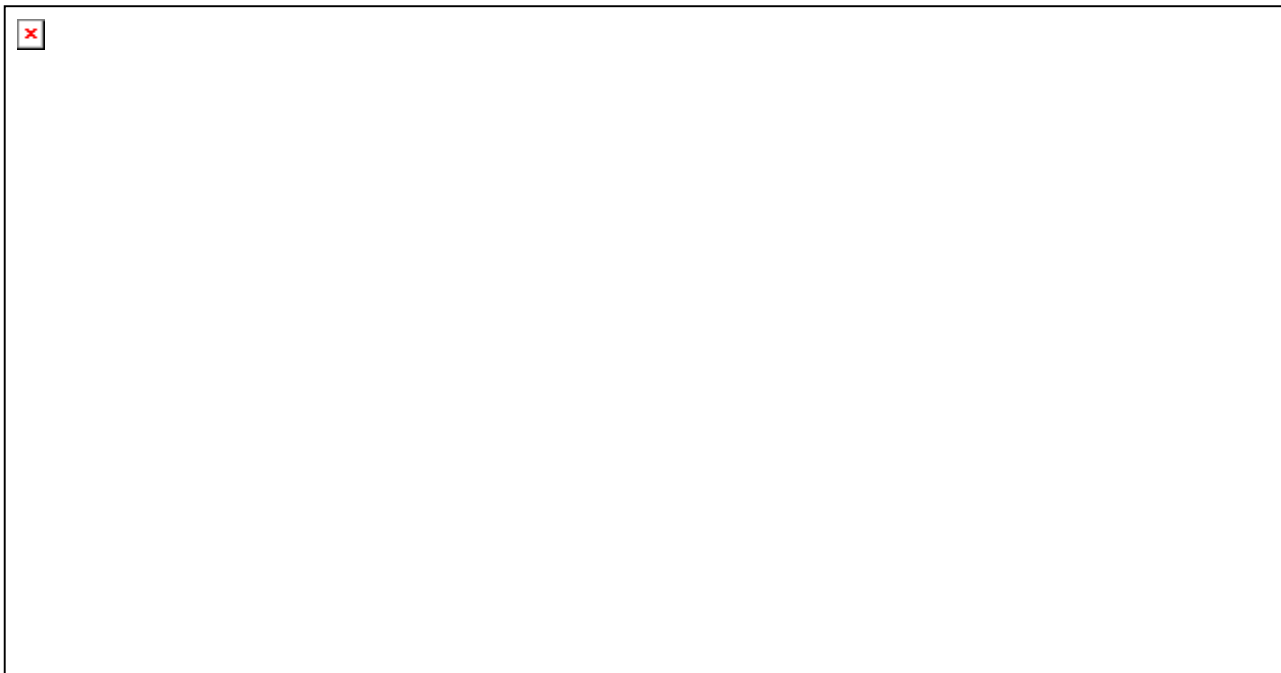


Рис. 5. Оставшиеся вершины, все координаты которых положительны

	1	2	3	4	5	6	118	119	120	121	122
1	0	0	0	0	0	0	15	15	6	51	6
2	0	0	0	0	0	0	89	89	98	53	98
3	104	104	104	104	104	104	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	113	113	113	113	113
5	113	113	113	113	113	113	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	173	158	173	118	128	113	0	0	54	9	9
8	0	0	0	0	0	0	64	9	0	0	0
9	30	45	30	85	75	...	139	194	149	194	194
10	0	0	0	0	45	0	45	45	0	0	45
11	0	0	40	40	0	0	0	0	0	45	0
12	45	45	5	5	0	0	0	0	45	0	0
13	0	15	0	55	0	0	0	0	0	0	0
14	40	40	0	0	40	0	0	55	55	55	55
15	15	0	55	0	15	0	55	0	0	0	0
16	$1,075 \cdot 10^3$	$1,077 \cdot 10^3$	$1,081 \cdot 10^3$	$1,083 \cdot 10^3$	$1,084 \cdot 10^3$	$1,086 \cdot 10^3$	$10^3$	$5,677 \cdot 10^3$	$5,705 \cdot 10^3$	$5,708 \cdot 10^3$	$5,712 \cdot 10^3$

Рис. 6. Вершины, в которых отсутствует максимальный тариф:  $C_{3,2}=4,9$ , следовательно,  $x_{3,2}=X_6=0$

Поступив аналогично с обязательным присутствием минимального тарифа, получим  $122-72=50$  вершин. На последних двух этапах применим метод двойного предпочтения, отбрасывая «двойной» максимум тарифов и оставляя «двойной» минимум тарифов. В результате окончательно имеем  $50-30-10=10$  вершин.

Результирующая матрица координат вершин приведена на рис. 7.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	64	64	6
2	104	104	104	104	40	40	98	40	40	98
3	0	0	0	0	64	64	6	0	0	0
4	113	113	64	64	0	0	113	0	0	113
5	0	0	49	49	113	113	0	113	113	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	15	9	64	9	128	73	15	64	9	9
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	188	194	139	194	75	130	188	139	194	194
10	45	45	45	45	45	45	45	45	45	45
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	6	0	55	0	55	0	0	55	0
14	49	49	0	0	0	0	55	0	0	55
15	6	0	55	0	55	0	0	55	0	0
16	$2,26 \cdot 10^3$	$2,262 \cdot 10^3$	$2,531 \cdot 10^3$	$2,533 \cdot 10^3$	$2,993 \cdot 10^3$	$2,995 \cdot 10^3$	$3,204 \cdot 10^3$	$5,501 \cdot 10^3$	$5,503 \cdot 10^3$	$5,712 \cdot 10^3$

Рис. 7. Окончательная матрица координат вершин. Решение, соответствующее минимуму целевой функции расположено в столбце № 4

Показанная стратегия отбрасывания «ненужных» вершин является перспективной т.к. позволила сократить число рассматриваемых решений более чем в 600 раз. Применение такого метода решения транспортной задачи нуждается в более строгом математическом описании выделения всех перечисленных множеств вершин, табл. В рассматриваемом примере, табл., применение метода двойного тарифа является более предпочтительным т.к. позволяет отбросить из рассмотрения большее количество «ненужных» вершин. Рациональная последовательность применения перечисленных этапов отбрасывания вершин также нуждается в детальном математическом описании для предварительного сведения к минимуму окончательной матрицы сравниваемых вершин.

Таблица.

Этапы выделения и сокращения количества вершин 15-мерного многогранника рассматриваемого примера

Группы (множества) вершин	Основные аналитические выкладки
Максимально возможное количество вершин	$C_{m \cdot n}^{m+n-1}$
Вершины, как результат пересечения гиперплоскостей	$\det(A/A_{COЧ}) \neq 0$
Вершины, все координаты которых строго положительны	$X_p > 0$
Обязательное присутствие вершины, тариф которой – минимален	$C_p = \min \{c_{i,j}\}$ $X_p \neq 0$
	$\begin{pmatrix} 4.3 & 2.5 & 2.8 & 1.3 & 2.1 \\ 2.1 & 3.5 & 4.7 & 3.8 & 3.2 \\ 4.6 & 4.9 & 2.3 & 3.3 & 2.1 \end{pmatrix} X_{1,4} = X_{10} \neq 0$
Обязательное отсутствие вершины, тариф которой – максимален	$C_p = \max \{c_{i,j}\}$ $X_p = 0$
	$\begin{pmatrix} 4.3 & 2.5 & 2.8 & 1.3 & 2.1 \\ 2.1 & 3.5 & 4.7 & 3.8 & 3.2 \\ 4.6 & 4.9 & 2.3 & 3.3 & 2.1 \end{pmatrix} X_{3,2} = X_6 = 0$
Присутствие вершин, тарифы которых – минимальны по строкам и столбцам	$X_{p \dots q} \neq 0$
	$\begin{pmatrix} 4.3 & 2.5 & 2.8 & 1.3 & 2.1 \\ 2.1 & 3.5 & 4.7 & 3.8 & 3.2 \\ 4.6 & 4.9 & 2.3 & 3.3 & 2.1 \end{pmatrix} X_{2,10,15} \neq 0$
Отсутствие вершин, тарифы которых – максимальны по строкам и столбцам	$X_{p \dots q} = 0$
	$\begin{pmatrix} 4.3 & 2.5 & 2.8 & 1.3 & 2.1 \\ 2.1 & 3.5 & 4.7 & 3.8 & 3.2 \\ 4.6 & 4.9 & 2.3 & 3.3 & 2.1 \end{pmatrix} X_{6,8} \neq 0$

В предлагаемом алгоритме наиболее громоздкие и сложные действия, будут связаны с построением всего набора сочетаний  $C_n^k$ , ведь в реальных транспортных задачах количества поставщиков и потребителей может быть бо-

лее 100. Предполагается в дальнейшем упростить этот процесс используя один раз построенную матрицу-базу требуемого (большого) числа сочетаний. Меньшие наборы можно получать из построенной матрицы-базы вычеркиванием соответствующих строк и столбцов, [4].

Предполагаем, что использование теории графов для определения соседних вершин многогранника-графа [3] как некоторых множеств позволит определить новые геометрические свойства, упрощающие задачу перебора. Известные способы решения транспортной задачи и ЗЛП используют итерационный метод и различные методы задания начальных данных (первого опорного плана) [1]. Условия построения этих планов или вопросы итерационного перехода от вершины с худшим значением целевой функции к вершине с лучшим значением могут быть использованы для сужения множества сравниваемых вершин многогранника.

### **Выводы по работе:**

- Разработана наиболее простая стратегия отбрасывания вершин с заранее не подходящими решениями ЗЛП.
- Показано применение самого надежного метода нахождения экстремума целевой функции – метода прямого перебора решений
- Средствами MathCad реализован метод лексиграфического получения сочетаний из  $n$  по  $k$ .
- Определены возможные направления обобщения процесса отбрасывания «ненужных» вершин для ЗЛП.
- Показаны способы объединения групп вершин многогранника – с отрицательными компонентами, включающими (или исключаящими) координатами и др.
- На рассматриваемом примере показано преимущество метода двойного предпочтения, позволяющего отбросить максимальное количество «ненужных» вершин.

### Список литературы

1. Таха, Хемиди А. Введение в исследование операций.- М.: «Вильямс», 2007.-912 с.
2. Математика для экономистов на базе MathCad./А.А.Черняк, В.А.Новиков, О.И.Мельников, А.В.Кузнецов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003.-496с.
3. Фомин Г.П. Математические методы в коммерческой деятельности. – М.: Финансы и статистика, 2005.- 616с.
4. Липский В. Комбинаторика для программистов. – М.: Мир, 1988.- 341с.

*Рекомендовано до публікації д.т.н. Ширінім Л.Н.  
Надійшла до редакції 14.11.13*