

**А.Д. ПОЛУЛЯХ**, д-р техн. наук  
(Україна, Дніпропетровськ, ГП "Укрніиуглеобогашення")

**І.В. ЕРЕМЕЕВ**  
(Росія, Гуково, ЦОФ "Гуковська")

## **ІЗМЕНЕНІЕ СТРУКТУРНО-МЕХАНІЧЕСКИХ СВОЙСТВ УГОЛЬНОГО ШЛАМА В ПРОЦЕСЕ ОБЕЗВОЖИВАНІЯ НА СИТЕ ГРОХОТА**

В процесі обезвоживання угольного шламу відбувається збільшення об'ємної концентрації твердої фази за рахунок виділення води через сито грохота. При цьому структурно-механічні властивості угольної суспензії зазнають суттєвих змін. Найбільш суттєво змінюється ефективна в'язкість суспензії, яка має нелінійну залежність від об'ємної концентрації твердих частинок.

Основні реологічні властивості концентрованої суспензії – це в'язкість, пластичність і пружність.

Пружні властивості обумовлюються наявністю повітряних бульбашок, розчинених в суспензії. Однак в процесі обезвоживання на ситі грохота, супроводжуваному віброуплотненням шару, повітряні бульбашки інтенсивно виділяються через вільну поверхню шару і через нижню його межу, т.е. через сито. Таким чином, шар шламу на ситі можна розглядати як в'язкопластичне реологічне тіло.

Для висококонцентрованої суспензії характерно наявність просторової структури, здатної протидіяти напруженню, яке не перевищує певної величини  $\tau_c$ , названої напруженням сдвигу або межею текучості [1]. Якщо ж напруження в матеріалі перевищує межу текучості, то структура його руйнується і відбувається повільне сдвигове течіння зі швидкістю, пропорційною надлишковій швидкості сдвигу [2], т.е. матеріал веде себе як ньютоновська рідина при сдвиговому напруженні  $\tau - \tau_c$ .

Матеріал, який відповідає переліченим властивостям, носить назву реологічного тіла Бінгама-Шведова [3]. Структурна реологічна модель матеріала Бінгама-Шведова приведена на рис. 1. Модель складається з паралельно з'єднаних в'язкого ньютоновського елемента і пластичного елемента Сен-Венана.

Напруження, реалізоване в в'язкому ньютоновському елементі, пропорційно швидкості  $\dot{\epsilon}$  деформації і дорівнює нулю при нульовій швидкості:

$$\tau_a = \eta \dot{\epsilon}, \quad (1)$$

де  $\eta$  – коефіцієнт в'язкості;  $\dot{\epsilon}$  – швидкість деформації.

Напруження в пластичному елементі дорівнює межі текучості

$$\tau_{\dot{\epsilon}} = \tau_{\dot{\epsilon}}. \quad (2)$$

При малом по величине напряжении, когда  $\tau_{\dot{\epsilon}} < \tau_{\dot{\epsilon}}$  материал не деформируется и ведет себя как абсолютно твердое тело; напряжение  $\tau_{\dot{\epsilon}} > \tau_{\dot{\epsilon}}$  вызывает движение материала, причем усилие, создающее это напряжение, равно силе сухого трения и не зависит от скорости деформации [4].

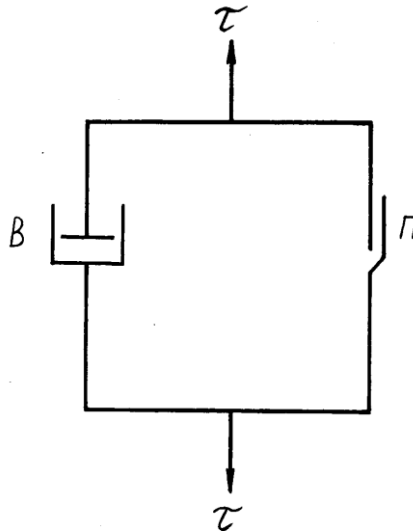


Рис. 1. Реологическая модель Бингама-Шведова:  
В – вязкий элемент; П – пластический элемент

Учитывая, что общее напряжение в вязкопластическом теле  $\tau = \tau_{\dot{\epsilon}} + \tau_{\dot{\epsilon}}$ , запишем уравнение, связывающее напряжение и деформацию для реологической модели Бингама-Шведова [5]:

$$\tau = \eta \dot{\epsilon} + \tau_{\dot{\epsilon}}. \quad (3)$$

Реологическая кривая для бингамовой жидкости, отвечающая уравнению (3), представлена на рис. 2.

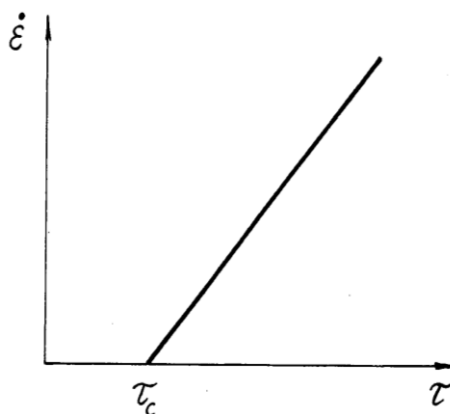


Рис. 2. Реологическая кривая для бингамовой жидкости, отвечающая уравнению (3)

## **Зневоднення та сушіння. Водно-шламове господарство**

Рассмотрим поведение вязкопластинчатого материала на гармонически колеблющейся горизонтальной ситовой поверхности в безотрывном режиме.

Выделим в слое материала стержень единичного поперечного сечения, ось которого совпадает с нормальной составляющей усилия сжатия со стороны сита. Высота стержня равна толщине слоя  $h$  материала, а масса стержня  $m = \rho h$ , где  $\rho$  – плотность материала. Так как плотность материала угольной суспензии в процессе обезвоживания изменяется незначительно [6], то полагаем  $\rho = const$ .

На слой материала действует гармоническая возмущающая сила  $F \cos \omega t$ , где  $F$  и  $\omega$  – амплитуда и частота возмущающей силы,  $t$  – время.

Возмущающая сила создается инерционным вибровозбудителем грохота, представляющим собой неуравновешенный ротор, вращающийся с частотой (угловой скоростью)  $\omega$ , имеющий неуравновешенную массу  $m_0$ , эксцентриситет которой равен  $e$ . При этом величина центробежной силы постоянна и равна  $m_0 \cdot e \cdot \omega^2$  [7]. Вынуждающая сила привода приводит в колебательное движение короб грохота с находящимся на сите материалом. Кроме того, в процессе колебаний на слой действуют силы инерции, обусловленные плотностью материала  $\rho$ , силы вязкого и сухого трения, определяющие пластическую деформацию материала.

Нормальная составляющая колебаний ситовой поверхности приводит к деформированию слоя и способствует его обезвоживанию, а касательная составляющая обеспечивает вибротранспортирование слоя. Поэтому, учитывая только нормальную составляющую колебаний, полагаем, что сила инерции слоя  $m\ddot{y} = \rho h\ddot{y}$ , где  $y$  – вертикальное перемещение слоя,  $y = \varepsilon h$ .

В соответствии с реологической моделью, приведенной на рис. 1 и законом деформирования вязкого элемента (1) сила вязкого трения в слое материала равна  $\eta \dot{y}$  ( $\dot{y} = h\dot{\varepsilon}$  – скорость вертикального перемещения слоя).

Сила сухого трения  $\vec{R}$  постоянна по величине и направлена в сторону, противоположную скорости перемещения [8]  $\vec{R} = -R\dot{y}|\dot{y}|$ , где  $R$  – постоянная, зависящая от коэффициента трения и сил сцепления. Если сила  $\vec{R}$  обусловлена напряжением, действующим на боковой поверхности стержня, квадратного в сечении, то  $R = 4h\tau_c$ . Полагая, что пластическая деформация в процессе виброуплотнения слоя является необратимой, представим силу сухого трения как  $R(\text{sgn } \dot{y} + 1)/2$  [9], где

$$\text{sgn } \dot{y} = \begin{cases} 1 & \text{if } \dot{y} > 0 \\ -1 & \text{if } \dot{y} \leq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Таким образом, когда скорость перемещения сита направлена вверх, а напряжение в слое превышает предел сдвига  $\tau_c$ , происходит пластическая де-

## **Зневоднення та сушіння. Водно-шламове господарство**

формація слоя. Если скорость сита направлена вниз, то сила сухого трения равна нулю и слой движется как инерционное тело.

В результате анализа сил, действующих на материал, разработана динамическая расчетная схема инерционного вязкопластического материала, находящегося под действием гармонической возмущающей силы (рис. 3).

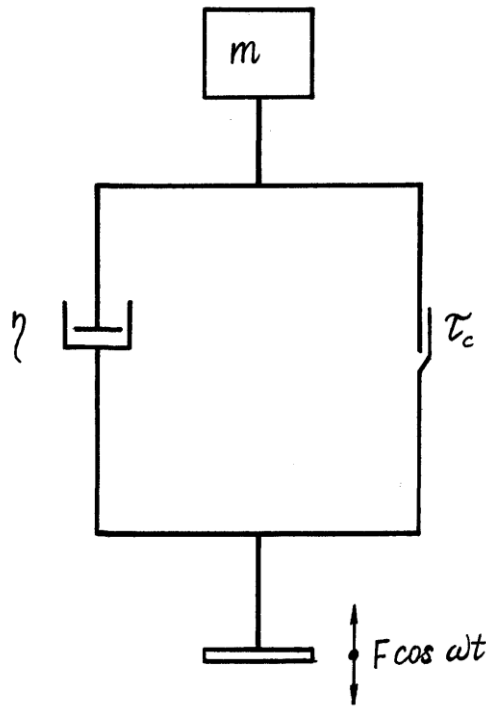


Рис. 3. Расчетная динамическая схема инерционного вязкопластического материала на вибрирующей поверхности

В соответствии с принятой динамической схемой уравнение движения слоя на вибрирующей поверхности будет иметь вид

$$m\ddot{y} + \eta\dot{y} + 2h\tau_c(\operatorname{sgn} \dot{y} + 1) = F \cos \omega t. \quad (5)$$

На конечной стадии процесса обезвоживания высота слоя изменяется медленно, так, что  $dh/dt \ll 1$ .

Уравнение (5) содержит нелинейность, обусловленную функцией  $\operatorname{sgn} \dot{y}$ . Для решения уравнений такого типа используют методы поэтапного интегрирования [10], либо методы, основанные на линеаризации уравнения движения.

Для приведения уравнения (5) к линейному виду воспользуемся методом энергетического баланса [11], в соответствии с которым нелинейная сила сухого трения может быть заменена эквивалентной в энергетическом отношении линейной силой  $b_o \dot{y}$ , для которой коэффициент  $b_o$  определяется, исходя из условия равенства работ, совершаемых обеими силами за период колебаний, т.е.

$$\int_0^T \tau_{\tilde{n}} \operatorname{sgn} \dot{y} \cdot \dot{y} \cdot dt = \int_0^T b_o \dot{y}^2 dt. \quad (6)$$

В первом приближении можно принять, что в стационарном режиме колебательный процесс является гармоническим.

Из уравнения (5) видно, что нелинейная сила трения проявляется только для положительных значений скорости, а функция  $\operatorname{sgn} \dot{y}$  принимает значения 0 и 1. Тогда ожидаемый закон колебаний для скорости перемещения слоя следующий

$$\dot{y} = -a\varpi \sin \varpi t, \quad (7)$$

где  $a$  и  $\varpi$  – амплитуда и частота колебаний слоя, соответственно.

Подставим выражение (7) в (6) и получим

$$\int_0^T b_o \dot{y}^2 dt = b_o a^2 \varpi \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi d\psi = b_o \pi a^2 \varpi, \quad (8)$$

где  $\psi = \varpi t$ .

Вычислим интеграл в левой части (6) для нелинейной силы сопротивления

$$\int_0^T \tau_c \dot{y} \operatorname{sgn} \dot{y} \cdot dt = -\tau_c a \int_0^{2\pi} \sin \psi \operatorname{sgn} \dot{y} \cdot d\psi = 4\tau_c a. \quad (9)$$

Приравняв результаты вычислений (8) и (9) определим эквивалентный коэффициент трения

$$b_o = \frac{4}{\pi a \varpi} \tau_c.$$

После определения коэффициента  $b_o$  задача сводится к исследованию эквивалентной линейной динамической системы, для которой сила сухого трения

$$2h\tau_c (\operatorname{sgn} \dot{y} + 1) \approx 2h\tau_c (b\dot{y} + 1), \quad (10)$$

где  $b = 4/\pi a \varpi$ .

На рис. 4 показан характер изменения во времени нелинейной и эквивалентной ей в энергетическом отношении линейной сил сухого трения.

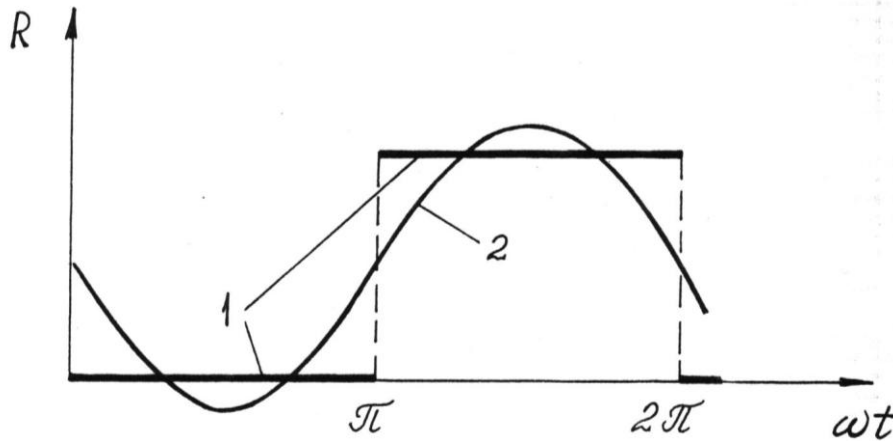


Рис. 4. Нелинейная (1) и эквивалентная ей линейная (2)  
Гармоническая сила сухого трения

Движение линеаризованной динамической системы будет описываться уравнением

$$m\ddot{y} + (\eta + 2bh\tau_c)\dot{y} + 2h\tau_c = F \cos \omega t. \quad (11)$$

Для системы с неупругим сопротивлением колебания отстают от возмущающей силы. Поэтому, если в первом приближении колебания происходят по закону  $y = a \cos \omega t$ , то закон изменения возмущающей силы может быть записан как  $F \cos(\omega t + \varphi)$ , где  $\varphi$  – фазовый угол. Тогда уравнение (11) линеаризованной динамической системы будет описываться уравнением

$$m\ddot{y} + (\eta + 2bh\tau_c)\dot{y} + 2h\tau_c = F \cos(\omega t + \varphi). \quad (12)$$

Для определения фазы колебаний  $\varphi$  рассмотрим состояние системы в момент наибольшего отклонения системы от положения равновесия, т.е. когда  $\cos \omega t = 1$ . При этом  $y = a$ ,  $\dot{y} = 0$ ,  $\ddot{y} = -a\omega^2$ . При постановке этих значений в уравнение (12) имеем

$$F \cos \varphi = 2h\tau_c - ma\omega^2. \quad (13)$$

Когда же система проходит через положение равновесия  $\cos \omega t = 0$ . При этом  $y = 0$ ,  $\dot{y} = -a\omega$ ,  $\ddot{y} = 0$ . подставив эти значения в уравнение (12), получим

$$F \sin \varphi = (\eta + 2bh\tau_c)a\omega - 2h\tau_c. \quad (14)$$

Возведя два последних равенства в квадрат и сложив их, получим выраже-

## **Зневоднення та сушіння. Водно-шламове господарство**

ние, связывающее величину возмущающей силы и амплитуду колебаний системы:

$$F^2 = (2h\tau_c - ma\omega^2)^2 + (Ba\omega - 2h\tau_c)^2, \quad (15)$$

где  $B = \eta + 2bh\tau_c$ .

Фаза колебаний при этом

$$\varphi = \arcs \cos \frac{2h\tau_c - ma\omega^2}{F}.$$

Уравнение (12) представляет собой линейное уравнение вынужденных колебаний инерционного вязкопластического тела, для которого сила сухого трения представлена в виде постоянной составляющей  $2h\tau_c$ . В этом уравнении в функции вязкого сопротивления присутствуют амплитуда  $a$  и частота  $\omega$  колебаний слоя материала. Кроме того, известно, что коэффициент вязкости  $\eta$  также является функцией  $a$  и  $\omega$  [12, 13].

Разделим левую и правую части уравнения (12) на  $m = \rho h$ , тогда, используя обозначение, сделанное в (15),

$$\ddot{y} + \frac{B}{m} \dot{y} + \frac{2\tau_c}{\rho} - \frac{F}{m} \cos(\omega t + \varphi) = 0. \quad (16)$$

Введем новую переменную  $u = \dot{y}$ ,  $\dot{u} = \ddot{y}$ , после чего уравнение (16) будет иметь вид

$$\dot{u} + \frac{B}{m} u + \frac{2\tau_c}{\rho} - \frac{F}{m} \cos(\omega t + \varphi) = 0. \quad (17)$$

Уравнение (17) является линейным дифференциальным уравнением первого порядка [14], решение которого известно

$$\dot{y} = u = e^{-\frac{B}{m}t} \left\{ \int \left[ \frac{F}{m} \cos(\omega t + \varphi) - \frac{2h\tau_c}{m} \right] e^{\frac{B}{m}t} dt + C_o \right\}, \quad (18)$$

где  $C_o$  – начальное значение.

Интеграл, входящий в (18) является табличным [14]:

$$\int e^{\alpha t} \cos(\omega t + \varphi) dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \omega^2} [\alpha \cos(\omega t + \varphi) + \omega \sin(\omega t + \varphi)],$$

где обозначено  $\alpha = B/m$ .

Тогда, решая уравнение (18), получим

$$\dot{y} = u = \frac{Fm}{B^2 + m^2 \omega^2} \left[ \frac{B}{m} \cos(\omega t + \varphi) + \omega \sin(\omega t + \varphi) \right] - \frac{2h\tau_c}{B} + C_o e^{-\frac{B}{m}t}. \quad (19)$$

Если положить, что в начальный момент времени скорость перемещения слоя  $u = \dot{y} = 0$ , то из (19) находим:

$$C_o = \frac{2h\tau_c}{B} - \frac{Fm}{B^2 + m^2 \omega^2} \left( \frac{B}{m} \cos \varphi + \omega \sin \varphi \right).$$

Тогда для скорости перемещения слоя получаем выражение

$$\begin{aligned} \dot{y} = & \frac{2h\tau_c}{B} \left( e^{-\frac{B}{m}t} 1 \right) + \frac{Fm}{B^2 + m^2 \omega^2} \times \\ & \left[ \frac{B}{m} \cos(\omega t + \varphi) + \omega \sin(\omega t + \varphi) \right] - \left( \frac{B}{m} \cos \varphi + \omega \sin \varphi \right) e^{-\frac{B}{m}t}. \end{aligned} \quad (20)$$

Выражение (20) описывает изменение скорости слоя с учетом переходного процесса в начальный промежуток времени. Для стационарного процесса  $\rightarrow \infty$  и выражение (20) можно записать как

$$\dot{y} = \frac{Fm}{B^2 + m^2 \omega^2} \left[ \frac{B}{m} \cos(\omega t + \varphi) + \omega \sin(\omega t + \varphi) \right] - \frac{2h\tau_c}{B}. \quad (21)$$

Интегрируя уравнение (21) определим перемещение вибрирующего слоя:

$$\begin{aligned} y = & \frac{Fm}{B^2 + m^2 \omega^2} \left[ \frac{B}{m\omega} \sin(\omega t + \varphi) - \cos(\omega t + \varphi) + \left( \cos \varphi + \frac{m\omega}{B} \sin \varphi \right) e^{-\frac{B}{m}t} \right] - \\ & - \frac{2h\tau_c}{B} \left( e^{-\frac{B}{m}t} + t \right) + C. \end{aligned} \quad (22)$$



## **Зневоднення та сушіння. Водно-шламове господарство**

Для определения произвольной постоянной  $C$  положим, что в начальный момент времени  $t = 0$  координата высоты слоя равнялась  $h_0$ . Тогда, подставив эти значения в (22), получим

$$C = h_0 + \frac{2h\tau_c m}{B^2} - \frac{F}{B\omega} \sin \varphi. \quad (23)$$

Тогда перемещение вибрирующего слоя

$$y = h_0 - \frac{2h\tau_c}{B} \left[ t - \frac{m}{B} \left( 1 - e^{-\frac{B}{m}t} \right) \right] + \frac{Fm}{B^2 + m^2\omega^2} \times \\ \times \left[ \frac{B}{m\omega} \sin(\omega t + \varphi) - \cos(\omega t + \varphi) + \left( \cos \varphi + \frac{m\omega}{B} \sin \varphi \right) e^{-\frac{B}{m}t} - \frac{B^2 + m^2\omega^2}{m\omega B} \sin \varphi \right]. \quad (24)$$

В стационарном процессе ( $t \rightarrow \infty$ )

$$y = h_0 - \frac{2h\tau_c}{B} t + \frac{Fm}{B^2 + m^2\omega^2} \times \\ \times \left[ \frac{B}{m\omega} \sin(\omega t + \varphi) - \cos(\omega t + \varphi) - \frac{B^2 + m^2\omega^2}{m\omega B} \sin \varphi \right]. \quad (25)$$

Уравнение (25) описывает перемещение поверхности слоя материала при колебательном сдвиговом течении и содержит эволюционную

$$y_1 = h_0 - \frac{2h\tau_c}{B} t + \frac{F}{\omega B} \sin \varphi$$

и осциллирующую

$$y_2 = \frac{Fm}{B^2 + m^2\omega^2} \left[ \frac{B}{m\omega} \sin(\omega t + \varphi) - \cos(\omega t + \varphi) \right]$$

составляющие. Виброуплотнение слоя происходит без изменения его массы при постоянном сопротивлении. Естественно, что уплотнение слоя возможно только тогда, когда напряжение в материале превысит напряжение сдвига  $\tau_c$ .

Эволюционная составляющая скорости уплотнения в стационарном режиме  $dy/dt = 2h\tau_c/B$ . Здесь высота слоя  $h$  присутствует как параметр.

## **Зневоднення та сушіння. Водно-шламове господарство**

Коефіцієнт вязкості концентрованої суспензії залежить від параметрів вібрації як [7]

$$\eta = \eta_o + \frac{k}{a\omega^3},$$

де  $k$  – постійний коефіцієнт, а  $\eta_o$  – коефіцієнт остаточної вязкості, обумовленої вібраційним тиксотропним руйнуванням дисперсійної середовища.

Тоді швидкість ущільнення шару матеріалу на вібрируючому ситі

$$\frac{dy}{dt} \approx - \frac{2h\tau_c}{\eta_o + \frac{k}{a\omega^3} + \frac{8h\tau_c}{\pi a\omega}}. \quad (26)$$

Входящі в цю формулу параметри  $\tau_c$ ,  $\eta_o$  і  $k$  підлягають експериментальному визначенню.

Таким чином, розроблена математична модель кінцевої стадії процесу обезвоживання суспензії на ситі віброгрохота, коли шар матеріалу характеризується вязко-пластическими властивостями. На цій стадії обезвоживання матеріалу відбувається за рахунок віброуплотнення шару і витіснення вільної вологи з порового простору.

На основі аналізу внутрислойних напружень матеріалу, що знаходиться під дією гармонічної сили, складено рівняння руху, що містить нелінійність, обумовлену силою сухого тертя. В результаті гармонічної лінеаризації функції  $\text{sgn}$  рівняння руху приведено до лінійного виду. Розв'язок модельного рівняння дозволив виділити еволюційну і осцилюючу складові процесу віброуплотнення матеріалу (без зміни його маси і постійного опору). Отримана залежність швидкості ущільнення шару від реологічних властивостей матеріалу містить у явній формі параметри вібрацій робочої поверхні.

Результати роботи були використані при виборі динамічного режиму роботи грохота.

### **Список літератури**

1. Уилкінсон У.Л. Неньютоновские жидкости. – М.: Мир, 1964. – 216 с.
2. Ричардсон Э. Динамика реальных жидкостей. – М.: Мир, 1965. – 328 с.
3. Урьев Н.Б. Высококонцентрированные дисперсные системы. – М.: Химия, 1980. – 320 с.
4. Пальмов В.А. Колебания упруго-пластических тел. – М.: Наука, 1976. – 328 с.
5. Ржаницын А.Р. Строительная механика. – М.: Высш. шк., 1991. – 439 с.
6. Шламы, их улавливание и обезвоживание / Т.Г. Фоменко, И.С. Благов, А.М. Коткин.

## **Зневоднення та сушіння. Водно-шламове господарство**

В.С. Бутовецкий. – М.: Недра, 1968. – 203 с.

7. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. – Л.: Машиностроение, 1976. – 320 с.

8. Овчинников П.Ф. Виброреология. – Киев: Наук. думка, 1983. – 272 с.

9. Гончаревич И.Ф. Виброреология в горном деле. – М.: Наука, 1977. – 144 с.

10. Блехман И.И., Джанелидзе Г.Ю. Вибрационное перемещение. – М.: Наука, 1964. – 412 с.

11. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука, 1971. – 240 с.

12. Руденко И.Ф. Формование изделий поверхностными виброустройствами. – М.: Стройиздат, 1971. – 104 с.

13. Кунное Г.Я. Вибрационная технология бетона. – Л.: Стройиздат, 1967. – 168 с.

14. Бронштейн И.Н. Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1986. – 544 с.

© Полулях А.Д., Еремеев И.В., 2013

*Надійшла до редколегії 20.01.2013 р  
Рекомендовано до публікації д.т.н. І.К. Младецьким*