МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ ТА ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

ДО ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

студентами напряму підготовки

6.040303 Системний аналіз

Дніпро
2017

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Кафедра системного аналізу й управління

С.А. Ус, Т.В. Хом'як

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ ТА ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ДО ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

студентами напряму підготовки
6.040303 «Системний аналіз»

Дніпро
НГУ
2017

Ус С.А.
Елементи лінійної та векторної алгебри. Методичні рекомендації до виконання індивідуальних завдань студентами напряму підготовки 6.040303 «Системний аналіз» / С.А. Ус, Т.В. Хом'як; М-во освіти і науки України, Нац. гірн. ун-т. – Д.: НГУ, 2017. – 56 с.

Автори:
С.А. Ус, канд. фіз.-мат. наук, доц.;
Т.В. Хом'як, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Затверджено методичною комісією напряму підготовки 6.040303 «Системний аналіз» (протокол № 1 від 23 березня 2017) за поданням кафедри системного аналізу й управління (протокол № 2 від 20 березня 2017).

Методичні рекомендації мають на меті допомогти студентам у самостійному засвоєнні нормативної дисципліни «Вища математика» під час виконання індивідуальних робіт і підготовки до модульного контролю за темою «Елементи лінійної та векторної алгебри».

Розглянуто основні теоретичні відомості про методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь, що є необхідними для виконання індивідуальних завдань робіт. Подано рекомендації до розв'язування типових задач.

Методичні рекомендації включають програму дисципліни, перелік теоретичних питань, завдання на контрольну роботу і задачі для самостійного розв'язування до кожного з основних розділів програми. Розглянуто також необхідний теоретичний матеріал, подано методичні поради до практичних завдань, приклади розв'язування задач.

Сформульовано питання для самоконтролю й критерії оцінювання індивідуальних робіт. Рекомендації орієнтовано на активізацію виконавчого етапу навчальної діяльності студентів.

Відповідальний за випуск завідувач кафедри системного аналізу й управління, д-р техн. наук, проф. В.В. Слєсарєв

Зміст

Вступ

Сучасна наука та техніка все більше використовує математичні методи дослідження, моделювання та проектування. Це обумовлено передусім швидким розвитком обчислювальної техніки, завдяки чому значно розширюються можливості успішного застосування математики в розв'язанні конкретних задач.

Загальний курс вищої математики є фундаментом освіти спеціаліста-інженера. Він належить до загальноосвітнього циклу дисциплін і викладається в перших двох семестрах.

Змістовий модуль «Елементи лінійної та векторної алгебри» є одним із розділів курсу і нерозривно пов'язана з вимогами спеціальних та інших загальноосвітніх кафедр, що стосуються специфіки їх дисциплін, без яких неможливо вивчати в вузі фізику, електротехніку, теоретичну механіку.

Мета вивчення дисципліни – ознайомити студентів з основами сучасного математичного апарату, необхідного для розв'язування теоретичних і прикладних інженерних задач; сформувати в них уміння виконувати математичний аналіз технічних систем; застосовувати математичний апарат до розв'язування прикладних задач електротехніки, сприяти розвитку логічного мислення.

Основні завдання дисципліни:

– розвиток логічного і алгоритмічного мислення студентів;
– оволодіння студентами основними методами дослідження і розв'язку математичних задач;
– виховання у студентів уміння самостійно поширювати свої математичні знання та проводити математичний аналіз прикладних задач.
– стимулювати студентів до систематичної самостійної навчальної праці.

Мета цих методичних рекомендацій – допомогти студенту-заочнику самостійно опанувати дисципліну «Вища математика», а студенту денної форми навчання – набути навичок розв'язування задач, підготуватися до модульного контролю знань.

Видання включає програму змістовного модуля, перелік основних теоретичних питань, завдання на контрольну роботу і задачі для самостійного розв'язування з основних розділів програми. Описано також методики обчислень і наведено схеми дослідження для типових задач.

Програма змістового модуля
«Елементи лінійної та векторної алгебри»

Тема 1. Матриці й дії над ними

Лінійні операції над матрицями: транспонування матриці, додавання двох матриць, множення матриці на число, множення двох матриць. Властивості операцій над матрицями.

Тема 2. Визначники

Визначники квадратних матриць (другого та третього порядків, загальний випадок). Властивості визначників. Мінори та алгебраїчні доповнення. Розклад визначників за елементами рядків та стовпців. Методи обчислення визначників. Зворотна матриця. Ранг матриці. Методи обчислення рангу матриці. Теорема про базисний мінор. Власні числа і власні вектори матриці.

Тема 3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь. Матриця та визначник системи ЛАР. Розв'язування систем лінійних рівнянь з визначником, відмінним від нуля. Формули Крамера. Матричний метод розв'язування. Метод Гаусса. Теорема Кронекера − Капеллі (без доведення). Критерії сумісності та визначеності системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Базис і розмірність простору розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь. Загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних рівнянь. Однорідні системи. Фундаментальна система розв'язків однорідної системи ЛАР. Задачі, які приводять до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Тема 4. Вектори і координати

Поняття вектора. Лінійні операції над векторами. Розкладання вектора за базисом. Декартова система координат на площині і в просторі. Лінійна залежність та лінійна незалежність векторів. Розклад вектора за базисом. Скалярний, векторний та змішаний добуток векторів, їх властивості. Умови колінеарності, ортогональності і компланарності векторів. Перетворення декартової прямокутної системи координат на площині. Визначення евклидового простору. Ортонормований базис.

Після вивчення змістового модуля «Елементи лінійної та векторної алгебри» студенти повинні **знати:**

– визначення матриці, оберненої матриці, операцій над матрицями, рангу матриці;

– формули визначників матриці другого, третього і *n*-го порядків, властивості визначників матриці;

– загальні методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (матричний метод, метод Крамера, метод Гаусса, метод Жордана − Гаусса);

– умови сумісності та визначеності системи лінійних алгебраїчних рівнянь;

– визначення вектора та лінійних операцій над векторами;

– визначення колінеарних і компланарних векторів; умови колінеарності і компланарності векторів;

– визначення скалярного, векторного і мішаного добутків векторів;

– визначення лінійно залежної і лінійно незалежної системи векторів;

– визначення декартової системи координат на площині і у просторі;

Студенти повинні **вміти:**

– виконувати операції над матрицями (транспонувати, додавати і віднімати, множити матриці); знаходити ранг матриці, обернену матрицю;

– обчислювати визначники другого, третього і вищих порядків;

– розв’язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь різними методами (матричним методом, методом Крамера, методом Гаусса);

– застосовувати елементи теорії матриць до розв’язування прикладних задач;

– виконувати дії над векторами; застосовувати вектори до розв’язування геометричних і прикладних задач;

– визначати лінійну залежність та лінійну незалежність векторів; розкладати вектор за будь-яким базисом;

– досліджувати вектори на колінеарність і компланарність;

– визначати кут між векторами;

– знаходити скалярний, векторний і мішаний добутки векторів;

Структура навчального модуля «Елементи лінійної і векторної алгебри»

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин											
	денна форма						Заочна форма					
	усього	у тому числі					усього	у тому числі				
		л	п	лаб	інд	с.р.		л	п	лаб	інд	с.р.
Змістовий модуль 1. *Елементи лінійної і векторної алгебри*												
Тема 1. Матриці й дії над ними	7	4	1		1	1	4	2	2			10
Тема 2. Визначники	9	2	1		2	4						10
Тема 3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.	24	6	4		8	6						14
Тема 4. Вектори і координати	18	6	2		6	4						10
Разом за ***змістовим модулем 1***	58	***18***	***8***	***0***	***17***	***15***	**4**	**2**	**2**			***44***

Перелік теоретичних питань змістового модуля
«Елементи лінійної та векторної алгебри»

1. Матриці. Види матриць.
2. Операції над матрицями, їх властивості. Транспонування матриць.
3. Елементарні перетворення матриць. Еквівалентні матриці.
4. Визначники квадратних матриць. Властивості визначників і методи їх обчислення.
5. Ранг матриці. Теорема про базисний мінор. Методи визначення ранга матриці.
6. Зворотна матриця, її властивості.
7. Знаходження зворотної матриці.
8. Загальна теорія систем лінійних алгебраїчних рівнянь (ЛАУ). Теорема Кронекера − Капеллі.
9. Системи ЛАУ з невиродженою квадратною матрицею і методи їх розв’язування (метод зворотної матриці).
10. Системи ЛАУ з невиродженою квадратною матрицею і методи їх розв’язування (метод Крамера).
11. Метод Гаусса розв’язування систем ЛАУ (прямий і зворотний хід).
12. Розв’язування матричних рівнянь за допомогою елементарних перетворень.
13. Однорідна система ЛАУ. Теорема про необхідні і достатні умови існування ненульового розв’язку однорідної системи ЛАУ. Наслідки.
14. Властивості розв’язків однорідної системи ЛАУ.
15. Фундаментальна система розв’язків однорідної системи і її знаходження
16. Вектори. Основні визначення.
17. Лінійні операції над векторами. Доведення необхідної і достатньої умови колінеарності двох ненульових векторів.
18. Алгебраїчний запис вектора. Напрямні косинуси.
19. Проекція вектора на вісь. Властивості проекцій.
20. Скалярний добуток векторів. Властивості скалярного добутку. Необхідна і достатня умова ортогональності двох ненульових векторів.
21. Векторний добуток векторів, його властивості і застосування для розв’язування прикладних задач.
22. Змішаний добуток векторів, його властивості і застосування для розв’язування прикладних задач.
23. Лінійний (векторний простір). Визначення і приклади лінійних просторів.

24. Лінійна залежність і незалежність системи векторів. Теорема про лінійну незалежність.

25. Базис векторного простору. Доведення теореми про розкладання вектора за базисом.

26. Евклідів простір. Визначення, приклади евклідових просторів.

27. Норма та її властивості. Доведення нерівності Коші − Буняковського.

28. Ортогональні системи векторів в евклідовому просторі. Теорема про базис евклідового простору.

29. Ортогональний і ортонормований базис. Координати вектора в ортонормованому базисі.

30. Власні вектори і власні значення матриць, їх властивості.

31. Характеристичний многочлен матриці.

Завдання:

– вміти здійснювати операції з матрицями (сума, добуток на число, добуток матриць);

– обчислювати визначник матриці методом розкладання по рядку або по стовпцю;

– визначати ранг матриці методом обвідних мінорів або використовуючи еквівалентні перетворення;

– визначати лінійну залежність (незалежність) системи векторів;

– досліджувати СЛАР на можливість розв'язання, використовуючи теорему Кронекера – Капеллі;

– розв’язувати системи ЛАУ методом Крамера, оберненої матриці, Гаусса.

– розв’язувати системи однорідних ЛАУ, знаходити загальний розв’язок і фундаментальну систему розв’язків системи.

– обчислювати довжину вектора і кут між векторами.

– обчислювати скалярний, векторний і змішаний добуток векторів, використовувати їх в прикладних задачах.

– перевіряти вектори на колінеарність, компланарність, ортогональность.

1. МАТРИЦІ І ДІЇ НАД НИМИ

Мета роботи: вивчення основ матричних обчислень, дій з матрицями, та їх застосування для розв’язування задач.

Короткі теоретичні відомості

1. *Матриці та дії над ними*

Матрицею розміру $m \times n$ називається сукупність елементів a_{ij}, розміщених у вигляді прямокутної таблиці, що має m рядків і n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ або } A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Перший індекс кожного елемента вказує на номер рядка, в якому цей елемент розміщений, другий – на номер стовпця. Матриці позначають прописними буквами латинського алфавіту: A, B, C … Використовують також більш компактний запис $A = (a_{ij})_{mn}$.

Матриця називається *числовою*, якщо її елементами a_{ij} є числа; *функціональною*, якщо елементи матриці a_{ij} являють собою функції. Ми будемо розглядати числові матриці.

Кажуть, що матриці A і B мають однакові розміри, якщо у них однакова кількість рядків і однакова кількість стовпців. Матриці A і B вважаються *рівними* між собою, якщо вони мають однакові розміри, а їхні елементи, котрі знаходяться на аналогічних місцях, є рівними між собою.

Матриця, в якій кількість рядків дорівнює кількості стовпців (тобто $m = n$), називається *квадратною* порядку n.

Сумою (*різницею*) матриць A і B називається матриця C**,** елементи якої $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$), де a_{ij} і b_{ij} – відповідно елементи матриць A і B. При цьому пишуть: $C = A + B$.

Додавати або віднімати можна тільки матриці однакових розмірів.

Добутком матриці A на число λ називається матриця C такого самого розміру, елементи якої $c_{ij} = \lambda\, a_{ij}$, де a_{ij} – елементи матриці A, тобто при множенні матриці на число (числа на матрицю) треба всі елементи матриці помножити на це число. При цьому пишуть $C = \lambda A$.

Для довільних матриць A, B, C однакових розмірів і довільних чисел α та β справджуються рівності:

1. $A + B = B + A$;
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$;

3. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

5. $(\alpha \beta)A = \alpha (\beta A)$.

Добутком матриці $A_{m\times n}$ на матрицю $B_{n\times p}$ називається матриця $C_{m\times p} = AB$, елементи якої $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$, де a_{ik}, b_{kj} – елементи матриць A і B.

Зауважимо, що перемножувати можна тільки ті матриці, в яких кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої. З існування добутку AB не означає, що існує добуток BA.

Визначник – це числова характеристика, яка притаманна тільки квадратним матрицям.

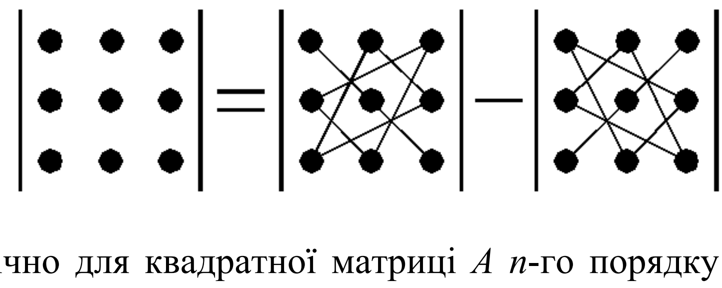
Визначником другого порядку квадратної матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ називається таке число:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.1}$$

Визначником третього порядку квадратної матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ називається число, яке обчислюється за таким правилом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.2}$$

Його схематично можна зобразити таким чином:



Аналогічно для квадратної матриці A n-го порядку можна розглянути її визначник n-го порядку. Визначник матриці A часто позначають $\det A$.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник, який дістають з визначника матриці А викреслюванням i-го рядка та j-го стовпця.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається відповідний мінор, взятий зі знаком «плюс», якщо сума його індексів парна, і зі знаком «мінус», якщо сума його індексів непарна, тобто $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Визначник вищого порядку можна обчислити за допомогою визначників нижчого порядку розкладанням за елементами рядка або стовпця.

Таким чином, визначник квадратної матриці порядку n можна обчислити за однією з таких формул:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots n, \tag{1.3}$$

або

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots n. \tag{1.4}$$

Зокрема, для визначників третього порядку формула (1.4), коли $i = 1$ набуває такого вигляду:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Основні властивості визначників

1. Значення визначника не змінюється, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями, а стовпці – рядками.
2. Перестановка двох рядків (стовпців) визначника рівносильна множенню його на -1.
3. Якщо визначник має два однакових рядка (стовпця), то він дорівнює нулю.
4. Якщо всі елементи якого-небудь рядка (стовпця) визначника містять спільний множник, то його можна винести за знак визначника.
5. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то і сам визначник дорівнює нулю.
6. Якщо відповідні елементи двох рядків (стовпців) визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю.
7. Якщо кожний елемент деякого рядка (стовпця) визначника є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких один у згаданому рядку (стовпці) має перші з заданих доданків, а інший – другі; елементи, що знаходяться на решті місць, у всіх трьох визначниках одні й ті самі. Записується ця властивість таким чином:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Якщо до елементів деякого рядка (стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на довільний спільний множник, то значення визначника при цьому не зміниться.

Матриця A^{-1} називається *оберненою* до квадратної матриці A, якщо добуток цих матриць дорівнює одиничній матриці, тобто

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Обернена матриця існує для всякої квадратної матриці A, яка є невиродженою, тобто коли її визначник $\det A \neq 0$.

Алгоритм знаходження оберненої матриці можна описати таким чином:

1. Обчислити визначник матриці A.

Якщо $\det A \neq 0$, то матриця A має обернену, в іншому випадку оберненої матриці не існує.

2. Обчислити алгебричні доповнення A_{ij} для кожного елемента матриці A.

3. Визначити обернену матрицю за такою формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{det\,A}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}.$$

Приклади розв’язування задач

Приклад 1.1. Обчислити таку матрицю: $C = 2A - 3B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв’язування

Користуючись визначеннями операцій добутка матриці на число та додавання матриць, послідовно обчислюємо:

$$2A = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 3\cdot 2 & 4\cdot 2 \\ 2\cdot 2 & 0\cdot 2 & -1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$3B = \begin{pmatrix} 0\cdot 3 & 2\cdot 3 & 5\cdot 3 \\ 3\cdot 3 & -7\cdot 3 & 4\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 15 \\ 9 & -21 & 12 \end{pmatrix},$$

$$C = 2A - 3B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 6 & 15 \\ 9 & -21 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0 & 6-6 & 8-15 \\ 4-9 & 0-(-21) & -2-12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -7 \\ -5 & 21 & -14 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -7 \\ -5 & 21 & -14 \end{pmatrix}$.

Приклад 1.2. Для заданих матриць:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \text{ і } B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

обчислити $(A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}})$.

Розв'язування

Спочатку транспонуємо задані матриці A та B, а саме:

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тепер обчислимо суму отриманих матриць, тобто

$$A^T + B^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $A^T + B^T = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Приклад 1.3. Для заданих матриць обчислити добутки AB і BA, якщо це можливо:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Розв'язування

а) Оскільки задані матриці A і B квадратні матриці однакового порядку, то можна визначити обидва добутки AB та BA. Отже, згідно з визначенням добутку матриць,

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 5\cdot(-1) & 3\cdot(-5) + 5\cdot 2 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) & 1\cdot(-5) + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + (-5)\cdot 1 & 1\cdot 5 + (-5)\cdot 2 \\ -1\cdot 3 + 2\cdot 1 & -1\cdot 5 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix};$$

У даному прикладі $AB = BA$, але в загальному випадку це не буде правильним.

б) Оскільки кількість стовпців матриці A не дорівнює кількості рядків матриці B то добутку AB не існує. Проте можна обчислити добуток BA, а саме:

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-2) & -3+4 \\ 3+(-4) & -9+8 \\ 5+(-6) & -15+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: *а*) $AB = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; *б*) AB не існує, $BA = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Приклад 1.4. Обчислити такі визначники:

$$а)\ \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}cos\,\alpha \\ cos\,\alpha & 1 \end{vmatrix}; \qquad б)\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування

а) Скористуємося формулою (1.1), а саме:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}cos\,\alpha \\ cos\,\alpha & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos^2\alpha = \frac{1}{2}sin^2\alpha.$$

б) Для обчислення визначника третього порядку будемо використовувати правилом трикутника (формула (1.2), таким чином обчислюємо

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 5 + (-1)\cdot 2\cdot 1 + 3\cdot(-2)\cdot 2 - 3\cdot 3\cdot 1 - (-2)\cdot(-1)\cdot 5 - 2\cdot 2\cdot 2 =$$

$$= 30 - 2 - 12 - 9 - 10 - 8 = -11.$$

Відповідь: *а*) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\sin^2\alpha$; *б*) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -11$.

Приклад 1.5. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, розклавши його за елементами першого рядка.

Розв'язування

Скористуємось формулою (1.4), коли $i = 1$, тобто

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^3\cdot 2\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^4\cdot 5\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 3 - 24 - 2(-6-18) +$$

$$+5(-8-3) = -21 + 48 - 55 = -28.$$

Відповідь: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 = -28$.

Приклад 1.6. Обчислити даний визначник, спочатку спростивши його:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування:

Додамо перший рядок визначника до його третього рядка, тобто

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}.$$

Тепер помножимо перший рядок на (–2) і додамо його до другого рядка, а саме:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}.$$

В результаті отримано визначник, в якому елементи $a_{21} = a_{31} = 0$. Тепер розкладемо його за елементами першого стовпця, тобто:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2+(-2)\cdot 1 & 8+(-2)\cdot 3 & 1+(-2)\cdot 2 \\ -1+1 & 1+3 & 2+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 8-(-12) = 20.$$

Відповідь: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -20$.

Приклад 1.7. Знайти матрицю, обернену до заданої матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, і перевірити, чи справджуються такі рівності: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Розв'язування

Згідно з алгоритмом обчислення зворотної матриці спочатку знайдемо визначник заданої матриці, а саме:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3-2 = -5.$$

Оскільки $\Delta = -5 \neq 0$, обернена матриця A^{-1} існує.

Тепер обчислимо алгебраїчні доповнення для всіх елементів матриці A, тобто $A_{11} = 3$, $A_{12} = -1$, $A_{21} = -2$, $A_{22} = 1$.

Згідно з правилом, обернена матриця буде мати такий вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, чи виконуються рівності: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$:

Для цього обчислимо добутки AA^{-1} та $A^{-1}A$, а саме:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}+\frac{2}{5} & -\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\\ -\frac{3}{5}+\frac{3}{5} & \frac{2}{5}+\frac{3}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$A^{-1}A=\begin{pmatrix}-\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}+\frac{2}{5} & -\frac{6}{5}+\frac{6}{5}\\ -\frac{1}{5}+\frac{1}{5} & \frac{2}{5}+\frac{3}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Отже $AA^{-1}=A^{-1}A=E$. Рівність виконується, це означає, що обернену матрицю обчислено правильно.

Відповідь: $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$.

Контрольні питання

1. Дайте визначення матриці. Які існують види матриць?
2. Дайте визначення суми, різниці та добутку матриці на число. Які властивості цих операцій?
3. Як отримати матрицю, транспоновану до даної?
4. Як обчислити визначник матриці другого порядку, третього порядку?
5. Що таке мінор матриці?
6. Як обчислити алгебраїчне доповнення елемента матриці?
7. Перелічіть властивості визначників.
8. Сформулюйте правило обчислення визначника шляхом розкладання матриці за елементами строки (стовпця).
9. Яка матриця називається зворотною до даної? Назвіть її властивості.
10. Сформулюйте алгоритм обчислення зворотної матриці.
11. Ранг матриці. Теорема про базисний мінор. Методи визначення ранга матриці.

Завдання для самостійного розв'язування

1.1. Обчислити матрицю: $C = A + 2B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 10 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2. Транспонувати матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \text{ і } B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

1.3. Для заданих матриць обчислити добутки AB і BA, якщо це можливо:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.4. Для заданої матриці A визначити зворотну.

а)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

б)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix};$$

в) $$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

г) $$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.5. Обчислити визначники:

1

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 14 & 5 \end{vmatrix}$; *б*) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; *с*) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

2

а) $\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$; *б*) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -3 & 12 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; *с*) $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

3

а) $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$; *б*) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$; *с*) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

4

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$; *б*) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$; *с*) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

5

а) $\begin{vmatrix} 1 & 13 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$; *б*) $\begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 6 \end{vmatrix}$; *с*) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 6 & 9 & 3 & 15 \\ 5 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

6

а) $\begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 2 & 12 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$; с) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 5 & -4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

7

а) $\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ -10 & -2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$; с) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 4 & 4 \\ 1 & 7 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

8

а) $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; с) $\begin{vmatrix} 4 & 10 & 15 & -5 \\ 10 & 0 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

9

а) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$; с) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

10

а) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$; с) $\begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

11

а) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$; с) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 5 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

12

а) $\begin{vmatrix} 10 & 11 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$; с) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

13

$) \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}$;   *б*) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}$;   *c*) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 9 & 4 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

14

а) $\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$;   *б*) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 4 \end{vmatrix}$;   *c*) $\begin{vmatrix} 7 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 9 \end{vmatrix}$.

15

$\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -7 & 9 \end{vmatrix}$;   *б*) $\begin{vmatrix} 1 & 12 & 0 \\ 0 & 9 & 15 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;   *c*) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -9 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

1.6. Визначити ранг матриць:

1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

3

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

4

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5

$$\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}.$$

6

$$\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}.$$

7
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 10 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 16 & 4 & 52 & 9 \\ 8 & -1 & 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

8
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 7 & 1 & -3 & 10 \\ 17 & 1 & -7 & 22 \\ 3 & 4 & -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

9
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

10
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -6 & 1 \\ -3 & -1 & -8 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

11
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

12
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

13
$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 4 & -7 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14
$$\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}.$$

15
$$\begin{pmatrix} 23 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}.$$

16
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 13 \\ 5 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ОДНАКОВОЮ КІЛЬКІСТЮ РІВНЯНЬ І НЕВІДОМИХ

Мета роботи: вивчення методів дослідження і розв'язування систем лінійних рівнянь з однаковою кількістю рівнянь і невідомих.

Короткі теоретичні відомості

Системою m лінійних рівнянь з n змінними x_1, x_2, …, x_n називається система, яка має такий вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{2.1}$$

тут a_{ij} – коефіцієнти при змінних; b_i – вільні члени, $1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n.$

Упорядкована сукупність чисел $(a_1, \ a_2, \ \cdots, \ a_n)$ називається *розв'язком* системи, якщо при заміні x_1 на a_1 , x_2 на a_2 , … , x_n на a_n у кожному рівнянні системи дістанемо n правильних числових рівностей.

Система, що має розв'язок, називається *сумісною*. Система, яка не має жодного розв'язку, називається *несумісною*. Система з єдиним розв'язком називається визначеною, а з більшим числом розв'язків – невизначеною.

Коефіцієнти системи утворюють матрицю A, яку називають основною матрицею системи. Якщо до матриці A дописати стовпець вільних членів, то отримаємо розширену матрицю системи A^*.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right).$$

Теорема Кронекера − Капеллі (необхідна і достатня умова сумісності системи). Для того щоб система лінійних алгебраїчних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо аби ранг основної матриці системи дорівнював рангу розширеної матриці. Тобто $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A^*$.

Система, для якої буде правильною теорема Кронекера – Капеллі, може бути визначеною або невизначеною, залежно від величини рангу матриці. Якщо $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A^* = n$, де n число невідомих системи, то система сумісна і визначена, тобто має єдиний розв'язок. Коли $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A^* < n$, то система сумісна, але не визначена, і має нескінченну множину розв'язків. Якщо ж теорема не виконується ($\operatorname{Rg} A < \operatorname{Rg} A^*$) – система не сумісна.

Матричний метод. Припустимо, що для системи виконується теорема Кронекера – Капеллі, причому $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A^* = n$. Це означає, що система має єдиний розв'язок, її визначник не дорівнює нулю і для матриці системи існує обернена матриця A^{-1}. Запишемо систему (2.1) у матричному вигляді, а саме:

$$AX = B.$$

Помножимо ліворуч обидві частини системи на матрицю A^{-1}, тобто

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

тоді

$$X = A^{-1}B.$$

Таким чином, для розв'язування системи матричним методом необхідно обчислити обернену матрицю і помножити її на вектор вільних членів.

Метод Крамера. Цей метод розв'язування систем лінійних рівнянь зводиться до обчислення визначників. Так, розв'язок системи двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2; \end{cases} \tag{2.2}$$

можна знайти за формулами Крамера у такий спосіб:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}$, за умови, що $\Delta \neq 0$.

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ – називається визначником системи, а Δ_{x_1}, Δ_{x_2} – визначники, які дістають з визначника Δ заміною першого, другого стовпців відповідно стовпцем вільних членів.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_3, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{2.3}$$

Формули Крамера для системи (2.3) мають вигляд:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta},$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ – визначник другої системи, а

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$ – визначники,

які дістають з визначника Δ заміною першого, другого і третього стовпців відповідно стовпцем вільних членів.

Системи (2.1) і (2.2) мають:

а) єдиний розв'язок, коли $\Delta \neq 0$;

б) нескінченну множину розв'язків, коли $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = 0$, $(\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3} = 0)$;

в) не мати жодного розв'язку, коли $\Delta = 0$ і хоча б один із визначників $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}$ $(\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3})$ відмінний від нуля.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_3, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{2.3}$$

Розглянемо три матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Перша називається матрицею системи, друга матрицею-стовпцем змінних, третя – матрицею-стовпцем вільних членів. Тоді систему можна записати у матричному вигляді: $A \cdot X = B$. Якщо матриця системи рівнянь невироджена $(\Delta \neq 0)$, то розв'язок системи знаходимо у вигляді $X = A^{-1}B$, або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Метод розв'язування лінійних систем Гаусса. Його ще називають методом послідовного виключення невідомих. Нехай маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Алгоритм метода можна описати таким чином. На першому етапі система приводиться до трикутного вигляду (прямий хід методу), а саме:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \qquad\quad x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad\qquad\qquad x_3 + \ldots + a'_{3n}x_n = b'_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_n = b'_n. \end{cases}$$

Наступний етап полягає у послідовному обчисленні значень змінних $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$, починаючи з останнього. Для приведення системи к трикутному вигляду можна використовувати еквівалентні перетворення матриць.

Приклад розв'язування задач

Приклад 2.1. Розв'язати системи рівнянь за формулами Крамера:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8, \\ 3x_1 - x_2 = 3. \end{cases}$ *б*) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 10, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = -12. \end{cases}$

Розв'язування:

а) Спочатку дослідимо систему на розв'язність. Запишемо матрицю системи, тобто

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}8\\ 3\end{pmatrix}.$$

Тепер обчислимо визначник системи, а саме:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-1-6=-7\neq 0.$$

Оскільки визначник не дорівнює нулю, система має єдиний розв'язок. Для його знаходження обчислимо такі визначники:

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}8 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-8-6=-14;\qquad \Delta_{x_2}=\begin{vmatrix}1 & 8\\ 3 & 3\end{vmatrix}=3-24=-21.$$

Згідно з формулами Крамера, маємо:

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}=\frac{-14}{-7}=2,\ x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}=\frac{-21}{-7}=3.$$

Для перевірки підставимо отриманий вектор у вихідну систему.

$$\begin{cases}1\cdot 2+2\cdot 3=8,\\ 3\cdot 2-1\cdot 3=3.\end{cases}$$

Обидва рівняння перетворилися на тотожності, отже розв'язок обчислено правильно.

Відповідь: $x_1=2$, $x_2=3$.

б) Дослідимо систему на розв'язність. Матриця системи має такий вигляд:

$$\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 5 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник системи, а саме:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 5 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 5\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -1 & 5\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}5 & -1\\ 1 & 5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=3(-5-1)-(25+1)-5+1=$$

$$=-18-26-4=-48\neq 0.$$

Оскільки визначник не дорівнює нулю, система має єдиний розв’язок.

Тепер обчислимо такі визначники Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, Δ_{x_3}.

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 10 & -1 & -1\\ -12 & -1 & 5\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -1 & 5\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}10 & -1\\ -12 & 5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}10 & -1\\ -12 & -1\end{vmatrix}=-2(-5-1)-(50-12)-$$

$$-\left(-10-12\right)=12-38-22=-48;$$

$$\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 5 & 10 & -1\\ 1 & -12 & 5\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}10 & -1\\ -12 & 5\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}5 & -1\\ 1 & 5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5 & 10\\ 1 & -12\end{vmatrix}=3(50-12)+2(25+1)-$$

$$+\left(-60-10\right)=114+52-70=96;$$

$$\Delta_{x_3}=\begin{vmatrix}3 & 1 & -2\\ 5 & -1 & 10\\ 1 & -1 & -12\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}-1 & 10\\ -1 & -12\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}5 & 10\\ 1 & -12\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}5 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=3(12+10)-(-60-10)-$$

$$-2(-5+1)=66+70+8=144;$$

За формулами Крамера, маємо:

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}=\frac{-48}{-48}=1;\quad x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}=\frac{96}{-48}=-2;\quad x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}=\frac{144}{-48}=-3.$$

Для перевірки підставимо отриманий вектор у вихідну систему.

$$\begin{cases}3\cdot 1+1\cdot\left(-2\right)+1\cdot\left(-3\right)=-2,\\ 5\cdot 1-1\cdot\left(-2\right)-1\cdot\left(-3\right)=10,\\ 1\cdot 1-1\left(-2\right)+5\cdot\left(-3\right)=-12.\end{cases}$$

Всі рівняння перетворилися на тотожності, отже розв’язок обчислено правильно.

Відповідь: $x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_3 = -3$.

Приклад 2.2. Дослідити на сумісність подані нижче системи лінійних рівнянь та знайти розв'язок системи у випадку її сумісності.

$$a)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2; \end{cases} \qquad б)\ \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3. \end{cases}$$

Розв'язування

а) Обчислимо визначник системи, а саме:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -1 - 5 - 2(-2-4) - 10 + 4 =$$

$$= -6 + 12 - 6 = 0.$$

Визначник системи дорівнює нулю. Отже, згідно з теоремою Кронекера − Капеллі система або має нескінченну множину розв'язків, або не має жодного. Обчислимо визначники Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, Δ_{x_3}.

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -5 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -6 - 6 + 12 = 0,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -9 + 18 - 9 = 0,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 6 - 3 = 0.$$

Оскільки, $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3} = 0$, то система сумісна і невизначена, тобто має нескінченну множину розв'язків. Для знаходження множини розв'язків, відкидаємо третє рівняння. В рівняннях, які залишилися, перенесемо доданки, які містять змінну x_3, в праву частину і записуємо їх у таку систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 + 4x_3, \\ 2x_1 + x_2 = -1 + 5x_3. \end{cases}$$

Розв’яжемо її за формулами Крамера. Для цього обчислимо визначники, вважаючи змінну x_3 сталою, а саме:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1+4x_3 & 2 \\ -1+5x_3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4x_3 - 2(-1 + 5x_3) = 3 - 6x_3;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1+4x_3 \\ 2 & -1+5x_3 \end{vmatrix} = -1 + 5x_3 - 2(1 + 4x_3) = -3 - 3x_3;$$

$$x_1 = \frac{3 - 6x_3}{-3} = -1 + 2x_3, \qquad x_2 = \frac{-3 - 3x_3}{-3} = 1 + x_3.$$

Відповідь: $x_1 = 2x_3$, $x_2 = 1 + x_3$, $x_3 = \mathrm{const}$.

б) Обчислимо визначник системи, а саме:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

оскільки другий і третій рядки пропорційні.

Отже, система або має нескінченну множину розв’язків, або не має жодного розв’язку. Обчислимо визначники Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, Δ_{x_3}.

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -7 - 14 = -21 \neq 0.$$

Оскільки $\Delta_{x_1} \neq 0$, задана система не має жодного розв’язку, тобто вона є несумісною.

Відповідь: система несумісна.

Приклад 2.3. Розв’язати систему лінійних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 17, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -3, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$$

Розв'язування

Запишемо дану систему рівнянь у матричній формі: $A \cdot X = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 17 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 16 + 3 - 90 - 24 + 18 - 10 = -87 \neq 0,$ значить матриця А має обернену матрицю.

Знайдемо алгебричні доповнення елементів матриці А :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -24, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -21,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 20,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -19, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 17.$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{87}\begin{pmatrix} 3 & -24 & -21 \\ -7 & -2 & 20 \\ -19 & 7 & 17 \end{pmatrix}.$$

Скориставшись рівністю $X = A^{-1} \cdot B$, знаходимо розв'язок системи:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{87}\begin{pmatrix} 3 & -24 & -21 \\ -7 & -2 & 20 \\ -19 & 7 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix} = -\frac{1}{87}\begin{pmatrix} 3 \cdot 17 - 24 \cdot (-3) - 21 \cdot 10 \\ -7 \cdot 17 - 2 \cdot (-3) + 20 \cdot 10 \\ -19 \cdot 17 + 7 \cdot (-3) + 17 \cdot 10 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{87}\begin{pmatrix} -87 \\ 87 \\ -174 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 2$ – шуканий розв'язок.

Приклад 2.4. Розв'язати подану нижче систему лінійних рівнянь методом Гауса.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

Розв'язування

Запишемо розширену матрицю системи, тобто

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Використовуючи еквівалентні перетворення матриць, приведемо її до трикутного вигляду.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Контрольні питання

1. Запишіть загальний вигляд системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
2. Що називають розв'язком СЛАР?
3. Яка система називається сумісною? Не сумісною? Визначеною? Не визначеною?
4. Сформулюйте теорему Кронекера − Капеллі.
5. Яка ознака існування єдиного розв'язку СЛАР?

6. В чому полягає матричний метод розв'язування СЛАУ з невиродженою квадратною матрицею?
7. В чому полягає метод Крамера розв'язування СЛАУ з невиродженою квадратною матрицею?
8. Сформулюйте алгоритм методу Гаусса розв'язування СЛАУ з невиродженою квадратною матрицею.

Варіанти індивідуальних завдань

Розв□язати подані нижче системи рівнянь за допомогою методу Крамера, зворотної матриці та методом Гаусса:

2.1 $$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 10; \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = -10; \\ 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

2.2 $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4; \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 6; \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$$

2.3 $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 1; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 5; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 7; \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$$

2.4 $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 3; \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 5; \\ 3x_1 + x_3 - 2x_4 = 1; \\ 4x_1 + 3x_3 + x_4 = 10. \end{cases}$$

2.5 $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1; \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1; \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

2.6 $$\begin{cases} 3x_2 + 5x_4 = 1; \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1; \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

2.7 $$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 10; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -3; \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1; \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

2.8 $$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 10; \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -3; \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

2.9
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1; \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$$

2.10
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = -3; \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

2.11
$$\begin{cases} 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1; \\ 3x_1 - 4x_3 + x_4 = 8; \\ 3x_2 + x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$$

2.12
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 2; \\ 3x_2 + 3x_3 + x_4 = -1; \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases}$$

2.13
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 10; \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2; \\ 3x_2 + x_3 + 2x_4 = -4; \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases}$$

2.14
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2; \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 2; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -4; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 6. \end{cases}$$

2.15
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 2; \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -8; \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 6. \end{cases}$$

2.16
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2; \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 8; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -8; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 1. \end{cases}$$

3. ВИКОРИСТАННЯ КОМП'ЮТЕРНИХ ПРОГРАМ ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ АЛГЕБРИ МАТРИЦЬ

Мета роботи: навчитися розв'язувати задачі алгебри матриць з використанням Microsoft Excel

Розв'язувати задачі алгебри матриць можна за допомогою математичних пакетів Maple, Matcad, Matlab, Matematica, а також в Microsoft Excel.

В Microsoft Excel існують функції МОПРЕД, МОБР, МУМНОЖ, які визиваються за допомогою кнопки f_x біля рядка формул (рис. 1).

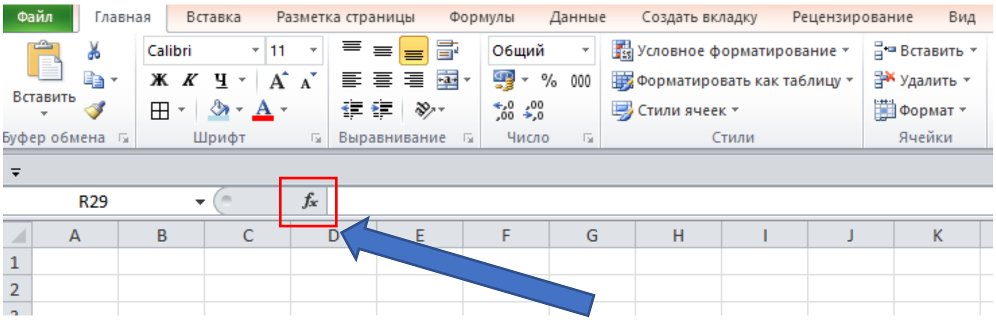


Рис. 1. Кнопка f_x

При натисканні на кнопку f_x відкривається майстер всіх функцій Excel, які зібрані за категоріями. Функції МОПРЕД, МОБР, МУМНОЖ відносяться до категорії «математичні» (рис. 2).

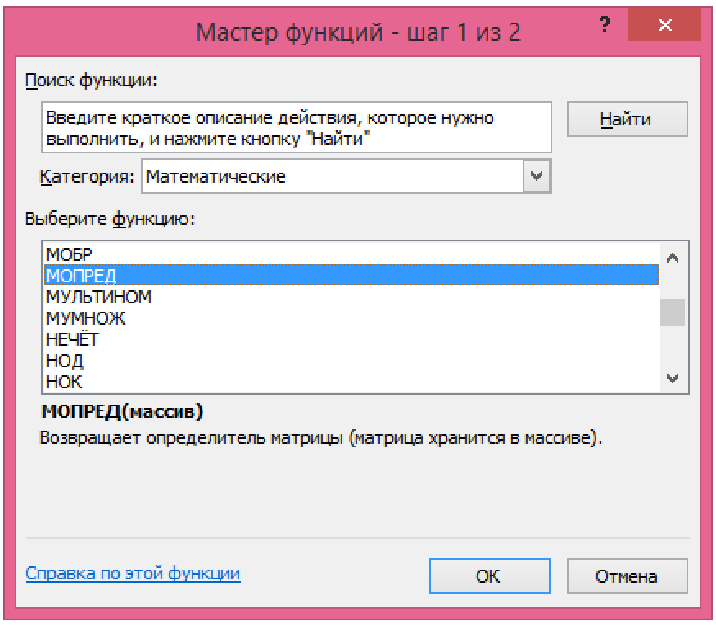


Рис. 2. Майстер функції MS Excel

Функція **МОПРЕД** обчислює визначник матриці.

Приклад 3.1. Знайти визначник такої матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування

Спочатку треба внести матрицю в клітинки таблиці (рис. 3), потім обрати довільну клітинку для результату обчислення визначника (на рис. 3 – це клітинка С5) і викликати функцію МОПРЕД (у версии Excel 2016 – це функція MDETERM) (рис. 4).

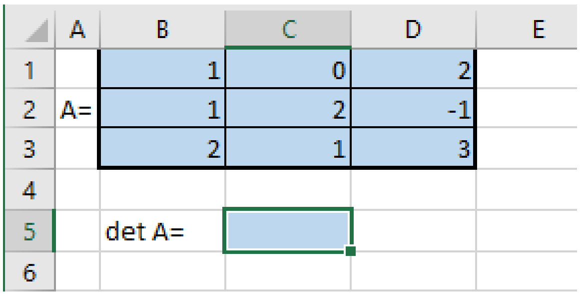


Рис. 3. Початкова матриця *A*

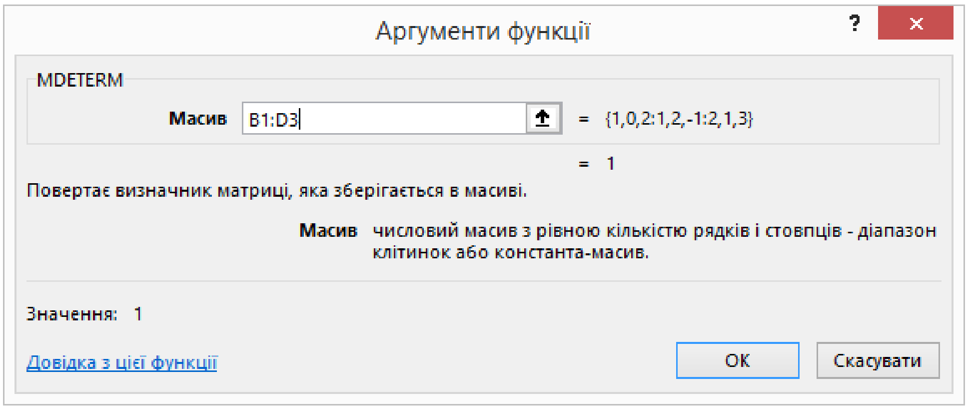


Рис. 4. Функція МОПРЕД або MDETERM (у версии Excel 2016)

Після цього у вікні «Аргументи функції» в рядочку «Масив» треба вказати діапазон матриці B1:D3 і натиснути кнопку ОК. Таким чином, в обраній клітинці з'явиться число – це і є визначник початкової матриці *A* (рис. 5).

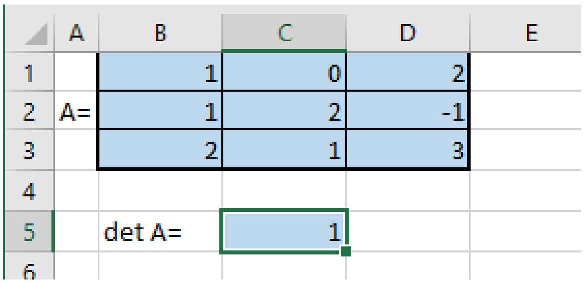


Рис. 5. Розрахунок визначника матриці *A*

Функція **МОБР** обчислює зворотну матрицю.

Приклад 3.2. Знайти зворотну матрицю до матриці з прикладу 3.1.

Визначник цієї матриці, як було показано вище (рис. 5), не дорівнює нулю, тому для цієї квадратної матриці можна знайти зворотну матрицю.

Спочатку виділяємо діапазон для майбутнього результату (такий самий, як розмір початкової матриці), на рис. 6 цей діапазон G1:I3.

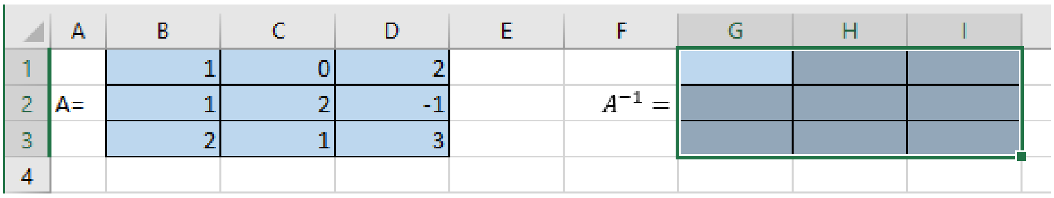


Рис. 6. Початкова матриця *A* та виділений діапазон для зворотної матриці

Потім необхідно викликати функцію МОБР (у версии Excel 2016 – це функція MINVERSE), де в рядочку «Масив» треба вказати діапазон початкової матриці B1:D3 і натиснути комбінацію клавіш CTRL+SHIFT+ENTER (рис. 7).

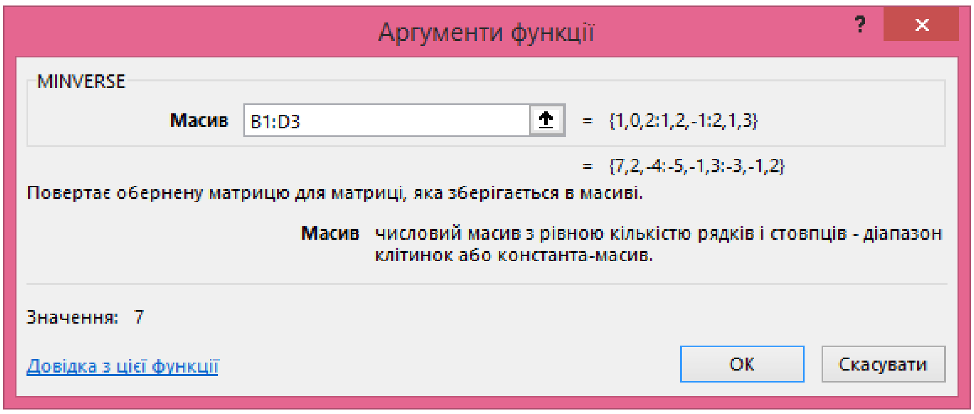


Рис. 7. Функція МОБР або MINVERSE (у версии Excel 2016)

Таким чином, у вказаному діпазоні G1:I3 з’являться числа – це і є обчислена зворотна матриця початкової матриці *A* (рис. 8).

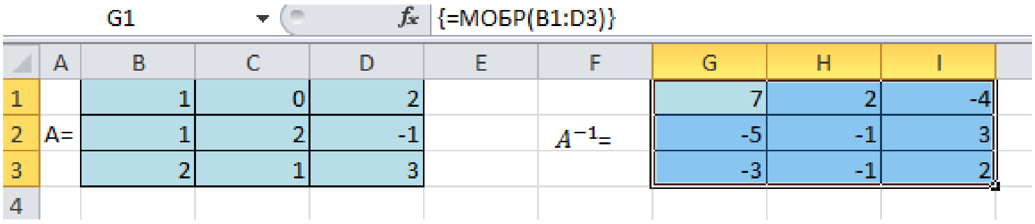


Рис. 8. Обчислення оберненої матриці за допомогою функції МОБР

Функція **МУМНОЖ** використовується для знаходження добутку двох масивів. Нагадаємо, що кількість стовпців першого масиву повинна бути такою ж, як кількість рядків другого масиву.

Приклад 3.3. Перевіримо обчислення, зроблені в прикладі 3.2, перемноживши початкову матрицю на зворотну їй матрицю. За властивостями зворотної матриці результатом добутку повинна бути одинична матриця.

Для обчислення виділимо діапазон для результату, а саме – D7:F9 (рис. 9).

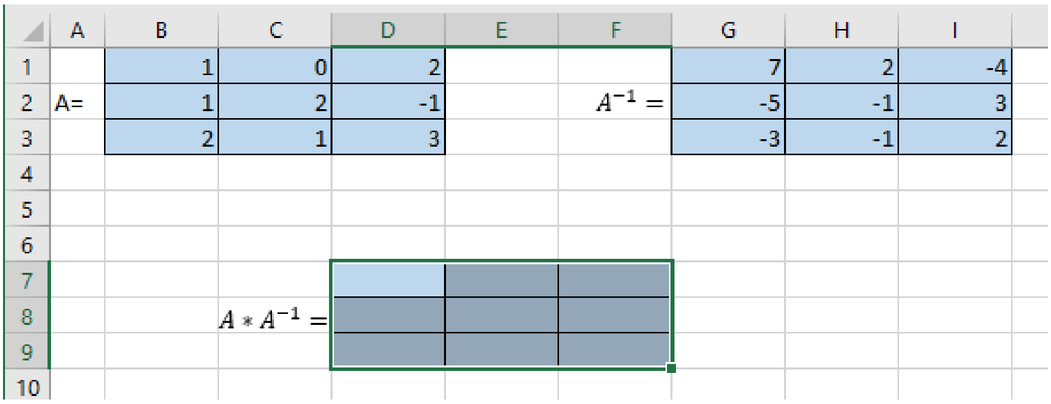


Рис. 9. Матриці (A та A^{-1}) і діапазон для їх добутку

Далі потрібно викликати функцію МУМНОЖ (у версии Excel 2016 – це функція MMULT), де в рядочках «Масив 1» і «Масив 2» відповідно вказати діапазони матриць, які перемножуються. У нашій задачі це діапазон початкової матриці B1:D3 і оберненої до неї матриці G1:I3. Потім необхідно також натиснути комбінацію клавіш CTRL+SHIFT+ENTER (рис. 10).

Таким чином, у виділеному діпазоні D7:F9 з’являться числа – це результат множення двох матриць (рис.11).

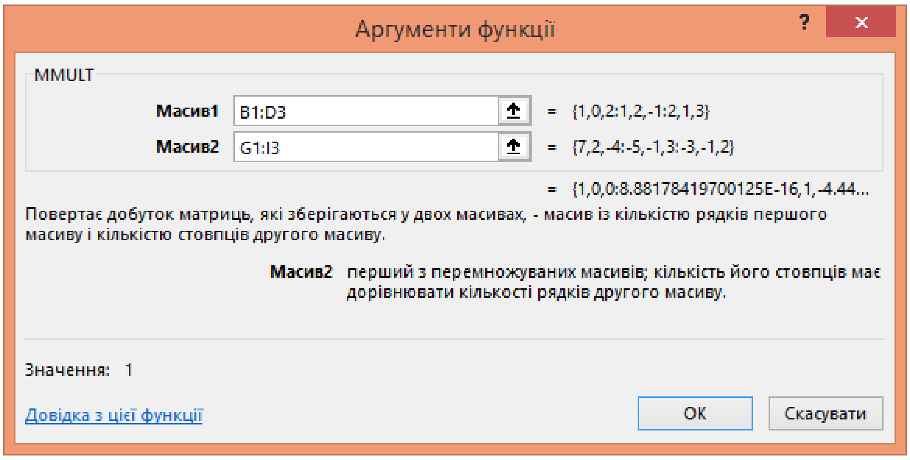


Рис. 10. Функція МУМНОЖ або MMULT (у версии Excel 2016)

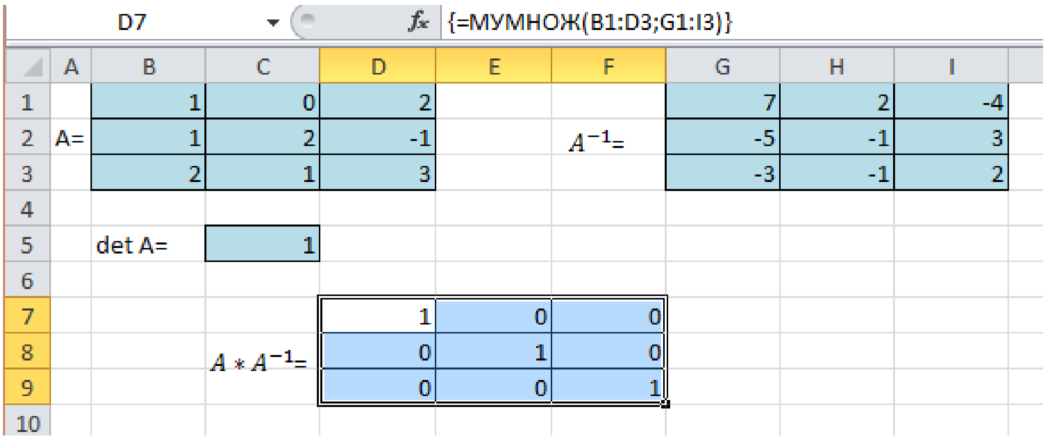


Рис. 11. Використання функції МУМНОЖ.

Розв’язування СЛАУ методом зворотної матриці. Відомо, що розв’язок системи рівнянь методом зворотної матриці можна отримати у такому вигляді:

$$C = A^{-1} B,$$

де A^{-1} – зворотна матриця, яка при множенні на початкову матрицю A дає одиничну матрицю.

Для розв’язування системи рівнянь методом зворотної матриці за допомогою MS Excel необхідно використовувати три функції: МОПРЕД, МОБР, МУМНОЖ за такою схемо:

1. Записуємо у таблицю основну матрицю A системи і вектор вільних членів B;

2. За допомогою функції МОПРЕД обчислюємо визначник цієї матриці. Якщо він не дорівнює нулю, можна застосовувати метод оберненої матриці, тоді переходимо до кроку 3. Якщо визначник дорівнює нулю метод застосовувати не можна.

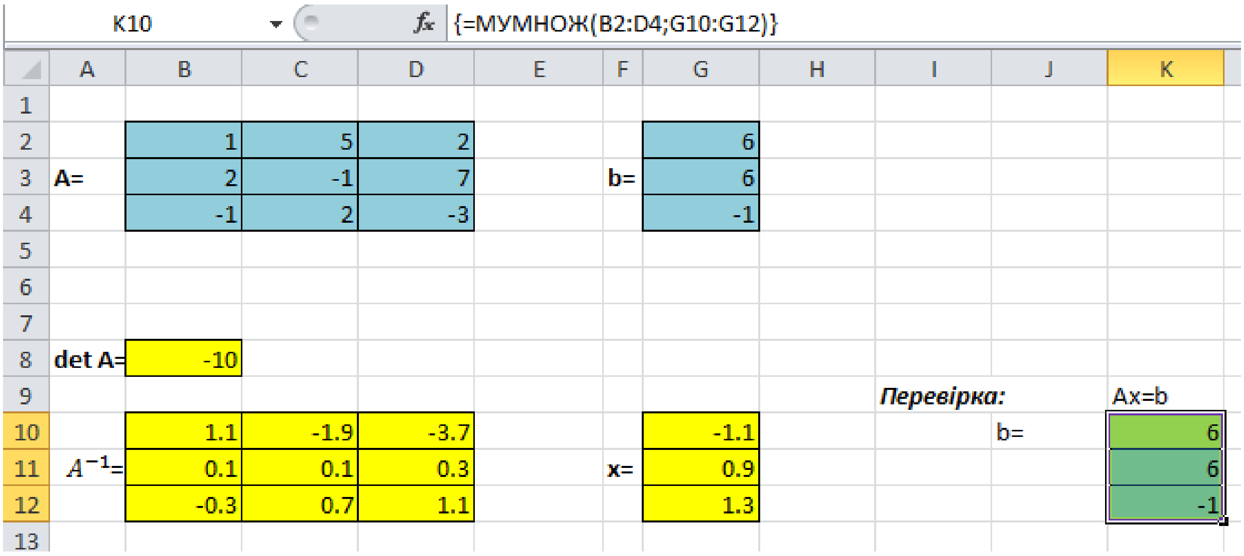
3. За допомогою функції МОБР обчислюємо зворотну матрицю A^{-1}.

4. Використовуючи функцію МУМНОЖ, знаходимо X, як добуток матриці A^{-1} і вектора B. Це і буде шуканий розв’язок системи рівнянь.

Приклад 3.4. Розв’язати подану нижче систему рівнянь методом зворотної матриці і провести перевірку:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 6; \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 = 6; \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1. \end{cases}$$

Розв’язок вказаної системи рівнянь методом зворотної матриці наведено на рис. 12.



K10 | {=МУМНОЖ(B2:D4;G10:G12)}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2		1	5	2			6				
3	A=	2	-1	7		b=	6				
4		-1	2	-3			-1				
5											
6											
7											
8	det A=	-10									
9									*Перевірка:*		Ax=b
10		1.1	-1.9	-3.7			-1.1			b=	6
11	A^{-1}=	0.1	0.1	0.3		x=	0.9				6
12		-0.3	0.7	1.1			1.3				-1
13											

Рис. 12. Розв’язок системи рівнянь методом зворотної матриці

Розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера. Якщо визначник системи рівнянь не дорівнює нулю, розв’язок системи рівнянь можна записати у такому вигляді:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},\ i = 1, 2, \ldots n, \tag{3.1}$$

де Δ – визначник системи рівнянь,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots,\quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}.$$

Для розв’язування системи методом Крамера необхідно послідовно обчислити визначники Δ, Δ_1, Δ_2 … Δ_n і потім застосувати формулу (3.1).

Розв’язування системи рівнянь з прикладу 4 методом Крамера наведено на рис. 13.

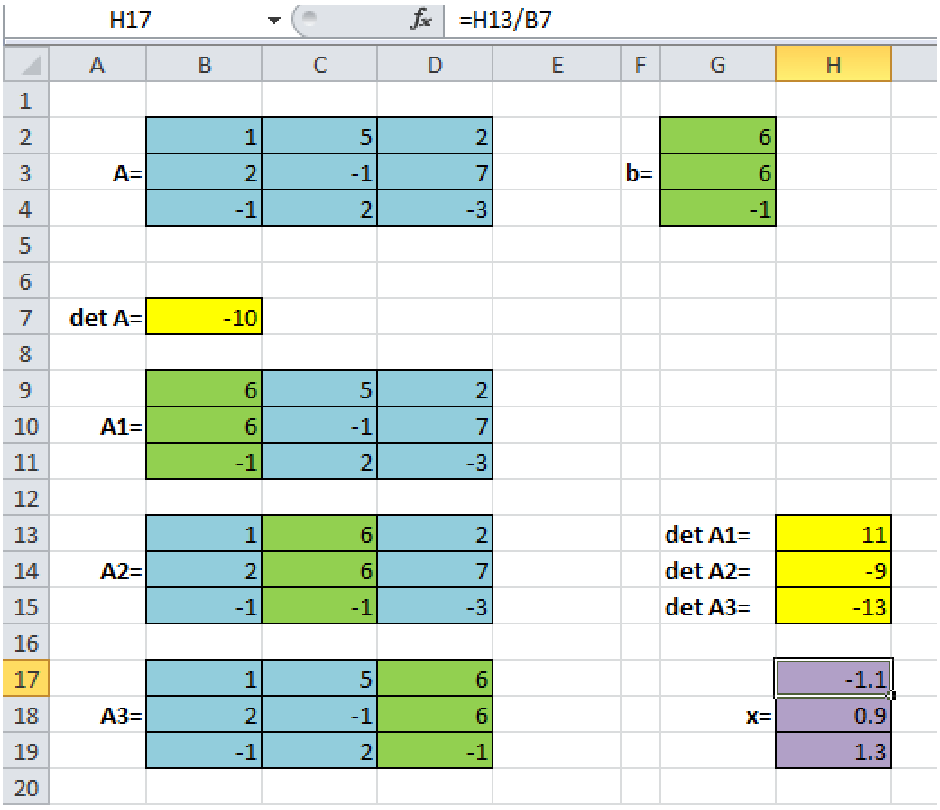


Рис. 13. Розв’язування системи рівнянь методом Крамера

Варіанти індивідуальних завдань

1. Розв’язати системи із завдання 2.1 – 2.16, використовуючи Microsoft Excel.

4. РОЗВ’ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ ЗАГАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Мета роботи: вивчення методів розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь загального вигляду.

Короткі теоретичні відомості

Розглянемо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{4.1}$$

Припустимо, що вона сумісна і що ранг її основної та розширеної матриць дорівнює числу *r*. Не обмежуючи загальності, можна припустити, що базисний мінор основної матриці знаходиться у лівому верхньому куті цієї матриці (загальний випадок зводиться до цього випадку за допомогою переставлення в системі (4.1) рівнянь і невідомих). Тоді перші *r* рядків матриці – базисні рядки, і кожен з рядків розширеної матриці, розпочинаючи з (*r*+1)-го рядка, являє собою лінійну комбінацію перших *r* рядків цієї матриці. У термінах системи це означає, що кожен розв’язок перших *r* рівнянь є розв’язком усіх інших рівнянь цієї системи.

Таким чином, достатньо знайти всі розв’язки системи, складеної із перших *r* рівнянь системи (4.1), а саме:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1(r+1)}x_{r+1} - ... - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2(r+1)}x_{r+1} - ... - a_{2n}x_n, \\ .... \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rr}x_r = b_r - a_{r(r+1)}x_{r+1} - ... - a_{rn}x_n. \end{cases} \tag{4.2}$$

Якщо надати невідомим $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ довільні значення $C_{r+1}, C_{r+2}, ..., C_n$, то система зведеться до визначеної системи *r* лінійних рівнянь з *r* невідомими, і її розв’язок можна визначити за формулами Крамера, матричним методом або методом Гаусса.

Для перетворення матриці системи і визначення її базисного мінору доцільно застосовувати еквівалентні перетворення матриць

Приклади розв'язування задач

Приклад 4.1. Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4 = 17, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 10. \end{cases}$$

Розв'язування

Запишемо розширену матрицю системи і визначимо її ранг, для цього скористаємось еквівалентними перетвореннями матриць.

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 6 & -1 & 17 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & -3 \\ 4 & 6 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & -5 & 2 & 2 & 10 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 6 & -1 & 17 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & -3 \\ 4 & 6 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & -5 & 2 & 2 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 2 & 2 & 10 \\ 2 & -3 & 6 & -1 & 17 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & -3 \\ 4 & 6 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & 7 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 19 & -7 & -5 & -33 \\ 0 & 26 & -5 & -10 & -36 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & 7 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 26 & -5 & -10 & -36 \\ 0 & 26 & -5 & -10 & -36 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & 7 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 26 & -5 & -10 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & 7 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 26 & -5 & -10 & -36 \end{array}\right)$$

Таким чином отримуємо систему:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 10, \\ 0x_1 + 7x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -3, \\ 0x_1 + 26x_2 - 5x_3 - 10x_4 = -36. \end{cases}$$

Перенесемо змінну x_4 у праву частину у кожному з рівнянь і замінимо її вільною сталою C_4, тоді ми маємо таку систему:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 10 - 2C, \\ 7x_2 + 2x_3 = -3 + 5C, \\ 26x_2 - 5x_3 = -36 + 10C. \end{cases}$$

Розв'яжемо її методом Крамера.

Запишемо і обчислимо визначники системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 26 & -5 \end{vmatrix} = -87,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10-2C & -5 & 2 \\ -3+5C & 7 & 2 \\ -36+10C & 26 & -5 \end{vmatrix} = -35(10-2C) + 52(-3+5C) - 10(-36+10C) -$$

$$-14(-36+10C) - 52(10-2C) - 25(-3+5C) = -87 + 69C,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -10-2C & 2 \\ 0 & -3+5C & 2 \\ 0 & -36+10C & -5 \end{vmatrix} = -5(-3+5C) - 2(-36+10C) = 87 - 45C,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -10-2C \\ 0 & 7 & -3+5C \\ 0 & 26 & -36+10C \end{vmatrix} = 7(-36+10C) - 26(-3+5C) = -174 - 60C.$$

Тепер обчислимо значення змінних:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-87+69C}{-87};$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{87-45C}{-87};$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-174-60C}{-87};$$

$$x_4 = C.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-87+69C}{-87} \\ \dfrac{87-45C}{-87} \\ \dfrac{-174-60C}{-87} \\ C \end{pmatrix}.$

Контрольні питання

1. Які перетворення матриць називають елементарними?
2. Як визначити базисний мінор?
3. Що є необхідною умовою існування розв'язку системи?
4. Як визначити загальний розв'язок системи?

Варіанти індивідуальних завдань

Дослідити сумісність і визначити загальний розв□язок такої системи рівнянь:

4.1. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3; \\ x_1 + 2x_2 \qquad - 4x_4 = -3; \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases}$

4.2. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6; \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6; \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7. \end{cases}$

4.3. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6; \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4; \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$

4.4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0; \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$

4.5. $\begin{cases} 24x_1 + 14x_2 + 30x_3 + 40x_4 + 41x_5 = 28; \\ 36x_1 + 21x_2 + 45x_3 + 61x_4 + 62x_5 = 43; \\ 48x_1 + 28x_2 + 60x_3 + 82x_4 + 83x_5 = 58; \\ 60x_1 + 35x_2 + 75x_3 + 99x_4 + 102x_5 = 69. \end{cases}$

4.6. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2; \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5; \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$

4.7. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 - x_5 = 3; \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 + x_5 = 1; \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 5. \end{cases}$

4.8. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3; \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1; \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5; \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$

4.9. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1; \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2; \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1; \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$

4.10. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2; \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3; \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9; \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$

4.11. $\begin{cases} 12x_1 + 14x_2 - 15x_3 + 24x_4 + 27x_5 = 5; \\ 16x_1 + 18x_2 - 22x_3 + 29x_4 + 37x_5 = 8; \\ 18x_1 + 20x_2 - 21x_3 + 32x_4 + 41x_5 = 9; \\ 10x_1 + 12x_2 - 16x_3 + 20x_4 + 23x_5 = 4. \end{cases}$

4.12. $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4; \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5; \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$

4.13. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 3; \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 \qquad = 1; \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 9; \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

4.14. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5; \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7; \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9; \\ 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11. \end{cases}$

4.15. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3; \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1; \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9; \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = 1. \end{cases}$

4.16. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7; \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9; \\ 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11. \end{cases}$

5. РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ОДНОРІДНИХ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Мета роботи: вивчення методів розв’язування однорідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Короткі теоретичні відомості

Система лінійних рівнянь називається *однорідною*, якщо вільні члени у кожному рівнянні дорівнюють нулю (система (5.1). У іншому випадку система буде *неоднорідною*.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Теорема 1. Однорідна система (5.1) має нетривіальні розв’язки тоді і тільки тоді, коли ранг *r* її матриці менший за число *n* її стовпців ($r < n$).

З цієї теореми випливають два важливих наслідки.

Наслідок 1. Якщо число рівнянь однорідної системи менше за число її невідомих, то вона має ненульовий розв’язок.

Наслідок 2. Якщо в однорідній системі кількість рівнянь збігається з кількістю невідомих, то вона має нетривіальні розв’язки тоді і тільки тоді, коли визначник основної матриці системи дорівнює нулю.

Сукупність лінійно незалежних розв’язків системи (5.1) називається *фундаментальною системою розв’язків однорідної системи лінійних рівнянь* (*ФСР*).

Теорема 2. Якщо ранг *r* системи однорідних рівнянь (5.1) меньший за число невідомих *n*, то будь-яка її ФСР містить $(n-r)$ розв’язків.

Приклади розв’язування задач

Приклад 5.1. Розв’язати систему:

$$\begin{cases} x + y - 7z = 0, \\ x - 6y + z = 0, \\ 5x - y - z = 0. \end{cases}$$

Розв’язування:

Запишемо основну матрицю A данної системи і визначимо її ранг.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 1 & -6 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & -6 & 34 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 28 & 34 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -190 \end{pmatrix} \to Rg\,A = 3.$$

Як бачимо, ранг основної матриці дорівнює числу невідомих системи, отже дана система має тільки тривіальний розв'язок, тобто $x = y = z = 0$.

Приклад 5.2. Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язування:

Складемо основну матрицю A і знайдемо її ранг, а саме:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 4 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & -8 & 7 \\ 0 & 7 & -8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Отримали, що $Rg\,A = 2$.

Оскільки ранг основної матриці менший за число невідомих системи, вона має не тільки тривіальний розв'язок.

Знайдемо загальний розв'язок системи. До базисного мінора не ввійшов третій рядок основної матриці, отже третє рівняння являє собою лінійну комбінацію перших двох. До базисного мінора не включено також третій та четвертий стовпці. Це підказує, що за вільні невідомі краще взяти змінні x_3 та x_4.

Перепишемо систему таким чином: відкинемо третє рівняння, а вільні невідомі перенесемо до правої частини рівнянь і надамо їм значення довільних сталих, тобто $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$, тоді система набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3C_1 + 4C_2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 2C_1 + C_2 \end{cases}.$$

За формулами Крамера дістанемо: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, де

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4C_2 - 3C_1 & -2 \\ 2C_1 + C_2 & 3 \end{vmatrix} = 14C_2 - 5C_1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4C_2 - 3C_1 \\ 2 & 2C_1 + C_2 \end{vmatrix} = -7C_2 + 8C_1.$$

Отже, загальний розв’язок системи можна записати таким чином:

$$x_1 = 2C_2 - \frac{5}{7}C_1, \quad x_2 = -C_2 + \frac{8}{7}C_1, \quad x_3 = C_1, \quad x_4 = C_2.$$

Надамо значення довільним змінним, після чого отримаємо два лінійно незалежних розв’язки, що утворюють ФСР.

Припустимо, що $C_1 = 1,\ C_2 = 0$, тоді $X_1 = \begin{pmatrix} -5/7 \\ 8/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Якщо $C_1 = 0, C_2 = 1$, отримаємо: $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Тоді загальний розв’язок системи має такий вигляд:

$$X = C_1 \begin{pmatrix} -5/7 \\ 8/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

або $X = C_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Контрольні питання

1. Які перетворення матриць називають елементарними?
2. Яка система ЛАР називається однорідною?

3. Сформулюйте необхідні і достатні умови існування ненульового розв’язку однорідної системи ЛАУ.

4. Назвіть властивості розв’язків однорідної системи ЛАР.

5. Дайте визначення фундаментальної системи розв’язків однорідної СЛАУ.

6. Які існують методи знаходження фундаментальної системи розв’язків однорідної СЛАУ.

Варіанти індивідуальних завдань

1. Визначити фундаментальну систему розв’язків та загальний розв’язок такої системи рівнянь:

5.1
$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 0; \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

5.2
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

5.3
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 0; \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \quad + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

5.4
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0; \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

5.5
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

5.6
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 0; \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

5.7
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0; \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 = 0; \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 = 0; \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 = 0. \end{cases}$$

5.8
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 0; \\ 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0; \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 11x_5 = 0; \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$$

5.9
$$\begin{cases}3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3x_5=0;\\5x_1+7x_2+x_3+3x_4+4x_5=0;\\4x_1+5x_2+2x_3+x_4+5x_5=0;\\7x_1+10x_2+x_3+6x_4+5x_5=0.\end{cases}$$

5.10
$$\begin{cases}5x_1+6x_2-2x_3+7x_4+4x_5=0;\\2x_1+3x_2-x_3+4x_4+2x_5=0;\\7x_1+9x_2-3x_3+5x_4+6x_5=0;\\5x_1+9x_2-3x_3+x_4+6x_5=0.\end{cases}$$

5.11
$$\begin{cases}x_1+x_3+2x_5=0;\\x_2-x_4+x_6=0;\\x_1-x_2+x_5-x_6=0;\\x_2+x_3+x_6=0;\\x_1-x_4+x_5=0.\end{cases}$$

5.12
$$\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=0;\\6x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5=0;\\9x_1+6x_2+5x_3+7x_4+9x_5=0;\\3x_1+2x_2\qquad\quad+4x_4+8x_5=0.\end{cases}$$

5.13
$$\begin{cases}2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0;\\3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0;\\4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0.\end{cases}$$

5.14
$$\begin{cases}2x_1-4x_2+5x_3+3x_4+x_5=0;\\x_1-2x_2+x_3+3x_4+x_5=0;\\x_1+2x_2-2x_3-2x_4-x_5=0;\\4x_1-8x_2+17x_3+11x_4+2x_5=0.\end{cases}$$

5.15
$$\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0;\\3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0;\\4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0;\\3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0.\end{cases}$$

5.16
$$\begin{cases}x_1-x_2+2x_3-x_4=0;\\x_1+x_2+x_3-4x_4=0;\\2x_1+3x_3-5x_4=0;\\x_1+8x_2+4x_3-x_4=0.\end{cases}$$

Відповіді на завдання

До розділу 1

1.1. $C=\begin{pmatrix}3&0&4\\17&4&7\\4&10&7\end{pmatrix}$. **1.2.** *а*) $A^{т}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&0&-1\\2&1&6\end{pmatrix}$; *б*) $B^{т}=\begin{pmatrix}4&-1&3\\2&3&2\\-4&5&-6\end{pmatrix}$;

1.3. *а*) $AB=\begin{pmatrix}9&4&-1&7\\11&14&3&3\\6&9&-14&-3\\2&-1&9&7\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}8&6&4&2\\-1&-13&-1&3\\9&-2&12&4\\13&1&5&9\end{pmatrix}$; *б*) $AB=\begin{pmatrix}2&-1&11\\-3&-7&20\\3&0&6\end{pmatrix}$, BA не існує;

1.4. *а*) $A^{-1}=\begin{pmatrix}0,07&0,35&0,02&-0,16\\-0,02&-0,1&0,28&0,76\\0,01&0,05&-0,14&0,12\\0,15&-0,25&-0,1&-0,02\end{pmatrix}$; *б*) $A^{-1}=\begin{pmatrix}0,2&0,1&0,3&-0,2\\-0,3&0,225&-0,075&0,05\\-0,3&-0,025&-0,325&0,55\\0,6&0,05&0,15&-0,6\end{pmatrix}$.

1.5.1. *а*) -23; *б*) -4; *в*) -18. **1.5.2.** *а*). -2; *б*) 120; *в*) -6. **1.5.3.** *а*). 3; *б*) -124; *в*)4. **1.5.4.** *а*).10; *б*) 38; *в*) -234. **1.5.5.** *а*). –11; *б*) 6; *в*) 0. **1.5.6.** *а*)114; *б*) 56; *в*) -270. **1.5.7.** *а*) -174; *б*) 32 *в*) 38. **1.5.8** *а*) 6; *б*) -6; *в*) 620. **1.5.9.** *а*) -3; *б*) -5; *в*) 21. **1.5.10.** *а*). 26; *б*) -48; *в*) -99. **1.5.11.** *а*). -2; *б*) -30; *в*) -438. **1.5.12.** *а*). 20; *б*) 126; *в*) 4. **1.5.13.** *а*) 4; *б*) -1; *в*) -190. **1.5.14.** *а*). -29 *б*) 19; *в*) -246. **1.5.15.** *а*) 61; *б*) -531 *в*) -126. **1.6.1.** 2. **1.6.2.** 2. **1.6.3.** 3. **1.6.4.** 3. **1.6.5.** 2. **1.6.6.** 3. **1.6.7.** 3. **1.6.8.** 3. **1.6.9.** 4. **1.6.10.** 3. **1.6.11.** 3. **1.6.12.** 5. **1.6.13.** 2. **1.6.14.** 2. **1.6.15.** 4. **1.6.16.** 3.

До розділу 2 .

2.1. $X=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-2\end{pmatrix}$. **2.2.** $X=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}$. **2.3.** $X=\begin{pmatrix}-35,6\\24,4\\13\\-10,6\end{pmatrix}$. **2.4.** $X=\begin{pmatrix}-2,1875\\5,1975\\6,4375\\-0,5625\end{pmatrix}$. **2.5.** $X=\begin{pmatrix}0,875\\2,5\\-1,625\\0,375\end{pmatrix}$.

2.6. $X=\begin{pmatrix}-0,4\\1\\2\\-0,4\end{pmatrix}$. **2.7.** $X=\begin{pmatrix}1,75\\-5,75\\0,5\\4\end{pmatrix}$. **2.8.** $X=\begin{pmatrix}3\\43\\-27\\-31\end{pmatrix}$. **2.9.** $X=\begin{pmatrix}0\\-1\\-0,5\\1,5\end{pmatrix}$. **2.10.** $X=\begin{pmatrix}-2,2\\4,4\\0,8\\-2\end{pmatrix}$.

2.11. $X=\begin{pmatrix}4\\3\\-1\\-8\end{pmatrix}$. **2.12.** $X=\begin{pmatrix}2,5\\-2,5\\1\\3,5\end{pmatrix}$. **2.13.** $X=\begin{pmatrix}0,4\\-8\\4,8\\7,6\end{pmatrix}$. **2.14.** $X=\begin{pmatrix}10\\-4,5\\-2\\-1,5\end{pmatrix}$. **2.15.** $X=\begin{pmatrix}-10\\6\\3\\2\end{pmatrix}$.

До розділу 4

4.1. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5,91 \\ -1,53 \\ -3,24 \\ -1,5 \end{pmatrix}$. **4.2.** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,02 \\ -0,85 \\ 0,74 \\ -2,07 \end{pmatrix}$. **4.3.** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3-6C}{7} \\ \frac{-15+2C}{7} \\ \frac{47-3C}{7} \\ C \end{pmatrix}$. **4.4.** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2C}{12} \\ \frac{3C}{12} \\ \frac{-5C}{12} \\ \frac{-25C}{12} \\ C \end{pmatrix}$.

4.5. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \frac{-27-12C_1-7C_2-15C_3}{-21} \\ \frac{12+24C_1+14C_2+30C_3}{-21} \end{pmatrix}$. **4.6.** Система не сумісна. **4.7.** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-6+8C}{7} \\ \frac{1-13C}{7} \\ \frac{15-6C}{7} \\ C \\ 0 \end{pmatrix}$.

4.8. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-6+8C}{7} \\ \frac{1-13C}{7} \\ \frac{15-6C}{7} \\ C \end{pmatrix}$. **4.9.** Система не сумісна. **4.10.** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ 1+2C_1-C_2 \\ 3-4C_2 \\ 0 \\ C_2 \end{pmatrix}$.

4.11. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{40-53C}{18} \\ \frac{-30+15C}{18} \\ \frac{-1+2C}{9} \\ 0 \\ C \end{pmatrix}$. **4.12.** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ -13+3C \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$. **4.13.** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ -\frac{7}{5}+\frac{7C_1}{5}+\frac{16C_2}{35} \\ -\frac{3}{5}-\frac{2C_1}{5}-\frac{141C_2}{35} \\ \frac{13C_2}{7} \\ C_2 \end{pmatrix}$.

4.14. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4-2C \\ 3-2C \\ C \end{pmatrix}$. **4.15.** . $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13-3,5C \\ -8-2,5C \\ C \\ 1 \end{pmatrix}$. **4.16.** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4-2C \\ 3-2C \\ C \end{pmatrix}$.

До розділу 5

5.1. $X = C_5 \begin{pmatrix} -5 \\ 131 \\ 230 \\ 79 \\ 1 \end{pmatrix}$. **5.2.** $X = C_5 \begin{pmatrix} -11 \\ 9 \\ 2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$. **5.3.** $X = C_5 \begin{pmatrix} 36 \\ 17 \\ -25 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. **5.4.** $X = C_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -7 \\ -35 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5.5. $X = C_5 \begin{pmatrix} 13 \\ -56 \\ 4 \\ -20 \\ 1 \end{pmatrix}$. **5.6.** $X = C_5 \begin{pmatrix} 169 \\ -39 \\ -23 \\ 76 \\ 1 \end{pmatrix}$. **5.7.** $X = C_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5.8. $X = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + C_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -17 \\ 28 \\ 1 \end{pmatrix}$. **5.9.** $X = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

5.10. $X = C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3/2 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. **5.11.** $X = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5.12. $X = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_5 \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. **5.13.** $X = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$.

5.14. $X = C_3 \begin{pmatrix} 6/5 \\ 13/5 \\ 1 \\ -7/5 \\ 36/5 \end{pmatrix}$. **5.15.** $X = C_3 \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_4 \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. **5.16.** $X = C_2 \begin{pmatrix} 73/6 \\ 1 \\ -9/2 \\ 13/6 \end{pmatrix}$.

Список рекомендованої літератури

Базова

1. Вища математика: Основні означення, приклади і задачі: навч. посіб: У 2 ч. / І. П. Васильченко, В. Я. Данилов, А. І. Лобанов, Є. Ю. Таран. К. : Либідь, 1992. – ч. 2. – 256 с.

2. Жильцов О. Б. Вища математика з елементами інформаційних технологій: навч. посіб. / О. Б. Жильцов, О. Б. Торбін – К. : МАУП, 2002. – 408 с.

3. Орвис В. EXCEL для ученых, инженеров и студентов. – К.: Юниор, 1999. – 528 с.

4. Плис А. И. MATHCAD: математический практикум для экономистов и инженеров: учеб. пособие. / А. И. Плис, Н. А. Сливина. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 656 с.

5. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре / И. В. Проскуряков – М. : Наука, 1967.

6. Сборник задач по алгебре / под редакцией А. И. Кострикина – М. : Наука, 1987.

7. Слєсарєв В.В. Елементи лінійної алгебри: навч. посібн. / В. В. Слєсарєв, С. О. Сушко, Л. Я. Фомичова; М-во освіти і науки, Нац. гірн. ун-т. – Д. : НГУ, 2005. – 285 с.

8. Синайский Е.С. Высшая математика: уч. пос. в 2-х ч. / Е. С. Синайский, Л. В. Новикова, Л. И. Заславская; М-во освіти і науки, Нац. гірн.ун-т. – Д.: НГУ, 2006.

9. Шипачев В. С. Высшая математика / В. С. Шипачев – М. : Высш. шк., 1990. – 479 с.

Світлана Альбертівна **Ус**
Тетяна Валеріївна **Хом'як**

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ ТА ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

ДО ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

студентами напряму підготовки

6.040303 «Системний аналіз»

Редактор Є. М. Ільченко

Підп. до друку 22.05.2017. Формат 30×42/4 .
Папір офсетний. Ризографія. Ум. друк. арк. 3,2.
Обл.-вид. арк. 3,5. Тираж пр. 50 Зам. № .

Державний ВНЗ «Національний гірничий університет»
49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19.