МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Л.Я. Фомичова, В.М. Почепов, О.Р. Мамайкін

МАТЕМАТИКА 2

Ряди

Навчальний посібник

Дніпро
НТУ «ДП»
2020

УДК 517
Ф 45

Затверджено вченою радою університету як навчальний посібник для студентів спеціальності 184 Гірництво (протокол № 6 від 25.06 2020).

Рецензенти:

Т.С. Кагадій – д-р фіз.-мат. наук, проф., проф. кафедри вищої математики Національного технічного університету «Дніпровська політехніка»;

О.М. Кузьменко – д-р техн. наук, проф., проф. кафедри ГІО Національного технічного університету «Дніпровська політехніка».

Фомичова Л.Я.

Ф 45 Математика 2. Ряди : навч. посіб. / Л.Я. Фомичова, В.М. Почепов, О.Р. Мамайкін ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро: НТУ «ДП», 2020. – 75 с.

ISBN 978–966–350–731–6

Відповідає навчальній програмі дисципліни «Математика 2».

Містить чотири розділи. У першому викладено теоретичний матеріал, який стосується числових і функціональних рядів. Другий розділ складається з типових прикладів та домашніх завдань. Третій містить 15 варіантів індивідуальних завдань. У четвертому наведено зразок контрольної роботи з розв'язками.

Призначений для всіх форм навчання.

УДК 517

ISBN 978–966–350–731–6

ВСТУП

Посібник відповідає програмі дисципліни «Математика 2». Він написаний на основі лекцій, які викладалися в Інституті природорисурсів Національного технічного університету «Дніпровська політехніка», і містить викладання теорії за темою «Ряди», достатню кількість розв'язаних прикладів та задач, а також вправ для самостійної роботи. Робота написана доступною по можливості строгою мовою, що, безумовно, полегшить студентам оволодіти основами лекційного та практичного матеріалу.

Мета цього посібника:

− ознайомити студентів з основними положеннями теорії рядів, а також на деяких прикладах показати можливості застосування цієї теорії;

− активізувати роботу студентів на практичних заняттях, враховуючи їхню математичну підготовку (у посібнику наведено приклади різної складності, серед яких є розв'язані);

− виробляти необхідні для розвинутого мислення прийоми розумової діяльності, уміння та навики.

Розділ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Означення ряду та його збіжність

Нехай маємо деяку складену за певним законом нескінченну послідовність чисел або функцій $\{u_n\}$.

Символічний вираз, чисто формально об'єднаних між собою знаком плюс членів послідовності, називається **нескінченним рядом**

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{1.1}$$

де $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ − **члени ряду**;

u_n − **загальний член ряду**.

Якщо члени ряду – числа, то ряд називається **числовим;** якщо вони – функції, то ряд називається **функціональним**.

Сума n перших членів ряду (1.1) називається n-ю **частковою сумою:**

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n. \tag{1.2}$$

Якщо існує скінченна границя часткової суми ряду $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то число S називається **сумою ряду** (1.1), а ряд називається **збіжним**. Записують $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Якщо границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує, то такий ряд не має суми і називається **розбіжним**.

Якщо з ряду (1.1) відкинути перші n членів, то одержимо ряд

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ . \tag{1.3}$$

Величину R_n називають **залишком ряду** (1.1).

Якщо ряд збіжний та $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, тоді $R_n = S - S_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.

Справедливе і більш загальне твердження.

Ряд (1.1) збіжний (розбіжний) тоді й тільки тоді, коли збіжний (розбіжний) його довільний залишок (1.3).

Вивчати ряди раціонально за такою структурною схемою (рис. 1.1).

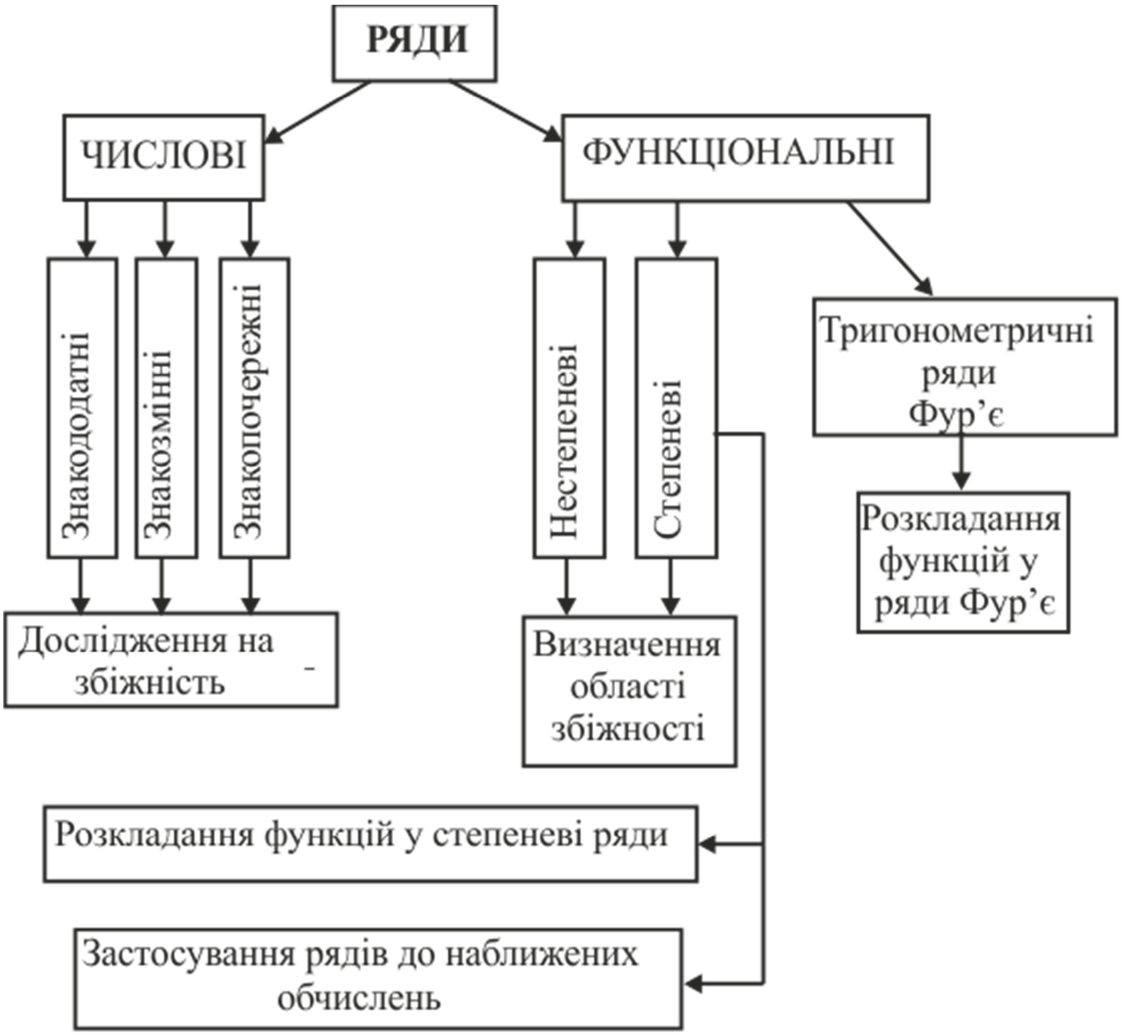

Рис. 1.1

Основні властивості рядів

1^0. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ – збіжний та має суму S, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Cu_n$ також збіжний і його сума дорівнює CS ($C = const$). Іншими словами, збіжний ряд можна множити почленно на одне і те саме число.

2^0. Збіжні ряди можна почленно додавати та віднімати, тобто якщо ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ збіжні та мають відповідно суми S та σ, то збіжними є також ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ і суми їх дорівнюють відповідно $S \pm \sigma$.

3^0. На збіжність ряду не впливає відкидання або приєднання до нього скінченної кількості членів.

1.2. Дослідження на збіжність числових знакододатних рядів

Першою важливою задачею теорії рядів буде задача дослідження на збіжність. Насамперед цю задачу можна розв'язати за допомогою означення збіжності ряду, тобто знайти n-ну часткову суму ряду S_n, а потім визначити границю $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Якщо ця границя скінченна, то ряд збіжний, у протилежному випадку ряд розбіжний.

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a\,q^n$.

Розв'язання. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a\,q^n = a + aq + aq^2 + \ldots aq^{n-1} + \ldots$, $a \neq 0$ являє собою нескінченну геометричну прогресію, сума якої при $q \neq 1$ обчислюється за формулами $S_n = \dfrac{a - aq^n}{1-q}$ або $S_n = \dfrac{a}{1-q} - \dfrac{aq^n}{1-q}$.

1. Якщо $|q| < 1$, то $q^n \to 0$, коли $n \to \infty$, і відповідно існує границя

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q}.$$

Отже, при $|q| < 1$ ряд збіжний за означенням та його сума буде $S = \dfrac{a}{1-q}$.

2. Якщо $|q| > 1$, то $q^n \to \infty$, коли $n \to \infty$, і тоді

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a - aq^n}{1-q}\right) = \infty,$$

тобто сума ряду не існує. Таким чином, якщо $|q| > 1$, то ряд розбіжний.

3. Якщо $q = 1$, то маємо ряд $a + a + a + \ldots$ У цьому разі $S_n = na$ і $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, отже, ряд розбіжний.

4. Якщо $q = -1$, то ряд має вигляд $a - a + a - a + \ldots$. У такому випадку

$$S_n = \begin{cases} 0, & n - \textit{парне}, \\ a, & n - \textit{непарне}. \end{cases}$$

Таким чином, S_n не має границі й ряд розбіжний.

Отже, **нескінченна геометрична прогресія (з першим членом відмінним від нуля) являє собою збіжний ряд тоді, коли знаменник прогресії за модулем менший від одиниці.**

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$.

Розв'язання. Розглянемо загальний член ряду $u_n=\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ та розкладемо його на елементарні дроби

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2},$$

де A, B, C – невідомі коефіцієнти.

Для їх знаходження помножимо наведене рівняння на знаменник лівої частини, отримаємо тотожність

$$1=A(n+1)(n+2)+Bn(n+2)+Cn(n+1).$$

Отже, при $n=0 \;\Rightarrow\; 1=2A \;\Rightarrow\; A=\dfrac{1}{2}$; при $n=-1 \;\Rightarrow\; 1=-B \;\Rightarrow\; B=-1$;

при $n=-2 \;\Rightarrow\; 1=2C \;\Rightarrow\; C=\dfrac{1}{2}$.

Таким чином, $u_n=\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{2(n+2)}$, тобто $u_n=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n+1}+\dfrac{1}{(n+2)})$ і вираз (1.2) для S_n можна записати так:

$$\begin{aligned}S_n=\frac{1}{2}(1-1+\frac{1}{3}&+\\ +\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}&+\\ +\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}&+\\ +\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}&+\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots&+\\ +\frac{1}{n-2}-\frac{2}{n-1}+\frac{1}{n}&+\\ +\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}&+\\ +\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2})&=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}.\end{aligned}$$

Обчислюючи $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2})=\dfrac{1}{4}$, дістанемо, що сума ряду $S=\dfrac{1}{4}$, тому ряд буде збіжним.

1.3. Ознаки збіжності числових знакододатних рядів

Дослідження ряду на збіжність за допомогою означення збіжності рядів пов’язано з принциповими трудношами, які виникають при обчисленні часткових сум та їх границь. Тому простіше розв’язувати питання збіжності ряду за допомогою спеціальних ознак збіжності рядів.

Дослідження на збіжність числових знакододатних рядів можна подати таким алгоритмічним приписом (рис. 1.2):

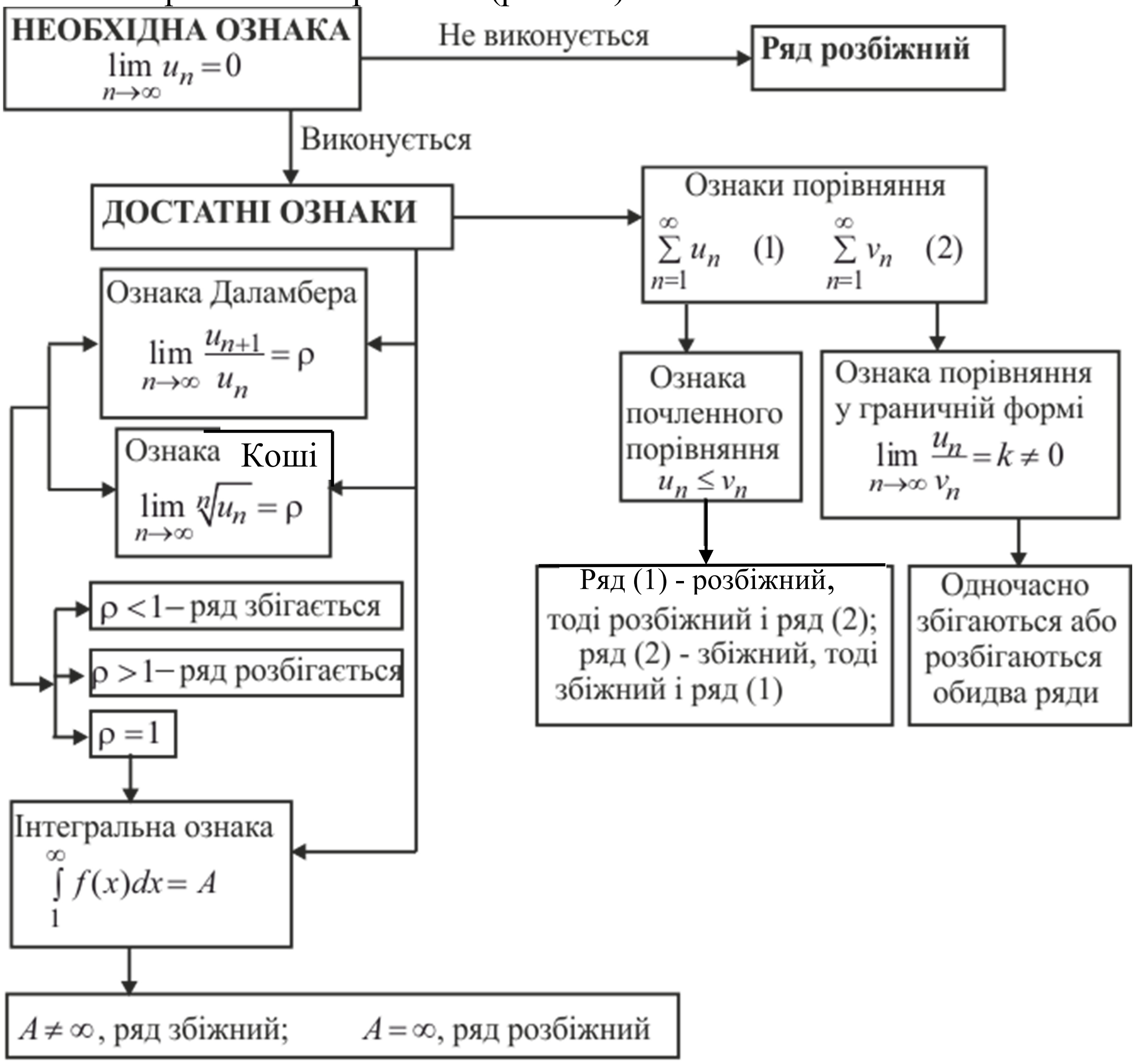

Рис. 1.2

Необхідна ознака збіжності ряду. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний, то його загальний член прямує до нуля при необмеженому збільшенні його номера, тобто

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 0}. \qquad (1.4)$$

Умова (1.4) є тільки необхідною для збіжності ряду, але не є достатньою. Це означає, що існують розбіжні ряди, для яких $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Розв'язання. Для досліджуваного ряду необхідна ознака збіжності виконується: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, проте

$$S_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} = n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \quad \text{і} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt{n} = \infty.$$

Отже, ряд розбіжний.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-7}{7n+5}$.

Розв'язання. Знайдемо границю n-го члена: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-7}{7n+5} = \frac{2}{7} \neq 0.$

Отже, згідно з необхідною ознакою збіжності маємо розбіжний ряд.

Поруч з цим можна навести ряди, для яких виконується необхідна ознака збіжності, і ряд виявляється збіжним. Так, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, члени якого утворюють геометричну прогресію зі знаменником $q = \frac{1}{2} < 1$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$, збігається.

Ознака почленного порівняння. Нехай дано два ряди з невід'ємними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \ldots, \tag{1.5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots, \tag{1.6}$$

і для всіх n виконується нерівність

$$u_n \leq v_n. \tag{1.7}$$

У цьому разі, якщо ряд (1.6) збіжний, то збіжний і ряд (1.5). Якщо ряд (1.5) розбіжний, то розбіжний і ряд (1.6).

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Розв'язання. Необхідна ознака збіжності виконується: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0.$ За достатню ознаку збіжності виберемо ознаку почленного порівняння. Оскільки

$\frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$, $(n = 2,3,\ldots)$, то з розбіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ (див. попередній приклад) випливає, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ теж розбіжний.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\sqrt{n}}$.

Розв'язання. Необхідна ознака збіжності виконується: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n\sqrt{n}} = 0$. Для перевірки ознаки почленного порівняння виберемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Виконується нерівність $\frac{1}{2^n\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$, але ніякого висновку відносно збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\sqrt{n}}$ зробити неможна, тому що розбіжним буде ряд з більшими членами. Отже, вибраний ряд не підходить.

Наступним для порівняння виберемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, який збігається, бо це геометрична прогресія зі знаменником $q = \frac{1}{2} < 1$. Враховуючи $\frac{1}{2^n\sqrt{n}} < \frac{1}{2^n}$, можна стверджувати, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\sqrt{n}}$ – збіжний.

Ознака порівняння у граничній формі. Нехай $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ – два ряди з додатними членами. Якщо існує скінченна та відмінна від нуля границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = k$, то обидва ряди збіжні або розбіжні одночасно.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4\cdot 3^n - 5}$.

Розв'язання. Очевидно, що необхідна ознака збіжності ряду виконується, тому зразу застосуємо ознаку порівняння у граничній формі. Для порівняння візьмемо збіжну геометричну прогресію $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ (нескінченна геометрична прогресія зі знаменником $q = \frac{1}{3} < 1$) та обчислимо границю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4\cdot 3^n - 5} : \frac{1}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{4\cdot 3^n - 5} = \frac{1}{4}.$$

Оскільки отримана границя скінчення та відмінна від нуля, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ збіжний, то даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4\cdot 3^n-5}$ теж збіжний.

З а у в а ж е н н я 1. Ознаки порівняння можна застосовувати і тоді, коли нерівність (1.7) виконується не для всіх членів рядів (1.5) та (1.6), а починаючи з деякого номера N.

З а у в а ж е н н я 2. При дослідженні рядів за допомогою ознак порівняння необхідно наперед знати декілька збіжних та розбіжних рядів.

Для порівняння часто користуються рядами:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}\begin{cases} \text{збіжний при} & |q|<1, \\ \text{розбіжний при} & |q|\ge 1; \end{cases};$$

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\begin{cases} \text{збіжний при} & \alpha>1, \\ \text{розбіжний при} & \alpha\le 1. \end{cases}.$$

Ознака Даламбера. Якщо для ряду з додатними членами існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$, то цей ряд при $\rho<1$ збіжний, а при $\rho>1$ − розбіжний.

З а у в а ж е н н я 1. Якщо $\rho=1$, то про поведінку ряду не можна нічого сказати і потрібно застосовувати іншу ознаку.

З а у в а ж е н н я 2. Ряди, члени яких містять вирази $n!$, тобто які пов'язані з факторіалом або a^n, зручно досліджувати на збіжність за допомогою ознаки Даламбера.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

Розв'язання. Запишемо *n*-й та (*n*+1)-й члени заданого ряду: $\frac{1}{n!}$, $\frac{1}{(n+1)!}$.

Тепер для застосування ознаки Даламбера знайдемо границю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1.$$

Отже, досліджуваний ряд збіжний.

Приклад 7. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$.

***Розв'язання*:** $u_n=\frac{3^n}{n^2}$; $u_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}\frac{n^2}{3^n}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2}{(n+1)^2}=3>1.$ Отже, за ознакою Даламбера ряд розбіжний.

Радикальна ознака Коші. Якщо для ряду з додатними членами існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$, то цей ряд при $\rho<1$ збіжний, а при $\rho>1$ − розбіжний.

З а у в а ж е н н я 1. Якщо $\rho=1$, то про поведінку ряду не можна нічого сказати і потрібно застосовувати іншу ознаку.

З а у в а ж е н н я 2. Ряди, члени яких містять вирази $[u(n)]^{v(n)}$, зручно досліджувати на збіжність за допомогою ознаки Коші.

Приклад 8. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{5n^3-4n^2+3}{10n^3+75}\right)^n$.

Розв'язання. Необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^3-4n^2+3}{10n^3+75}\right)^n=0.$$

Ознаки порівняння застосувати незручно, застосуємо радикальну ознаку Коші.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n^3-4n^2+3}{10n^3+75}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}=\frac{5n^3-4n^2+3}{10n^3+75}=\frac{1}{2}<1.$$

Отже, заданий ряд збіжний.

Приклад 9. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{3^n}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Розв'язання.Застосуємо радикальну ознаку Коші

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}=\frac{1}{3e}<1.$$

Отже, заданий ряд збіжний.

Приклад 10. Дослідити на збіжність ряд

$$\left(\frac{5}{2}\cdot 4\right)+\left(\frac{7}{3}\cdot 4\right)^2+\left(\frac{9}{4}\cdot 4\right)^3+\left(\frac{11}{5}\cdot 4\right)^4+\ldots$$

Розв'язання. Складемо формулу для загального члена ряду $u_n=\left(\dfrac{2n+3}{n+1}\cdot 4\right)^n$. Тоді за радикальною ознакою Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+3}{n+1}\cdot 4\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n+12}{n+1}=8>1.$$

Заданий ряд розбіжний.

Інтегральна ознака Коші. Якщо функція $f(x)$ неперервна та спадна на проміжку $[1,\infty)$, а її значення $f(n)=u_n$ для кожного $n=1,2,\ldots$ є членами ряду

$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, то цей ряд збіжний тоді й тільки тоді, коли збіжний невластивий інтеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$.

Приклад 11. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$.

Розв'язання. Використаємо інтегральну ознаку Коші. Функція $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$ задовольняє всі умови цієї ознаки. Знайдемо

$$\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}\bigg|_2^{\infty} = \frac{1}{\ln 2} < 1,$$

тобто ряд із загальним членом $u_n = \frac{1}{n \ln^2 n}$ розбіжний.

Приклад 12. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$.

Розв'язання. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \ldots \ , \qquad (1.8)$$

де $\alpha > 0$ − дійсне число, називається **узагальненим гармонічним рядом**.

Для дослідження ряду (1.8) на збіжність скористаємося інтегральною ознакою Коші (ознака Даламбера та радикальна ознака Коші відповіді про збіжність не дають).

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$. Ця функція неперервна, монотонно спадає на проміжку $[1;\infty)$ та $f(n) = \frac{1}{n^{\alpha}} = u_n$.

При $\alpha \neq 1$ маємо $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_1^{b} x^{-\alpha} dx = \lim\limits_{b\to\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_1^{b} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha - 1} & \text{коли} \quad \alpha > 1, \\ \infty & \text{коли} \quad \alpha < 1. \end{cases}$

При $\alpha = 1$ маємо **гармонічний ряд** $u_n = \frac{1}{n}$, який розбіжний ($\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty$).

Отже, ряд (1.8) при $\alpha > 1$ − збіжний, а при $\alpha \leq 1$ − розбіжний.

1.4. Знакопочережні ряди

Розглянемо ряди, у яких знаки членів чергуються. Такі ряди називаються **знакопочережними**. Їх прийнято записувати у вигляді:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n , \qquad (1.9)$$

де $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots -$ додатні числа (модулі членів ряду).

Для таких рядів має місце достатня умова збіжності (встановлена у 1714 році Лейбніцем).

Ознака Лейбніца. Знакопочережний ряд (1.9) збігається, якщо:

1) послідовність абсолютних величин членів ряду монотонно зменшується, тобто $u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots$;

2) загальний член ряду прямує до нуля: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

При цьому сума S ряду (1.9) задовольняє нерівність

$$0 < S < u_1 . \qquad (1.10)$$

Наслідок. Абсолютна похибка від заміни суми збіжного ряду (1.9) його частковою сумою не перевищує модуля першого з відкинутих членів ряду, тобто $\left| S - S_n \right| \le u_{n+1}$.

Приклад 1. Обчислити наближено суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n^n}$.

Розв'язання. Даний ряд знакопочережний. Оскільки члени ряду спадають за абсолютною величиною $1 > \dfrac{1}{2^2} > \dfrac{1}{3^3} > \ldots$, а загальний член ряду прямує до нуля $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^n} = 0$, то ряд збіжний та можна наближено знайти його суму.

Візьмемо п'ять членів, тобто замінимо S на S_5, при цьому зробимо помилку меншу ніж u_6:

$$S \approx S_5 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256} + \frac{1}{3125} \approx 0{,}7634 .$$

Помилка буде менша ніж $u_6 = \dfrac{1}{6^6} = \dfrac{1}{46656} < 0{,}00003$. Отже, $S \approx 0{,}7831$.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n}{5n-2}$.

Розв'язання. Це знакопочережний ряд, для якого не виконуються умови ознаки Лейбніца ($\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{5n-3} = \dfrac{1}{5} \ne 0$). Отже, даний ряд розбіжний.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{3n+1}$.

Розв'язання. Виконуються всі умови ознаки Лейбніца: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{3n+1} = 0$;

$\frac{1}{4} > \frac{1}{7} > \frac{1}{10} > \frac{1}{13} > \ldots -$ ряд збігається. Але ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$ складений з модулів членів даного ряду розбіжний ($\int_1^{\infty} \frac{dx}{3x+1} = \frac{1}{3} \ln|3x+1| \Big|_1^{\infty} = \infty$). Отже, даний ряд збігається умовно.

1.5. Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжність

Знакопочережний ряд − це окремий випадок знакозмінного ряду. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, який містить нескінченну множину додатних членів та нескінченну множину від'ємних членів, називається **знакозмінним.**

Для знакозмінних рядів має місце загальна **достатня ознака збіжності.**

Нехай дано знакозмінний ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1.11}$$

Якщо збігається ряд

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots, \tag{1.12}$$

складений з модулів членів ряду (1.11), тоді збігається і сам даний знакозмінний ряд.

З цієї ознаки випливає, що при дослідженні на збіжність знакозмінних рядів можна користуватися ознаками збіжності знакододатних рядів. Крім того, ця ознака не є необхідною умовою збіжності знакозмінного ряду, оскільки існують знакозмінні ряди, які є збіжними, а ряди, утворені з модулів їхніх членів, – розбіжними. У зв'язку з цим усі збіжні ряди можна розділити на абсолютно збіжні та умовно збіжні.

Ряд (1.11) називають **абсолютно збіжним**, якщо ряд (1.12), утворений з модулів його членів, є збіжним.

Якщо ж ряд (1.11) збіжний, а ряд (1.12), утворений з модулів його членів, розбіжний, то ряд (1.11) називають **умовно збіжним**.

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n-1}$.

Розв'язання. Це знакопочережний ряд, для якого виконуються умови ознаки Лейбніца. Отже, даний ряд збігається. Проте ряд, який складено з модулів членів даного ряду, тобто ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, розбіжний (гармонічний ряд), тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n-1}$ умовно збіжний.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{1}{2^4}-\frac{1}{5^4}-\frac{1}{10^4}+\frac{1}{17^4}+\frac{1}{26^4}+\frac{1}{37^4}+\dots .$$

Розв'язання. Маємо знакозмінний ряд. Скористаємося достатньою ознакою збіжності знакозмінних рядів. Розглянемо ряд, який складено з модулів членів даного ряду

$$\frac{1}{2^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{17^4}+\frac{1}{26^4}+\frac{1}{37^4}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+1)^4}.$$

Для цього ряду виконується необхідна умова збіжності знакододатних рядів ($\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n^2+1)^4}=0$) та для перевірки ознаки почленного порівняння виберемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}$, який за інтегральною ознакою збігається ($\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x^8}dx=1$). Враховуючи, що $\frac{1}{(n^2+1)^4}\le\frac{1}{n^8}$, можна стверджувати абсолютну збіжність даного ряду.

Властивості абсолютно збіжних рядів

1^0. Якщо ряд абсолютно збіжний та має суму S, то ряд, отриманий з нього переставленням членів, також збіжний та має ту ж суму S, що і вихідний ряд.

2^0. Абсолютно збіжні ряди з сумами S_1 та S_2 можна почленно додавати (віднімати). У результаті дістанемо абсолютно збіжний ряд, сума якого дорівнює S_1+S_2 (або відповідно S_1-S_2).

3^0. Добутком двох абсолютно збіжних рядів з сумами S_1 та S_2 буде абсолютно збіжний ряд, сума якого дорівнює $S_1\cdot S_2$.

З а в д а н н я д л я с а м о к о н т р о л ю

1. Що називається числовим рядом та загальним членом ряду?

2. Який ряд називається збіжним? Що називається його сумою та частковою сумою числового ряду?

3. Сформулювати необхідну ознаку збіжності ряду.

4. Сформулювати достатні ознаки збіжності рядів: ознаку почленного порівняння; граничну ознаку порівняння; ознаку Даламбера; радикальну ознаку Коші; інтегральну ознаку Коші.

5. Сформулювати ознаку Лейбніца. Для якого ряду застосовна ця ознака?

6. У чому полягає наслідок із ознаки Лейбніца?

7. Сформулювати достатню ознаку збіжності знакозмінного ряду.

8. Який ряд називається абсолютно збіжним? Який ряд називається умовно збіжним?

1.6. Поняття збіжності функціонального ряду та степеневі ряди

Вираз

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x), \qquad (1.13)$$

у якому $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots -$ функції, визначені в деякій області D, називається **функціональним рядом**.

Якщо надати x певного значення x_0, дістанемо числовий ряд

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots,$$

який може бути як збіжним, так і розбіжним.

Якщо отриманий числовий ряд збігається, то точка x_0 називається **точкою збіжності** ряду (1.13); якщо ж ряд розбіжний − **точкою розбіжності** функціонального ряду.

Сукупність числових значень аргументу x, при яких функціональний ряд збігається, називається його **областю збіжності**.

Сума функціонального ряду в області його збіжності є деякою функцією від x. Визначається вона в області збіжності рівністю $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$, де $S_n(x)=u_n(x)+u_n(x)+\ldots+u_n(x)$ − **часткова сума функціонального ряду.** Функція $S(x)$ визначена в області збіжності функціонального ряду. Якщо функціональний ряд (1.13) збіжний до функції $S(x)$, то різниця $R_n(x)=S(x)-S_n(x)$ називається n-м **залишком ряду**:

$$R_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots\ .$$

Зрозуміло, що для всіх значень x з області збіжності ряду $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

Приклад 1. Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$.

Розв'язання. Даний ряд − це ряд геометричної прогресії зі знаменником $q=x$. Отже, цей ряд збігається при $|x|<1$, тобто при всіх $x\in(-1;1)$. Враховуючи, що перший член прогресії $a=1$, маємо суму ряду $\dfrac{1}{1-x}$:

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}, \quad \text{при } |x|<1.$$

Приклад 2. Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nx}$.

Розв'язання. За радикальною ознакою Коші маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{e^{-nx}}=e^{-x}=\begin{cases}<1 \ \text{при} \ x>0\\ >1 \ \text{при} \ x<0\end{cases}.$$

Унаслідок цього даний ряд збіжний при додатних значеннях x та розбіжний при від'ємних. У точці $x=0$ ряд набуває вигляду $1+1+1+\ldots$ та є розбіжним. Таким чином, областю збіжності даного ряду буде проміжок $(0;\infty)$.

Функціональний ряд (1.13) називається **рівномірно збіжним** до своєї суми $S(x)$ на множині D, якщо для довільного числа $\varepsilon>0$ існує таке число $N=N(\varepsilon)$, яке залежить лише від ε і не залежить від x, що для всіх $n>N$ і для всіх $\varepsilon \in D$ виконується нерівність $\left|R_n(x)\right|<\varepsilon$.

Наведемо достатні умови рівномірної збіжності функціональних рядів.

Ознака Вейєрштрасса. Функціональний ряд (1.13) є абсолютно і рівномірно збіжним на множині D, якщо існує знакододатний збіжний числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ такий, що для всіх $x \in D$ члени ряду задовольняють нерівності: $\left|u_n(x)\right| \le a_n, \quad n=1,2,\ldots$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називається **мажорантним** для ряду (1.13), а сам ряд (1.13) – **мажоровним**.

Приклад 3. Знайти область рівномірної збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^n}$.

Розв'язання. Скористаємося ознакою Вейєрштрасса. Оскільки при $-\infty<x<+\infty$ та $n \in N$ маємо $\left|\dfrac{\sin nx}{n^n}\right| \le \dfrac{1}{n^n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^n}$ збіжний (за радикальною ознакою Коші), то даний функціональний ряд абсолютно і рівномірно збіжний на всій числовій осі.

Серед функціональних рядів особливу роль грає ряд, члени якого являють собою степеневі функції аргументу x, тобто так званий **степеневий ряд**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots. \qquad (1,14)$$

Числа $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ називаються **коефіцієнтами степеневого ряду** (1.14).

Ряд (1.14) − це ряд за степенями x. Розглядають також степеневий ряд за степенями $(x-x_0)$, тобто ряд виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots, \qquad (1.15)$$

де x_0 − деяке стале число.

Ряд (1.15) легко зводиться до вигляду (1.14), якщо покласти $x-x_0=z$. Тому надалі розглядатимемо степеневі ряди вигляду (1.14).

Будь-який степеневий ряд вигляду (1.14) збіжний у точці $x = 0$ до суми $S = a_0$. Тому область збіжності степеневого ряду завжди містить принаймні одну точку. Детальніше відомості про область збіжності ряду (1.14) дістанемо з теореми Абеля.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд (1.14) збіжний при $x = x_0 \neq 0$, то він абсолютно збіжний для всіх значень x, що задовольняють нерівність $|x| < |x_0|$.

Якщо при $x = x_1$ ряд (1.14) розбіжний, то він розбіжний всюди де $|x| > |x_1|$.

Теорема Абеля характеризує множини точок збіжності та розбіжності степеневого ряду. Справді, якщо x_0 − точка збіжності ряду (1.14), то весь інтервал $(-|x_0|;|x_0|)$ заповнено точками абсолютної збіжності цього ряду. Якщо x_1 − точка розбіжності ряду (1.14), то вся нескінченна півпряма $(-\infty;-|x_1|)$ зліва від точки $-|x_1|$ та вся нескінченна півпряма $(|x_1|;+\infty)$ справа від точки $|x_1|$ складається з точок розбіжності цього ряду.

Отже, для області збіжності степеневого ряду можливі три випадки: 1) ряд (1.14) збіжний лише в точці $x = 0$; 2) ряд (1.14) збіжний при всіх $x \in (-\infty;+\infty)$; 3) існує таке скінченне число $R \in (0;+\infty)$, що при $|x| < R$ степеневий ряд абсолютно збіжний, а при $|x| > R$ − розбіжний.

Число R називається **радіусом збіжності** степеневого ряду, інтервал $(-R;R)$ − **інтервалом збіжності** (рис. 1.3).

На кінцях інтервалу збіжності (у точках $x = -R$ та $x = R$) питання про збіжність ряду розв'язується окремо дослідженням відповідних числових рядів.

Радіус збіжності степеневих рядів (1.14) та (1.15) можна визначити формулами:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{або} \quad R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{1.16}$$

При цьому, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 0$ або $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, то $R = 0$; якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \infty$ або $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 0$, то $R = \infty$.

Рис.1.3

На практиці інтервал збіжності степеневого ряду часто знаходять безпосередньо за ознакою Даламбера або радикальною ознакою Коші, застосовуючи їх до ряду, складеного з модулів членів даного ряду.

Властивості степеневих рядів

1^0. Ряд (1.14) абсолютно і рівномірно збіжний на будь-якому відрізку $[-\rho;\rho]$, що повністю міститься в інтервалі збіжності $(-R;R)$.

2^0. Сума $S(x)$ степеневого ряду (1.14) є неперервною функцією всередині інтервалу збіжності ряду.

3^0. Степеневий ряд (1.14) можна почленно інтегрувати всередині інтервалу збіжності. При цьому дістанемо ряд, який має той самий інтервал збіжності, що і ряд (1.14).

4^0. Степеневий ряд (1.14) можна диференціювати в будь-якій точці $x\in(-R;R)$. При цьому інтервал збіжності ряду, який складено з похідних, збігається з інтервалом збіжності вихідного ряду (1.14).

Приклад 4. Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$.

Розв'язання. Скористаємося формулою (1.16)

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Отже, даний ряд абсолютно збіжний на всій числовій осі.

Приклад 5. Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!x_n$.

Розв'язання. За допомогою ознаки Даламбера визначимо радіус збіжності:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{n}=0.$$

Отже, досліджуваний ряд збігається лише в одній точці ($x=0$).

Приклад 6. Знайти радіус та область збіжності ряду

$$1+3x+3^2x^2+3^3x^3+\ldots+3^{n-1}x^{n-1}+\ldots.$$

Розв'язання. Знайдемо радіус збіжності: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n-1}}{3^n}=\dfrac{1}{3}.$

Отже, інтервал збіжності даного ряду буде $(-1/3;1/3)$.

Визначимо збіжність ряду в точках $-1/3$ та $1/3$:

при $x=-1/3$ маємо розбіжний ряд $1-1+1-1+\ldots$, оскільки для нього не існує часткова сума; при $x=1/3$ маємо розбіжний ряд $1+1+1+1+\ldots$, оскільки для нього границя часткової суми дорівнює нескінченності.

Отже, областю збіжності даного ряду є проміжок $(-1/3;1/3)$.

Приклад 7. Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{2n+1}$.

Розв'язання. Радіус збіжності буде $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{2n+1} = 1$. Отже, $(-1;1)$ – інтервал збіжності даного ряду. Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу. При $x=-1$ маємо числовий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$, який збіжний за ознакою Лейбніца. При $x=1$ дістанемо ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}$, який є розбіжним за ознакою порівняння з гармонічним рядом. Таким чином, областю збіжності даного ряду є проміжок $[-1;1)$.

Приклад 8. Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

Розв'язання. Даний ряд неповний. Скористаємося ознакою Даламбера. Для даного ряду маємо $|u_n| = \dfrac{\left|x^{2n-1}\right|}{2n-1}$, $|u_{n+1}| = \dfrac{\left|x^{2n+1}\right|}{2n+1}$,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|x^{2n+1}\right|}{2n+1}\frac{2n-1}{\left|x^{2n-1}\right|} = \left|x^2\right|\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1} = x^2.$$

Таким чином, ряд абсолютно збіжний, якщо $x^2<1$ або $-1<x<1$. Досліджуємо поведінку ряду на кінцях інтервалу збіжності. При $x=-1$ маємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{3n}\dfrac{1}{2n-1}$, який збігається за ознакою Лейбніца. При $x=1$ дістанемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$, який теж збігається за ознакою Лейбніца.

Отже, областю збіжності заданого ряду буде відрізок $[-1;1]$.

Приклад 9. Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+3)^n}{n\,2^{n-1}}$.

Розв'язання. Знаходимо радіус збіжності ряду за формулою $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$:

$R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+1}{n}\dfrac{2^n}{2^{n-1}}\right| = 2$. Отже, інтервал збіжності буде

$$-2 < x+3 < 2 \quad \Rightarrow \quad -5 < x < -1 \ \text{ або } \ (-5;-1).$$

З'ясуємо питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності:

при $x=-1$ маємо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$, який розбіжний (гармонічний ряд); при $x=-5$ маємо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n}$, який збігається за ознакою Лейбніца. Таким чином, областю збіжності даного ряду є проміжок $[-5;-1)$.

1.7. Ряди Тейлора та Маклорена

Для будь-якої функції $f(x)$, яка визначена в околі точки x_0 та має в ньому похідні до $(n+1)$-го порядку включно, справедлива формула Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x), \tag{1.17}$$

де $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)$, $c\in(x_0,x)$ – залишковий член у формі Лагранжа. Число c можна записати у вигляді $c=x_0+\theta(x-x_0)$, де $0<\theta<1$.

Коефіцієнти $\frac{f'(x_0)}{1!}$, $\frac{f''(x_0)}{2!}$, $\frac{f'''(x_0)}{3!}$, … , $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, … називаються **коефіцієнтами ряду Тейлора**.

Якщо функція $f(x)$ має похідні будь-яких порядків, тобто нескінченно диференційовна в околі точки x_0, та залишковий член $R_n(x)$ прямує до нуля при $n\to\infty$, то з формули Тейлора дістанемо розкладання функції $f(x)$ за степенями $(x-x_0)$, яке називається **рядом Тейлора**:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{1.18}$$

Якщо в ряду Тейлора покласти $x_0=0$, то отримаємо розкладання функції за степенями x у так званий **ряд Маклорена**:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{1.19}$$

Треба відмітити, що ряд Тейлора можна формально побудувати для будь-якої диференційної (це необхідна умова) функції в околі точки x_0. Але з цього не випливає, що цей ряд буде збігатися до даної функції $f(x)$; він може виявитися розбіжним або збіжним не до функції $f(x)$.

Необхідна і достатня умова. Функцію $f(x)$ можна подати її рядом Тейлора в околі точки x_0 тоді й тільки тоді, коли для кожного x з цього околу її залишковий член $R_n(x)$ у формулі Тейлора прямує до нуля при $n \to \infty$.

Інколи доведення того, що залишковий член прямує до нуля доволі складна операція, і в такому разі користуються ознаками збіжності ряду до даної функції. Сформулюємо одну з таких ознак.

Достатня ознака. Якщо функція $f(x)$ має похідні всіх порядків у деякому околі точки x_0 й існує константа M , така що:

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le M^n \quad (n \ge 1),$$

то в цьому околі функцію $f(x)$ можна подати її рядом Тейлора.

Сформулюємо порядок розкладання функції в ряди Тейлора та Маклорена:

а) знайти похідні $f'(x),\quad f''(x),\quad f'''(x),\ \ldots,\quad f^{(n)}(x),\ \ldots$;

б) обчислити значення похідних у точці $x_0 = 0$;

в) записати ряд (1.19) для даної функції та знайти його проміжок збіжності;

г) знайти проміжок $(-R; R)$, у якому залишковий член ряду Маклорена $R_n \to 0$ при $n \to \infty$. Якщо такий проміжок існує, то всередині його функція $f(x)$ та сума ряду Маклорена збігаються.

Розкладання деяких елементарних функцій у ряд Тейлора (Маклорена). Використовуючи порядок розкладання в ряди, для функції $f(x) = e^x$, маємо:

а) $f^{(i)}(x) = e^x$; б) $f^{(i)}(0) = 1$; в) $1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots$;

$$u_n(x) = \frac{|x|^n}{n!}; \quad u_{n+1}(x) = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0; \qquad R = \infty.$$

г) $\left|e^x\right| < M$ для $|x| < \infty$.

Отже,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; \infty). \tag{1,20}$$

Наведемо розкладання в ряд Маклорена деяких елементарних функцій, які отримано аналогічно формулі (1.20):

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; \infty); \tag{1.21}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; \infty); \tag{1.22}$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots, \tag{1.23}$$

$$x \in \begin{cases} [-1;1], & \textit{якщо} \quad m \geq 0, \\ (-1;1], & \textit{якщо} \quad -1 < m < 0, \\ (-1;1), & \textit{якщо} \quad m \leq -1; \end{cases}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \qquad x \in (-1;1); \tag{1.24}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \dots, \qquad x \in (-1;1]; \tag{1.25}$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} + \dots, \qquad x \in (-1;1); \tag{1.26}$$

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \qquad x \in [-1;1]; \tag{1.27}$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \dots +$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \qquad x \in [-1;1]. \tag{1.28}$$

Наведені вище розкладання треба запам’ятати.

Розкладати функції у ряд Тейлора (Маклорена) можна, використовуючи план розкладання, наведений вище, або користуючись рядами з формул (1.20) – (1.28).

Приклад 1. Розкласти функцію $f(x) = \frac{1}{x}$ в ряд за степенями $x - 2$.

Розв’язання. Знайдемо похідні даної функції: $f(x) = x^{-1}$; $f'(x) = -x^{-2}$; $f''(x) = 1\cdot 2x^{-3}$; $f'''(x) = -1\cdot 2\cdot 3x^{-4}$; …; $f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$; ….

Обчислюємо значення похідних у точці $x_0 = 2$: $f(2) = \frac{1}{2}$; $f'(2) = -\frac{1}{2^2}$;

$f''(2) = 1\cdot 2\cdot\frac{1}{2^3}$; $f'''(2) = -1\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2^4}$;; …; $f^{(n)}(2) = (-1)^n n!\frac{1}{2^{n+1}}$; ….

За формулою (1.18) маємо

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}(x-2) + \frac{1}{2^3}(x-2)^2 - \frac{1}{2_4}(x-2)^3 + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}}(x-2)^n + \ldots.$$

Обчислимо радіус збіжності $R = \lim\limits_{n\leftarrow\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n} = 2,$ тоді інтервал збіжності знайдемо з нерівностей $-2 < x - 2 < 2$ або остаточно $0 < x < 4$.

Приклад 2. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x) = 2^x$.

Розв'язання. Зважаючи на те, що $2^x = e^{\ln 2^x} = e^{x\ln 2}$, замінимо x на $x\ln 2$ в розкладанні (1.20) і дістанемо:

$$2^x = 1 + x\ln 2 + x^2\frac{\ln^2 2}{2!} + x^3\frac{\ln^3 2}{3} + \ldots + x^n\frac{\ln^n 2}{n!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty;\infty).$$

1.8. Ряди Фур'є

Ортогональність функцій. Дві функції $f_1(x)$, $f_2(x)$, визначені й інтегровані на відрізку $[a;b]$, називаються **ортогональними** на цьому відрізку, якщо $\int\limits_a^b f_1(x)f_2(x)dx = 0.$

Множна функцій $\{f_n(x)\}$ $(n = 1,2,\ldots)$ називається **ортогональною системою** функції на відрізку $[a;b]$, якщо будь-які дві з цих функцій є ортогональними, тобто виконуються такі співвідношення:

$$\int\limits_a^b f_k(x)f_n(x)dx = 0, \quad k \neq n, \quad (n, k = 1,2,\ldots).$$

Послідовність

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots \sin nx, \cos nx, \ldots\} \tag{1.29}$$

називається **ортогональною на відрізку $[-\pi;\pi]$ тригонометричною системою функцій.**

Тригонометричні ряди та ряди Фур'є . Функціональний ряд, складений з ортогональних тригонометричних функцій у такий спосіб:

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos x, + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\ \sin 2x + \ldots$$

$$\text{або} \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx), \tag{1.30}$$

називається **тригонометричним** рядом. Константи a_0, a_n, b_n $(n = 1,2,\ldots)$ називаються **коефіцієнтами тригонометричного ряду**.

Будь-яка часткова сума цього ряду $S_n(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$ називається **тригонометричним многочленом**.

Тригонометричні ряди визначені на всій числовій осі, але їхня збіжність залежить від коефіцієнтів. Якщо тригонометричний ряд (1.30) збіжний на деякому проміжку довжиною 2π, то він збіжний при будь-якому дійсному значенні x, а його сума $S(x)$ є періодичною функцією з періодом 2π (оскільки $\sin nx$ та $\cos nx$ є 2π-періодичними функціями).

Якщо числовий ряд, складений з коефіцієнтів тригонометричного ряду (1.30), збіжний абсолютно, тоді ряд (1.30) є мажоровним рядом, а отже, він рівномірно збіжний на $(-\infty;\infty)$ і його можна інтегрувати почленно на будь-якому проміжку.

Нехай 2π-періодична функція $f(x)$ є сумою деякого тригонометричного ряду:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (1.31)$$

і останній можна почленно інтегрувати на відрізку $[-\pi;\pi]$, тобто інтеграл від функції $f(x)$ дорівнює сумі інтегралів від кожного члена ряду (1.31). Скористаємося цим для обчислення коефіцієнта a_0:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}a_0\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx)\ \Rightarrow\ \int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\pi\,a_0.$$

Інтеграли від усіх членів ряду, крім нульового, дорівнюють нулю внаслідок ортогональності функцій (1.29). Отже,

$$\boxed{a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx.} \qquad (1.32)$$

Помножимо обидві частини рівності (1.31) на $\cos kx$ та проінтегруємо отриманий ряд в границях від –π до π, отримаємо:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin nx\,dx).$$

У правій частині рівняння всі інтеграли під знаком суми (при $n\neq k$) дорівнюють нулю, за винятком одного інтеграла з коефіцієнтом $a_k=a_n$ $(k=n)$ $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx=\pi$. Таким чином, $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=a_n\pi$ і остаточно при $k=n$ маємо

$$\boxed{a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad n-1,2,\ldots.} \qquad (1.33)$$

Помножимо обидві частини рівності (1.31) на $\sin kx$ та проінтегруємо отриманий ряд в границях від –π до π. Аналогічно дістанемо:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx=b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\,dx=b_k\pi,$$

Звідки при $k=n$ маємо

$$\boxed{b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,\quad n=1,2,3,\ldots.} \qquad (1.34)$$

Числа a_0, a_n, b_n, які визначаються за формулами (1.32) − (1.34) для 2π-періодичної функції $f(x)$, називаються **коефіцієнтами Фур'є** даної функції за ортогональною тригонометричною системою (1.29), а тригонометричний ряд (1.30) з такими коефіцієнтами – **рядом Фур'є** функції $f(x)$.

Поки невідомі умови, при яких ряд Фур'є збігається і при цьому саме до даної функції, можна тільки стверджувати, що цей ряд породжений функцією, $f(x)$ та зв'язок з нею позначають так:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

На відміну від коефіцієнтів Тейлора, які визначаються диференціюванням функції нескінченну кількість разів у певній точці, коефіцієнти Фур'є обчислюються інтегруванням на проміжку, а тому клас функцій, які можна подати рядами Фур'є, набагато ширший. Більш того інтеграли (1.33) та (1.34) існують не тільки для неперервних функцій, а й для функцій, які мають скінченну кількість розривів першого роду або визначені різними виразами на різних проміжках. Це суттєво розширює клас функцій, які можна подати рядами Фур'є.

Функція $f(x)$, визначена на відрізку $[a;b]$, називається **кусково-неперервною**, якщо вона неперервна на цьому відрізку або має скінченну кількість точок розриву першого роду.

Функція $f(x)$ називається **кусково-монотонною** на відрізку $[a;b]$, якщо вона монотонна на цьому відрізку або відрізок $[a;b]$ можна розбити на скінченну кількість проміжків, на кожному з яких функція $f(x)$ монотонна.

Для кожної кусково-неперервної функції існує ряд Фур'є.

Теорема Діріхле (**достатня умова збіжності ряду Фур'є)**. Нехай $f(x)$ – 2π-періодична функція кусково-неперервна та кусково-монотонна на відрізку $[-\pi;\pi]$. Тоді ряд Фур'є цієї функції збіжний на відрізку $[-\pi;\pi]$ до функції $S(x)$, при цьому:

1) $S(x) = f(x)$ у всіх точках неперервності функції $f(x)$;

2) середньому арифметичному лівої та правої односторонніх границь функції $f(x)$ у кожній точці розриву всередині відрізку $[-\pi;\pi]$, тобто якщо $x = c$ є точкою розриву першого роду, то $S(c) = \dfrac{f(c-0) + f(c+0)}{2}$;

3) середньому арифметичному відповідних односторонніх границь функції $f(x)$ на кінцях відрізку $[-\pi;\pi]$: $S(\pi) = S(-\pi) = \dfrac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}$.

Приклад 1. Розкласти в ряд Фур'є 2π-періодичну функцію $f(x)$ (рис. 1.4).

Розв'язання. Задана функція (рис. 1.4) кусково-неперервна та кусково-монотонна на $[-\pi;\pi]$. Отже, вона задовольняє умови Діріхле.

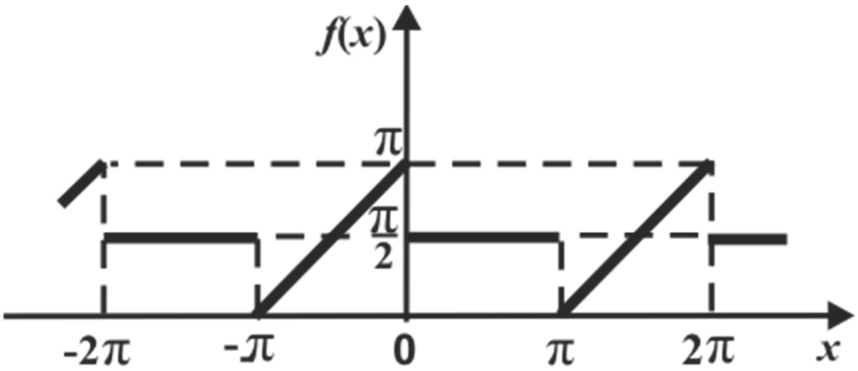

Рис. 1.4

Функція на відрізку $[-\pi;\pi]$ буде мати такий аналітичний вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & 0<x\le\pi,\\ x+\pi, & -\pi\le x\le 0.\end{cases}$$

Знайдемо коефіцієнти Фур'є цієї функції:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(\pi+x)dx+\int_{0}^{\pi}\frac{\pi}{2}dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\pi x+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2}x\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left(\pi^2-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}\frac{\pi}{2}\cos nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\cos nx\,dx+\int_{-\pi}^{0}\cos nx\,dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx=\left\{\begin{matrix}u=x & du=dx\\ dv=\cos nxdx & v=\dfrac{1}{n}\sin nx\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}=\frac{1}{n^2\pi}(1-(-1)^n)=\begin{cases}0, & n-\textit{парне}\\ \dfrac{2}{n^2\pi}, & n-\textit{непарне};\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)\sin nx\,dx+\int_{0}^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\sin nx\,dx+\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx=\left\{\begin{matrix}u=x & du=dx\\ dv=\sin nxdx & v=-\dfrac{1}{n}\cos nx\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\cos nx\,dx\right)-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{2n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}=$$

$$=-\frac{1}{n}(-1)^n-\frac{1}{n}(1-(-1)^n)+\frac{1}{2n}(1-(-1)^n)=-\frac{1}{n}(-1)^n-\frac{1}{2n}(1-(-1)^n)=$$

$$=-\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n}(-1)^n=-\frac{1}{2n}(1+(-1)^n)=\begin{cases}0, & \textit{при} \quad n-\textit{непарне},\\ -\dfrac{1}{n}, & \textit{при} \quad n-\textit{парне}.\end{cases}$$

Таким чином, ряд Фур'є для заданої функції буде мати вигляд

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x-\frac{1}{2n}\sin 2nx\right).$$

Ряди для парних і непарних функцій. Якщо функція $f(x)$, яку розкладають в ряд Фур'є на відрізку $[-\pi;\pi]$ буде парною або непарною, то це впливає на формули коефіцієнтів Фур'є (обчислення їх спрощується) та на вигляді самого ряду (він стає так званим **неповним)**.

Якщо $f(x)$ парна функція на $[-\pi;\pi]$, то $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=2\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx.$

Справді, за означенням парної функції маємо:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{\pi} f(x)dx=\int_{0}^{\pi} f(-x)\,dx+\int_{0}^{\pi} f(x)dx=$$

$$=\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx+\int_{0}^{\pi} f(x)dx=2\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx.$$

Так само можна довести, що коли $f(x)$ є непарною функцією, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{\pi} f(x)dx=\int_{0}^{\pi} f(-x)\,dx+\int_{0}^{\pi} f(x)dx=$$

$$=-\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx+\int_{0}^{\pi} f(x)dx=0.$$

Коли парна функція $f(x)$ розкладається в ряд Фур'є, то добуток $f(x)\sin nx$ є непарною функцією, а добуток $f(x)\cos nx$ − парною функцію. Таким чином,

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx, \qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=0.$$

Отже, ряд для парної функції містить лише «косинуси»:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Коли непарна функція $f(x)$ розкладається в ряд Фур'є, то $f(x)\cos nx$ є непарною, а $f(x)\sin nx$ − парною функцією. Отже,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Таким чином, ряд Фур'є для непарної функції містить лише «синуси»:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Приклад 2. Розкласти функцію $f(x) = |\sin x|$ в ряд (рис. 1.5).

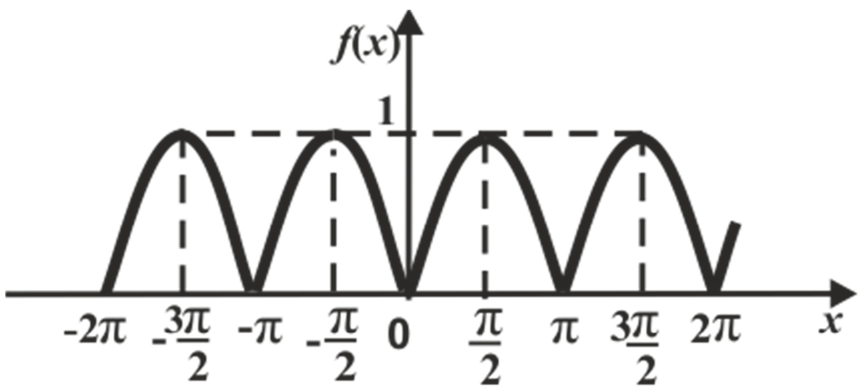

Рис. 1.5

Розв'язання. Графік такої функції отримаємо з графіка функції $f(x)\sin x$ на проміжку $(0;\pi)$, продовжимо її парним способом на проміжку $(-\pi;0)$, тоді $b_k = 0$. Визначимо інші коефіцієнти ряду Фур'є:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\,dx = -\frac{2}{\pi}\cos x\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi};$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(n+1)x + \sin(1-n)x]dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(1-n)x}{1-n}\right]\Bigg|_0^{\pi} = \frac{-2}{\pi(n^2-1)}[(-1)^n + 1] = \begin{cases} 0, & n - \textit{непарне}, \\ -\dfrac{4}{\pi(n^2-1)}, & n - \textit{парне}. \end{cases}$$

Отже,

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx.$$

Приклад 3. Розкласти в ряд за синусами функцію $f(x)=x^2$ $(0\le x\le\pi)$.

Розв'язання. Продовжимо цю функцію непарним способом на відрізок $[-\pi;0]$, а потім періодично з періодом 2π на всю дійсну вісь. Тоді ряд Фур'є для функції $f_1(x)=\begin{cases}-x^2, & -\pi\le x\le 0,\\ x^2, & 0<x\le\pi.\end{cases}$ буде складатися тільки із синусів: $a_0=a_n=0$;

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{=}^{\pi} x^2\sin nx\,dx=\left\{\begin{matrix} u=x^2 & du=2xdx\\ dv=\sin nxdx & v=-\dfrac{1}{n}\cos nx\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x^2}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx\right)=\left\{\begin{matrix} u=x & du=dx\\ dv=\cos nxdx & v=\dfrac{1}{n}\sin nx\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^2}{n}(-1)^n+\frac{2}{n}\Big(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\Big)\right)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{n}(-1)^{n+1}+\frac{2}{n^3}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1}+\frac{4}{\pi n^3}[(-1)^n-1].$$

Рядом Фур'є для заданої функції буде такий ряд:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1}+\frac{4}{n^3\pi}[(-1)^n-1]\right)\sin nx.$$

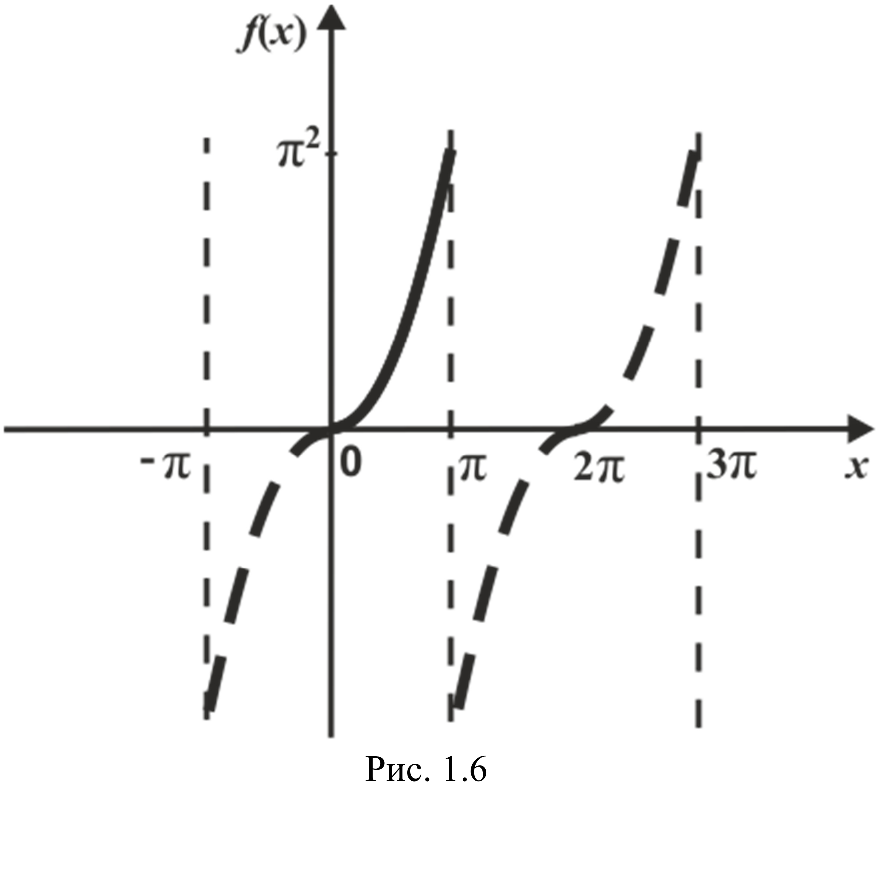

Рис. 1.6

Ряд Фур'є для функції з довільним періодом. Розглянемо періодичну функцію $f(x)$ з довільним періодом $T = 2l$, взагалі кажучи, відмінним від 2π.

Нехай функція $f(x)$, визначена на відрізку $[-l;l]$, має період $2l$ (де l − довільне додатне число) та задовольняє на цьому відрізку умови Діріхле.

Підстановка $x = \dfrac{l}{\pi}t$ перетворить дану функцію $f(x)$ у функцію, яка визначена на відрізку $[-\pi;\pi]$ та має період $T = 2\pi$.

Дійсно, якщо $t = -\pi$, то $x = -l$, якщо $t = \pi$, то $x = l$ і при $-\pi < t < \pi$ маємо $-l < x < l$; $\varphi(t+2\pi) = f(\dfrac{l}{\pi}t + 2l) = f(\dfrac{lt}{\pi}) = \varphi(t)$, тобто $\varphi(t+2\pi) = \varphi(t)$.

Розклад функції $\varphi(t)$ в ряд Фур'є на відрізку $[-\pi;\pi]$ має вигляд

$$\varphi(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

де $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,dt$, $\quad a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos nt\,dt$, $\quad b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin nt\,dt \quad (n = 1,2,\ldots)$.

Повертаючись до змінної x та помітивши, що $t = \dfrac{\pi x}{l}$, $dt = \dfrac{\pi}{l}dx$, дістанемо

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right),} \tag{1.35}$$

де

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad (n = 1,2,\ldots), \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad (n = 1,2,\ldots). \end{aligned} \tag{1.36}$$

Ряд (1.35) з коефіцієнтами, що обчислюються за формулами (1.36), називається рядом Фур'є для функції $f(x)$ з періодом $T = 2l$.

З а у в а ж е н н я. Усі теореми, наведені для ряду Фур'є 2π-періодичних функцій, справджуються також для періодичних функцій з періодом $T = 2l$. У тому числі виконуються достатні умови розкладання функції в ряд Фур'є, а також зауваження щодо розкладання парних і непарних функцій. Так, для парної $2l$-періодичної функції маємо такі формули:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l},$$

де $a_0 = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\,dx$, $\quad a_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}\,dx, \quad (n = 1,2,\ldots)$;

Якщо $f(x)$ − непарна функція, то

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

де $\quad b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad (n=1,2,\ldots).$

Приклад 4. Розкласти функцію $f(x)=|x|$ у проміжку $-2<x<2$ в ряд Фур'є.

Розв'язання. Функція $f(x)=|x|$ парна, тому $b_n=0$. Знайдемо інші коефіцієнти Фур'є цієї функції:

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 x\,dx=2; \quad a_n=\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\left\{\begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=\cos\frac{n\pi x}{2}dx & v=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x\Big|_0^2-\int_0^2\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x\,dx=\frac{4}{n\pi}\sin n\pi+\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}x\Big|_0^2=$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)=\frac{4}{n^2\pi^2}((-1)^n-1)=\begin{cases}0, & n-\textit{парне},\\ -\frac{8}{\pi^2 n^2}, & n-\textit{непарне}.\end{cases}$$

Шуканий ряд запишеться у вигляді

$$|x|=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{\pi(2n-1)}{2}x.$$

Розкладання неперіодичних функцій у ряд Фур'є. Нехай $f(x)$ − неперіодична функція, задана на всій числовій осі $(-\infty<x<\infty)$.

Таку функцію неможна розкласти в ряд Фур'є, тому що сума ряду Фур'є – функція періодична і не може дорівнювати $f(x)$ для всіх x.

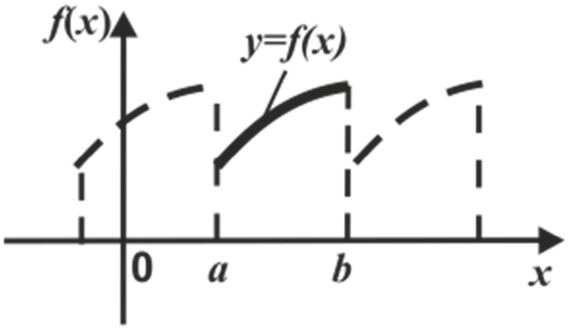

Рис. 1.7

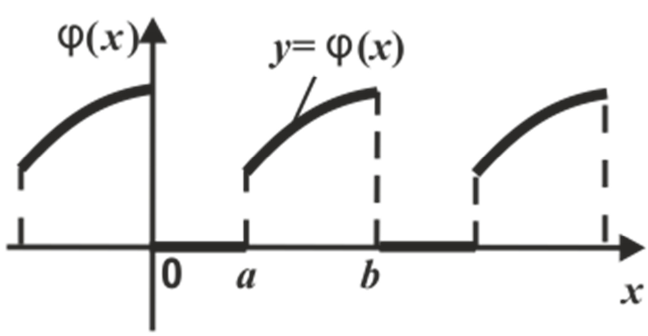

Рис. 1.8

Проте, неперіодична функція може бути подана у вигляді ряду Фур'є на будь-якому скінченному відрізку $[a;b]$, на якому вона задовольняє умови

Діріхле. З цією метою функцію формально роблять періодичною, продовжуючи її на всю числову вісь з деяким періодом, наприклад, $T = 2l = |b-a|$ (рис. 1.7). Ряд Фур'є, побудований для утвореної у такий спосіб періодичної функції, має сенс тільки на проміжку $(a;b)$, де спочатку задана функція $f(x)$.

Операція періодичного продовження функції неоднозначна. Так, у випадку $0 < a < b$, поклавши $f_1(x) = \begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad 0 < x < a, \\ f(x), & \textit{якщо} \quad a < x < b, \end{cases}$ $\quad f_1(x+b) = f_1(x)$,

дістанемо нову функцію (рис.1.8), яка відрізняється від зображеної на рис. 1.7.

Розкладаємо функцію $f_1(x)$ в ряд Фур'є. Сума цього ряду в усіх точках відрізку $[a;b]$ (окрім точок розриву) збігається із заданою функцією $f(x)$. Поза цим відрізком сума ряду і $f(x)$ зовсім різні функції.

Якщо проміжок $(a;b)$ розміщено повністю праворуч або ліворуч від початку координат, то функцію можна спочатку доозначити парним або непарним способом і потім періодично продовжити на всю числову вісь. У першому випадку функція буде розкладена в ряд Фур'є за косинусами, а в другому – за синусами.

Приклад 5. Розкласти в ряд Фур'є за синусами функцію

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1, \\ 2 - x, & 1 \le x < 2. \end{cases}$$

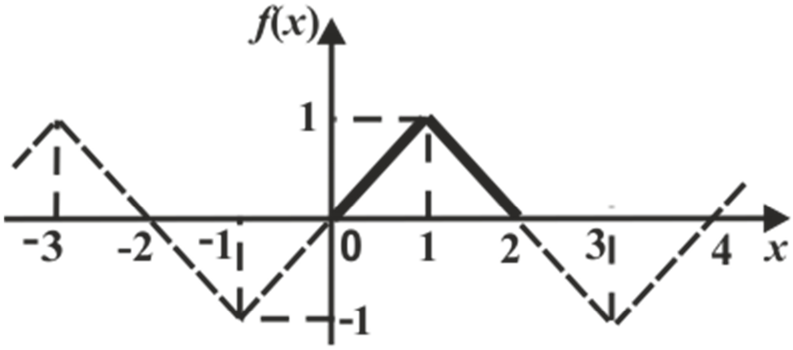

Рис. 1.9

Розв'язання. На відрізку дана функція кусково-неперервна та кусково-монотонна, тому задовольняє умови Діріхле. Доозначимо функцію $f(x)$ так, щоб на проміжку $(-2;2)$ вона стала непарною, а потім продовжимо її на всю вісь з періодом $T = 4$, $l = T/2 = 2$ (рис. 1.9). Тоді ряд Фур'є для функції буде складатися тільки із синусів: $a_0 = a_n = 0$;

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{2}\int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx + \frac{2}{2}\int_1^2 (2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx =$$

$$=\left\{\begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=\sin\frac{n\pi x}{2}dx & v=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2} \end{matrix}\right\}=-\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}x\Big|_0^1+\frac{2}{n\pi}\int_0^1\cos\frac{n\pi x}{2}dx+$$

$$+2\int_1^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx-\int_1^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1-\frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2+\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2-$$

$$-\frac{2}{n\pi}\int_1^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2=$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{n^2\pi^2}(\sin n\pi-\sin\frac{n\pi}{2})=\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}=$$

$$=\begin{cases} 0, & n-\textit{парне}, \\ (-1)^n\dfrac{8}{\pi^2 n^2}, & n-\textit{непарне}. \end{cases}$$

Таким чином, рядом Фур’є для даної функції буде ряд:

$$f(x)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\frac{\pi(2n+1)x}{2}.$$

Розділ 2. АУДИТОРНІ ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ

2.1. Поняття збіжності числового ряду Знакододатні ряди

Питання для перевірки теоретичних знань

1. Сформулювати означення суми ряду.

2. Сформулювати необхідну ознаку збіжності ряду.

3. Сформулювати достатні ознаки збіжності: ознаку почленного порівняння; граничну ознаку порівняння; ознаку Даламбера; радикальну ознаку Коші; інтегральну ознаку Коші.

Завдання для аудиторної роботи (з розв'язками)

Приклад 1. Записати ряд за його загальним членом $u_n = \dfrac{n}{10^n + 1}$.

Розв'язання. Обчислимо $u_1, u_2, u_3, \ldots$, надаючи n послідовних значень $1, 2, 3, \ldots$. Тоді дістанемо ряд у розгорнутому вигляді:

$$\frac{1}{11} + \frac{2}{101} + \frac{3}{1001} + \frac{4}{10001} + \ldots .$$

Приклад 2. Записати загальний член ряду $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{5}{2^3} + \dfrac{7}{2^4} + \ldots$.

Розв'язання. Чисельники утворюють арифметичну прогресію $1, 3, 5, \ldots$; n-й член прогресії знаходимо за формулою $a_n = a_1 + d(n-1)$. У нашому випадку $a_1 = 1$, $d = 2$, тому $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$. Знаменники утворюють геометричну прогресію $2, 2^2, 2^3, \ldots$, n-й член цієї прогресії $b_n = 2^n$. Отже, загальний член ряду буде $u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$.

Приклад 3. Записати загальний член ряду $\dfrac{2}{3} + (\dfrac{3}{7})^2 + (\dfrac{4}{11})^3 + (\dfrac{5}{15})^4 + \ldots$.

Розв'язання. Показники степеня кожного члена ряду збігаються з номером цього члена; чисельники та знаменники утворюють арифметичні прогресії з $a_1 = 2$, $d = 1$ та $a_1 = 3$, $d = 4$ відповідно. Отже, $u_n = (\dfrac{n+1}{4n-1})^n$.

Приклад 4. Знайти суму ряду $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots$.

Розв'язання. ***З***агальний член ряду $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ виразимо через елементарні дроби $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{A}{n} + \dfrac{B}{n+1}$. Обчислимо невизначені коефіцієнти

$A = 1, B = -1$ та отримаємо $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}$, тобто $u_n = (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$ і

$$S_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) + \ldots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Тоді $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1$.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n+2}$.

Розв'язання. Знайдемо границю n-го члена: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+2} = 2 \neq 0$.

Отже, не виконується необхідна ознака збіжності – ряд розбіжний.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$.

Розв'язання. Застосуємо ознаку почленного порівняння рядів з додатними членами. Для порівняння візьмемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ збіжний, як геометрична прогресія із знаменником $q = \frac{1}{3} < 1$. Загальний член заданого ряду не більший від загального члена збіжного геометричного ряду: $\frac{1}{n \cdot 3^n} \le \frac{1}{3^n}$, тому досліджуваний ряд збігається.

Приклад 7. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

Розв'язання. Оскільки $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбіжний, як гармонічний, то заданий ряд також розбіжний за ознакою почленного порівняння.

Приклад 8. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{8n^3 + 3n + 5}$.

Розв'язання. Порівняємо n-й член заданого ряду з n-м членом ряду узагальненого гармонічного ряду при $\alpha = 2$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+5}{8n^3 + 3n + 5} : \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 5n^2}{8n^3 + 3n + 5} = \frac{3}{8}.$$

Оскільки знайдено додатну границю, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збіжний, то за граничною ознакою порівняння заданий ряд також збіжний.

Приклад 9. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$.

Розв'язання. Ряди, члени яких містять вирази, що зв'язані з факторіалом, зручно досліджувати на збіжність за допомогою ознаки Даламбера.

Маємо $u_n = \frac{10^n}{n!}$, $u_n = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!}$ та обчислюємо границю

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\leftarrow\infty} \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{10^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n+1} = 0 < 1.$$

Таким чином, досліджуваний ряд збіжний, оскільки значення границі менше за одиницю.

Приклад 10. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$.

Розв'язання. Запишемо n-й та $(n+1)$-й члени даного ряду: $u_n = \frac{n^3}{2^n}$, $u_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}$. Тепер застосуємо ознаку Даламбера та знайдемо границю: $\lim_{n\leftarrow\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1.$

Отже, згідно з ознакою Даламбера досліджуваний ряд збіжний.

Приклад 11. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+2}{n^3+n+1}}$.

Розв'язання. Загальний член ряду $u_n = \sqrt{\frac{n+2}{n^3+n+1}}$ є алгебраїчним виразом. У цьому випадку для порівняння зручно вибрати гармонічний ряд і застосувати ознаку порівняння в граничній формі:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+2}{n^3+n+1}} : \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^3+2n^2}{n^3+n+1}} = 1.$$

Оскільки гармонічний ряд розбіжний, то й даний ряд також розбіжний.

Приклад 12. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^3+5n-6}{9n^3-2n^2+23}\right)^n$.

Розв'язання. Загальний член ряду являє собою степенево-показникову функцію, тому зручно скористатися радикальною ознакою Коші, оскільки

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{3n^3+5n-6}{9n^3-2n^2+23},$$

границю останнього виразу обчислити легко:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+5n-6}{9n^3-2n^2+23}=\frac{1}{3}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}<1$, то даний ряд збіжний.

Приклад 13. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Розв'язання. За радикальною ознакою Коші маємо

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)\frac{n}{-(n+1)}} = e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)}} = e^{-1} = \frac{1}{e}<1.$$

Отже, даний ряд збіжний.

Приклад 14. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$.

Розв'язання. Застосуємо інтегральну ознаку Коші. Покладемо $f(n)=u_n$, $f(x)=\frac{1}{x\ln x\ln\ln x}$ – неперервна, додатна та монотонна функція при $x\ge 3$.

Обчислимо невласний інтеграл: $\int\limits_3^{\infty}\frac{1}{x\ln x\ln\ln x}dx = \int\limits_3^{\infty}\frac{d(\ln\ln x)}{\ln\ln x} = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_3^{b}\frac{d(\ln\ln x)}{\ln\ln x} =$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\ln\left|\ln\ln x\right|\Big|_3^b\right) = \lim_{b\to\infty}(\ln\ln\ln b-\ln\ln\ln 3)=\infty.$$

Невласний інтеграл виявився розбіжним, то даний ряд також розбіжний.

Приклад 15. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(3n+1)}$.

Розв'язання. Врахуємо ознаку почленного порівняння рядів з додатними членами $\frac{1}{n\ln^2(3n+1)}<\frac{1}{n\ln^2 3n}$ та спробуємо довести збіжність ряду $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 3n}$, для чого застосуємо інтегральну ознаку Коші:

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x\ln^2 3x}dx = = \int_1^{\infty}\frac{d(\ln 3x)}{\ln^2 3x}dx = -\frac{1}{\ln 3x}\Bigg|_1^{\infty} = \frac{1}{\ln 3}.$$

Оскільки невласний інтеграл виявився збіжним, збіжним також є ряд

$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 3n}$, а за ознакою почленного порівняння рядів з додатними членами

збіжним є й даний ряд $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 (3n+1)}$.

Домашнє завдання

1. Записати найпростішу формулу загального члена ряду.

1) $\frac{1}{11} + \frac{2}{102} + \frac{3}{1003} + \frac{4}{10004} + \ldots$. 2) $\frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{7}{10} + \frac{10}{17} + \ldots$.

3) $\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} + \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 11} + \frac{7 \cdot 9}{8 \cdot 15} + \ldots$. 4) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots$.

Відповіді. 1) $\frac{n}{10^n + n}$. 2) $\frac{3n-2}{n^2+1}$. 3) $\frac{(2n-1)(2n+1)}{2n(4n-1)}$. 4) $\frac{1}{[3+(-1)^n]^n}$.

2. Записати кілька перших членів ряду.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{\sqrt{n \cdot 3^n}}$. 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n^2+1} \right)^n$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n}$.

Відповіді.

1) $\frac{2}{1} + \frac{2^2}{1 \cdot 2} + \frac{2^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots$. 2) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} + \frac{9}{\sqrt{3 \cdot 3^3}} + \frac{13}{\sqrt{4 \cdot 3^4}} + \ldots$.

3) $\frac{1}{4} + \left(\frac{3}{13} \right)^2 + \left(\frac{5}{28} \right)^3 + \left(\frac{7}{49} \right)^4 + \ldots$. 4) $0 + 1 + 0 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{3} + \ldots$.

3. Дослідити дані ряди на збіжність, обчисливши суму ряду або врахувуючи необхідну умову збіжності.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{4n-5}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{\sqrt[3]{n^3+2n+5}}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

Відповіді. 1) Розбіжний. 2) $\frac{1}{4}$. 3) Розбіжний. 4) 1.

4. Дослідити на збіжність ряди.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+1}{4n^3-5}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{4n^2+3}$. 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+3}{(2n^2-3n+3)^2}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2n}$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+4}$. 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}$. 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5} \right)^n$. 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$.

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$. 10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$. 11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^n}$. 12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n\, n!}{n^n}$.

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{2n-1}\right)^{n}$. 14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$. 15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{\left(\dfrac{2n^2+1}{5n^2+3}\right)^{n}}$. 16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{3^n}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\,ln^2(3n+1)}$. 18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{arctg\,n}{n^2+1}$. 19) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\arcsin^n\dfrac{\pi}{4n}$. 20) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(1+\ln^2 n)}$.

Відповіді. 1) Розбіжний. 2) Розбіжний. 3) Збіжний. 4) Збіжний. 5) Збіжний. 6) Збіжний. 7) Збіжний. 8) Розбіжний. 9) Збіжний. 10) Розбіжний. 11) Збіжний. 12) Розбіжний. 13) Збіжний. 14) Збіжний. 15) Збіжний. 16) Збіжний. 17) Розбіжний. 18) Збіжний. 19) Збіжний. 20) Збіжний.

2.2. Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжності

Питання для перевірки теоретичних знань

1. Навести означення знакозмінного і знакопочережного ряду.
2. Сформулювати теорему Лейбніца.
3. Навести означення абсолютно збіжного ряду.
4. Навести означення умовно збіжного ряду.
5. Властивості абсолютно збіжних рядів.

Завдання для аудиторної роботи (з розв’язками)

Приклад 1. Дослідити ряд на абсолютну збіжність:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots\ .$$

Розв’язання. Оскільки члени ряду спадають за абсолютною величиною, а загальний член ряду прямує до нуля, $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\leftarrow\infty}\dfrac{1}{n}=0$, то ряд збіжний за теоремою Лейбніца.

Щоб з’ясувати питання про абсолютну збіжність, розглянемо ряд з абсолютних величин членів даного ряду:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots\ .$$

Маємо гармонічний ряд, який є розбіжним, отже, даний ряд є умовно збіжним рядом.

Приклад 2. Дослідити на абсолютну збіжність ряд:

$$\frac{1}{2^3}-\frac{1}{5^3}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{17^3}+\frac{1}{26^3}-\frac{1}{37^3}-\dots\ .$$

Розв’язання. Даний ряд знакозмінний. Для дослідження на абсолютну збіжність розглянемо ряд, що складається з абсолютних величин членів даного ряду:

$$\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{17^3}+\frac{1}{26^3}+\frac{1}{37^3}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+1)^3}.$$

Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n^2+1)^3}=0$ (виконується необхідна умова збіжності) та $\frac{1}{(n^2+1)^3}\le\frac{1}{n^2}$. Оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – збіжний (узагальнений гармонічний ряд), то даний ряд абсолютно збіжний.

Приклад 3. Дослідити на абсолютну збіжність ряд:

$$1-\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^3+\left(\frac{4}{7}\right)^4+\left(\frac{5}{9}\right)^5-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n.$$

Розв'язання. Даний ряд знакозмінний. Складемо ряд з абсолютних величин членів даного ряду:

$$1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^3+\left(\frac{4}{7}\right)^4+\left(\frac{5}{9}\right)^5+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n.$$

Для отриманого знакододатного ряду застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-2}=\frac{1}{2}<1.$$

Таким чином, знакододатний ряд збігається за радикальною ознакою Коші та даний ряд абсолютно збіжний за загальною достатньою ознакою збіжності знакозмінних рядів.

Приклад 4. Дослідити на абсолютну збіжність ряд

$$\frac{1}{2^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}-\frac{1}{11^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(3n-1)^2}.$$

Розв'язання. Ряд задовольняє теорему Лейбніца ($\frac{1}{2^2}>\frac{1}{5^2}>\frac{1}{8^2}>\ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(3n-1)^2}=0$) і тому є збіжним. Розглянемо ряд з абсолютних величин членів даного ряду і застосуємо інтегральну ознаку Коші:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{11^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)^2};\qquad \int_1^{\infty}\frac{1}{(3x-1)^2}dx=\left(-\frac{1}{3(3x-1)}\right)\Bigg|_1^{\infty}=\frac{1}{6}.$$

За інтегральною ознакою Коші останній ряд збіжний, а заданий ряд абсолютно збіжний.

Приклад 5. Оцінити похибку, яка виникає, якщо замінити суму ряду $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ сумою його перших ста членів.

Розв'язання. Даний ряд задовольняє теорему Лейбніца, тому він збіжний, а похибка $R_n = \frac{1}{101} - \frac{1}{102} + \frac{1}{103} - \ldots$ не перевищує за модулем першого з відкинутих членів: $|R_n| = |S - S_{100}| < \frac{1}{101}$.

Домашнє завдання

Визначити абсолютну чи умовну збіжність ряду або його розбіжність:

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$. 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^2 n}$. 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$. 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{3n+7}$. 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{(n+1)^2 + n}$. 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\sqrt{n}}{n+100}$. 8) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!}$.

9) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{5n-2}$. 10) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n-1}$. 11) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$. 12) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^n$.

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3^n}{(n+1) 7^n}$. 14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{5^n}$. 15) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(\frac{n+1}{n+2} \right)$.

Відповіді. 1) Умовно збіжний. 2) Абсолютно збіжний. 3) Абсолютно збіжний. 4) Абсолютно збіжний. 5) Розбіжний. 6) Умовно збіжний. 7) Умовно збіжний. 8) Абсолютно збіжний. 9) Розбіжний. 10) Умовно збіжний. 11) Абсолютно збіжний. 12) Абсолютно збіжний. 13) Абсолютно збіжний. 14) Абсолютно збіжний. 15) Умовно збіжний.

2.3. Степеневі ряди. Розвинення функції в ряд Тейлора

Питання для перевірки теоретичних знань

1. Навести означення області збіжності функціонального ряду.
2. Навести означення мажоровного ряду.
3. Навести означення степеневого ряду.
4. Навести означення радіуса й проміжку збіжності степеневого ряду.
5. Записати ряд Тейлора для функції $f(x)$ в точці $x = a$.
6. Сформулювати необхідну і достатню умови збіжності ряду Тейлора.
7. Записати ряд Маклорена для функції $f(x)$.

Завдання для аудиторної роботи (з розв'язками)

Приклад 1. Знайти область збіжності та визначити суму ряду.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{1}{x^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}, \qquad (x \neq 0).$$

Розв'язання. Застосуємо ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{x^{n+1}}\right| = \frac{1}{|x|} < 1.$$

З останньої нерівності випливає, що при $|x|>1$ ряд збіжний, а при $|x|<1$ ряд розбіжний. Точки $x=\pm 1$ будемо досліджувати окремо, підставляючи значення ± 1 у заданий ряд:

1) при $x=1$: $1+1+1+\ldots$ маємо розбіжний числовий ряд (часткова сума дорівнює нескінченності);

2) при $x=-1$: $-1+1-1+\ldots$ ряд розбіжний, оскільки в цьому випадку не існує границі часткової суми.

Таким чином, область збіжності даного ряду складається з двох інтервалів $(-\infty;-1)$ та $(1;\infty)$. Врахуємо, що даний ряд при будь-яких значеннях $x\neq 0$ є геометричною прогресією зі знаменником $q=\frac{1}{x}$, тоді можна знайти суму ряду: $S(x)=\frac{u_1(x)}{1-q}=\frac{1}{x(1-\frac{1}{x})}=\frac{1}{x-1}$.

Отже, область збіжності ряду $(-\infty;-1)\bigcup(1;\infty)$, а сума ряду $S(x)=\frac{1}{x-1}$.

Приклад 2. Знайти в інтервалі $(-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ суму ряду

$$x+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{4n-3}}{4n-3}+\ldots .$$

Розв'язання. Цей ряд можна вважати утвореним почленним інтегруванням ряду:

$$1+x^4+x^8+\ldots+x^{4n-4}+\ldots=\frac{1}{1-x^4}\ ,$$

який є спадною геометричною прогресією зі знаменником $q=x^4$ і рівномірно збігається на даному проміжку, оскільки $\left|x^{4n-4}\right|<\frac{1}{2^{4n-4}}$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{4n-4}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2^4}}=\frac{2^4}{2^4-1}$ є мажорантним при $|x|<\frac{1}{2}$. За властивістю рівномірно збіжних рядів маємо:

$$\int_0^x(1+x^4+x^8+\ldots+x^{4n-4}+\ldots)dx=\frac{1}{2}arctgx-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|,\quad |x|<\frac{1}{2}.$$

Таким чином, сума заданого ряду $S(x)=\frac{1}{2}arctgx-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$.

Приклад 3. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n(n+1)}$.

Розв'язання. Знайдемо радіус збіжності за допомогою ознаки Даламбера:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}(n+2)}{3^n(n+1)}\right|=3.$$

Отже, інтервал збіжності заданого ряду $(-3;3)$.

Збіжність ряду в точках $x=-3$ та $x=3$ будемо перевіряти окремо.

1. Нехай $x=-3$, тоді знакочережний ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{3^n(n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$, збігається за ознакою Лейбніца.

2. При $x=3$ дістанемо $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{3^n(n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ та отримаємо гармонічний ряд, який є розбіжним.

Таким чином, область збіжності заданого ряду $[-3;3)$.

Приклад 4. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^2}$.

Розв'язання. Знайдемо радіус збіжності ряду:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\right|=1.$$

Визначимо інтервал збіжності :

$|x-3|<1 \quad\Rightarrow\quad -1<x-3<1 \quad\Rightarrow\quad 2<x<4$ або проміжок $(2;4)$.

З'ясуємо питання про збіжність ряду на кінцях проміжку.

1. При $x=2$ маємо ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, який збігається за теоремою Лейбніца.

2. При $x=4$ маємо $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, який також збігається $\left(\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{n}\Big|_1^{\infty}=1\right)$.

Таким чином, область збіжності заданого ряду є відрізок $[2;4]$

Приклад 5. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\,9^n}$.

Розв'язання. Знайдемо радіус збіжності ряду:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{9^{n+1}(n+1)}{n\,9^n}\right|=9.$$

Визначимо інтервал збіжності :

$(x-1)^2<9 \quad\Rightarrow\quad |x-1|<3 \quad\Rightarrow\quad -3<x-1<3 \quad\Rightarrow\quad -2<x<4$ або $(-2;4)$.

З'ясуємо питання про збіжність ряду на кінцях проміжку.

При $x=-2$ та $x=4$ маємо однаковий числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$, який є розбіжним, як гармонічний ряд.

Отже, область збіжності заданого ряду є проміжок $(-2;4)$.

Приклад 6. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=xe^{-2x}$ та визначити інтервал збіжності.

Розв'язання. Запишемо відомий розклад функції $f(x)=e^{x}$ в ряд Маклорена $e^{x}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Перейдемо до розкладу функції $f(x)=e^{-2x}$, замінюючи у попередньому ряду x на $(-2x)$

$$e^{-2x}=1+(-2x)+\frac{(-2x)^2}{2!}+\frac{(-2x)^3}{3!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^n}{n!}.$$

А тепер маємо ряд для функції $f(x)=xe^{-2x}$ у вигляді

$$xe^{-2x}=x-2x^2+\frac{2^2x^3}{2!}-\frac{2^3x^4}{3!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^nx^{n+1}}{n!}.$$

Обчислимо радіус збіжності $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n(n+1)!}{n!2^{n+1}}\right|=\infty.$

Таким чином, інтервал збіжності знайденого ряду буде $(-\infty;\infty)$.

Приклад 7. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=\cos^2 x$ та вказати інтервал збіжності.

Розв'язання. Подамо дану функцію формулою $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ та використаємо розкладання функції $f(x)=\cos x$ в ряд Маклорена:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Послідовно дістанемо розкладання таких функцій:

$$\cos 2x=1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!};$$

$$1-\cos 2x=\frac{(2x)^2}{2!}-\frac{(2x)^4}{4!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!};$$

$$\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{2x^2}{2!}-\frac{2^3x^4}{4!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}.$$

Отже, $\cos^2 x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}$.

Знайдемо радіус збіжності отриманого ряду $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{2^{2n-1}(2n+2)!}{(2n)\,!2^{n+1}} \right| = \infty.$

Ряд збіжний на всій числовій осі.

Приклад 8. Розкласти функцію $f(x) = \ln(4 + 3x - x^2)$ у ряд Тейлора в околі точки $x_0 = 3$.

Розв'язання. Враховуючи, що $4 + 3x - x^2 = (4 - x)(x + 1)$, покладемо $x - 3 = t$, дістанемо:

$$f(x) = g(t) = \ln(1 - t)(4 + t) = \ln 4 + \ln(1 - t) + \ln(1 + \frac{t}{4}).$$

Використовуючи формулу $\ln(1 + x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad -1 < x < 1,$

отримаємо $g(t) = \ln 4 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{t^n}{n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{t^n}{4^n n}.$

Остаточно дістанемо $f(x) = \ln 4 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\dfrac{(-1)^{n-1}}{4^n} - 1)\dfrac{1}{n}(x-3)^n.$

Радіус збіжності дорівнює 1.

Приклад 9. Розкласти функцію $f(x) = \dfrac{3}{(1-x)(1+2x)}$ за степенями x.

Розв'язання. Розклавши функцію на елементарні дроби, будемо мати:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+2x}.$$

Оскільки $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n,$

$$\frac{1}{1+2x} = 1 - 2x + (2x)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n.$$

Тоді остаточно маємо

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n 2^{n+1}) x^n.$$

Домашнє завдання

1. Вживаючи відомі розкладання функцій у ряд Маклорена, записати розкладання за степенями x таких функцій та визначити інтервали збіжності отриманих рядів:

1) e^{x^2}. 2) $\cos 2x$. 3) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$. 4) $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$. 5) $\ln(1+x-2x^2)$.

Відповіді.

1) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{n!}$, $(-\infty;\infty)$. 2) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}$, $(-\infty;\infty)$.

3) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^2}{2^3}+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\dfrac{x^4}{2^5}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\dfrac{x^6}{2^7}+\ldots+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\cdot\dfrac{x^{2n}}{2^{2n+1}}+\ldots$, $(-2;2)$.

4) $2\sum\limits_{n=o}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $(-1;1)$. 5) $\sum\limits_{n=o}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}2^2-1}{n}x^n$, $(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}]$.

2. Розкласти в ряд Маклорена функції:

1) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$. 2) $\sin^2 x$. 3) $\sin\dfrac{x}{2}$. 4) $\sqrt{1+x}$. 5) $\sqrt[3]{8-x^3}$. 6) $\ln(10+x)$.

Відповіді. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$. 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2^{2n-1}(2n-1)!}$.

4) $1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4\cdot 2!}x^2+\dfrac{1\cdot 3}{8\cdot 3!}x^3-\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{16\cdot 4!}+\ldots$.

5) $2-2\left[\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x}{2}\right)^3+\dfrac{2}{3^2 2!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^6+\ldots+\dfrac{2\cdot 5\ldots(3n-4)}{3^n\, n!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{3n}+\ldots\right]$.

6) $\ln 10+\left[\dfrac{x}{10}-\dfrac{x^2}{2\cdot 10^2}+\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n\cdot 10^n}+\ldots\right]$.

3. Розкласти в ряд Тейлора функції:

1) $\sin x$ за степенями $(x-\dfrac{\pi}{6})$; 2) $\ln x$ в околі точки $x=1$;

3) $\ln(x^2-4x+6)$ за степенями $(x-2)$; 4) $\dfrac{1}{x^2}$ за степенями $(x+1)$;

5) $\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ в околі точки $x=-4$; 6) $\ln x$ за степенями $(x-1)$.

Відповіді. 1) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-\dfrac{\pi}{6})-\dfrac{2}{2\cdot 2!}(x-\dfrac{\pi}{6})^2-\dfrac{\sqrt{3}}{2\cdot 3!}(x-\dfrac{\pi}{6})^3+\ldots$.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(x-1)^n}{n}$. 3) $\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(x-2)^{2n}}{n\,2^n}$.

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(x+1)^n$. 5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}-\dfrac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n$. 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(x-1)^n}{n}$.

2.4. Розвинення функції в ряд Фур’є

Питання для перевірки теоретичних знань

1. Записати ряд Фур’є та його коефіцієнти для 2π-періодичної функції.
2. Сформулювати теорему Діріхле.
3. Записати коефіцієнти ряду Фур’є для функції з довільним періодом.
4. Записати ряд Фур’є та його коефіцієнти для парної функції.
5. Записати ряд Фур’є та його коефіцієнти для непарної функції.

Завдання для аудиторної роботи (з розв’язками)

Приклад 1. Побудувати ряд Фур’є для функції $f(x)$ з періодом 2π, заданої на відрізку $[-\pi;\pi)$ рівнянням $f(x)=\pi+x$.

Розв’язання. Задана функція (рис. 2.1) є кусково-неперервною та кусково-монотонною на відрізку $[-\pi;\pi]$. Отже, вона задовольняє умови Діріхле.

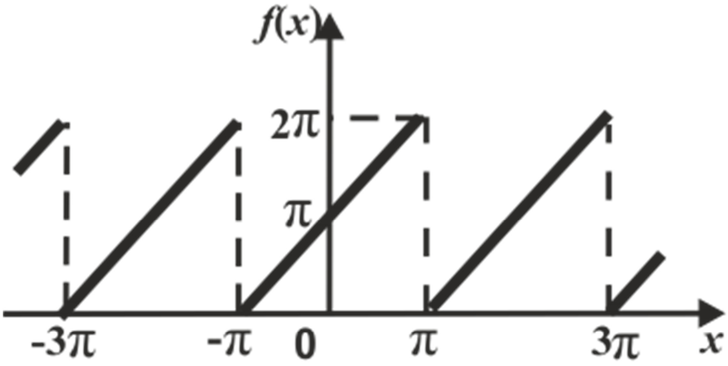

Рис. 2.1

Знайдемо коефіцієнти Фур’є цієї функції:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\pi x+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left(\pi^2+\frac{\pi^2}{2}+\pi^2-\frac{\pi^2}{2}\right)=2\pi.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi\cos nx+x\cos nx)dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=\cos nxdx & v=\dfrac{1}{n}\sin nx \end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right)=\frac{1}{n^2\pi}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=0.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi\sin nx+x\sin nx)dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=\sin nx dx & v=-\frac{1}{n}\cos nx \end{matrix}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx\right)=$$

$$=-\frac{1}{n}(\cos n\pi-\cos n\pi)+\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi-\frac{\pi}{n}\cos n\pi+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=$$

$$=-\frac{2}{n}\cos n\pi=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

Рядом Фур’є для даної функції буде ряд: $f(x)=\pi+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$.

Приклад 2. Побудувати ряд Фур’є для функції $f(x)$ з періодом 2π, заданої на відрізку $[-\pi;\pi]$ формулою $f(x)=|x|$ (рис. 2.2).

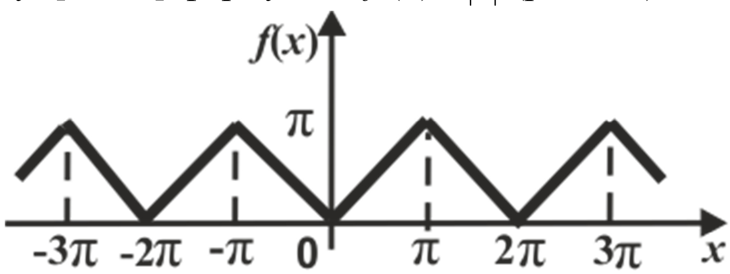

Рис. 2.2

Розв’язання. Знайдемо коефіцієнти Фур’є з урахуванням парності функції:

$$b_n=0;$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{2x^2}{2\pi}\Bigg|_0^{\pi}=\pi;$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=\begin{cases} 0, & \textit{парне } n, \\ -\dfrac{4}{\pi n^2}, & \textit{непарне } n. \end{cases}$$

Таким чином, ряд Фур’є має вигляд: $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

Приклад 3. Побудувати ряд Фур’є для функції $f(x)$ з періодом 2π, заданої на проміжку $[-\pi;\pi)$ формулою $f(x)=x$ (рис. 2.3).

Розв'язання. Задана функція є непарною кусково-неперервною та кусково-монотонною на відрізку $[-\pi;\pi)$. Тому вона розкладається в ряд Фур'є за синусами, тобто $a_0 = a_n = 0$.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \left\{\begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin nx dx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi} \right) = -\frac{2}{n}\cos n\pi = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

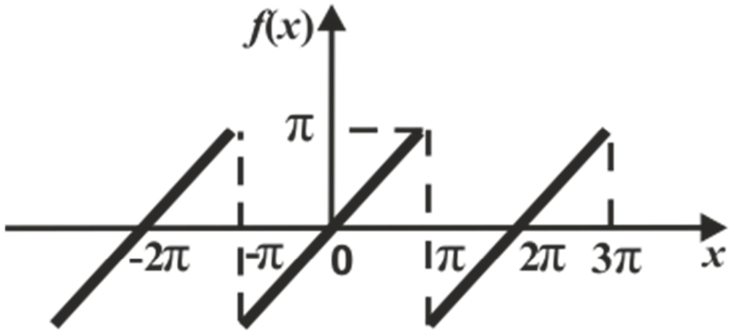

Рис. 2.3

Отже, $f(x) = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}.$

Приклад 4. Побудувати ряд Фур'є для функції $f(x)$ з періодом $T = 2$, заданої на відрізку $[-1;1]$ формулою $f(x) = x^2$ (рис. 2.4).

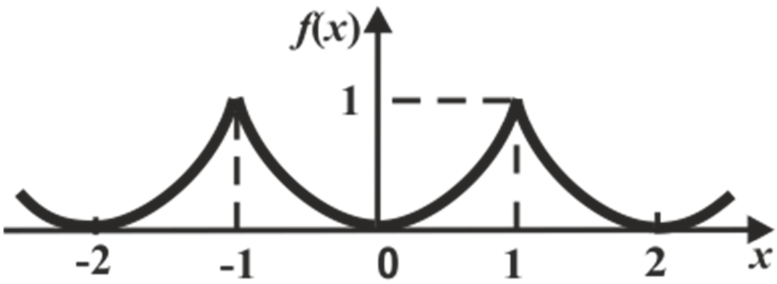

Рис. 2.4

Розв'язання. Задана функція є неперервною на проміжку $(-1;1)$ парною періодичною функцією з періодом, що не дорівнює 2π. Ряд Фур'є для такої функції буде містити тільки косинуси $(b_n = 0)$.

$$a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{1}\int_0^1 x^2\,dx = \frac{2x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

$$a_n = \frac{2}{1}\int\limits_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx = \frac{2}{1}\int\limits_0^1 x^2\cos n\pi x\,dx = \left\{ \begin{matrix} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = \cos n\pi x dx & v = \dfrac{1}{n\pi}\sin n\pi x \end{matrix} \right\} =$$

$$= 2\left(\frac{x^2}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int\limits_0^1 x\sin n\pi x\,dx \right) = \left\{ \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin n\pi x dx & v = -\dfrac{1}{n\pi}\cos n\pi x \end{matrix} \right\} =$$

$$= 2\left(-\frac{2}{n\pi}\left(-\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int\limits_0^1 \cos n\pi x\,dx \right)\right) = \frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi = (-1)^n\,\frac{4}{n^2\pi^2}.$$

Таким чином, $\quad f(x) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\dfrac{\cos n\pi x}{n^2}.$

Приклад 5. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)$ з періодом 2π, яка задана на відрізку $[-\pi;\pi]$, формулою

$$f(x) = \begin{cases} -x, \ -\pi \le x < 0, \\ 2x, \ \ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

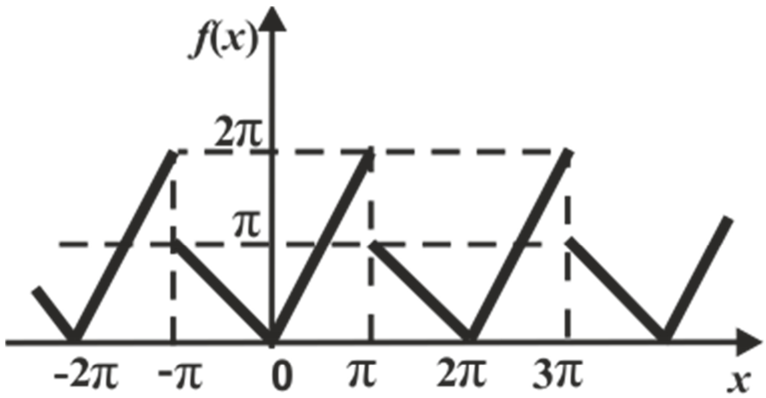

Рис. 2.5

Розв'язання. Задана функція задовольняє умови Діріхле (рис. 2.5), тому її можна розкласти в ряд Фур'є. Знайдемо коефіцієнти ряду:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}(-x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} 2x\,dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-\pi}^{0} + x^2\Big|_0^{\pi} \right) = \frac{3\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}(-x)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} 2x\cos nx\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} x\cos nx\,dx + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \left\{ \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos nx dx & v = \dfrac{1}{n}\sin nx \end{matrix} \right\} =$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n}\int\limits_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx\right)+\frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}-\frac{1}{n}\int\limits_{0}^{\pi}\sin nx\,dx\right)=$$

$$=-\frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}=-\frac{1}{n^2\pi}(1-\cos n\pi)+\frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi-1)=$$

$$=-\frac{3}{\pi n^2}(1-(-1)^n)=\begin{cases}0, & \text{парне } n,\\ -\dfrac{6}{\pi n^2}, & \text{непарне } n;\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}(-x)\sin nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}2x\sin nx\,dx=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}x\sin nx\,dx+\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}x\sin nx\,dx=\left\{\begin{matrix}u=x & du=dx\\ dv=\sin nx dx & v=-\dfrac{1}{n}\cos nx\end{matrix}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{n}\int\limits_{-\pi}^{0}\cos nx\,dx\right)+\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}+\frac{1}{n}\int\limits_{0}^{\pi}\cos nx\,dx\right)=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}\right)+\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}\right)=$$

$$=-\frac{1}{n}\cos n\pi=(-1)^{n+1}\frac{1}{n}.$$

Вихідній функції $f(x)$ відповідає ряд Фур’є

$$f(x)=\frac{3\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-6}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x+\frac{1}{n}(-1)^{n+1}\sin nx.$$

Приклад 6. Розкласти за косинусами в ряд Фур’є функцію $f(x)=2x-x^2$ на відрізку $[0;2]$.

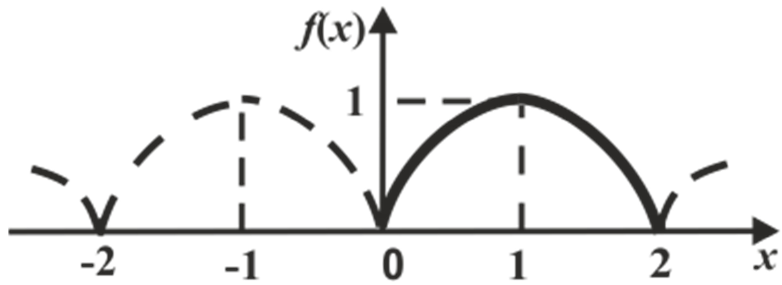

Рис. 2.6

Розв’язання. Продовжимо задану функцію на відрізку $[-2;0]$ парним способом (рис. 2.6). Будемо розкладати в ряд функцію

$$f_1(x)=\begin{cases}-2x-x^2, & -2\le x<0,\\ 2x-x^2, & 0\le x\le 2\end{cases}$$

з періодом $T=4$. Умови теореми Діріхле функція $f_1(x)$ задовольняє. Знаходимо коефіцієнти Фур'є: $b_n=0$;

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx=\frac{2}{2}\int_0^2(2x-x^2)\,dx=\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3};$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{2}\int_0^2(2x-x^2)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\left\{\begin{array}{ll} u=2x-x^2 & du=(2-2x)dx\\ dv=\cos\dfrac{n\pi x}{2}dx & v=\dfrac{2}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi x}{2}\end{array}\right\}=$$

$$=\left(\frac{2(2x-x^2)}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2-\frac{4}{n\pi}\int_0^2(1-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right)=$$

$$=\left\{\begin{array}{ll} u=1-x & du=-dx\\ dv=\sin\dfrac{n\pi x}{2}dx & v=-\dfrac{2}{n\pi}\cos\dfrac{n\pi x}{2}\end{array}\right\}=$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\left(-\frac{2(1-x)}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2-\frac{2}{n\pi}\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right)=-\frac{8}{n^2\pi^2}(1+(-1)^n).$$

Отже, $f(x)=\dfrac{2}{3}-\dfrac{16}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\cos\dfrac{n\pi x}{2}.$

Приклад 7. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)$, зображену на рис. 2.7.

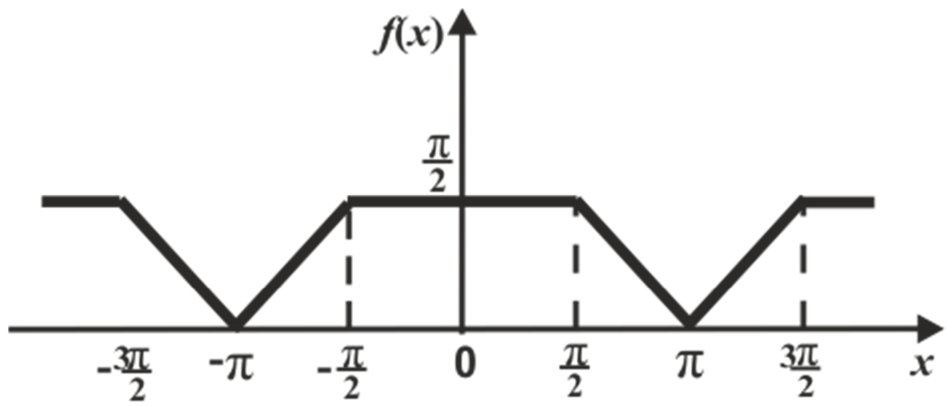

Рис. 2.7

Розв'язання. З рис. 2.7 бачимо, що задана функція парна періодична з періодом 2π та задовольняє умови теореми Діріхле. Запишемо її аналітичний вираз

$$f(x)=\begin{cases}\pi+x, & -\pi\le x\le -\pi/2,\\ \pi/2, & -\pi/2<x\le \pi/2,\\ \pi-x, & \pi/2<x\le\pi.\end{cases}$$

Знайдемо коефіцієнти Фур'є: $b_n=0$;

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\pi}{2}dx+\frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi-x)dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}x\Big|_0^{\pi/2}+(\pi x-\frac{x^2}{2})\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right)=\frac{3\pi}{4};$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\pi}{2}\cos nx\,dx+\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi-x)\cos nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\cos nx\,dx+\pi\int_{\pi/2}^{\pi}\cos nx\,dx-\int_{\pi/2}^{\pi}x\cos nx\,dx\right)=\left\{\begin{matrix}u=x & du=dx\\ dv=\cos nxdx & v=\frac{1}{n}\sin nx\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi/2}+\frac{2}{n}\sin nx\Big|_{\pi/2}^{\pi}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\pi}=\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{2}{n}\sin\frac{n\pi}{2}-$$

$$-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}\sin n\pi-\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2}\cos n\pi-\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}\right)=-\frac{2}{n^2\pi}\cos n\pi=-\frac{2}{n^2\pi}(-1)^n.$$

Таким чином, $f(x)=\frac{3\pi}{8}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}\cos nx.$

Домашнє завдання

1. Побудувати ряд Фур'є для функції $f(x)$ з періодом 2π, заданої на відрізку $[-\pi;\pi)$ формулами: $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x<0,\\ 0, & 0<x<\pi.\end{cases}$

2. Розкласти 2π-періодичну функцію $f(x)$, яка задана на відрізку $[-\pi;\pi]$ формулами: $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x\le 0,\\ 1, & 0\le x<\pi.\end{cases}$

3. Розкласти функцію $f(x)$ з періодом 2π, задану на відрізку $[-\pi;\pi]$ формулами: $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi\le x\le 0,\\ x, & 0\le x<\pi.\end{cases}$

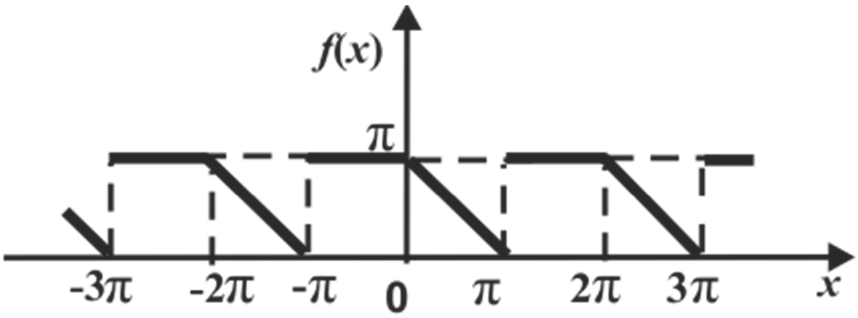

Рис. 2.8

4. Розкласти в ряд Фур'є 2π-періодичну функцію $f(x)$, яка зображена на рис. 2.8.

5. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=x$ на відрізку $[a;\, a+2l]$.

6. Розкласти в ряд Фур'є функцію

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1,\\ 1, & 1<x<2,\\ 3-x, & 2\le x\le 3.\end{cases}$$

7. Розкласти періодичну з періодом 2π функцію $f(x)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{2}$ в ряд Фур'є при $0<x<2\pi$.

8. Функція $f(x)=2$ задана на проміжку $(0;\pi)$. Розкласти цю функцію в ряд Фур'є, продовжуючи її на проміжку $(-\pi;0)$ непарним способом.

9. Функція $f(x)=x$ задана на проміжку $(0;1)$. Розкласти цю функцію в ряд Фур'є, продовжуючи її на проміжку $(-1;0)$ непарним способом.

10. Розкласти періодичну функцію $f(x)=|\cos x|$ в ряд Фур'є .

Відповіді

1. $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin nx}{n}.$

2. $\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x.$

3. $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx-\dfrac{(-1)^n}{n}((-1)^n-1+\pi)\sin nx.$

4. $\dfrac{3\pi}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin nx+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x.$

5. $a+l+\dfrac{2l}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{n\pi a}{l}\cos\dfrac{n\pi x}{l}-\cos\dfrac{n\pi a}{l}\sin\dfrac{n\pi x}{l}\right).$

6. $\dfrac{2}{3}-\dfrac{9}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\cos\dfrac{2n\pi x}{3}+\dfrac{1}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\cos 2\pi nx.$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin nx.$

8. $\dfrac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x.$

9. $\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}\sin n\pi x.$

10. $\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{4n^2-1}\cos 2nx.$

Розділ 3. ІНДИВІДУАЛЬНІ ДОМАШНІ ЗАВДАННЯ

Вариант 1

1. Знайти загальний член ряду $\frac{10}{7}+\frac{100}{9}+\frac{1000}{11}+\frac{10000}{13}+\dots$.

2. Знайти суми рядів: **а)** $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+12n-5}$.

3. Дослідити на збіжність ряди з додатними членами:

$$\textbf{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-3}{n^2+5};\quad \textbf{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)};\quad \textbf{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^n};\quad \textbf{г)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n^2+1}\right)^n .$$

4. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність знакозмінні ряди:

$$\textbf{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{5n-2};\quad \textbf{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+4};\quad \textbf{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{3^{n/2}} .$$

5. Знайти області збіжності рядів: **а)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{3^n(2n+1)}$.

6. Розкласти функцію $f(x)=\cos^2 x$ у ряд Маклорена.

7. Розкласти у ряд Фур'є функцію $f(x)$ з періодом $T=2\pi$:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при\ -\pi\le x<0\\ x, & при\ \ 0\le x\le\pi\end{cases}.$$

Відповіді

1. $\frac{10^n}{2n+5}$. **2а**. 1. **2б**. $\frac{7}{10}$. **3а**. Розбіжний. **3б**. Розбіжний. **3в**. Збіжний. **3г**. Збіжний. **4а**. Розбіжний. **4б**. Умовно збіжний. **4в**. Абсолютно збіжний. **5а**. $(-\infty;+\infty)$. **5б**. $[-5;1)$. **6**. $1+\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}$.

7. $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$.

Варіант 2

1. Знайти загальний член ряду $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\dots$ 0020.

2. Знайти суми рядів: **а)** $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\dots$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2+4n-3}$.

3. Дослідити на збіжність ряди з додатними членами:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n-1`}{2n-3}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n+1}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{2n+1})^n$; **г)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

4. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{5^{n/2}}$.

5. Знайти області збіжності рядів: **а)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{9n-15}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n5^n}$

6. Розкласти функцію $f(x)=\sin^3 x$ у ряд Маклорена.

7. Розкласти у ряд Фур'є функцію $f(x)$ з періодом $T=2\pi$:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при\ -\pi\le x<0\\ 1, & при\ \ 0\le x\le\pi\end{cases}.$$

Відповіді

1. $\frac{2n-1}{2n}$. **2а**. $\frac{1}{3}$. **2б**. $\frac{4}{3}$. **3а**. Розбіжний. **3б**. Збіжний. **3в**. Збіжний. **3г**. Збіжний. **4а**. Умовно збіжний. **4б**. Розбіжний. **4в**. Абсолютно збіжний. **5а**. $[-1;1)$. **5б**. $[-2;8)$. **6**. $\frac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3-3^{2n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}$.

7. $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x$.

Варіант 3

1. Знайти загальний член ряду $\frac{1}{2}+\frac{4}{5}+\frac{7}{10}+\frac{10}{17}+\dots$.

2. Знайти суми рядів: **а)** $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\dots$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-7n-12}$.

3. Дослідити на збіжність ряди з додатними членами:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+2n+1`}{5n^2+2n+1}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-2}{n^4+5n}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$; **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

4. Дослідити на абсолютну або умовну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{5^{n/2}}$**.**

5. Знайти області збіжності рядів: **а)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt[3]{7n^3-4}}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$.

6. Розкласти функцію $f(x) = x^2 \sin\frac{x}{2}$ у ряд за степенями x.

7. Розкласти у ряд Фур'є функцію $f(x)$ з періодом $T = 2\pi$:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & при \quad -\pi \le x < 0 \\ 3, & при \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}.$$

Відповіді

1. $\frac{3n-2}{n^2+1}$. **2а**. $\frac{1}{2}$. **2б**. $\frac{1}{3}$. **3а**. Розбіжний. **3б**. Збіжний. **3в**. Збіжний. **3г.** Розбіжний. **4а**. Абсолютно збіжний. **4б.** Умовно збіжний. **4в**. Абсолютно збіжний. **5а**. $(-1;1]$. **5б**. $[-2;8)$. **6**. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+3}}{2^{2n+1}(2n+1)!}$.

7. $f(x) = 2 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)x$.

Варіант 4

1. Знайти загальний член ряду $-\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots$.

2. Знайти суми рядів: **а)** $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \dots$; **б)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n^2+8n+3}$.

3. Дослідити на збіжність ряди з додатними членами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{7n^2+1}$; **б)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3n^2-2n}$; **в)** $\sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^{n^2}$; **г)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$.

4. Дослідити на абсолютну або умовну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n}$; **б)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!}{5^n}$; **в)** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2n+1}$.

5. Знайти області збіжності рядів: **а)** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{(n+1)^2 e^{n-1}}$; **б)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}$.

6. Розкласти функцію $f(x) = e^{-x^2}$ у степеневий ряд за степенями x.

7. Розкласти у ряд Фур'є функцію $f(x)$ з періодом $T = 2\pi$:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & при \quad -\pi \le x < 0 \\ 1, & при \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}.$$

Відповіді

1. $(-1)^n \frac{1}{2n+1}$. **2а**. $\frac{1}{4}$. **2б**. $\frac{1}{3}$. **3а**. Розбіжний. **3б**. Розбіжний. **3в**. Розбіжний. **3г**. Розбіжний. **4а**. Абсолютно збіжний. **4б**. Умовно збіжний. **4в**. Розбіжний. **5а**. $[-e;e]$. **5б**. $[0;4)$. **6**. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n}}{n!}$.

7. $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x.$

Варіант 5

1. Знайти загальний член ряду $-1+\dfrac{2}{2}-\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{8}-\dots$.

2. Знайти суми рядів: **а)** $\dfrac{1}{1\cdot3\cdot5}+\dfrac{1}{3\cdot5\cdot7}+\dfrac{1}{5\cdot7\cdot9}+\dots$; **б)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+n-2}.$

3. Дослідити на збіжність ряди з додатними членами:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+2n}{\sqrt{n(n+1)}}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3n-1}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{n-1}{2n+1})^n$; **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}.$

4. Дослідити на абсолютну або умовну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sqrt{\dfrac{n^2+1}{n^2+2}}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\dfrac{2n+1}{3n+1})^n.$

5. Знайти області збіжності рядів: **а)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n4^n\ln n}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(x-3)^n}{(n+1)5^n}.$

6. Розкласти функцію $f(x)=\sqrt{1+x^3}$ у ряд за степенями x .

7. Розкласти у ряд Фур'є функцію $f(x)=x,\ -\pi<x<\pi$, з періодом $T=2\pi$.

Відповіді

1. $(-1)^n\dfrac{n}{2^{n-1}}$. **2а**. $\dfrac{1}{12}$. **2б**. $\dfrac{11}{18}$. **3а**. Розбіжний. **3б**. Розбіжний. **3в**. Збіжний. **3г**. Збіжний. **4а**. Умовно збіжний. **4б**. Розбіжний. **4в**. Абсолютно збіжний. **5а**. $[-4;4)$. **5б**. $(-2;8]$. **6**. $1+\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{1}{2^2\,2!}x^6+\dfrac{1\cdot3}{2^3\,3!}x^9-\dfrac{1\cdot3\cdot5}{2^4\,4!}x^{12}+\dots$.

7. $f(x)=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin nx}{n}$.

Варіант 6

1. Знайти загальний член ряду $1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{16}+\dots$.

2. Знайти суми рядів: **а)** $\dfrac{3}{1^2\cdot2^2}+\dfrac{5}{2^2\cdot3^2}+\dfrac{7}{3^2\cdot4^2}+\dots$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{6}{4n^2-9}.$

3. Дослідити на збіжність ряди з додатними членами:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{7n-1}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-9}{n}\right)^n; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n}}.$$

4. Дослідити на абсолютну або умовну збіжність знакозмінні ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{n!}. \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln(n+1)}{n+1}. \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{2n^2+1}.$$

5. Знайти області збіжності рядів: **а)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$; **б)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2}$.

6. Розкласти функцію $f(x)=\sin^2 x$ у ряд Маклорена.

7. Розкласти у ряд Фур'є функцію $f(x)$ з періодом $T=2\pi$.

$$f(x)=\begin{cases}-x, & при \quad -\pi\le x<0\\ x, & при \quad 0\le x\le\pi\end{cases}.$$

Відповіді

1. $\frac{1}{n^2}$. **2а**. 1. **2б.** $\frac{2}{3}$. **3а**. Розбіжний. **3б**. Збіжний. **3в**. Розбіжний. **3г**. Розбіжний. **4а**. Абсолютно збіжний. **4б**. Умовно збіжний. **4в**. Розбіжний.

5а. $(-1;1]$. **5б**. $[0;2]$. **6**. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$.

7. $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$.

Варіант 7

1. Знайти загальний член ряду $1+\frac{1\cdot3}{1\cdot4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{1\cdot4\cdot7}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{1\cdot4\cdot7\cdot10}+\ldots$.

2. Знайти суми рядів: **а)** $1+\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3\ldots$; **б)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-35n-6}$.

3. Дослідити на збіжність ряди з додатними членами:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-4}{\sqrt{n^2(n^2+5)}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{3n^3-5}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-7}\right)^n; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}.$$

4. Дослідити на абсолютну або умовну збіжність знакозмінні ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+100}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{6n-5}{10^n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sqrt{\frac{5n^2-7}{n^2+2}}.$$

5. Знайти області збіжності рядів: **а)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$; **б)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-3)^n}{2^n\sqrt{n}}$.

6. Розкласти функцію $f(x)=arctg\,x$ у ряд Маклорена.

7. Розкласти у ряд Фур'є функцію $f(x)$ з періодом $T = 2\pi$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & при \quad -\pi \le x < 0 \\ -2, & при \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}.$$

Відповіді

1. $\dfrac{(2n-1)!}{(3n-2)!}$. **2а**. 3. **2б**. 1. **3а**. Розбіжний. **3б**. Збіжний. **3в**. Збіжний. **3г**. Збіжний. **4а**. Умовно збіжний. **4б**. Абсолютно збіжний. **4в**. Розбіжний.

5а. $(-1;1]$. **5б**. $(1;5]$. **6**. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

7. $f(x) = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{6}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x$.

Варіант 8

1. Знайти загальний член ряду $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{30} + \dfrac{1}{42} + \dots$.

2. Знайти суми рядів: **а)** $\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{24}\dots$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{25n^2 - 5n - 6}$.

3. Дослідити на збіжність ряди з додатними членами:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{2n+1}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n - n}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{e^n}$; **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+4}$.

4. Дослідити на абсолютну або умовну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)}{(n+1)^5 + n}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 5n}{\sqrt{n+2}}$.

5. Знайти області збіжності рядів: **а)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^n}{6n-8}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(x+4)^n}{(n+1)3^n}$.

6. Розкласти у степеневий ряд функцію $f(x) = 2^x$ за степенями x.

7. Розкласти функцію $f(x)$ з періодом $T = 2\pi$ у ряд Фур'є:

$$f(x) = \begin{cases} x, & при \quad -\pi \le x < 0 \\ 0, & при \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}.$$

Відповіді

1. $\dfrac{1}{n(n+1)}$ **2а**. $\dfrac{4}{3}$. **2б**. $\dfrac{1}{5}$. **3а**. Розбіжний. **3б**. Збіжний. **3в**. Збіжний. **3г**. Збіжний. **4а**. Абсолютно збіжний. **4б**. Умовно збіжний. **4в**. Розбіжний.

5а. $(-1;1]$. **5б**. $(-7;-1)$. **6**. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln^n 2}{n!}x^n$.

7. $f(x)=-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}\sin nx$.

Варіант 9

1. Знайти загальний член ряду $-\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{7^2}-\dfrac{1}{10^2}+\dfrac{1}{13^2}-\ldots$.

2. Знайти суми рядів:

а) $\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\dfrac{2}{3\cdot4\cdot5}+\dfrac{3}{4\cdot5\cdot6}+\dfrac{4}{5\cdot6\cdot7}\ldots$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{9n^2+3n-2}$.

3. Дослідити на збіжність ряди з додатними членами:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n(n-7)}}{7n}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{5\cdot2^n+4}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{2^n}$; **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+9)^n}$.

4. Дослідити на абсолютну або умовну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(n+2)}{(n+2)^3+n}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{n(n+1)}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{3n+7}$.

5. Знайти області збіжності рядів: **а)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+2)}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{n\cdot2^n}$.

6. Розкласти функцію $f(x)=\dfrac{1}{x}$ у ряд за степенями $(x-2)$.

7. Розкласти функцію $f(x)$ з періодом $T=2\pi$ у ряд Фур'є:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при\quad -\pi\le x<0\\ 2, & при\quad 0\le x\le\pi\end{cases}.$$

Відповіді

1. $(-1)^n\dfrac{1}{(3n+1)^2}$. **2а.** $\dfrac{1}{4}$. **2б**. $\dfrac{1}{2}$. **3а**. Розбіжний. **3б**. Збіжний. **3в**. Розбіжний. **3г**. Збіжний. **4а**. Абсолютно збіжний. **4б**. Умовно збіжний. **4в**. Розбіжний. **5а**. $[-1;1]$. **5б**. $[-3;1)$. **6**. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(x-2)^{n-1}}{2^n}$.

7. $f(x)=1+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)}\sin(2n-1)x$.

Варіант 10

1. Знайти загальний член ряду $\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{5}+\dfrac{7}{10}+\dfrac{10}{17}+\dfrac{13}{26}+\ldots$.

2. Знайти суми рядів:

а) $\frac{8}{1\cdot 2\cdot 4}+\frac{13}{2\cdot 3\cdot 5}+\frac{18}{3\cdot 4\cdot 6}+\frac{23}{4\cdot 5\cdot 7}\ldots$; **б)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{16n^2-8n-15}$.

3. Дослідити на збіжність ряди з додатними членами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-3}{7n+1}$; **б)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4\cdot 2^n-3}$; **в)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$; **г)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$.

4. Дослідити на абсолютну або умовну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$; **б)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{(n+1)^3+n}$; **в)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{5n-4}$.

5. Знайти області збіжності рядів: **а)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$; **б)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}$.

6. Розкласти функцію $f(x)=\ln\frac{x^2+2}{1-x}$ у ряд за степенями x.

7. Розкласти функцію $f(x)$ з періодом $T=2\pi$ у ряд Фур'є:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & при\quad -\pi\le x<0\\ \frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}, & при\quad 0\le x\le\pi\end{cases}.$$

Відповіді

1. $\frac{3n-2}{n^2+1}$. **2а**. $\frac{8}{3}$. **2б**. $-\frac{1}{6}$. **3а**. Розбіжний. **3б**. Збіжний. **3в**. Збіжний. **3г**. Розбіжний. **4а**. Умовно збіжний. **4б**. Абсолютно збіжний. **4в**. Розбіжний.

5а. $(-\infty;+\infty)$. **5б**. $[-3;1)$. **6**. $\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

7. $f(x)=\frac{3\pi}{8}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x+\frac{(-1)^n}{2n}\sin 2nx\right)$.

Варіант 11

1. Знайти загальний член ряду $\sqrt{\frac{1}{101}}-\sqrt{\frac{2}{201}}+\sqrt{\frac{3}{301}}-\sqrt{\frac{4}{401}}+\ldots$.

2. Знайти суми рядів: **а)** $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{4\cdot 7}\ldots$; **б)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2-3n-2}$.

3. Дослідити на збіжність ряди з додатними членами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^3-4n^2+3}{10n^2+75}$; **б)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+2)}$; **в)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n^2}{7^n}$; **г)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{n^2+1}$.

4. Дослідити на абсолютну або умовну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\sqrt{n}}{n+100}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{3^n}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{n^2+1}{n^2+5}\right)^{n^2}$.

5. Знайти області збіжності рядів: **а)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^n}{(n+1)^2 e^{n-1}}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n(x-2)^n}{n!}$.

6. Розкласти функцію $f(x)=xe^{-2x}$ у ряд за степенями x.

7. Розкласти функцію $f(x)$ з періодом $T=2\pi$ у ряд Фур'є:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}, & при \quad -\pi\le x<0\\ -\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}, & при \quad 0\le x\le\pi\end{cases}.$$

Відповіді

1. $(-1)^{n+1}\sqrt{\dfrac{n}{100n+1}}$. **2а**. $\dfrac{11}{18}$. **2б**. 1. **3а**. Розбіжний. **3б**. Розбіжний. **3в**. Збіжний. **3г**. Розбіжний. **4а**. Умовно збіжний. **4б**. Абсолютно збіжний **4в**. Розбіжний. **5а**. $[-e;e]$. **5б**. $(-\infty;\infty)$. **6**. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2^{n-1}}{(n-1)!}x^n$.

7. $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$.

Варіант 12

1. Знайти загальний член ряду $\dfrac{1}{\sqrt{1\cdot2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3\cdot4}}+\ldots$.

2. Знайти суми рядів: **а)** $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}\right)+\left(\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}\right)\ldots$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5}{25n^2+5n-6}$.

3. Дослідити на збіжність ряди з додатними членами:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-3}{7n+1}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4\cdot2^n-3}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n-1}\right)^n$; **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n\ln\ln n}$.

4. Дослідити на абсолютну або умовну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{7n+5}{3+11n}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\ln^2 n}$.

5. Знайти області збіжності рядів: **а)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^5}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}$.

6. Розкласти функцію $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ у ряд за степенями x.

7. Розкласти функцію $f(x)$ з періодом $T = 2\pi$ у ряд Фур'є:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & при \quad -\pi \le x < 0 \\ \pi - x, & при \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}.$$

Відповіді

1. $\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$. **2а**. $\dfrac{3}{2}$. **2б.** $\dfrac{1}{3}$. **3а**. Розбіжний. **3б**. Збіжний. **3в**. Збіжний. **3г**. Розбіжний. **4а**. Умовно збіжний. **4б**. Розбіжний. **4в**. Абсолютно збіжний. **5а**. $[-1;1]$. **5б.** $(4;6)$. **6**. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} x^{\frac{4n-3}{2}}$.

7. $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{\pi(2n-1)^2} \cos(2n-1)x + \dfrac{1+(-1)^n 3}{2n} \sin nx$.

Варіант 13

1. Знайти загальний член ряду $-1+1-1+1+\dots$.

2. Знайти суми рядів: **а)** $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} \dots$; **б)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2}{4n^2 + 8n + 3}$.

3. Дослідити на збіжність ряди з додатними членами:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{9n^2 - 5}{7n^2 + 1}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{4n+1}}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n-1}}{n^n}$; **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{arctgn}{1+n^2}$.

4. Дослідити на абсолютну або умовну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n \ln n}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{\dfrac{n^2+1}{n^2+2}}$.

5. Знайти області збіжності рядів: **а)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{\sqrt[3]{n^3 - 4}}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{n^3}$.

6. Розкласти функцію $f(x) = \dfrac{x}{2}$ у ряд за степенями x.

7. Розкласти функцію $f(x)$ з періодом $T = 2\pi$ у ряд Фур'є:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & при \quad -\pi \le x < 0 \\ 2x, & при \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}.$$

Відповіді

1. $(-1)^n$. **2а**. $\dfrac{2}{3}$. **2б**. $\dfrac{1}{3}$. **3а**. Розбіжний. **3б**. Розбіжний. **3в**. Збіжний. **3г**. Збіжний. **4а**. Абсолютно збіжний. **4б**. Умовно збіжний. **4в**. Розбіжний.

5а. $(-1;1]$. **5б**. $[0;2]$. **6**. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2^{2n-1}(2n-1)!}$.

7. $f(x)=\frac{3}{4}\pi-\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$.

Варіант 14

1. Знайти загальний член ряду $\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^5}+\frac{7}{2^8}+\frac{9}{2^{11}}+\ldots$.

2. Знайти суми рядів: **а)** $\frac{7}{1\cdot3\cdot4}+\frac{8}{2\cdot4\cdot5}+\frac{9}{3\cdot5\cdot6}+\frac{10}{4\cdot6\cdot7}\ldots$; **б)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{4n^2-9}$.

3. Дослідити на збіжність ряди з додатними членами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-5}{7n+1}$; **б)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{3n+7}}$; **в)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-7}\right)^n$; **г)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{\ln n}}$.

4. Дослідити на абсолютну або умовну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{(n+1)^3+n}$; **б)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

5. Знайти області збіжності рядів: **а)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-4)^n x^n$; **б)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}$.

6. Розкласти функцію $f(x)=\ln\left|4+3x-x^2\right|$ у ряд за степенями $(x-2)$.

7. Розкласти функцію $f(x)$ з періодом $T=2\pi$ у ряд Фур'є:

$$f(x)=\begin{cases}x+\pi, & при \quad -\pi\le x<0\\ \pi-x, & при \quad 0\le x\le\pi\end{cases}.$$

Відповіді

1. $\frac{2n+1}{2^{3n-1}}$. **2а**. $\frac{7}{6}$. **2б**. $\frac{1}{3}$. **3а**. Розбіжний. **3б**. Розбіжний. **3в**. Розбіжний. **3г**. Розбіжний. **4а**. Абсолютно збіжний. **4б**. Умовно збіжний. **4в**. Умовно збіжний. **5а**. $(-\frac{1}{4};\frac{1}{4})$. **5б**. $[1;3]$. **6**. $\ln 6+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{3^n n}-\frac{1}{2^n n}\right)(x-2)^n$.

7. $f(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$.

Варіант 15

1. Знайти загальний член ряду $\frac{1}{5}+\frac{1\cdot2}{5^2}+\frac{1\cdot2\cdot3}{5^3}+\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{5^4}+\ldots$.

2. Знайти суми рядів: **а)** $\frac{5}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{8}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{11}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{14}{4\cdot 5\cdot 6}\ldots$; **б)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6}{9n^2+6n-8}$.

3. Дослідити на збіжність ряди з додатними членами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2n+1}{7n-2})^{n^2}$; **б)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+4}$; **в)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$; **г)** $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{2n-1})^n$.

4. Дослідити на абсолютну або умовну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{3n+7}$; **б)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$; **в)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$.

5. Знайти області збіжності рядів: **а)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{2n+1}$; **б)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x-2)^n}{n}$.

6. Розкласти функцію $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$ у ряд за степенями x.

7. Розкласти функцію $f(x)$ з періодом $T=2\pi$ у ряд Фур'є:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при \quad -\pi\le x<0\\ 1, & при \quad 0\le x\le\pi\end{cases}.$$

Відповіді

1. $\frac{n!}{5^n}$. **2а**. 2. **2б**. $\frac{5}{4}$. **3а**. Збіжний. **3б**. Збіжний. **3в**. Збіжний. **3г**. Збіжний. **4а**. Розбіжний. **4б**. Розбіжний. **4в**. Умовно збіжний. **5а**. $(-1;1]$. **5б**. $[\frac{3}{2};\frac{5}{2})$. **6**. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$. **7**. $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x$.

Розділ 4. ЗРАЗОК КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Завдання 1. Сформулювати ознаку Лейбніца.

Ознака Лейбніца. Знакопочережний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ збігається, якщо:

1) послідовність абсолютних величин членів ряду монотонно збігає, тобто $u_1 > u_2 > \dots > u_n > \dots$;

2) загальний член ряду прямує до нуля $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

При цьому сума S ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ задовольняє нерівність $0 < S < u_1$.

Наслідок. Абсолютна похибка від заміни суми збіжного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ його частинною сумою не перевищує модуля першого з відкинутих членів ряду, тобто $|S - S_n| \le u_{n+1}$.

Завдання 2. Дослідити на збіжність ряд

$$\left(\frac{5}{2}\cdot 4\right)+\left(\frac{7}{3}\cdot 4\right)^2+\left(\frac{9}{4}\cdot 4\right)^3+\left(\frac{11}{5}\cdot 4\right)^4+\dots .$$

Розв'язання. Складемо формулу для загального члена ряду $u_n = \left(\frac{2n+3}{n+1}\cdot 4\right)^n$. Тоді за радикальною ознакою Коші маємо

$$C = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+3}{n+1}\cdot 4\right)^n}\ \lim_{n\to\infty}\frac{8n+12}{n+1} = 9 > 1.$$

Отже, заданий ряд розбіжний.

Завдання 3. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)_n}{n^2}$.

Розв'язання. Знаходимо радіус збіжності ряду:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\right| = 1.$$

Отже, враховуючи, що заданий ряд є узагальненим степеневим рядом, знайдемо інтервал збіжності цього ряду з нерівності $-1 < x-3 < 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow 3-1 < x < 1+3$ або $(2;4)$.

З'ясуємо питання про збіжність ряду на кінцях проміжку.

1. При $x = 2$ маємо числовий ряд $-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\dots$, який збігається за

теоремою Лейбніца ($1 > \frac{1}{2^2} > \frac{1}{3^2} > \ldots$; $\lim\limits_{n \leftarrow \infty} |a_n| = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0$).

2. При $x = 4$ маємо числовий ряд $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$, який також збігається за інтегральною ознакою Коші ($\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \left.\frac{-1}{x}\right|_1^\infty = 1$).

Отже, областю збіжності заданого ряду є замкнений відрізок $[2;4]$.

Завдання 4. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x) = \frac{3x-5}{x^2-4x+3}$ та знайти область його збіжності.

Розв'язання. Розкладемо $f(x)$ на суму елементарних дробів:

$$\frac{3x-5}{x^2-4x+3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} \quad \Rightarrow \quad \frac{3x-5}{x^2-4x+3} = \frac{A(x-3)+B(x-1)}{x^2-4x+3} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \; 3x-5 = A(x-3) + B(x-1).$$

При $x = 3$: $4 = 2B$ і $B = 2$; при $x = 1$: $-2 = -2A$ і $A = 1$.

Маємо $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3} = -\left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3}\right) = -\left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}}\right).$

Тут перший доданок можна розглядати, як суму геометричної прогресії з першим членом $a_1 = 1$ і знаменником $q = x$, а другий − як суму геометричної прогресії з $a_1 = \frac{2}{3}$ і $q = \frac{x}{3}$.

Тоді $f(x) = -\left\{(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\frac{x}{3} + \frac{2}{3}\frac{x^2}{9} + \frac{2}{3}\frac{x^3}{27} + \ldots\right)\right\} =$

$$= -\left\{\left(1 + \frac{2}{3}\right) + \left(1 + \frac{2}{3^2}\right)x + \left(1 + \frac{2}{3^3}\right)x^2 + \ldots\right\} = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 + \frac{2}{3^{n+1}}\right)x^n.$$

Знайдемо радіус збіжності ряду: $R = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{2}{3^{n+1}}}{1 + \frac{2}{3^{n+2}}} = 1$,

тобто $-1 < x < 1$ – інтервал збіжності ряду.

Дослідимо поведінку ряду на кінцях інтервалу:

а) при $x = -1$ маємо ряд $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1 + \frac{2}{3^{n+1}}\right)(-1)^n$, який є знакозмінним, але $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 1 \neq 0$, і тому ряд розбіжний;

б) при $x=1$ члени ряду мають однакові знаки $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{2}{3^{n+1}}\right)$, при цьому $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1 \neq 0$. отже, не виконується необхідна умова збіжності, і ряд розбіжний.

Таким чином, отримали ряд $\frac{3x-5}{x^2-4x+3} = -\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{2}{3^{n+1}}\right)x^n$ збіжний при $|x|<1$.

Завдання 5. Побудувати ряд Фур'є для функції $f(x)$ з періодом 2π, заданої на відрізку $[-\pi;\pi)$ формулами :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Розв'язання. Задана функція (рис. 4.1) кусково-неперервна та кусково-монотонна на відрізку $[-\pi;\pi]$. Отже, вона задовольняє умови Діріхле.

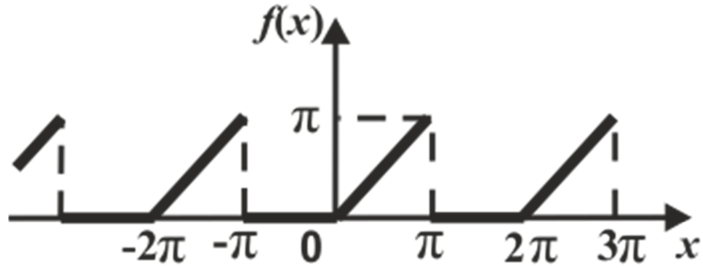

Рис. 4.1

Знайдемо коефіцієнти Фур'є цієї функції:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \left\{\begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos nxdx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nxdx\right) = \frac{1}{\pi n}\frac{\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi} = \begin{cases} 0, & \textit{якщо } n \textit{ парне}, \\ -\frac{2}{\pi n^2}, & \textit{якщо } n \textit{ непарне}. \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx = \left\{\begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin nx dx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx \right) = -\frac{x}{\pi n}\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n}(-1)^{n+1}.$$

Інтеграли $\int_0^{\pi} x\sin nx dx$, $\int_0^{\pi} x\cos nx dx$ обчислили за методом інтегрування частинами, при цьому $\cos n\pi = (-1)^n$.

Рядом Фур'є для даної функції буде такий ряд:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x + \frac{1}{n}\sin nx \right).$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посіб. / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – Київ : А.С.К., 2003. – 648 с.
2. Овчинников П.П. Вища математика : підручник / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко ; під заг. ред. П.П. Овчинникова. – Київ : Техніка, 2000. – Ч. 2. – 501 с.
3. Андрощук Л.В. Вища математика. Ряди: методичні вказівки до практ. занять / Л.В. Андрощук, І.П. Шмаков . – Київ : НАУ, 2004. – 178 с.
4. Сушко С.О. Математика для економічних спеціальностей : навч. посіб. / С.О. Сушко, Л.Я. Фомичова, Т.С. Кагадій ; М-во освіти і науки України, Нац. гірн. акад.України, 2000. – 375 с.
5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике : полный курс. /Д.Т. Письменный. – Москва: Айрис-пресс, 2008. – 608 с.
6. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: підручник. – Київ: Либідь, 1994. – Ч. 2. – 304 с.
7. Пак В.В. Вища математика: підручник / В.В. Пак, Ю.Л. Носенко. – Донецьк: Сталкер, 2003. – 496 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

Навчальне видання

Фомичова Людмила Яківна
Почепов Віктор Миколайович
Мамайкін Олександр Рюрікович

МАТЕМАТИКА 2

Ряди

Навчальний посібник

Редактор Ю.В. Рачковська

Підп. до друку 30.06.2020. Формат 30х42/4.
Папір офсетний. Ризографія. Ум. друк. арк. 4,2.
Обл.-вид. арк. 4,2. Тираж 40 пр. Зам. №

Національний технічний університет
«Дніпровська політехніка».
49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19