MINISTERE DE L'EDUCATION ET DES SCIENCES DE L'UKRAINE
UNIVERSITE NATIONALE DES MINES

ALGÈBRE LINÉAIRE
(théorie, exemples et exercices)

Manuel à l'usage des étudiants étrangers
du département préparatoire
(en français)

Дніпропетровськ
НГУ
2015

Sdvyzhkova O.O. Algèbre linéaire (théorie, exemples et exercices). Manuel à l'usage des étudiants étrangers du département préparatoire (en français) / O.O. Sdvyzhkova, L.O. Chumak, S.E. Tymchenko; Ministère de l'Education et des Sciences de l'Ukraine; Université nationale des mines. – D.: UNM, 2015. – 47 p.

Автори:
О.О. Сдвижкова, д-р техн. наук, проф., зав. кафедри;
Л.О. Чумак, канд. техн. наук, доц.;
С.Є. Тимченко, канд. техн. наук, доц.

Затверджено до видання методичною комісією університету за поданням підготовчого відділення для іноземних громадян (протокол № 3-15 від 06.03.2015).

Cet ouvrage contient les sections fondamentales de la matière «Algèbre Linéaire». Toutes les définitions, les propriétés et les formules sont accompagnées par des exemples. L'ouvrage comporte de nombreux exercices qui sont classés par thèmes et suivies des solutions ou des corrigés. Le test d'autoévaluation contient les questions théoriques principales du cours. Cet ouvrage s'adresse aux étudiants étrangers francophones du département préparatoire.

Відповідальна за випуск завідувач підготовчого відділення для іноземних громадян Н.В. Хозяйкіна, канд. техн. наук.

Sommaire

INTRODUCTION

Cet ouvrage s'adresse aux étudiants de la $1^{\text{ière}}$ année du niveau de Bachelor des universités techniques. Il comporte trois chapitres et contient les définitions et les énoncés fondamentaux de l'algèbre linéaire.

Le cours est clair, sans démonstrations, mais précis. Les définitions et les propriétés sont suivies d'exemples.

Cet ouvrage est conçu comme un instrument d'apprentissage dont vous pourrez vous servir dans de petits groupes en travaux pratiques ou pendant le travail individuel.

De nombreux exercices sont classés par thèmes et accompagnés des corrigés et du test d'autoévaluation.

Bonne chance à vous tous !

1. DETERMINANTS

1.1. Déterminants d'ordre 2 et 3

Déterminant est une expression algébrique qui s'écrit sous forme de tableau carré.

La relation suivante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1}$$

s'appelle ***déterminant du deuxième ordre***. Il contient quatre éléments qui forment deux lignes (rangées) et deux colonnes.

L'expression ci-dessous

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left(a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}\right) - \tag{2}$$

$$-\left(a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} + a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} + a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}\right)$$

est applée ***déterminant du troisième ordre***. Il possède neuf éléments qui composent trois lignes et trois colonnes.

On appelle ***éléments les entrées du déterminant***, a_{ij}, qui sont identifiés par leur position. On convient que le premier indice est le numéro de ligne, et le second indice est le numéro de colonne où se trouve cet élément.

Les éléments a_{11}, a_{22} du déterminant (1) et a_{11}, a_{22}, a_{33} du déterminant (2) forment ***la diagonale principale*** du déterminant. Les éléments a_{12}, a_{21} et a_{13}, a_{22}, a_{31} de ces déterminants composent leur autre diagonale.

Pour calculer le déterminant d'ordre 2 il faut trouver la différence des produits des éléments de sa diagonale principale et de l'autre diagonale.

Exemples de calcul de determinant d'ordre 2:

a) $\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -5 \cdot 5 - 7 \cdot 2 = -25 - 14 = -39;$

b) $\begin{vmatrix} 12 & 10 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-3) - 10 \cdot (-5) = -36 + 50 = 14.$

Il est facile de trouver la valeur du déterminant d'ordre 3 d'après ***la règle de Sarrus*** :

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = \left(a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}\right) -$$

$$-\left(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}\right)$$

Ici on peut voir trois premiers termes qui sont les produits des éléments de la diagonale principale et des diagonales parallèles à celle-ci. Les trois derniers produits se forment par les éléments de l'autre diagonale et des parallèles à celle-là.

Exemples de calcul de determinant d'ordre 3:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 0 \\ 5 & 4 \\ 1 & 3 \end{matrix} = (2 \cdot 4 \cdot 7 + 0 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 5 \cdot 3) -$

$$-(1 \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 0 \cdot 5 \cdot 7) = 56 + 0 + 15 - 4 - 12 - 0 = 54;$$

b) $\begin{vmatrix} 5 & 10 & 0 \\ -1 & 3 & -9 \\ 7 & 21 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 10 & 0 \\ -1 & 3 & -9 \\ 7 & 21 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & 10 \\ -1 & 3 \\ 7 & 21 \end{matrix} = (-30-630+0)-$

$$-(0-945+20) = -660+925 = 265.$$

Exercice 1.1. Calculez les déterminants donnés:

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & -10 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$; g) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

Solutions :

a) 11 ; b) 18 ; c) 34 ; d) –60 ; e) –36 ; f) 0 ; g) 87.

Exercice 1.2. Résolvez les équations suivantes:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0;$$

Solution. En appliquant le calcul du déterminant d’après la formule (1), on passe à l’équation algébrique.

$$\begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \Rightarrow \quad 2\cdot 4-(x-4)=0; \quad \Rightarrow \quad 8-x+4=0; \quad \Rightarrow \quad x=12.$$

Vérification. On met $x=12$ dans le déterminant donné et on trouve sa valeur :

$$\begin{vmatrix} 2 & 12-4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 4-8\cdot 1 = 8-8 = 0.$$

b) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0;$

c) $\begin{vmatrix} 4x & x+22 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0;$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0;$

e) $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Solutions :

b) –1; –4 ; c) 2 ; d) –3 ; e) 2;–10.

Exercice 1.3. Résolvez les inéquations données:

a) $\begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0;$

Solution. En utilisant la formule (1), on passe à l'inéquation algébrique.

$$\begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0; \quad \Rightarrow \quad 3x-3-2\cdot x > 0; \quad \Rightarrow \quad x > 3; \quad \text{ou} \quad x \in (3;\infty).$$

b) $\begin{vmatrix} 2x-2 & 1 \\ 7x & 2 \end{vmatrix} > 5;$

c) $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14;$

d) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 2;$

e) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} < 0.$

Solutions :

b) $x \in (-\infty; 3)$; c) $x \in (-1; 7)$;

d) $x \in (3; \infty)$; e) $x \in (-\infty; -6) \cup (-4; \infty)$.

1.2. Propriétés principales des déterminants

Ces propriétés sont correctes pour tous les déterminants. Elles permettent de calculer les déterminants plus facilement.

1) Déterminant est égal à zéro $(\Delta = 0)$ si tous les éléments d'une certaine ligne ou colonne sont égaux à zéro.

2) Si tous les éléments d'une certaine ligne ou colonne ont un facteur commun, on peut le mettre devant le Δ. C'est la mise en facteur:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

3) Le remplacement des lignes par des colonnes de même numéro ne change pas la valeur de Δ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Les colonnes deviennent les lignes et à l'inverse.

4) Si l'on transpose deux lignes (ou deux colonnes) le Δ change son signe:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

5) Le Δ qui a deux lignes (colonnes) identiques ou proportionnelles est égal à zéro.

6) $$\begin{vmatrix} \alpha_1 + \beta_1 & a_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & a_1 \\ \alpha_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1 & a_1 \\ \beta_2 & a_2 \end{vmatrix}.$$

7) En ajoutant une colonne (ligne) multipliée par n'importe quel nombre à une autre colonne (ligne) on ne change pas de déterminant. Cette propriété permet de simplifier le calcul des déterminants en faisant apparaître des zéros dans les lignes ou des colonnes.

Exercice 1.4. Démontrez les égalités suivantes sans calcul:

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

Solution. Le déterminant donné a deux lignes identiques (L_1=L_3) selon la propriété (5) $\Delta = 0$.

$$\text{b)}\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix};$$

Solution. Pour démontrer l'égalité donnée il faut ajouter la première colonne multipliée par 2 à la troisième colonne (C_3+2C_1):

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1+2\cdot 3 \\ -2 & 3 & 2+2\cdot(-2) \\ 4 & 5 & 3+2\cdot 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix};$$

$$\text{c)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & -9 \\ 8 & 1 & -24 \end{vmatrix} = 0; \qquad \text{d)}\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{vmatrix}.$$

Solutions :

c) $C_3 = -3C_1$; d) $C_2 + 2C_1$; $C_3 - 3C_1$.

Exercice 1.5. Calculez les déterminants donnés avec des zéros au-dessous de sa diagonale principale:

a) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -3 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

Solution. D'abord on obtient les zéros dans la première colonne au-dessous de l'élément $a_{11} = 1$. Pour cela il convient d'appliquer la propriété 7. On fait les opérations suivantes ($L_2 - 2L_1$) et ($L_3 + 3L_1$):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2-2\cdot 1 & 3-2\cdot 4 & 5-2\cdot(-2) \\ -3+3\cdot 1 & -2+3\cdot 4 & 3+3\cdot(-2) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2-2 & 3-8 & 5+4 \\ -3+3 & -2+12 & 3-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 9 \\ 0 & 10 & -3 \end{vmatrix}$$

Maintenant on cherche à obtenir le zéro au-dessous de l'élément $a_{22} = -5$. Pour cela on ajoute la deuxième ligne multipliée par 2 à la troisième ligne (L_3+$2L_1$):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 9 \\ 0 & 10 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 9 \\ 0 & 10-10 & -3+18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 15 \end{vmatrix}$$

Comme résultat le déterminant a été transformé en forme triangulaire. Il est évident que sa valeur se détermine comme produit des éléments de la diagonale principale:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 15 \end{vmatrix} = 1\cdot(-5)\cdot 15 = -75.$$

b) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 3 \end{vmatrix}$ c) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Solutions : b) –202 ; c) –16.

1.3. Expansion par cofacteurs

On appelle ***mineur*** M_{ij} ***d'élément*** a_{ij} ***d'un déterminant*** le déterminant extrait de celui-ci donné en éliminant la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne à l'intersection desquelles se trouve a_{ij}.

Par exemple, pour trouver le mineur d'élément a_{23} de déterminant du troisième ordre il faut supprimer la 2$^{\text{ième}}$ ligne et la 3$^{\text{ième}}$ colonne:

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{31} a_{32} \end{vmatrix}.$$

Cofacteur A_{ij} d'élément a_{ij} d'un déterminant est son mineur pris avec le signe $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}. \tag{3}$$

Par exemple,

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = +\begin{vmatrix} a_{22} a_{23} \\ a_{32} a_{33} \end{vmatrix}, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{31} a_{32} \end{vmatrix}.$$

Exercice 1.6. Soit le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}$. Calculez M_{21}, A_{12}, A_{33}.

Solution. Pour trouver le mineur M_{21} il faut supprimer la 2$^{\text{ième}}$ ligne et la 3$^{\text{ière}}$ colonne dans le déterminant donné et calculer le déterminant obtenu:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 28 = -22 .$$

A la manière analogue on compose les mineurs M_{12}, M_{33} et en appliquant la formule (3) on trouve les cofacteurs A_{12}, A_{33}:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(6-5) = -1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4.$$

<u>Théorème</u> ***(expansion par cofacteurs d'un déterminant)***. Le déterminant Δ est égal à la somme de produits des éléments d'une ligne (colonne) quelconque et leurs cofacteurs:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} . \tag{4}$$

Cette somme est une expansion de Δ le long de la $i^{\text{ième}}$ ligne. On peut donner aussi le développement de Δ en suivant la $j^{\text{ième}}$ colonne:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} . \tag{5}$$

Exercice 1.7. Calculez le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ en développemant par cofacteurs le long de: a) la 1$^{\text{ière}}$ ligne ; b) la 3$^{\text{ième}}$ colonne.

Solution. a) On écrit l'expansion du déterminant donné le long de la 1$^{\text{ière}}$ ligne:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} .$$

$$\Delta = 2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}5 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix} =$$

$$= 2(-6-2) - 3(15-1) + 4(10+2) = -16 - 42 + 48 = -10.$$

b) On forme le développement du déterminant donné en suivant la $3^{\text{ième}}$ colonne:

$$\Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.$$

$$\Delta = 4\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & -2\end{vmatrix} =$$

$$= 4(10+2) - (4-3) + 3(-4-15) = 48 - 1 - 57 = -10.$$

Pendant l'expansion du déterminant il vaut mieux de prendre la rangée qui comporte le plus grand nombre de zéros. Il est évident que le Δ dans lequel il n'y a qu'un élément d'une ligne (colonne) différent de zéro est égal au produit de cet élément et de son cofacteur. Par exemple:

$$\Delta = \begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ -3 & 1 & 4\end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ -3 & 1\end{vmatrix} = -2(2+9) = -22.$$

Calcul de déterminant de $n^{\text{ième}}$ ordre

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

est possible seulement à l'aide de la théorème d'expansion:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \qquad \text{ou} \qquad \Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

Pour faciliter le calcul il vaut mieux de faire l'apparition des zéros dans une ligne (colonne) quelconque.

Exercice 1.8. Calculez les déterminants donnés:

$$\text{a)} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Solution. Le déterminant n'a pas de zéros donc on prend la première ligne pour le développement:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} =$$
$$= 1 \cdot M_{11} - 2 \cdot M_{12} + 3 \cdot M_{13} - 4 \cdot M_{14}.$$

On calcule les mineurs nécessaires:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 8 + 8 - 1 - 12 - 48 = -36;$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 32 + 6 - 4 - 36 - 8 = -4;$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4; \qquad M_{14} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -44.$$

Maintenant la valeur du déterminant est égale à:

$$\Delta = 1 \cdot (-36) - 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 4 - 4 \cdot (-44) = -36 + 8 + 12 + 176 = 160.$$

$$\text{b) } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

Solution. D'abord on obtient les zéros dans la troisième colonne. Pour cela on appique la propriété 7. On fait les opérations suivantes ($L_2 + L_3$) et ($L_1 + 3L_3$):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+18 & 3+6 & -3+3 & 4+0 \\ 2+6 & 1+2 & -1+1 & 2+0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 20 & 9 & 0 & 4 \\ 8 & 3 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

On développe le déterminant obtenu par rapport à la 3$^{\text{ième}}$ colonne:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 20 & 9 & 0 & 4 \\ 8 & 3 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 20 & 9 & 4 \\ 8 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix};$$

Pour faciliter le calcul on met les facteurs communs (2 pour la 1$^{\text{ière}}$ colonne et 3 pour la 2$^{\text{ième}}$ colonne) devant le déterminant:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 20 & 9 & 4 \\ 8 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 \begin{vmatrix} 10 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 6(-50+6+16-4-20+60) = 48$$

c) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; d) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$;

e) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$.

Solutions : c) –23 ; d) –21 ; e) 120.

2. CALCUL MATRICIEL

2.1. Matrices. Opérations sur les matrices

Une ***matrice*** c'est un tableau rectangulaire de la forme suivante:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Les composants a_{ij} s'appellent ***les éléments de la matrice***. On sait que le 1^ier^ indice est le numéro de la ligne et le second est le numéro de la colonne. La matrice ayant *m* lignes et *n* colonnes est dite de type $m \times n$, (m – nombre de lignes, n – nombre de colonnes). Si $m = n$, on dit que la matrice est ***carrée*** de taille n ou d'ordre n.

On distingue des types suivants de matrices:

a) Si $m = 1$ (resp. $n = 1$) on dit que A est une matrice ligne (resp. colonne):

matrice ligne: $A = (2\ \ 3\ \ 0\ \ 4)$, ***matrice colonne***: $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

b) On dit qu'une ***matrice carrée*** $A = (a_{ij})$ est ***triangulaire*** supérieure (resp. inférieure) si a_{ij}=0 pour $i > j$ (resp. $i < j$):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ a_{nn} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Les éléments a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} forment la diagonale principale.

c) Une matrice est dite ***diagonale*** si elle est à la fois triangulaire supérieure et inférieure:

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

d) La matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont égaux à 1 s'appelle ***matrice unité***. On note I_n ou E_n la matrice unité de taille n:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

e) En écrivant les lignes d'une matrice arbitraire A dans les colonnes de mêmes numéros, on obtient une autre matrice nommée ***matrice transposée*** qui se note comme A^T:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \qquad A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Si A est de type $m\times n$, alors A^T sera de dimension $n\times m$.

<u>Egalité des matrices</u>. Deux matrices A et B de même type sont égales si $b_{ij}=a_{ij}$, c.-à-d. les éléments de A coïncident avec les éléments correspondants à B:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A=B.$$

Opérations sur les matrices

<u>Addition</u>. Pour trouver la somme de 2 matrices de même type il faut additionner les éléments correspondants de ces matrices:

$$A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij}), \qquad C=A\pm B=(a_{ij}\pm b_{ij}).$$

<u>Multiplication par un nombre</u> λ. On définit le produit de λ et une matrice $A=(a_{ij})$ comme la matrice $\lambda A=(\lambda a_{ij})$:

$$\lambda\cdot A=\lambda\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}.$$

<u>Multiplication de deux matrices</u>. On détermine le produit de 2 matrices AB d'après la règle «***les lignes de*** A ***par les colonnes de*** B»:

$$A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & t \end{pmatrix},$$

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+cu & ay+cv & az+ct \\ bx+du & by+dv & bz+dt \end{pmatrix}$$

L'élément c_{ij} de C est égal à la somme des produits des éléments de la $i^{\text{ième}}$ ligne de A par les éléments correspondants de la $j^{\text{ième}}$ colonne de B. Selon cette règle le produit de A par B est possible, si ***le nombre de colonnes de*** A ***est égal au nombre de lignes de*** B. Le produit BA de ces matrices n'est pas possible. En général le produit de deux matrices n'est pas commutatif: $AB\neq BA$.

Exercice 2.1. Soient les matrices $A=\begin{pmatrix}5 & 0 & -7 & 6\\ 3 & 8 & 2 & -1\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}0 & 5 & -1 & -5\\ -8 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 8\\ -1 & 0\\ 3 & -1\\ 4 & -5\end{pmatrix}$.

Trouvez: a) $A+B$; b) $3A$; c) $-B$; d) $2A+3B$;

e) C^T; f) B^T-2C.

Solution. On applique les règles d'addition et de soustraction des matrices ainsi que la règle de multiplication par un nombre.

a) $A+B=\begin{pmatrix}5 & 0 & -7 & 6\\ 3 & 8 & 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 5 & -1 & -5\\ -8 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}5+0 & 0+5 & -7+(-1) & 6+(-5)\\ 3+(-8) & 8+2 & 2+3 & -1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 5 & -8 & 1\\ -5 & 10 & 5 & 3\end{pmatrix}$;

b) $3A=3\cdot\begin{pmatrix}5 & 0 & -7 & 6\\ 3 & 8 & 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot 3 & 0\cdot 3 & -7\cdot 3 & 6\cdot 3\\ 3\cdot 3 & 8\cdot 3 & 2\cdot 3 & -1\cdot 3\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}15 & 0 & -21 & 18\\ 9 & 24 & 6 & -3\end{pmatrix}$;

c) $-B=(-1)\cdot\begin{pmatrix}0 & 5 & -1 & -5\\ -8 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -5 & 1 & 5\\ 8 & -2 & -3 & -4\end{pmatrix}$;

d) $2A+3B=2\cdot\begin{pmatrix}5 & 0 & -7 & 6\\ 3 & 8 & 2 & -1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}0 & 5 & -1 & -5\\ -8 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}10 & 0 & -14 & 12\\ 6 & 16 & 4 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 15 & -3 & -15\\ -24 & 6 & 9 & 12\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}10+0 & 0+15 & -14-3 & 12-15\\ 6-24 & 16+6 & 4+9 & -2+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 15 & -17 & -3\\ -18 & 22 & 13 & 10\end{pmatrix}$;

e) $$C^T = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 8 & 0 & -1 & -5 \end{pmatrix};$$

f) $$B^T - 2C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 & -5 \\ -8 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^T - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 5 & 2 \\ -1 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 16 \\ -2 & 0 \\ 6 & -2 \\ 8 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-4 & -8-16 \\ 5-(-2) & 2-0 \\ -1-6 & 3-(-2) \\ -5-4 & 4-(-10) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -24 \\ 7 & 2 \\ -7 & 5 \\ -9 & 14 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.1. Trouvez la matrice $C = AB$ si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Solution. Le produit de A par B est possible, car la matrice A est du type 2×2 et celle de B a la taille 2×3. Le résultat sera la matrice $C_{2\times 3}$. On détermine ses éléments:

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 = 3 - 2 = 1,$$
$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 = -1 - 4 = -5,$$
$$c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} = 1 \cdot 0 + (-2) \cdot (-2) = 0 + 4 = 4,$$
$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 3 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = 9 + 5 = 14,$$
$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = 3 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 = -3 + 10 = 7,$$
$$c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} = 3 \cdot 0 + 5 \cdot (-2) = 0 - 10 = -10.$$

On obtient la matrice-produit: $C = AB = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 14 & 7 & -10 \end{pmatrix}$. Il faut indiquer que le produit de B par A n'est pas possible.

Exercice 2.2. Multipliez les matrices suivantes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solution. Les types des matrices données permettent de trouver deux produits AB et BA.

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+2\cdot 2+3\cdot 1 & 1\cdot 0+2\cdot 3+3\cdot(-1) \\ -1\cdot(-1)+0\cdot 2+2\cdot 1 & -1\cdot 0+0\cdot 3+2\cdot(-1) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -1+4+3 & 0+6-3 \\ 1+0+2 & 0+0-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix};$$

$$BA=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -1\cdot 1+0\cdot(-1) & -1\cdot 2+0\cdot 0 & -1\cdot 3+0\cdot 2 \\ 2\cdot 1+3\cdot(-1) & 2\cdot 2+3\cdot 0 & 2\cdot 3+3\cdot 2 \\ 1\cdot 1+(-1)\cdot(-1) & 1\cdot 2+(-1)\cdot 0 & 1\cdot 3+(-1)\cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -1+0 & -2+0 & -3+0 \\ 2-3 & 4+0 & 6+6 \\ 1+1 & 2+0 & 3-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 12 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.3. Calculez A^3 pour $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Solution. D'abord on trouve $A^2=AA$:

$$A^2=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4+3 & 6-6 \\ 2-2 & 3+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Maintenant on peut calculer $A^3=A^2A$:

$$A^3 = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14+0 & 21+0 \\ 0+7 & 0-14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 21 \\ 7 & -14 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.4. Faites les opérations suivantes.

1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Trouvez : $3A - B;\quad A^T + 2B - C;\quad A^2 - B^2;\quad (A-B)(A+B);\quad C^3.$

2) Vérifiez l'égalité $AB = BA$ pour les matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

3) Calculez : $\begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

4) Trouvez tous les produits des matrices données qui sont possibles:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Solutions :

1) $3A - B = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 17 & -7 \end{pmatrix};\qquad A^T + 2B - C = \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ -11 & 0 \end{pmatrix};$

$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 12 & -16 \\ 8 & 23 \end{pmatrix};\qquad (A-B)(A+B) = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 21 & 39 \end{pmatrix};$

$C^3 = \begin{pmatrix} 15 & -14 \\ 7 & -6 \end{pmatrix};\qquad$ 3) $\begin{pmatrix} 24 \\ 58 \end{pmatrix};\qquad$ 4) $AB = \begin{pmatrix} 15 & -14 \\ 8 & 7 \end{pmatrix};$

$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -23 & 17 & -20 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};\; CA = \begin{pmatrix} -10 & 7 & -9 \\ -24 & 15 & -23 \end{pmatrix};\; BC = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -18 & 34 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$

2.2. Matrice inverse

La matrice B s'appelle ***matrice inverse*** de la matrice A et on la note A^{-1} si on a $AB = BA = I$.

On en déduit que pour qu'une matrice carrée admette une inverse A^{-1}, il faut et suffit que son déterminant ne soit pas égal à zéro. C.-à-d. $\det A \neq 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A ait l'inverse A^{-1}.

Pour calculer l'inverse de la matrice carrée A il faut:

1) Calculer le déterminant de la matrice A. Si $\det A \neq 0$, alors A^{-1} existe.

2) Calculer les cofacteurs de chaque élément de A: $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{nn}$ et écrire la matrice de ces cofacteurs. Cette matrice s'appelle ***comatrice***. On l'obtient en remplaçant dans A chaque élément par son cofacteur.

3) Transposer la comatrice C et multiplier la transposée C^T par $\dfrac{1}{\det A}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C^T = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}}{\det A} & \cdots & \dfrac{A_{n1}}{\det A} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{A_{1n}}{\det A} & \cdots & \dfrac{A_{nn}}{\det A} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

C'est la matrice inverse de A. Pour vérifier on a $A \cdot A^{-1} = I$ ou $A^{-1} A = I$.

Exemple de détermination de l'inverse pour $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

D'abord on calcule le déterminant de la matrice donnée:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 4 = 14 \neq 0,$$ donc l'inverse A^{-1} existe.

Maintenant on trouve les cofacteurs des éléments de la matrice A:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 2 = 2;$ $\quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-1) = 1;$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 4 = -4;$ $\quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 5 = 5.$

On compose la comatrice C et on la transpose:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}; \qquad C^T = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

On écrit la matrice inverse A^{-1} d'après la formule (7):

$$A^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/7 & -2/7 \\ 1/14 & 5/14 \end{pmatrix}.$$

On fait la vérification:

$$A^{-1}A = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 10+4 & 8-8 \\ 5-5 & 4+10 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Exercice 2.5. Trouvez A^{-1} et faites la vérification:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Solution. a) On calcule $\det A$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 6 + 12 - 10 - 30 - 24 + 1 = -45.$$

On détermine les cofacteurs:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 8 = -6; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-12) = 13;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 6 = 8; \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1+10) = -9;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 15 = 12; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(6-3) = -3;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 10 = -6; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(12+5) = -17;$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-6-1=-7;$$

On forme l'inverse:

$$C=\begin{pmatrix}-6 & 13 & 8\\ -9 & 12 & -3\\ -6 & -17 & -7\end{pmatrix}; \qquad \Rightarrow \qquad A^{-1}=-\frac{1}{45}\begin{pmatrix}-6 & -9 & -6\\ 13 & 12 & -17\\ 8 & -3 & -7\end{pmatrix}$$

Vérification:

$$A^{-1}A=-\frac{1}{45}\begin{pmatrix}-6 & -9 & -6\\ 13 & 12 & -17\\ 8 & -3 & -7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1 & -5\\ 1 & -2 & 4\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{45}\begin{pmatrix}-18-9-18 & -6+18-12 & 30-36+6\\ 39+12-51 & 13-24-34 & -65+48+17\\ 24-3-21 & 8+6-14 & -40-12+7\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{45}\begin{pmatrix}-45 & 0 & 0\\ 0 & -45 & 0\\ 0 & 0 & -45\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I.$$

Solutions:

b) $B^{-1}=\begin{pmatrix}1/15 & -2/15 & 4/15\\ 7/15 & 1/15 & -2/15\\ -1/15 & 2/15 & 1/5\end{pmatrix}$; c) $C^{-1}=\begin{pmatrix}-5/7 & 3/7\\ 4/7 & -1/7\end{pmatrix}$.

2.3. Rang d'une matrice. Procédé de calcul du rang

Avant de donner la définition du rang d'une matrice on introduit la notion de mineurs d'une matrice. Soit A une matrice de type $m\times n$. On appelle ***mineur d'ordre*** k de A, tout déterminant est extrait de la matrice A par l'intersection de k lignes et de k colonnes ($1\le k\le \min(m,n)$), c.-à-d. on prend k de n'importe quelles lignes et k de n'importe quelles colonnes de

A. A l'intersection de ces lignes et de ces colonnes on trouve les éléments qui forment un déterminant d'ordre k appelé mineur de A.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

De cette matrice on peut extraire beaucoup de mineurs:

d'ordre 1: $M_1 = a_{11} = 2$, $\quad M_1 = a_{24} = 0$, ... ;

d'ordre 2: $M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$, $\quad M_2 = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, ... ;

d'ordre 3: $M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, $\quad M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$, ...

Mais on ne peut pas former des mineurs d'ordres 4 et de plus, car il n'y a que 3 lignes. L'ordre de mineur d'une matrice A de type $m \times n$ peut être inférieur ou égal au minimum (m, n): $\quad k \le \min(m, n)$.

Le rang d'une matrice est l'ordre maximal du mineur non nul extrait de la matrice. Il suit de cette définition:

1) chaque matrice $A_{m\times n}$ a le rang; c'est évident que $r(A) \le \min(m, n)$;

2) $r(A) = 0$ si et seulement si la matrice A est matrice-nulle;

3) pour une matrice carrée A d'ordre n $\quad r(A) = n$ si et seulement si $\det A \ne 0$.

Procédé de calcul du rang

Pour calculer le rang d'une matrice on pourrait essayer de trouver un mineur d'ordre maximal non nul. On pratique deux manières différentes.

Méthode des mineurs. Selon cette méthode on part des mineurs de petits ordres (en commençant par le mineur d'ordre 1, c'est-à-dire avec les éléments de la matrice) en allant aux mineurs d'ordre plus imortant. On suppose que l'on trouve un mineur (M_k) non nul d'ordre k, alors on doit seulement calculer les mineurs (M_{k+1}) d'ordre $k+1$ encadrant (contenant) le mineur M_k. Si tous les mineurs $M_{k+1}=0$, alors $r(A)=k.$ Mais si un d'entre eux est non nul ainsi cette opération doit être appliquée à celui-ci.

Exemple de détermination du rang de la matrice par la méthode des mineurs:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 11 & 2 & 6 \\ -3 & 4 & -2 & -15 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice donnée a des mineurs non nuls du premier ordre, par exemple: $M_1 = a_{11} = 5.$ Donc $r(A) \geq 1.$

On prend un mineur du deuxième ordre qui contient cet élément, par exemple: $M_2 = \begin{vmatrix} \boxed{5} & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 20+3=23 \neq 0.$ Il suit que $r(A) \geq 2$ et on ne doit pas calculer d'autres mineurs d'ordre 2 bordant a_{11}.

Maintenant on considère un mineur du troisième ordre insérant ce mineur M_2, par exemple:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 11 \\ -3 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 140-4-99-88+30+21=0.$$

Il est facile de s'assurer que tous les mineurs d'ordre 3 bordant M_2 seront égaux à zéro:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 11 \\ -3 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & -15 \\ 2 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 6 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & -15 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{vmatrix} 5 & 1 & 6 \\ -3 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ainsi le rang de la matrice est 2: $r(A) = 2$.

Il existe une méthode qui n'exige pas le calcul des déterminants. Elle se base sur les «opérations élémentaires» des matrices qui ne changent pas le rang d'une matrice. Elle s'appelle **méthode des zéros échelonnés**.

Les ***opérations élémentaires*** sont telles que:

1) permutation des rangées parallèles;

2) transposition d'une matrice;

3) suppression des zéro-rangées;

4) multiplication ou division des éléments d'une rangée par un nombre réel non nul;

5) remplacement d'une rangée par une combinaison linéaire à coefficients non nuls de cette rangée et d'une rangée parallèle.

Deux matrices A et B s'appellent ***équivalentes*** si elles ont le même rang, c.-à-d.:

$$r(A) = r(B) \iff A \sim B.$$

On effectue des opérations élémentaires sur les rangées pour faire apparaître le nombre maximal des zéros.

Exemple de détermination du rang de la matrice à l'aide de la méthode des zéros échelonnés:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 11 & 2 & 6 \\ -3 & 4 & -2 & -15 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

Selon les recommandations données au-dessus on obtient des zéros, par exemple, dans la 1$^{\text{ière}}$ colonne. On utilise la 5$^{\text{ième}}$ opération élémentaire. On ajoute à la 1$^{\text{ière}}$ ligne la 2$^{\text{ième}}$ ligne et la 3$^{\text{ième}}$ ligne multipliée par (–1), le code de cette opération: $L_1+L_2-L_3$. Pour obtenir les zéros au lieu des éléments a_{21} et a_{31} on fait: $L_2+L_3+L_4$ et $L_2-2\cdot L_4$. Après, à l'aide de la 1$^{\text{ière}}$ colonne on peut faire les zéros dans la 4$^{\text{ième}}$ ligne.

$$A\sim\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & -15 & 5 \\ 0 & 7 & 7 & -21 & 7 \\ 1 & -2 & 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & -15 & 5 \\ 0 & 7 & 7 & -21 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice obtenue a trois mêmes colonnes $(C_2=C_3=C_5)$ et les colonnes proportionnelles $(C_4=-3C_2)$. En appliquant les opérations 3–5 on supprime la 3$^{\text{ième}}$ colonne, la 4$^{\text{ième}}$ colonne et la 5$^{\text{ième}}$ colonne. On obtient la matrice de dimension 4×2 et son rang est égal à 2:

$$A\sim\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \\ 0 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad M_2=\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-7\neq 0 \quad\Rightarrow\quad r(A)=2.$$

Exercice 2.6. Déterminez le rang des matrices données:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; b) $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 4 & -7 & -4 \end{pmatrix}$;

c) $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -4 & -5 \\ 3 & 0 & -7 & -6 \end{pmatrix}$; d) $D=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Solutions: a) $r(A)=3$; b) $r(B)=3$;
c) $r(C)=2$; d) $r(D)=2$.

3. SYSTEMES DES EQUATIONS LINEAIRES

On appelle ***système*** de m ***équations linéaires*** à n ***inconnues*** un système de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{8}$$

Les éléments a_{ij} sont les ***coefficients*** du système. Les éléments b_i s'appellent les ***seconds membres***. Les coeffitients et les seconds membres sont des constantes réelles.

Les x_j $(1 \le j \le n)$ sont les ***inconnues***.

On appelle ***solution du système*** toute suite des réels $(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$ vérifiant les m équations du système.

Résoudre le système, c'est en trouver toutes les solutions. Lorsque le système admet au moins une solution on dit qu'il est ***compatible***, sinon il s'appelle ***impossible (incompatible).*** Le système est ***déterminé (défini)*** s'il n'a qu'une seule solution.

Si $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, le système est dit ***homogène***. Tel système est toujours compatible car il a la solution $(0, 0, \ldots, 0)$ appellée ***solution nulle*** ou ***triviale.***

3.1. Résolution d'un système linéaire de *n* équations à *n* inconnues

On considère les méthodes principales de résolution des systèmes linéaires déterminés

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{9}$$

Les systèmes d'une telle forme s'appellent les ***systèmes de Cramer***. Pour les résoudre on applique des ***formules de Cramer***:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \tag{10}$$

A l'aide de ces formules on trouve la solution des systèmes linéaires si Δ est non nul.

Le déterminant des coefficients devant des inconnues sans changement de leurs places s'appelle ***déterminant du système*** Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{11}$$

Δ_i est le déterminant déduit de Δ en remplaçant la $i^{\text{ième}}$ colonne par la colonne des seconds membres:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad \ldots \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix} \tag{12}$$

Les déterminants Δ_i s'appellent ***déterminants auxiliaires***.

Exemple de résolution du système donné à l'aide des formules de Cramer:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = -2, \\ x - 2y + z = 1. \end{cases}$$

D'abord on trouve le déterminant du système Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 2 - 6 - 2 + 8 + 3 = 5.$$

$\Delta \neq 0$, donc le système a une solution unique. On calcule les déterminants auxiliaires:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 10; \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -15.$$

On applique les formules de Cramer:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2; \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-5}{5} = -1; \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-15}{5} = -3.$$

On fait la vérification :

$$2 \cdot 2 - (-1) + (-3) = 4 + 1 - 3 = 2 \equiv 2,$$
$$3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) = 6 - 2 - 6 = -2 \equiv -2,$$
$$2 - 2 \cdot (-1) + (-3) = 2 + 2 - 3 = 1 \equiv 1.$$

Remarque:

1) Si $\Delta \neq 0$ le système a une solution unique.

2) Si $\Delta = 0$ et tous les déterminants auxilières $\Delta_i = 0$ $(i = 1, \dots, n)$ le système est incompatible ou il est indéfini.

3) Si $\Delta = 0$ mais au moins un des déterminants auxilières $\Delta_i \neq 0$ le système est impossible.

Méthode matricielle. Un système de Cramer peut toujours s'écrire sous la forme matricielle:

$$AX = B \qquad (13)$$

Ici la matrice A s'appelle la ***matrice du système***. Elle est composée des coefficients devant des inconnues: $A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ sont les ***matrices-colonnes des inconnues et des seconds membres*** du système (9).

Si la matrice du système A est inversible, le système a la solution unique:

$$X = A^{-1}B \qquad (14)$$

Ainsi pour résoudre un tel système il faut trouver l'inverse de la matrice du système et la multiplier par la matrice-colonne des seconds membres.

Exemple de résolution du système donné par la méthode matricielle:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = -2, \\ x - 2y + z = 1. \end{cases}$$

On compose les matrices A, X et B:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On écrit le système donné sous la forme matricielle: $AX = B$. On calcule le déterminant de la matrice du système A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

$\det A \neq 0$, donc la matrice A est inversible. On calcule les cofacteurs nécessaires des éléments de A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(3-2) = -1;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 2 = -8; \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -(-1+2) = -1;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-4+1) = 3;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(4-3) = -1;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7.$$

On forme l'inverse:

$$C = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -8 \\ -1 & 1 & 3 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}; \qquad \Rightarrow \qquad A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -8 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

On trouve la solution du système:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -8 & 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12+2-4 \\ 2-2-1 \\ -16-6+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

On obtient les solutions: $x = 2, \ \ y = -1, \ \ z = -3$.

Méthode de Gauss (méthode d'élimination). Elle consiste à exécuter dans un ordre bien déterminé des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice élargie d'un système en passant à une matrice du système triangulaire supérieure (équivalente) s'il a ou non une solution unique.

On appelle ***la matrice élargie du système*** la matrice du système complétée par la colonne des seconds membres:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \ b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \ b_n \end{pmatrix} \qquad (15)$$

On rappelle les opérations dites élémentaires:

- Echange de deux lignes: $L_i \leftrightarrow L_j$.
- Multiplication d'une ligne par un réel non nul: $L_i \to \mu \cdot L_j \quad (\mu \in R)$.
- Addition à une ligne d'un multiple d'une autre ligne:

$$L_i \to L_i + \lambda \cdot L_j \qquad (\lambda \in R,\ i \neq j).$$

Exemple de résolution du système donné par la méthode de Gauss:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = -2, \\ x - 2y + z = 1. \end{cases}$$

On va se ramener à la résolution du système comme le système triangulaire. Pour cela on écrit la martice élargie du système:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

1[re] étape: On fait apparaître 1 pour coefficient de x dans la première ligne. Pour cela on échange les lignes 1 notée L_1 et 3 notée L_3.

Codage: Matrice:

$$L_1 \leftrightarrow L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

<u>2^e étape</u>: On élimine x dans les équations 2 et 3. Pour cela on multiplie les membres de la $1^{\text{ière}}$ ligne par –3 et on ajoute la ligne obtenue à L_2. On procède à la même opération avec la $3^{\text{ième}}$ ligne notée L_3.

Codage: Matrice:

$$\begin{array}{l} L_2 \to L_2 - 3 \cdot L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2 \cdot L_1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

<u>3^e étape</u>: Le coefficient de y dans la deuxième ligne a_{22} n'est pas égal à 1. On multiplie les membres de la $3^{\text{ième}}$ ligne par –3 et on ajoute la ligne obtenue à L_2. On divise L_2 par –1.

Codage: Matrice:

$$\begin{array}{l} L_2 \to L_2 - 3 \cdot L_3 \\ L_2 \to \dfrac{L_2}{-1} \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

<u>4^e étape</u>: On obtient $a_{32} = 0$. Pour cela on procède aux opérations suivantes:

Codage: Matrice:

$$\begin{array}{l} L_3 \to L_3 - 3 \cdot L_2 \\ L_3 \to \dfrac{L_3}{5} \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

On réduit la matrice élargie du système qui est équivalente au système triangulaire avec la diagonale unitaire:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1, \\ \quad\;\; y - 2z = 5, \\ \qquad\quad z = -3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -3, \\ y = 2z + 5, \\ x = 2y - z + 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -3, \\ y = -1, \\ x = 2. \end{cases}$$

On obtient les solutions: $x = 2,\;\; y = -1,\;\; z = -3$.

Exercice 3.1. Résolvez les systèmes donnés par 3 méthodes.

a) $\begin{cases} x + y - z = 36, \\ x + z - y = 13, \\ y + z - x = 7, \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 3x - 5y + 3z = 1, \\ 2x + 7y - z = 8, \end{cases}$

Solutions :

a) $x = 24{,}5;\;\; y = 21{,}5;\;\; z = 10;$ b) $x = 1;\;\; y = 1;\;\; z = 1.$

3.2. Système arbitraire d'équations linéaires

On revient maintenant au cas d'un système linéaire quelconque de m équations à n inconnues (8). On donne le ***théorème de Kronecker-Kapelli*** qui joue le rôle principal dans la théorie des systèmes linéaires. Ce théorème est connu sous le nom de ***Rouché-Fontené*** en France.

Théorème. Pour que le système (8) soit compatible il faut et suffit que le rang de la matrice élargie du système $\tilde{A}$ soit égal à celui de la matrice du système A: $r(\tilde{A}) = r(A) = r$. Ce nombre s'appelle ***le rang du système***.

En résolvant le système (8) les cas suivants sont possibles:

1) $r(\tilde{A}) > r(A)$ il n'a pas de solution.

2) $r(\tilde{A}) = r(A) = r$ c'est la condition d'existence des solutions. Dans ce cas il y a deux variantes:

a) $r = n$ (le rang du système = le nombre d'inconnues).

Cela signifie qu'il n'existe que r équations indépendantes dans le système donné. Ce sont ***les équations principales***. Les autres $(m-r)$ équations doivent être négligées. On aura alors le système bien connu: de n équations à n inconnues dont le déterminant est non nul. On utilise soit les formules de Cramer soit d'autres méthodes.

b) $r < n$ (le rang est moins grand que le nombre d'inconnues).

Dans ce cas on néglige des équations dépendantes et on aura le système de r équations à n inconnues $(r < n)$. Les r inconnues sont dites ***inconnues principales***. On les laisse dans le système à gauche et d'autres $(n-r)$ inconnues nommées non principales s'écrivent dans le système à droite. Ce sont les ***inconnues libres*** et on résout le système formé par les r équations principales à r inconnues principales en les exprimant en fonction des inconnues libres. En donnant des valeurs arbitraires aux inconnues libres on aura les solutions. Le système aura une infinité de solutions.

Exemples d'étude des systèmes donnés:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

On commence le calcul des rangs de $\tilde{A}$ et A (on les calcule simultanément).

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{L_1 + L_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

La matrice du système a deux lignes identiques $(L_1 = L_3)$ donc son rang se détermine comme $r(A) = 2$. Pour la matrice élargie le mineur d'ordre 3 non nul est admissible, par exemple:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \qquad \text{donc} \qquad r(\tilde{A}) = 3.$$

On a $r(A) \neq r(\tilde{A})$ ainsi le système n'a pas de solutions.

$$\text{b)} \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases}$$

On détermine les rangs nécessaires:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right) \overset{L_2 + 2 \cdot L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right).$$

On a $r(\tilde{A}) = r(A) = r = 2 < n = 3$. Donc le système est compatible et indéfini. Pour le résoudre on laisse $r = 2$ équations (par exemple, la 1[ière] et la 2[ième]). On prend $r = 2$ inconnues comme inconnues principales (c'est x_1 et x_2). On transforme le système obtenu:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 - 3x_3, \\ 2x_1 + 3x_2 = 2 + 2x_3. \end{cases}$$

On résout le système à l'aide des formules de Cramer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1-3x_3 & -1 \\ 2+2x_3 & 3 \end{vmatrix} = 3-9x_3+2+2x_3 = 5-7x_3;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1-3x_3 \\ 2 & 2+2x_3 \end{vmatrix} = 2+2x_3-2+6x_3 = 8x_3;$$

Solutions: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{5-7x_3}{5} = 1-1{,}4x_3;$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{8x_3}{5} = 1{,}6x_3; \qquad x_3 \in R.$$

On donne quelque solutions particulières:

1) $x_1 = 1;\; x_2 = 0;\; x_3 = 0;$

2) $x_1 = -0{,}4;\; x_2 = 1{,}6;\; x_3 = 1;$

3) $x_1 = 3{,}8;\; x_2 = -3{,}2;\; x_3 = -2.$

Exercice 3.2. Etudiez le système donné. Si le système est compatible trouvez toutes ses solutions.

a) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=4, \\ x_1-2x_2+2x_3=1, \\ 3x_1+x_2+3x_3=7, \\ x_1-x_2+2x_3=2, \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+4x_4+x_5=3, \\ x_1+x_2+2x_3-x_4+5x_5=3, \\ 4x_2-3x_3+6x_4-9x_5=4, \\ 3x_1+2x_2+3x_3+3x_4+6x_5=5. \end{cases}$

Solutions:

a) $r=3;\quad x_1=1;\quad x_2=1;\quad x_3=1;$

b) $r(A)=3;\quad r(\tilde{A})=4.$ Le système est incompatible.

3.3. Systèmes homogènes

Pour $b_i = 0$ dans (8) le système est dit ***homogène***. Evidemment que $r(A) = r(\tilde{A}) = r$ ainsi de tels systèmes ont toujours une solution.

On aura deux cas possibles:

a) Si $r(A) = n$ le système admet une seule solution nulle: $x_1 = ... = x_n = 0$.

b) Si $r(A) = r < n$ alors le système possède une infinité de solutions.

Exemples de résolution des systèmes homogènes:

$$\text{a)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ 7x_1 + 8x_2 = 0. \end{cases}$$

Ici la quantité d'équations coïncide avec le nombre d'inconnues donc on calcule le déterminant de la matrice du système:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 84 + 96 - 105 - 48 = 27.$$

Puisque le système est homogène et $\det A \neq 0$, elle n'a que la solution triviale: $x_1 = 0; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 0.$

$$\text{b)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

La matrice du système a le rang $r(A) = r = 2$ parce que parmi ses mineurs du deuxième ordre il y a celui-ci non nul:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix};\qquad M_2=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2+1=3\qquad\Rightarrow\qquad r(A)=2.$$

La quantité d'inconnues $n=3$. Pour la condition $r<n$ le système a l'infinité de solutions une desquelles est la solution nulle. On détermine les autres à l'aide de la méthode de Gausse.

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=0,\\ x_1+x_2+2x_3=0,\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}2x_1-x_2=-3x_3,\\ x_1+x_2=-2x_3,\end{cases}\quad\Rightarrow$$

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cc|c}2 & -1 & -3x_3\\ 1 & 1 & -2x_3\end{array}\right)\overset{L_1-2L_2}{\sim}\left(\begin{array}{cc|c}0 & -3 & x_3\\ 1 & 1 & -2x_3\end{array}\right)\overset{L_1\leftrightarrow L_2}{\sim}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & -2x_3\\ 0 & -3 & x_3\end{array}\right)\sim$$

$$\overset{\frac{L_2}{-3}}{\sim}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & -2x_3\\ 0 & 1 & -\dfrac{x_3}{3}\end{array}\right)\overset{L_1-L_2}{\sim}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -\dfrac{5x_3}{3}\\ 0 & 1 & -\dfrac{x_3}{3}\end{array}\right)\quad\Rightarrow\quad\begin{array}{l}x_1=-\dfrac{5x_3}{3};\\ x_2=-\dfrac{x_3}{3};\quad x_3\in R.\end{array}$$

Exercice 3.3. Résolvez les systèmes homogènes:

a) $\begin{cases}x_1-3x_2+x_3=0,\\ -2x_1-4x_2=0,\\ 5x_1+3x_3=0,\end{cases}$

b) $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=0,\\ 3x_1+8x_2+4x_3=0,\\ 2x_1+6x_2+5x_3=0.\end{cases}$

Solutions :

a) $x_1=0;\quad x_2=0;\quad x_3=0$;

b) $x_1=8x_3;\quad x_2=-3{,}5x_3;\quad x_3\in R.$

AUTOEVALUATION

1. Lequel des produits donnés **ne figure pas** dans le déterminant d'ordre 3:

a) $a_{13}a_{21}a_{32}$; b) $a_{12}a_{21}a_{32}$; c) $a_{12}a_{23}a_{31}$; d) $a_{11}a_{22}a_{33}$.

2. Lequel des produits donnés **figure** dans le déterminant d'ordre 3:

a) $a_{12}a_{23}a_{33}$; b) $a_{13}a_{22}a_{32}$; c) $a_{12}a_{21}a_{32}$; d) $a_{13}a_{22}a_{31}$.

3. Les produits $a_{13}a_{22}a_{31}$ et $a_{11}a_{23}a_{32}$ **figurent** dans le déterminant d'ordre 3 en conformité avec les signes:

a) "+" et "+"; b) "+" et "–"; c) "–" et "+"; d) "–" et "–".

4. Si on multiplie tous les éléments d'une ligne ou d'une colonne du déterminant Δ par le nombre m , **la valeur** de nouveau déterminant sera égal à:

a) $m\Delta$; b) Δ; c) $-m\Delta$; d) $\dfrac{\Delta}{m}$.

5. **Lesquelles** de ces affirmations données **sont correctes**?

1) Si l'on transpose deux lignes, la valeur de ce déterminant ne change pas.

2) Δ = 0 s' il a deux mêmes colonnes.

3) Le Δ est égal à la somme de produits des éléments de la 1-ère ligne et les cofacteurs des mêmes éléments de la 2-ème ligne.

4) Si tous les éléments d'une certaine ligne ont un facteur commun on peut le mettre devant le Δ.

a) 1 et 2; b) 2 et 4; c) 3 et 4; d) 1 et 3.

6. **Lesquelles** de ces affirmations données **ne sont pas correctes**?

1) $\Delta = 1$ si tous ses éléments sont égaux à 1.

2) $\Delta = 0$ si tous les éléments d'une certaine ligne sont égaux à zéro.

3) On ne change pas le Δ en ajoutant une colonne multipliée par n'importe quel nombre à une autre colonne.

4) Si l'on transpose la $1^{\text{-ère}}$ ligne et la $1^{\text{-ère}}$ colonne, le déterminant change de signe.

a) 1 et 4; b) 2 et 4; c) 1 et 3; d) 2 et 3.

7. Les matrices A et B ont le même type (2, 3). Sur ces matrices **on peut faire** l'opération:

a) multiplier A par B; b) diviser B par A;

c) additionner; d) multiplier B par A .

8. Si on transpose une matrice, de tels composants se remplacent:

a) la $1^{\text{-ère}}$ et la dernière colonnes;

b) chaque ligne et la colonne du même numéro;

c) la $1^{\text{-ère}}$ et la dernière lignes;

d) la $1^{\text{-ère}}$ ligne et la $1^{\text{-ère}}$ colonne.

9. Les matrices A et B **commutent** si:

a) $A+B=B+A$; b) $AB=BA$;

c) $A = B$; d) $AB = I$.

10. La matrice carrée a la matrice inverse, si:

a) son déterminant n'est pas égal à zéro;

b) son déterminant est égal à zéro;

c) tous les éléments de sa diagonale principale ne sont pas égaux à zéro;

d) tous ses éléments ne sont pas égaux à zéro.

11. La matrice A^{-1} s'appelle **matrice inverse** de la matrice carrée A si:

a) $A^{-1} = -A$;

b) $AA^{-1} = A^{-1}A = I$;

c) $A + A^{-1} = I$;

d) $A - A^{-1} = I$.

12. **Le rang** d'une matrice est:

a) la quantité de mineurs non nuls;

b) l'ordre maximal des mineurs non nuls;

c) la quantité d' éléments diagonaux non nuls;

d) la quantité d' éléments non nuls.

13. La matrice s'appelle **matrice unité** si:

a) tous les éléments de sa 1-ère ligne sont égaux à un;

b) elle est la matrice carrée et son déterminant est égal à 1;

c) elle est la matrice carrée et les éléments de sa diagonale principale sont égaux à un et tous ses autres éléments sont égaux à zéro;

d) tous les éléments de cette matrice sont égaux à un.

14. **Lesquelles** de ces affirmations données **sont correctes**?

Le rang d'une matrice ne se change pas si:

1) on supprime une ligne;

2) on transpose la matrice;

3) on multiplie une colonne par 0;

4) on additionne une ligne multipliée par n'importe quel nombre à une autre ligne.

a) 2 et 4; b) 2 et 3; c) 1 et 4; d) 1 et 3.

15. Le système linéaire s'appelle **indéfini** si:

a) il a une seule solution;

b) il n'a pas de solutions;

c) il n'a qu'une seule solution;

d) tous les membres libres sont égaux à zéro.

16. Le système linéaire de m équations s'appelle **incompatible** si:

a) il a infini de solutions; b) il a m solutions;

c) il a une seule solution; d) il n'a pas de solutions.

Clés : 1–b; 2–d; 3–d; 4–a; 5–b; 6–a;
7–c; 8–b; 9–b; 10–a; 11–b; 12–b;
13–c; 14–a; 15–c; 16–d.

INDEX VOCABULAIRE

Сдвижкова Олена Олександрівна
Чумак Лариса Олександрівна
Тимченко Світлана Євгеніївна

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА
(теорія, приклади та задачі)

Методичний посібник для слухачів підготовчого відділення для іноземних громадян
(Французькою мовою)

Видано в редакції авторів.

Підп. до друку 06.04.2015. Формат 30×42/4.
Папір офсет. Ризографія. Ум. друк. арк. 2,6.
Обл.-вид. арк. 2,6. Тираж 30 пр. Зам. №

Державний ВНЗ «Національний гірничий університет»
49005, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19.