МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Є. С. Запара

НАДІЙНІСТЬ МАШИН І КОМПЛЕКСІВ

Підручник

Дніпро
НТУ «ДП»
2021

УДК 62-192(07)
З 27

Рекомендовано до видання вченою радою НТУ «ДП» (протокол № 11 від 29.06.2021) як підручник для бакалаврів спеціальності 133 Галузеве машинобудування ОПП «Комп'ютерний інжиніринг у машинобудуванні»

Рецензенти:

Фелоненко С.В. – канд. техн. наук, проф., декан механіко-машинобудівного факультету НТУ «Дніпровська політехніка»;

Надутий В.П. – д-р техн. наук, проф. завідувач відділу механіки машин і процесів переробки мінеральної сировини Інституту геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України.

З 27 Запара Є. С. Надійність машин і комплексів: підруч. / Є.С. Запара ; Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2021. – 101 с. – Режим доступу : http://www.nmu.org.ua/ (дата звернення:30.08.2021). – Назва з екрана.

ISBN 978-966-350-753-8

Наведено термінологію та поняття в галузі надійності машин. Викладено основні відомості математичної теорії надійності, подано методи визначення стандартизованих кількісних показників надійності технічних об'єктів. Розглянуто засади структурного аналізу надійності комплексів машин. Подано приклади розрахунку показників надійності технічних об'єктів.

Для студентів, інженерно-технічних працівників, співробітників вищих навчальних закладів, науково-дослідних інститутів та проектних організацій, працюючих у сфері машинобудування.

ISBN 978-966-350-753-8

УДК 62-192(07)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Мета дисципліни «Надійність машин і комплексів» (далі *дисципліна*) – формування компетентностей щодо фізичних причин відмов машин, пристроїв і комплексів, кількісних показників, що використовують для вимірювання окремих складових властивості надійності, та закономірностей зміни в часі показників надійності технічних об’єктів від їх конструктивних параметрів і експлуатаційних факторів.

У посібнику спочатку наведена технічна термінологія, що використовується при визначенні кількісних характеристик надійності машин і нормована Державним стандартом України [1]. Відповідно до вимог робочої програми *дисципліни* наприкінці першого розділу викладені фізичні засади відмов деталей машин.

У зв’язку з тим, що більшість стандартних показників надійності технічних об’єктів розраховуються за допомогою теорії ймовірностей і математичної статистики, проте зміст програми дисципліни «Вища математика» не містить зазначених складових, розділи 2 та 3 даного посібника присвячені відповідно цим методам.

У розділі 4 наведено визначення показників за всіма складовими властивості надійності та нормовані методи їх розрахунку. Розділ 5 присвячено структурному аналізу надійності складних машин та їх комплексів.

Посібник містить приклади розрахунку характеристик і показників надійності безпосередньо після викладення відповідних методів. Це дозволяє сформувати у студента орієнтування в можливих кількісних значеннях наведених характеристик і краще зрозуміти матеріал. Після кожного розділу подані питання чи задачі для самоконтролю. У кінці посібника наведено відповіді до задач і питань для самоконтролю.

1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ В ГАЛУЗІ НАДІЙНОСТІ МАШИН

1.1 Об'єкт при розрахунку надійності та його стани

Об'єкт (технічний об'єкт) – це предмет, який підлягає розрахунку, аналізу, випробуванню і дослідженню в процесі його проєктування, виготовлення, застосування, технічного обслуговування, ремонтів, зберігання і транспортування з метою забезпечення ефективності його функціонального призначення.

Будь-який виріб машинобудування протягом усього свого терміну служби завжди знаходиться в одному з чотирьох станів: ***справному, несправному, працездатному, непрацездатному.***

Справний стан – це стан об'єкта, при якому він задовольняє всі вимоги нормативно-технічної документації (НТД).

Несправний стан – це стан об'єкта, при якому він не задовольняє хоча б одну вимогу НТД.

Працездатний стан – стан об'єкта, при якому значення всіх параметрів, що характеризують його здатність виконувати задані функції, відповідають вимогам НТД.

Непрацездатний стан – стан об'єкта, при якому значення хоча б одного параметра, що характеризує його здатність виконувати задані функції, не відповідає вимогам НТД.

Особливим видом непрацездатного стану є ***граничний***.

Граничним називається стан об'єкта, при якому його подальше застосування за призначенням неприпустимо (наприклад, за умовами безпеки робіт) або недоцільно (наприклад, вихід параметрів за встановлені межі), або неможливо.

1.2 Поняття відмови, пошкодження й відновлюваності об'єкта

Переходи об'єкта з одного стану в інші називаються подіями – пошкодженням або відмовою.

Відмовою називається подія, що полягає в порушенні працездатного стану об'єкта.

Пошкодження – це подія, що полягає в порушенні справного стану об'єкта при збереженні його працездатного стану.

Об'єкти можуть бути ***відновлюваними*** чи ***невідновлюваними***, якщо в ситуації, що розглядається, відновлення їх працездатного стану відповідно передбачено або не передбачено нормативно-технічною документацією.

Об'єкти можуть бути ***ремонтовними*** (ремонтопридатними) і ***неремонтовними*** (неремонтопридатними), якщо їх ремонт відповідно передбачений або непередбачений нормативно-технічною документацією.

Наприклад, екскаватор, комбайн чи конвеєр – відновлювані й ремонтовні об'єкти. Насоси, гідромотори або електродвигуни цих машин – невідновлювані (в умовах місця застосування машини за призначенням) об'єкти, але вони є ремонтовними (в умовах спеціалізованих ремонтних підприємств).

1.3 Властивість надійності та її складові

Надійністю технічних об'єктів називається їх властивість зберігати у часі в установлених межах значення всіх параметрів, що характеризують здатність виконувати необхідні функції, у заданих режимах і умовах застосування, технічного обслуговування, ремонтів, зберігання і транспортування.

Надійність є складною властивістю, тому залежно від призначення різних технічних об'єктів та умов їх застосування, вона може складатися з поєднання таких властивостей: ***безвідмовності; довговічності; ремонтопридатності та збереженості***.

Безвідмовність – властивість об'єкта безупинно зберігати працездатний стан протягом деякого часу або деякого наробітку, вимірюваного, наприклад, у машино-годинах, тонах виробленої продукції, кубометрах вийнятого ґрунту та ін. одиницях.

Властивість безвідмовності проявляється залежно від призначення об'єкта як в режимі його роботи, так і в режимі очікування роботи. Оперують такими основними термінами:

- *наробіток (напрацювання)* – тривалість або обсяг роботи об'єкта,
- *наробіток на відмову* – тривалість або обсяг роботи об'єкта між відмовами.

Слід зазначити, що напрацювання може бути як безперервною величиною (тривалість роботи в годинах), так і дискретною (кількість технологічних циклів виконання операцій).

Довговічність – властивість об'єкта зберігати працездатний стан до настання граничного стану при встановленій системі технічного обслуговування і ремонту.

Оперують такими основними термінами:

- *ресурс* – наробіток об'єкта від початку його застосування до настання граничного стану;
- *строк служби* – календарна тривалість експлуатації об'єкта від початку його застосування до настання граничного стану.

Ремонтопридатність – властивість об'єкта, що полягає в його пристосованості до попередження і виявлення відмов і пошкоджень, до відновлення працездатності та справності шляхом проведення технічного обслуговування і ремонту.

Ця властивість кількісно характеризує прийняте компоноване рішення для машини, агрегату, складальної одиниці або деталі, а також їх доступність і легку заміну.

Збереженість – властивість об'єкта безупинно зберігати справний і (або) працездатний стан протягом і (або) після режиму очікування, зберігання та (або) транспортування.

Властивість збереженості характеризує здатність об'єкта протистояти негативному впливу факторів тривалого зберігання або транспортування і забезпечувати його застосування після режиму очікування із заданими показниками функціонування зі збереженням показників безвідмовності та довговічності на встановленому рівні.

Для конкретних об'єктів і умов їх експлуатації перераховані складові властивості надійності мають різну відносну значимість. Абсолютна більшість машин цілорічного застосування оцінюється показниками, як правило, трьох властивостей – безвідмовності, довговічності та ремонтопридатності.

Машини сезонного застосування й обладнання, що призначене для ліквідації критичних ситуацій (протипожежне, рятувальне тощо) і має за своїм призначенням тривалий період перебування в режимі очікування роботи, повинні оцінюватися показниками 4-х властивостей надійності.

Гумотехнічні вироби (манжети, ущільнення) оцінюються показниками довговічності та збереженості.

1.4 Види відмов машин і комплексів

Усі технічні об'єкти з метою проведення аналізу їх надійності поділяють на елементи і системи.

Під ***елементом*** розуміється об'єкт, надійність якого вивчається як єдине ціле, незалежно від його структури і будови складових частин (елементів).

Під ***системою*** розуміється об'єкт, надійність якого визначається структурою взаємозв'язку і надійністю елементів, що входять до його складу.

Відмови елементів машин і їх комплексів класифікуються за ознаками, наведеними в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Класифікація відмов елементів машин і комплексів

Класифікаційна ознака	Вид відмови
1 За характером втрати працездатності	1 Функціональні 2 Параметричні
2 За впливом на безпеку робіт	1 Безпечні 2 Небезпечні
3 За характером виникнення відмови	1 Раптові 2 Поступові
4 За взаємозв'язком відмов	1 Незалежні 2 Залежні
5 За можливістю здійснення контролю	1 Контрольовані 2 Неконтрольовані
6 За характером пошкодження елемента	1 Допустимі 2 Неприпустимі
7 За причиною і періодом виникнення	1 Конструкційні 2Технологічні (виготовлювані) 3 Експлуатаційні: 3.1 При освоєнні об'єкта 3.1 До першого капітального ремонту 3.3 Після капітального ремонту
8 За повноважністю	1 Повноважні 2 Неповноважні

Функціональними вважаються відмови, при яких елемент втрачає працездатність, тобто припиняє функціонувати (руйнування, заклинювання).

Параметричними вважаються відмови, при яких будь-який параметр елемента виходить за допустимі межі (наприклад, зниження опору ізоляції обмотки статора електродвигуна нижче допустимого рівня).

Небезпечними вважаються відмови, при виникненні або усуненні яких виникає небезпечна ситуація для робітників (розрив тягових ланцюгів комбайнів, стругів, скребкових конвеєрів, поломки перекрить секцій кріплення, руйнування підшипника вібраційного грохоту, пробій ізоляції обмоток електромагнітних сепараторів та ін.).

Раптовими вважаються відмови, при яких один або кілька параметрів елемента різко (стрибкоподібно) виходять за допустимі межі. Ці відмови виникають зазвичай у результаті втомного руйнування елементів або як наслідок випадкових впливів фізичного характеру (зламався різець, лопнув трубопровід високого тиску, порив тягових ланцюгів комбайна внаслідок забурювання його у вибій, негабарит заклинив щоки дробарки).

Поступові відмови характеризуються плавною зміною параметрів елемента з виходом їх за допустимі межі. Ці відмови частіше за все пов’язані зі спрацювання деталей машин, їх простіше передбачити і запобігти при проведенні технічного обслуговування.

Незалежні відмови на відміну від ***залежних*** не пов'язані з попередніми відмовами інших елементів. Приклади залежних відмов: схід комбайна з конвеєра в результаті поломки з'єднань його риштачного поставу, забивання великими шматками залізної руди робочої зони електромагнітного сепаратора в результаті пориву контрольної сітки на вході.

Контрольовані відмови виявляються засобами технічної діагностики або обслуговуючим персоналом при проведенні контрольних оглядів, а неконтрольовані – не можуть бути виявлені без розбирання складальних одиниць.

Припустимі відмови виникають у результаті природного пошкодження елементів при експлуатації машин, ***неприпустимі*** – у результаті недостатньої міцності, надмірного спрацювання або перевантаження елементів. Цей вид відмов вимагає пильної уваги і повної їх ліквідації.

Встановлення причин та періоду виникнення відмови дозволяє обґрунтовано підходити до розробки заходів для підвищення надійності машин і комплексів.

Для вирішення практичних питань в галузі надійності використовуються показники, за допомогою яких можна кількісно оцінити рівень надійності машин будь-яких виробництв, їх комплексів, устаткування і підприємств у цілому. Виникнення відмов різних об'єктів має багатопричинний, випадковий характер, і тому при кількісній оцінці зазначених показників надійності використовують методи теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів і математичної статистики. Тому спочатку стисло розглянемо основні з цих методів.

1.5 Фізичні засади відмов деталей машин

Складний виріб машинобудування, будь-то машина чи комплекс машин, відмовляють унаслідок відмови їх конкретних деталей. Як зазначено вище, найбільш малопрогнозованими є ***раптові відмови***. Ці відмови за фізичними причинами їх виникнення можна розподілити на три групи:

- до першої – ті, що виникають у результаті втомного руйнування деталей машин при проєктних, наближених до нормальних, умовах експлуатації;
- до другої – викликані зовнішніми для машини складними умовами експлуатації, що характеризуються значними коливаннями навантажень і наявністю непередбачуваних впливів, наприклад, при підземному видобутку корисних копалин;
- до третьої – відмови конструкцій, що виникають у результаті втомного руйнування деталей в умовах складного температуро-силового навантаження.

Розглянемо фізичні засади появи раптових відмов, що віднесені до першої групи. Ці відмови виникають унаслідок процесу втоми матеріалу деталей машин, що пов’язаний з дією змінних навантажень і поступово призводить до зміни властивостей матеріалу деталі та накопичення його структурних пошкоджень. Через це утворюються і розвиваються тріщини, уздовж яких потім деталь руйнується [2, 3, 4].

Змінність навантажень на деталі та їх матеріал характеризуються:

• періодом циклу навантаження, що вимірюється в одиницях часу;

• частотою навантаження, що є кількістю повторюваних циклів в одиницю часу, наприклад у герцах;

• максимальними та мінімальними напруженнями в металі деталі впродовж циклу – σ_{max}, σ_{min}, МПа ;

• середніми напруженнями впродовж циклу, що визначаються за формулою:

$$\sigma_{cp} = (\sigma_{max} + \sigma_{min}) / 2, \text{ МПа;}$$

• амплітудою напружень: $\sigma_{cp} = (\sigma_{max} - \sigma_{min}) / 2,$ МПа;

• коефіцієнтом асиметрії циклу $\boldsymbol{K_ц} = \boldsymbol{\sigma_{\min} / \sigma_{\max}}$.

Симетричним називається цикл, у якого максимальні та мінімальні напруження рівні по модулю та протилежні за знаком. Слід зазначити, що позитивними вважаються навантаження та напруження, що виникають при розтягуванні матеріалу.

Максимальна амплітуда напружень, при якій ще не настає втомне руйнування впродовж заданої бази випробувань, називається ***границею витривалості*** $\boldsymbol{(\sigma_{кц})}$. Границя витривалості при симетричному циклі, коли $\boldsymbol{K_ц = -1}$, позначається з відповідним індексом $\boldsymbol{\sigma_{-1}}$. Залежно від марки металу значення цієї границі коливається в діапазоні: $\boldsymbol{\sigma_{-1} = (0{,}25 \ldots 0{,}6)\ \sigma_в}$, де $\boldsymbol{\sigma_в}$ – границя міцності.

Відокремлюють ***багатоциклову*** та ***малоциклову*** втоми матеріалу.

Багатоциклова втома матеріалу характерна для більшості деталей машин. Вона накопичується переважно при пружному деформуванні (без помітних пластичних деформацій). Цей вид утоми спостерігається та враховується конструктором при розрахунку таких деталей, як вали, осі, зубчасті колеса тощо. Для наочності розуміння факторів, що впливають на швидкість процесу накопичення втоми, звернемося до діаграми Гука (далі діаграма) при симетричному навантаженні сталі, з якої зроблено вал (рис. 1.1).

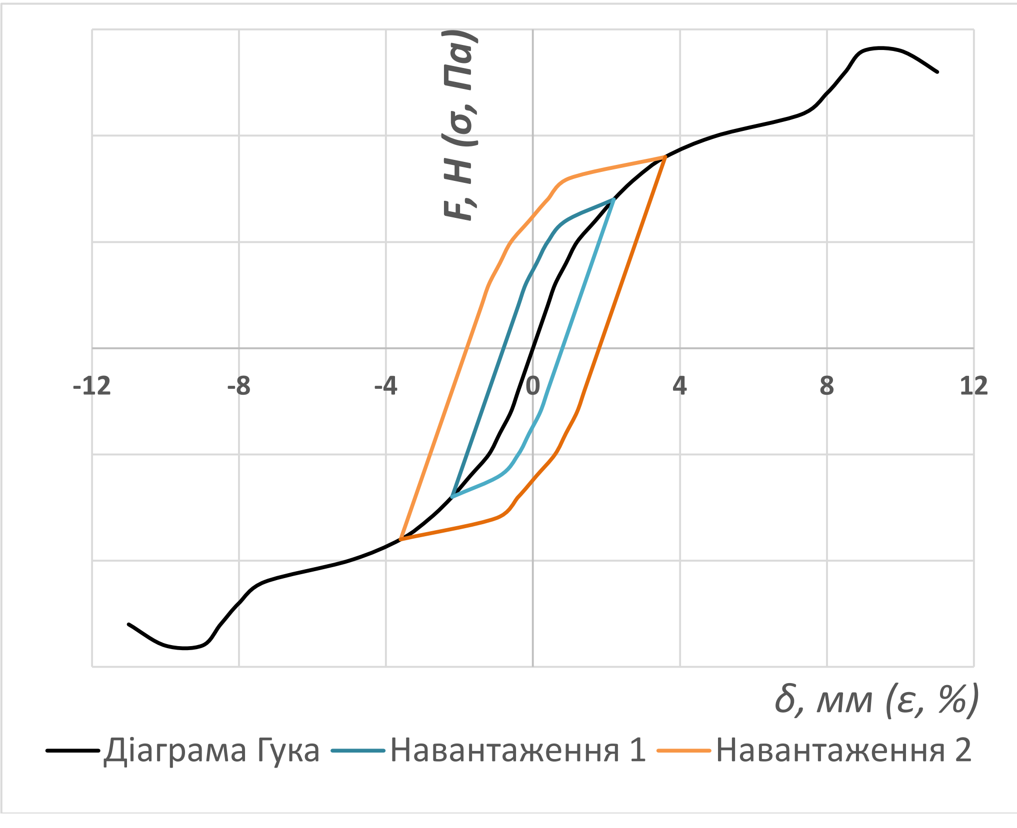


Рис. 1.1. Діаграма Гука при симетричному циклічному навантаженні сталі

При збільшенні деякого навантаження $\boldsymbol{F}$ від **0** до найбільшого свого значення в небезпечному перерізі валу відповідно збільшуються і напруження в металі $\boldsymbol{\sigma}$. При цьому виникає деформація деталі, яка зростає (див. діаграму) по чорній кривій до свого деякого позитивного значення, наприклад, до перетину із синьою (внутрішньою) петлею. Потім навантаження $\boldsymbol{F}$ спадає до **0,** а деформація зменшується по «пружній» прямій, що є паралельною прямій пружної ділянки діаграми, розташованій поблизу її центра (по правій гілці петлі). Внаслідок цього вал отримає залишкову деформацію δ, що дорівнює відстані від точки перетину петлі з віссю абсцис до початку координат. При подальшому збільшенні від'ємного навантаження від **0** до $\boldsymbol{-F}$ деформація деталі зменшується, а потім стає від'ємною по кривій, що паралельна діаграмі на відповідній її ділянці в горизонтальній площині до перетину з діаграмою. Таким чином, вал отримає від'ємну деформацію, що дорівнює по абсолютному значенню її величині при навантаженні $\boldsymbol{+F}$. Коли навантаження знову буде збільшуватися від $\boldsymbol{-F}$ до **0,** деформація деталі зменшиться і набуде значення $-\delta$. Подальше збільшення навантаження до $\boldsymbol{+F}$ завершує замикання так званої «петлі гістерезису», по якій будуть повторюватися подальші цикли деформації валу при його обертанні.

Площа цієї петлі з позиції фізики являє собою роботу сили деформації, тобто енергію, що йде на накопичення втоми і руйнування валу впродовж одного циклу навантаження. Не важко бачити, що в разі збільшення навантаження $\boldsymbol{F}$, наприклад, на 25 % до жовтої (зовнішньої) петлі, площа останньої збільшиться непропорційно більше. Це пояснює той факт, що кратко термінові перевантаження суттєво скорочують ресурс деталей.

Встановлено, що вичерпання ресурсу деталей від утоми відбувається по кривій втоми, яка є показниковою функцією від напружень у деталі. Тому вичерпання ресурсу є пропорційним напруженням, що виникають у деталі, піднесених до ступеня показника кривій втоми $\boldsymbol{m}$. Цей показник залежить від властивостей матеріалу деталі, її форми та виду втомленого руйнування, на запобігання якому виконується розрахунок. Наприклад, при розрахунку ресурсів зубчастих коліс на контактну витривалість $\boldsymbol{m = 6}$***;*** на згинальну – $\boldsymbol{m = 9}$***.*** При розрахунку валів на крутіння та вигин $\boldsymbol{m = 9}$***.*** При розрахунку підшипників кочення: для кулькових – $\boldsymbol{m = 3}$***,*** для роликових – $\boldsymbol{m = 3{,}3}$***.*** Наприклад, якщо повернутися до питання в попередньому абзаці про підвищення навантаження валу на 25 %, тобто в 1,25 раза, то можна визначити, у скільки раз зменшиться ресурс валу: в $1{,}25^9 = 7{,}45$ (більше ніж у 7 разів). Цей приклад також пояснює причину важкості прогнозування ресурсу машин при використанні їх за призначенням, оскільки коливання технологічного навантаження в діапазоні, припустимому НТД, призводить до суттєвого розсіювання ресурсів однакових виробів машинобудування. Тому для об'єктивного прогнозування ресурсів машин при їх експлуатації використовують відповідні методи математичної статистики чи розробляють методи та прилади для індивідуального контролю вичерпання ресурсу базовими деталями.

При ***малоцикловій*** втомі матеріалу втомне пошкодження та руйнування настають унаслідок пружно-пластичного деформування зі значними пластичними деформаціями. При цьому напруженнями в матеріалі можуть перевищувати границю плинності матеріалу $\boldsymbol{\sigma_т}$, що суттєво прискорює швидкість накопичення втоми, вимірюваної в кількості циклів навантаження. Тому елементи конструкцій, для яких припускають роботу при пружно-пластичному деформуванні, повинні мати незначну частоту цього навантаження. В таких умовах працюють металоконструкції в цехах підприємств, великогабаритні тихохідні вали, ворота камер судноплавних шлюзів, корпуси суден, рами машин і рухомого складу залізниць тощо.

Появу раптових відмов, що віднесені до другої групи, прогнозувати можливо тільки з якоюсь часткою можливості, розглядаючи процес як випадковий з використанням методів теорії ймовірностей та математичної статистики, що будуть розглянуті подалі. Для запобігання таких відмов зазвичай використовують навантажувальне резервування, що буде розглянуто в підрозділі 5.4.

Раптові відмови, що віднесені до третьої групи, пов’язані з температуросиловим навантаженням деталей. Ці відмови більш важко прогнозувати. Розрахунок довговічності цих деталей базується на кінетичній теорії міцності твердих тіл, що враховує залежність швидкості руйнування при стаціонарному навантаженні від температури. Нестаціонарний термоактиваційний процес деформування зводиться до еквівалентного стаціонарного такої ж тривалості в часі та з еквівалентними напруженнями в матеріалі. Метод потребує визначити для даного матеріалу деталі «енергію активації» за результатами експрес-випробувань на короткочасну міцність і дозволяє прогнозувати довговічність деталей, що мають складне температуросилове навантаження.

Більш докладно з методами випробувань і розрахунку ресурсів деталей, що мають температуросилове навантаження, можна ознайомитись у навчальному посібнику І.Г. Грабара [3].

Фізичними причинами ***поступових відмов*** переважно є спрацювання деталей унаслідок тертя ковзання при їх контакті та старіння полімерних і гумових матеріалів. Сила тертя і відповідно швидкість зношування поверхонь деталей, що взаємодіють, прямо пропорційна силі їх взаємного притискування. Тому цей процес є більш прогнозованим порівняно з накопиченням матеріалом утоми. Зношування деталей машин має три періоди: припрацювання, усталеного та інтенсивного спрацювання. При переході процесу зношування в інтенсивний період зазвичай розміри посадочних поверхонь деталей виходять за допустимі межі й подальша експлуатація їх неприпустима. Розрахунок швидкості процесу спрацювання з урахуванням швидкості відносного переміщення, навантаження деталей та їх змащування фундаментально викладені в [2]. У зазначеному підручнику також викладені закономірності старіння матеріалів.

1.6 Питання для самоконтролю

1. Чим відрізняється справний стан об'єкта від працездатного?
2. Чим відрізняється непрацездатний стан об'єкта від граничного?
3. Що є для фари, яка освітлює робочий простір біля машини, перегорання лампи – відмова чи пошкодження?
4. Застосуйте питання № 3 до лампи, що перегоріла в фарі.
5. Електродвигун, що перегорів, – це ремонтовний чи відновлюваний об'єкт?
6. Чим відрізняються такі властивості об'єктів машинобудування: довговічність і збереженість?
7. Чим відрізняються такі властивості об'єктів машинобудування: надійність і довговічність?
8. Чим відрізняється наробіток від наробітку на відмову?
9. У скребкового конвеєра внаслідок спрацювання зірки і ланцюга останній зіскочив із зірки. Класифікуйте відмову за всіма ознаками.
10. Який вид руйнування легше передбачити: від утоми матеріалу чи від спрацювання поверхонь, у контактній взаємодії?
11. Як зменшиться ресурс кулькового підшипника кочення у разі, якщо експлуатаційне навантаження на нього буде вдвічі більшим за розрахункове?
12. Як зменшиться ресурс підшипника ковзання в разі, якщо експлуатаційне навантаження на нього буде вдвічі більшим за розрахункове?

2 ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ, ЩО ВИКОРИСТОВУЮТЬСЯ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ НАДІЙНОСТІ МАШИН

2.1 Основні поняття теорії ймовірностей

2.1.1 Випадкове явище. Подія. Ймовірність події. Безпосереднє визначення ймовірності

Теорія ймовірностей є математична наука, що вивчає закономірності у випадкових явищах.

У більшості випадків при вирішенні практичних завдань фізики, механіки, техніки і надійності машин замість реального явища розглядають його спрощену схему, «модель», припускаючи, що в даних умовах досвіду явище протікає цілком певним чином. При цьому з незліченної безлічі факторів, що впливають на дане явище, виділяються найголовніші, вирішальні. Впливом інших, другорядних, факторів просто нехтують. Потім застосовують той чи інший математичний апарат і виявляють основну закономірність, властиву даному явищу, що дає можливість передбачити результат досліду за його заданими умовами. У міру розвитку науки число чинників, що враховуються, стає все більше; явище досліджується докладніше; науковий прогноз стає точніше. Однак, як би точно і детально не були фіксовані умови досвіду, неможливо досягти того, щоб при повторенні досвіду результати повністю збігалися. Більш того, існує безліч завдань, у яких нас цікавить результат, який залежить від такого великого числа факторів, що практично неможливо зареєструвати та врахувати всі ці чинники. У таких ситуаціях численні другорядні фактори тісно переплітаються між собою, набуваючи випадковий характер, починають відігравати помітну роль. Разом з тим число їх таке велике і вплив настільки складний, що застосування класичних методів дослідження себе не виправдовує.

Для прикладу розглянемо потужність, що розвивається двигуном очисного комбайна при роботі. При досить високій вивченості питання і наявності методів розрахунку навантажень на виконавчі органи в різних умовах розрахункове значення потужності в кращому разі буде збігатися із середньою потужністю, що розвивається двигуном очисного комбайна на деякій ділянці часу при роботі. Коливання миттєвого значення потужності двигуна, незважаючи на роботу системи автоматичного керування комбайном, викликані фізичною особливістю процесу різання вугілля, який є пульсуючим, нестабільністю опору переміщенню комбайна, змінами кута падіння, потужності пласта та пов'язаними з цим перехідними процесами в системі. Тому миттєве значення потужності двигуна будь-якої технологічної машини, що переробляє, видобуває якийсь матеріал, має ту чи іншу випадкову складову. Подібні явища вважаються випадковими.

Випадкове явище – це таке явище, яке при неодноразовому відтворенні одного і того ж досліду протікає щораз дещо по-іншому.

Приклади випадкових явищ: багаторазове зважування тіла на терезах, кількість циклів навантажень, необхідних для втомного руйнування деталі, стрільба з гармати по цілі, наробіток дробарки до відмови.

Практика показує, що, спостерігаючи за масою однорідних випадкових явищ, ми зазвичай виявляємо в них цілком певні закономірності, однією з яких є ***стійкість***.

Наприклад, тиск газу на стінку являє собою сукупність ударів молекул об цю стінку, кожен з яких являє собою випадкову величину. Випадкові особливості, властиві руху кожної окремої молекули, у масі осереднюються і в підсумку ми отримуємо відомий фізичний закон, справедливий для маси випадкових явищ. Відзначимо, що саме ***масовість*** випадкових явищ забезпечує виконання цього закону.

Подією в теорії ймовірностей вважається всякий факт, який в результаті досліду може відбутися або не відбутися.

Приклади подій: вихід з ладу конвеєра протягом зміни.

Розглядаючи різні події, ми бачимо, що кожна з них має якийсь ступінь можливості: одні – більший, інші – менший. Для кількісної оцінки ступеня можливості кожної події використовують число, зване ***ймовірністю події***, яке являє собою чисельну міру ступеня об'єктивної можливості цієї події.

Нагадаємо основні поняття, використовувані в теорії ймовірностей.

Достовірною вважається подія, яка в результаті досліду неодмінно має статися. Прийнято вважати, що достовірна подія має ***ймовірність 1***.

Неможливою вважається подія, яка в результаті даного досліду не може відбутися. Цій події приписують ***ймовірність,*** що дорівнює ***0***. Отже, діапазон зміни ймовірностей будь-яких подій – це число від ***0*** до ***1***.

Існує цілий клас дослідів, для яких ймовірність їх можливих результатів легко оцінити безпосередньо з умов самого досліду. Наприклад, при киданні грального кубика внаслідок його симетрії є підстава вважати всі шість можливих результатів досліду однаково ймовірними. Саме це дає нам право припускати, що при багаторазовому киданні кубика всі шість граней будуть випадати приблизно однаково часто. Це припущення для правильно виконаного кубика дійсно виправдовується на досвіді: при багаторазовому киданні кубика кожна його грань з'являється приблизно в 1/6 частці всіх дослідів, причому відхилення цієї частки від 1/6 тим менше, чим більше число дослідів зроблено.

Для кожного досліду, у якому можливі наслідки симетричні й однаково можливі, можна застосувати прийом, який називається ***безпосереднім підрахунком ймовірностей***. Про такий дослід говорять, що він ***«зводиться***

до схеми випадків». Випадок називається ***сприятливим*** деякій події, якщо поява цього випадку тягне за собою появу даної події.

У цьому випадку ймовірність події A обчислюють як відношення числа випадків, сприятливих появі події A, до загальної кількості випадків:

$$P(A) = \frac{m}{n}; \qquad (2.1)$$

де n – загальне число випадків;

m – число випадків, сприятливих події A.

Ця формула придатна тоді й тільки тоді, коли дослід зводиться до схеми випадків, тобто має симетрією можливих результатів. Для забезпечення цієї симетрії при складанні схеми випадків необхідно задовольнити три умови:

1. Скласти повну групу подій. Кажуть, що кілька подій у даному досліді утворюють ***повну групу подій***, якщо в результаті досліду неодмінно має з'явитися хоча б одна з них.

2. Події в цій групі повинні бути ***несумісними***. Кілька подій називаються несумісними в даному досліді, якщо ніякі два з них не можуть з'явитися разом.

3. Події в складеній повній групі несумісних подій повинні бути ***рівноможливими***. Кілька подій у даному досліді називаються рівноможливими, якщо за умовами симетрії є підстави вважати, що жодна з цих подій не є об'єктивно більш можливою, ніж інша.

Приклад групи подій, які відповідають усім трьом умовам: гральний кубик, вибір певного числа деталей з їх партії для контролю якості.

Вирішимо задачу. У партії з N деталей M бракованих. З неї вибирають наздогад k деталей. Визначити ймовірність того, що серед цих k деталей буде рівно r бракованих.

Розв'язання. Загальна кількість випадків n у формулі (2.1), які являють собою повну групу несумісних та рівноможливих подій, визначається як число можливих поєднань усіх деталей між собою в результаті вибірки з них k деталей:

$$n = C_n^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}.$$

Число випадків, сприятливих появі рівно r бракованих деталей у вибірці, являє собою добуток числа можливих поєднань бракованих деталей між собою в результаті вибірки k деталей і числа можливих поєднань якісних деталей між собою у вибірці:

$$m = C_M^r C_{N-M}^{k-r},$$

при цьому множники обчислюють аналогічно розрахунку величини n.

Отже, ймовірність того, що серед вибраних $\boldsymbol{k}$ деталей буде рівно $\boldsymbol{r}$ бракованих можна визначити з формули

$$\boldsymbol{P(A)=\frac{C_N^k C_{N-M}^{k-r}}{C_M^r}}.$$

2.1.2 Частота, або статистична ймовірність, події

Очевидно, що не всякий дослід може бути зведений до схеми випадків, отже, існує великий клас подій, ймовірності яких не можна обчислити за формулою (2.1). Наприклад, подія «вихід з ладу конвеєра протягом зміни», має певний ступень об'єктивної можливості, яку, в принципі, можна виміряти кількісно і яка при повторенні подібних дослідів буде відображатися у відносній частоті відповідних подій.

Якщо проведена серія з $\boldsymbol{n}$ дослідів, у кожному з яких могла з'явитися або не з'явитися деяка подія $\boldsymbol{A}$, то ***частотою події A*** в даній серії дослідів називається відношення числа дослідів, у яких з'явилася подія $\boldsymbol{A}$**,** до загальної кількості проведених дослідів.

Частоту події часто називають ***статистичною ймовірністю*** (на відміну від раніше введеної «математичної ймовірності»).

Домовимося позначати частоту події $\boldsymbol{A}$ знаком $\widehat{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{A})$**.**

$$\widehat{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{P}^*(\boldsymbol{A}) = \widetilde{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{A}) = \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}}, \qquad (2.2)$$

де $\boldsymbol{m}$ – число появ події $\boldsymbol{A}$;

$\boldsymbol{n}$ – загальне число вироблених дослідів.

При невеликому числі дослідів частота події носить у значній мірі випадковий характер і може помітно змінюватися від однієї групи дослідів до іншої. При збільшенні кількості дослідів частота події все більше втрачає свій випадковий характер. Випадкові обставини, властиві кожному окремому досліду, у масі взаємно врівноважуються і частота виявляє тенденцію стабілізуватися, наближаючись із незначними коливаннями до деякої середньої, постійної величини.

Ця властивість "стійкості частот" багаторазово перевірена експериментально та підтверджена всім досвідом практичної діяльності людства. Вона є однією з найбільш характерних закономірностей, які спостерігаються в випадкових явищах. Математичне формулювання цієї закономірності вперше дав Я. Бернуллі в своїй теоремі, яка є простою формою закону великих чисел.

Бернуллі довів, що ***при необмеженому збільшенні числа однорідних незалежних дослідів з практичною вірогідністю можна стверджувати, що частота події буде як завгодно мало відрізнятися від її ймовірності в окремому досліді.***

Характер наближення частоти події до її ймовірності при збільшенні числа дослідів дещо відрізняється від "прагнення до границі" в математичному сенсі, оскільки дійсно може статися, що при великій кількості дослідів частота події значно відхилиться від її імовірності, але таке значне відхилення є дуже малоймовірним.

У теорії ймовірностей для опису викладеного характеру наближення одних величин до інших введений термін "***збіжні за ймовірністю***".

Кажуть, що величина X_n ***збігається за ймовірністю*** з величиною a, якщо при як завгодно малому ε ймовірність нерівності $|Xn-a|<\varepsilon$ зі збільшенням n необмежено наближається до одиниці.

Застосовуючи цей термін, можна сказати, що при збільшенні числа дослідів частота події не «наближається» до ймовірності події, а «збігається з нею за ймовірністю». Тому, коли в математиці кажуть, що змінна X_n зі зростанням n прагне до постійної величини a, то це означає, що різниця $|Xn-a|$ стає менше будь-якого позитивного числа ε для всіх значень n, починаючи з деякого досить великого числа.

2.2 Випадкова величина. Практично неможливі й практично достовірні події. Принцип практичної впевненості

Випадковою величиною називається величина, яка в результаті досліду може набути те чи інше значення, причому невідомо заздалегідь, яке саме.

Приклади випадкових величин

1. Число відмов машини протягом деякого часу.
2. Імовірність безвідмовної роботи пристрою.
3. Ресурс виробу.

У першому прикладі випадкова величина може набувати окремих, ізольованих значень – 0, 1, 2, 3 ...; у другому – може безперервно заповнити проміжок від 0 до 1; в останньому – може набути будь-якого позитивного значення.

Випадкові величини, що набувають тільки окремих один від одного значень і їх можна заздалегідь перерахувати, називаються ***перериввчастими*** або ***дискретними*** випадковими величинами. Випадкові величини, можливі значення яких безперервно заповнюють деякий проміжок, називаються ***безперервними випадковими величинами***.

Розглянемо зв'язок подій і випадкових величин. Зробимо дослід, у результаті якого може з'явитися або не з'явитися деяка подія A. Замість події A можна розглянути випадкову величину X, яка дорівнює 1, якщо подія A відбувається, і дорівнює 0, якщо подія A не відбувається. Очевидно, що

X – дискретна випадкова величина і вона має два можливих значення: ***0*** і ***1***. Ця випадкова величина називається ***характеристичною випадковою величиною*** події ***A***.

На практиці часто замість подій зручніше оперувати їх характеристичними випадковими величинами або зв'язати цю подію з якоюсь безперервною випадковою величиною.

Наприклад, нас цікавить подія ***A***, яка полягає в тому, що діаметр шийки валу під посадку підшипника, обробленого на токарному верстаті, виявиться в полі допуску, заданому конструктором. Позначимо діаметр вала через випадкову величину ***X***, яка є безперервною. Очевидно, що подія ***A*** еквівалентна потраплянню випадкової величини ***X*** в задане поле допуску, тобто $d_{min} < X < d_{max}$. Імовірність цієї події ***A*** може бути визначена, якщо відомі властивості випадкової величини ***X***.

Практично неможливою подією називається подія, ймовірність якої не в точності дорівнює нулю, але дуже близька до нуля.

Практично достовірною подією називається подія, ймовірність якої не в точності дорівнює одиниці, але дуже близька до одиниці.

Якщо яка-небудь подія ***A*** є практично неможливою в конкретному досліді, то протилежна їй подія, що полягає в невиконанні події ***A***, буде практично достовірною.

Ці поняття грають велику роль при практичному застосуванні теорії ймовірностей, зокрема, в теорії надійності.

Принцип практичної впевненості. Якщо ймовірність деякої події ***A*** в даному досліді ***E*** дуже мала, то можна бути практично впевненим у тому, що при одноразовому виконанні досліду ***E*** подія ***A*** не відбудеться.

Питання про те, наскільки мала повинна бути ймовірність події, щоб її можна було вважати практично неможливою, виходить за рамки математичної теорії і в кожному випадку вирішується з практичних міркувань або нормується з умов безпеки. Наприклад, нормована ймовірність забезпечення ресурсу більшості серійних машин, тобто того, що ця машина не потребуватиме капітального ремонту впродовж обумовленого часу, становить 0,9 чи 90 %. Таке саме значення має ймовірність забезпечення ресурсу більшості складових одиниць машин, наприклад підшипників кочення, закладається за умовчанням у їх довговічність. При цьому методика розрахунку при необхідності дозволяє закласти інше значення ймовірності забезпечення ресурсу. Ймовірності безвідмовної роботи машин у разі можливості небезпечних відмов нормуються значно більшими.

2.3 Сума і множення подій

На практиці безпосередній підрахунок ймовірності за формулою (2.1) дуже часто стає надмірно громіздким через складність реальних «схем випадків». Для спрощення розрахунків використовують теореми додавання і множення ймовірностей, які оперують поняттями про суму і множення подій.

Сумою двох подій ***A*** і ***B*** називається подія ***C***, що полягає у виконанні події ***A*** чи події ***B*** або двох разом.

Наприклад, якщо подія ***A*** – наявність запасного підшипника у механіка цеху, подія ***B*** – наявність запасного підшипника на складі підприємства, то подія ***C = A + B*** є наявність запасного підшипника взагалі на підприємстві, байдуже де – у механіка цеху, на складі підприємства або в обох місцях разом.

Якщо події ***A*** і ***B*** несумісні, то сума подій зводиться до появи будь-якого одного із зазначених подій.

Сумою двох несумісних подій ***A*** і ***B*** називається подія ***C***, що являє собою появу хоча б однієї з подій ***A*** і ***B***.

Сумою декількох подій називається подія, яка являє собою появу хоча б однієї з цих подій.

Множенням двох подій A і ***B*** називається подія ***C***, що являє собою появу двох подій ***A*** і ***B***.

У нашому прикладі множенням подій ***A*** і ***B*** є подія ***C = A B***, яка полягає у наявності запасних підшипників як на складі підприємства, так і у механіка цеху.

Множенням кількох подій називається подія, яка полягає у спільній появі всіх цих подій.

Наприклад, якщо в роботу пускається очисний комплекс і розглядаються такі події:

B_1 – безвідмовна робота комбайна,

B_2 – безвідмовна робота конвеєра,

B_3 – безвідмовна робота кріплення,

то подія $B = B_1 B_2 B_3$ – безвідмовна робота очисного комплексу при пуску.

При визначенні ймовірностей часто доводиться подавати складні події у вигляді комбінацій більш простих подій, застосовуючи операції додавання і множення подій.

Наприклад, якщо в попередньому прикладі відмову кожного елемента видобувного комплексу позначити через події A_1, A_2, A_3 відповідно, то подія C, що є відмовою очисного комплексу при пуску, являє собою суму подій

$$C = A_1 + A_2 + A_3 .$$

Подію D, що являє собою при пуску очисного комплексу появу відмови рівно одного його елемента, можна записати такою комбінацією найпростіших подій:

$$D = A_1B_2B_3 + A_2B_1B_3 + A_3B_1B_2 .$$

Подія E означає відмову не менше 2-х елементів видобувного комплексу:

$$E = A_1A_2B_3 + A_1A_3B_2 + A_2A_3B_1 + A_1A_2A_3 .$$

Безпосередньо з визначень суми і множення подій витікає, що

$$A + A = A;$$

$$AA = A.$$

Якщо подія B є частковим випадком події A, то $A + B = A; AB = B$.

У зв'язку з тим, що предметом дисципліни не є математичні викладення основних теорем теорії ймовірностей, подамо їх без доказів.

2.4 Теорема додавання ймовірностей і її наслідки

Імовірність суми n несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n). \quad (2.3)$$

Наслідок 1. Якщо події A_1, A_2, ..., A_n утворюють повну групу несумісних подій, то сума їх ймовірностей дорівнює одиниці.

Для формулювання другого слідства введемо поняття про "***протилежні події***".

Протилежними подіями називаються дві несумісні події, що утворюють повну групу подій.

Наслідок 2. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \quad (2.4)$$

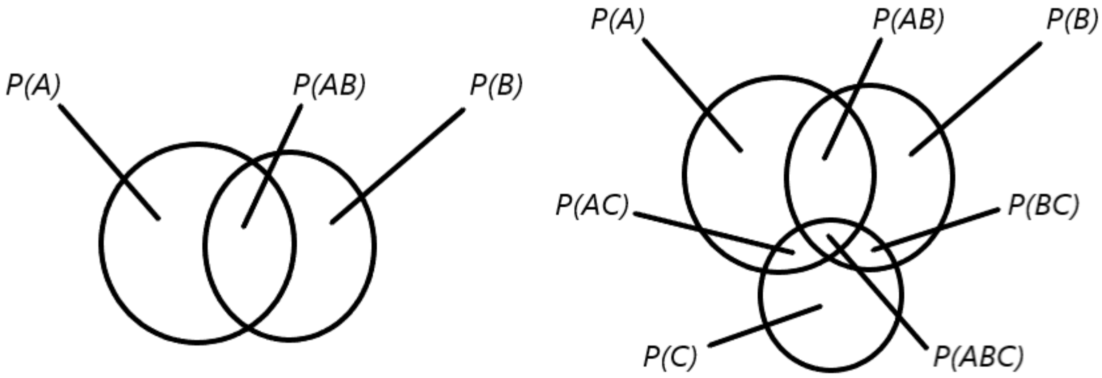
Цей наслідок є окремим випадком першого. Його виділено окремо, зважаючи на велику практичну важливість. Дуже часто виявляється, що легше обчислити ймовірність протилежної події $\overline{A}$, ніж імовірність прямої події A.

Як зазначалося, теорема додавання ймовірностей (2.1) справедлива тільки для несумісних подій. У разі, ***коли події А і В сумісні***, ймовірність суми цих подій виражається формулою:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB), \tag{2.5}$$

де $P(AB)$ – ймовірність спільної появи подій A і B.

У справедливості цієї формули можна наочно упевнитися, розглядаючи рис. 2.1, а, де колами позначено події A і B, що являють собою, наприклад, влучання кулі у відповідну мішень (коло). Імовірності цих подій пропорційні площам мішеней і відповідно становлять $P(A)$ та $P(B)$. Імовірність одночасної появи цих подій, тобто влучання в зону перекриття мішеней, є ймовірністю їх добутку, що становить $P(AB)$. Будь-яка сума ймовірностей подій урешті-решт повинна збиратися з пропорційних їм площ доданків подій таким чином, щоб кожен елемент площі на рисунку був присутнім одноразово. До речі, несумісні події на цьому рисунку не мали би спільної площі (їх межі не повинні перетинатися).



а) б)

Рис. 2.1. Графічне зображення теореми додавання ймовірностей для суми двох (а) і трьох (б) сумісних подій

Для трьох сумісних подій теорема додавання ймовірностей (рис. 2.1, б) виглядає так:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC), \tag{2.6}$$

де $P(ABC)$ – ймовірність спільної появи подій A, B і C.

Можна записати загальну формулу для ймовірності суми будь-якого числа сумісних подій, але нею користуватися складно і, звичайно, цього уникають, використовуючи наслідок *2* теореми додавання ймовірностей.

Методи визначення ймовірностей спільної появи подій наведені в підрозд. 2.5.

2.5 Теорема множення ймовірностей і її наслідки

Введемо поняття про незалежні й залежні події.

Подія ***A*** називається ***незалежною*** від події ***B***, якщо ймовірність події ***A*** не залежить від того, відбулася подія ***B*** чи ні.

Подія ***A*** називається ***залежною*** від події ***B***, якщо ймовірність події ***A*** змінюється залежно від того, відбулася подія ***B*** чи ні.

Приклад. В урні лежить три кулі: 2 білих і 1 чорна. Дві особи виймають з урни по одній кулі. Подія ***B*** – поява білої кулі у першої особи, ***A*** – поява білої кулі у другої особи. До експерименту ***P (A)=2/3***; якщо в результаті експерименту подія ***B*** відбулася, то ***P(A)=1/2,*** якщо в результаті експерименту подія ***B*** не відбулося, то ***P(A)=1***.

Імовірність події ***A***, обчислена за умови, що мала місце інша подія ***B***, називається ***умовною ймовірністю*** події ***A*** і позначається ***P (A \ B).***

Отже, для нашого прикладу: $P(A)=2/3$; $P(A\backslash B)=1/2$; $P(A\backslash \overline{B})=1$.

Умова незалежності ***A*** від ***B***: $P(A\backslash B) = P(A)$;

умова залежності ***A*** від ***B***: $P(A\backslash B) \neq P(A)$.

Сформулюємо теорему множення ймовірностей для двох подій.

Імовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність другої, обчисленої за умови, що перша мала місце:

$$P(AB) = P(A)\, P(B\backslash A), \tag{2.7}$$

чи $$P(AB) = P(B)\, P(A\backslash B).$$

Наслідок 1. Якщо подія ***A*** не залежить від події ***B***, то і подія ***B*** не залежить від події ***A***.

Отже, залежність або незалежність подій завжди взаємна.

Дві події називаються ***незалежними***, якщо поява однієї з них не змінює ймовірності другої.

Це поняття поширюється на випадок довільного числа подій.

Наслідок 2. Імовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій.

Розглянемо ймовірність добутку двох подій (2.7), враховуючи, що для незалежних подій $P(B \backslash A) = P(B)$, отримуємо

$$P(AB) = P(A)\, P(B). \tag{2.8}$$

Сформулюємо теорему множення ймовірностей для ***n*** подій.

Імовірність добутку кількох подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій, причому ймовірність кожної наступної за порядком події обчислюється за умови, що всі попередні мали місце:

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\, P(A_2 \setminus A_1)\, P(A_3 \setminus A_1A_2) \ldots P(A_n \setminus A_1A_2 \ldots A_{n-1}). \quad (2.9)$$

Для незалежних подій

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\, P(A_2)\, P(A_3) \ldots P(A_n) \quad (2.10)$$

чи

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Приклад 1. Технічний пристрій складається з трьох агрегатів: двох агрегатів першого типу A_1 і A_2 та одного агрегата типу B. Агрегат A_2 дублює A_1: при відмові першого відбувається автоматичне включення резервного – A_2. Агрегат B не дубльований. Визначити: 1) ймовірність відмови пристрою протягом деякого певного періоду експлуатації, якщо ймовірності відмови агрегатів типів A і B протягом того ж періоду експлуатації відповідно становлять ***0,2*** і ***0,1;*** 2) на скільки підвищена безвідмовність пристрою шляхом застосування резервування першого агрегата.

Розв'язування. Логічний аналіз функціонування пристрою показує, що для його відмови необхідно і достатньо, щоб відмовили або обидва перших агрегати, або тільки другий.

Позначимо через C подію «відмова пристрою протягом певного періоду експлуатації», подіями A_1, A_2, B – відмови відповідних агрегатів пристрою впродовж того самого періоду. Тоді подія C, виражена через події A_1, A_2 і B, буде мати вигляд:

$$C = A_1A_2 + B,$$

а ймовірність цієї події, застосовуючи теорему додавання ймовірностей для двох сумісних подій (2.5), визначимо таким чином:

$$P(C) = P(A_1A_2) + P(B) - P(A_1A_2B).$$

Розв'язок завдання в загальному вигляді містить два доданки, які являють собою ймовірності добутку подій. Перший доданок $P(A_1A_2)$ – це ймовірність спільної відмови обох агрегатів типу A протягом того ж періоду експлуатації**,** визначимо його за допомогою наслідка 2 теореми множення (формула 2.8):

$$P(A_1A_2)= P(A_1)P(A_2)=0,2\cdot 0,2=0,04.$$

Зазначений наслідок використано у зв'язку з тим, що події «виходи з ладу агрегатів» A_1 і A_2 є взаємно незалежними, оскільки немає об'єктивних технічних підстав вважати, що вихід з ладу одного з них змінить імовірність виходу з ладу другого. Другий доданок – ймовірності відмови агрегату типу ***B*** протягом того ж періоду експлуатації – за умовами задачі становить

$$P(B)= 0,1.$$

Третій доданок, що визначає ймовірність виходу з ладу всіх трьох агрегатів, розрахуємо аналогічно розрахунку першого доданку тільки для трьох подій:

$$P(A_1A_2B)=0,2\cdot 0,2\cdot 0,1=0,004.$$

Таким чином, імовірність відмови пристрою впродовж певного періоду становить:

$$P(C) =0,04+0,1–0,004=0,136.$$

Для визначення ефективності резервування треба розрахувати ймовірність відмови пристрою в разі відсутності в ньому агрегата A_2:

$$P(C)_2 = P(A_1) + P(B) – P(A_1B) = 0,2 + 0,1 – 0,1\cdot 0,2 = 0,28.$$

Таким чином, ймовірність відмови пристрою впродовж обумовленого періоду в разі відсутності в ньому резервного агрегату A_2 буде більшою на $P(C)_2 – P(C) = 0,28 – 0,136 = 0,144$, тобто реально вдвічі.

Приклад 2. Вал тягового ланцюга з привідною зірочкою скребкового конвеєра встановлений на двох підшипниках кочення. Досвід проєктування та експлуатації конвеєрів показав, що його привідні зірочки в середньому одна з п'яти працюючих одиниць виходять з ладу раніше нормативного строку до капітального ремонту. Ймовірності виходу з ладу двох підшипників упродовж міжремонтного періоду за даними проєктних розрахунків становлять ***0,1*** і ***0,05***. Інші елементи цього вузла конвеєра відносно надійніші, тому в задачі їх враховувати не будемо. Визначити ймовірність відмови описаного вузла скребкового конвеєра при експлуатації його впродовж міжремонтного періоду, тобто раніше настання запланованого капітального ремонту.

Розв'язування. Для початку з'ясуємо ймовірність $P(A_1)$ виходу з ладу привідної зірочки протягом між капітальними ремонтами. Виходячи з досвіду та експлуатації конвеєрів, вона становить $P(A_1)=1/5=0,2.$

Такі задачі, особливо коли кількість елементів конструкції велика, краще вирішувати за допомогою протилежних подій (наслідок 2 з теореми додавання ймовірностей). Для цієї задачі це означає, що її простіше вирішувати, використовуючи не ймовірності відмов, а ймовірності безвідмовної роботи елементів конструкції. Домовимося позначати події «відмови» підшипників через A_2 і A_3, а відповідні події «безвідмовна робота» привідної зірочки та підшипників через B_1, B_2, B_3. Тоді подія ***B*** «безвідмовна робота вузла» відповідає добутку подій «безвідмовна робота» всіх елементів вузла, тобто $B = B_1 B_2 B_3$.

Застосовуючи теорему множення ймовірностей для незалежних подій (поява першої для машини відмови будь-якого її елемента є незалежною подією від можливої відмови іншого елемента) з формули (2.10), використовуючи (2.4), можна записати математичний вираз та визначити ймовірність безвідмовної роботи вузла:

$$P(B) = P(B_1)\,P(B_2)\,P(B_3) = (1–0{,}2)(1–0{,}1)(1–0{,}05) = 0{,}684.$$

Тоді ймовірність відмови вузла конвеєра, що розглядається, визначимо як імовірність протилежної події таким чином:

$$P(A) = 1 – P(B) = 1 – 0{,}684 = 0{,}316.$$

2.6 Формула повної ймовірності

Наслідком обох основних теорем (додавання і множення ймовірностей) є так звана формула повної ймовірності.

Якщо потрібно визначити ймовірність деякої події A, яка може статися разом з однією з подій (будемо ці події називати гіпотезами): $H_1, H_2, H_3, ..., H_n$, що утворюють повну групу несумісних подій, то ймовірність події A обчислюється як сума добутків ймовірності кожної гіпотези на ймовірність події при цій гіпотезі.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\,P(A\backslash H_i), \qquad (2.11)$$

де $P(H_i)$ – ймовірності появи кожної з можливих гіпотез H_i,
$P(A \setminus H_i)$ – ймовірності появи подій A, за умови реалізації подій H_i,
n – кількість гіпотез,
i – номер гіпотези.

Приклад 3. Комп’ютер системи автоматизованого керування машиною містить деяку стандартну електронну плату. Виробник системи автоматизованого керування використовує плати трьох підприємств, які умовно позначимо через №1, №2 та №3. Технології виробництва на цих підприємствах є такими, що зазначені плати мають відповідно такі номери ймовірності забезпечення їх строку служби впродовж гарантованого періоду експлуатації машини: 0,8, 0,9 та 0,95.

Закупівля плат здійснюються на підприємствах відповідно такими часками – 50, 30 та 20 %. Потрапляння плат на складальну операцію відбувається за їх наявністю, у вихідній документації на машину постачальники її складових не зазначаються.

Визначити ймовірність того, що система автоматизованого керування машиною у її замовника не відмовить упродовж гарантованого періоду експлуатації через вихід з ладу обумовленої електронної плати.

Розв’язування. Позначимо через $\boldsymbol{A}$ подію, імовірність якої треба визначити. Викладена в задачі практична ситуація містить три гіпотези, одна з яких обов’язково відбудеться, – це встановлення в систему автоматизованого керування машиною електронної плати одного з її трьох виробників. Тому позначимо ці три гіпотези через $\boldsymbol{H_1, H_2, H_3}$**.** Імовірності цих гіпотез, тобто того, що електронна плата кожного з наявних виробників буде встановлена в систему керування машиною, є пропорційними частками їх закупівлі та складають у безрозмірному вигляді відповідно $\boldsymbol{P(H_1)=0,5;}$ $\boldsymbol{P(H_2)=0,3}$ ***і*** $\boldsymbol{P(H_3)=0,2}$. Таким чином, є підстави і кількісні дані для використання формули повної ймовірності (2.11).

Імовірності забезпечення строку служби плат кожного їхнього виробника окремо впродовж гарантованого періоду експлуатації машини в постановці формули повної ймовірності є умовними ймовірностями появи подій $\boldsymbol{A}$**,** тобто $\boldsymbol{P(A \setminus H_1) = 0,8;}$ $\boldsymbol{P(A \setminus H_2) = 0,9}$ ***і*** $\boldsymbol{P\ (A \setminus H_3) = 0,95}$. Тоді після підстановки даних у формулу (2.11) отримаємо результат:

$$\boldsymbol{P(A) = 0,5 \cdot 0,8+0,3 \cdot 0,9+0,2 \cdot 0,95 = 0,86.}$$

Бачимо, що результат є середньозваженим між імовірностями забезпечення строку служби плат кожного окремого їх виробника.

2.7 Теореми про повторення дослідів

При практичному застосуванні теорії ймовірностей для розв'язування задач надійності гірничих машин часто доводиться зустрічатися з завданнями, у яких один і той же дослід повторюється неодноразово. Якщо в результаті серії однакових дослідів може з'явитися або не з'явиться деяка подія $\boldsymbol{A}$, і нас цікавить не результат кожного окремого досліду, а загальне число появ подій $\boldsymbol{A}$ після серії дослідів або ймовірність появи будь-якого заданого числа подій, то такі завдання можна вирішити просто, за умови, що досліди є незалежними.

Кілька дослідів називаються ***незалежними***, якщо ймовірність того чи іншого результату кожного з дослідів не залежить від того, які результати мали інші досліди. Наприклад, кілька послідовних відборів деталей для контролю якості з однієї партії за умови, що вийнята деталь кожен раз повертається в контрольовану партію деталей і все перемішується. Якщо деталь не повертається до контрольованої партії перед наступним дослідом, то в такому разі досліди є ***залежними***.

Незалежні досліди можуть проводитися в однакових або в різних умовах. У першому випадку ймовірність події A в усіх дослідах одна і та ж. У другому – змінюється від досліду до досліду. До першого випадку належить *частинна теорема про повторення дослідів*, а до другого – *загальна теорема про повторення дослідів.*

2.7.1 Частинна теорема про повторення дослідів

Розглянемо приклад. Проводимо ресурсні випробування трьох підшипників на різних стендах протягом деякого часу. За час випробувань кожен підшипник може відмовити або не відмовити. Ймовірності відмов підшипників однакові й складають p. Визначити ймовірність події B_2 того, що в результаті випробувань відмовлять рівно два підшипники.

Розв'язування. Позначимо шукану подію (відмова рівно двох підшипників) через B_2, через A_1, A_2, A_3 – відмови відповідно першого, другого і третього підшипників, через $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$ – протилежні події, що відповідно якийсь окремий підшипник витримав випробування. З умов випробувань випливає, що вони є незалежними.

Складемо схему можливих випадків, що відповідають події B_2, і запишемо її як суму добутків таких подій:

$$B_2 = A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3 .$$

З огляду на те, що ці три варіанти події B_2 несумісні, а події, що входять до добутків, є незалежними з використанням теорем додавання і множення ймовірностей отримаємо

$$P(B_2) = pp(1-p) + pp(1-p)p + (1-p)pp,$$

чи, позначивши через $q = 1 - p$, отримаємо таке:

$$P(B_2) = 3\,P^2 q\ .$$

Якщо вирішити аналогічну задачу в загальній постановці, коли проводиться n незалежних дослідів, у кожному з яких може з'явитися чи не з'явиться деяка подія A, ймовірність появи події A в кожному досліді дорівнює p, а ймовірність не появи буде $q = 1 - p$. То знайдена ймовірність $P_{m,n}$ того, що подія A в цих n дослідах з'явиться рівно m раз, виразиться формулою:

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{2.12}$$

де C_n^m– число способів, як з n елементів можна скласти по m сполучень, у даному разі – кількості появ події A, обчислюється за формулою:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Ця формула описує, як розподіляються ймовірності між можливими значеннями деякої випадкової величини m (числа появ події A) при n дослідах.

У зв'язку з тим, що ймовірності $P_{m,n}$ за формою являють собою члени розкладання бінома $(q+p)^n$, розподіл ймовірностей вигляду (2.12) називається ***біноміальним розподілом***.

Приклад 4. Умови виробництва є такими, що впродовж зміни в дробарку попадає в середньому п’ять надмірно великих шматків руди. Досвід експлуатації дробарки показав, що при спрацьовуванні механічного запобіжного пристрою для пропускання негабариту в 25 % випадків це призводить до перевантаження приводу. Якщо виникне два перевантаження приводу, то спрацює тепловий захист двигуна і дробарка зупиниться, що, до речі, є неповноважною відмовою і потребує деякого часу на охолодження та вмикання електричного пускача приводу. Визначити ймовірності безвідмовної роботи приводу дробарки впродовж зміни та доби при роботі підприємства у дві зміни.

Розв’язування. Позначимо події «безвідмовна робота приводу дробарки впродовж зміни» та «безвідмовна робота приводу дробарки впродовж доби» через A і B. Описана в завданні ситуація, що виникла в процесі експлуатації дробарки, по суті є повторенням дослідів на її надійність при кожному потраплянні негабариту. Отже, упродовж зміни ми проводимо $n=5$ дослідів і статистична ймовірність того, що відбудеться перевантаження приводу, становить $p=0{,}25$. Цей процес за описом того, як він відбувається, відповідає умовам використання частинної теореми з повторення дослідів (2.12). У зв’язку з тим, що для відмови приводу дробарки потрібно два його перевантаження, то в трактуванні теорем про повторення дослідів $m = 2$. Зрозуміло, якщо відбудеться три перевантаження приводу і більше впродовж зміни, відмова приводу теж відбудеться і навіть не одна. Всі ці варіанти, що можуть виникнути впродовж зміни, підпадають під подію «відмова приводу впродовж зміни» та їх ймовірності повинні бути доданими одна до одної. Таким чином, параметр m повинен становити ***2, 3, 4, 5;*** параметр $q=1-p = =1-0{,}25 = 0{,}75$, а ймовірність відмови приводу має містити складові:

$$P(A) = P_{2,5} + P_{3,5} + P_{4,5} + P_{5,5}.$$

Для зменшення обсягу обчислень і з урахуванням того, що $P_{0,5} + P_{1,5} + +P_{2,5} + P_{3,5} + P_{4,5} + P_{5,5} = 1$, шукану ймовірність відмови приводу протягом зміни простіше обчислити через протилежну подію:

$$P(A) = 1 - P_{0,5} - P_{1,5}.$$

Імовірності того, що перевантаження приводу впродовж зміни не відбудеться $P_{0,5}$ або відбудеться тільки один раз $P_{1,5}$, становлять:

$$P_{0,5} = C_5^0 p^0 q^{5-0} = \frac{5!}{0!(5-0)!} p^0 q^{5-0} = 0{,}2373,$$

$$P_{1,5} = C_5^1 p^1 q^{5-1} = \frac{5!}{0!(5-0)!} p^1 q^{5-1} = 0{,}3955.$$

Імовірність безвідмовної роботи приводу дробарки впродовж зміни визначиться так:

$$P(A) = 1 - 0{,}2373 - 0{,}3955 = 0{,}3672.$$

2.7.2 Загальна теорема про повторення дослідів

На практиці часто трапляється так, що ймовірність події від досліду до досліду змінюється. Наприклад, імовірності відмов однакових кулькових підшипників протягом певного проміжку часу при дії на них різного навантаження. Спосіб обчислення ймовірності заданого числа відмов за таких умов дає загальна теорема про повторення дослідів.

Якщо проводиться n незалежних дослідів, у кожному з яких може з'явитися або не з'явиться деяка подія A, причому ймовірність появи події A в i-му досліді p_i, а ймовірність протилежної події – $q_i = 1 - p_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$, то ймовірність $P_{m,n}$ події B_n того, що в результаті n дослідів подія A з'явиться рівно m раз, обчислюється за допомогою твірної функції:

$$\varphi(z) = \prod_{i=1}^{n}(q_i + p_i z), \qquad (2.13)$$

де Z – довільний параметр.

Загальну теорему про повторення дослідів можна сформулювати в такому вигляді: ймовірність того, що подія A в n незалежних дослідах з'явиться рівно m раз, дорівнює коефіцієнту при Z^m у виразі твірної функції після розкриття дужок:

$$\prod_{i=1}^{n}(q_i + p_i z) = \sum_{m=0}^{n} p_{m,n} z^m . \qquad (2.14)$$

Очевидно, що частинна теорема про повторення дослідів випливає із загальної при $p_1 = p_2 = ... = p_n = p$. Відзначимо, що $\sum_{m=0}^{n=4} P_{m,n} = 1$, оскільки події $B_o, B_1, B_2, \ldots, B_i, \ldots B_n$ утворюють повну групу несумісних подій.

Приклад 5. Чотири однакових підшипники проходять незалежні ресурсні випробування протягом заданого часу при різних навантаженнях, імовірності виходу з ладу підшипників у цих умовах відповідно складають: $p_1 = 0{,}1;$ $p_2 = 0{,}2;$ $p_3 = 0{,}3;$ $p_4 = 0{,}4.$ Визначити ймовірність таких подій: усі підшипники витримають випробування, з ладу вийдуть один або два, або три, або всі чотири підшипники, тобто ймовірності: $P_{0,4};$ $P_{1,4};$ $P_{2,4};$ $P_{3,4}$ та $P_{4,4}$.

Розв’язування. Оскільки підшипники випробовують при різних навантаженнях і ймовірності виходу їх з ладу різні, скористаємося загальною теоремою про повторення дослідів і складемо твірну функцію (2.13). При цьому ймовірності протилежних відмовам подій, що полягають у вдалому проходженні ресурсних випробувань відповідними за номерами підшипниками, становитимуть $q_i = 1 - p_i$: $q_1 = 0{,}9$; $q_2 = 0{,}8$; $q_3 = 0{,}7$; $q_4 = 0{,}6$. Тоді шукана твірна функція матиме вигляд:

$$\varphi_{\Pi}(z) = (0{,}9+0{,}1z)\,(0{,}8 + 0{,}2z)\,(0{,}7 + 0{,}3z)\,(0{,}6 + 0{,}4z).$$

Розкриємо дужки, наведемо подібні та отримаємо як коефіцієнти при z^m відповідні ймовірності $P_{m,n}$:

$$\sum_{m=0}^{n=4} P_{m,n} = 0{,}302 + 0{,}440z + 0{,}215z^2 + 0{,}040z^3 + 0{,}0020z^4.$$

Таким чином, $P_{o,4} = 0{,}302$; $P_{1,4} = 0{,}440$; $P_{2,4} = 0{,}215$; $P_{3,4} = 0{,}041$

та $P_{4,4} = 0{,}002$.

Аналогічно визначимо ймовірність безвідмовної роботи приводу дробарки впродовж доби. Різниця в розрахунку виникає тільки в кількості випробувань, яка в даному разі становить 10:

$$P_{0,10} = C_{10}^{0} p^0 q^{10-0} = \frac{10!}{0!(10-0)!} p^0 q^{10-0} = 0{,}0563,$$

$$P_{1,10} = C_{510}^{1} p^1 q^{10-1} = \frac{10!}{0!(10-0)!} p^1 q^{10-1} = 0{,}1877.$$

Імовірність безвідмовної роботи приводу дробарки впродовж доби визначиться так:

$$P(B) = 1 - 0{,}0563 - 0{,}1877 = 0{,}7560.$$

2.8 Задачі

1. Зірка тягового ланцюга конвеєра встановлена на вал з двома кульковими підшипниками. При виникненні перевантаження ймовірність сходу ланцюга із зірки становить 0,2, ймовірність відмови підшипників – 0,05 і 0,1; валу – 0,02. Визначити ймовірність відмови вузла внаслідок його перевантаження.
2. Чотири вузли кріплення виконавчого органу проходять прискорені ресурсні випробування з різними діючими навантаженнями. Це обумовлює такі ймовірності відмов (вичерпання ресурсів) вузлів упродовж випробувань: 0,1; 0,2; 0,2 та 0,4. Визначити ймовірності відмови одного вузла, двох, трьох і чотирьох вузлів упродовж випробувань і ймовірність того, що всі вузли витримають ресурсні випробування.

3. Упродовж зміни в розвантажувач секції відсаджувальної машини попадає в середньому п`ять завеликих шматків породи. Досвід експлуатації відсаджувальної машини показав, що в 20 % випадків це призводить до перевантаження приводу. Якщо виникає два перевантаження приводу, спрацьовує тепловий захист двигуна та розвантажувач і машина зупиняються. Визначити ймовірність безвідмовної роботи відсаджувальної машини впродовж зміни.

4. Вихід з ладу радіально-плунжерного гідродвигуна настає у разі відмови 2-х пар його плунжерів. Гідродвигун має 17 пар плунжерів. Упродовж часу прискорених ресурсних випробувань гідродвигуна в середньому вичерпує ресурс одна пара плунжерів. Визначити ймовірність виходу з ладу гідродвигуна впродовж прискорених ресурсних випробувань.

5. Постачальниками мікросхем для системи керування машиною є три підприємства. Ці підприємства мають такі частки поставок мікросхем на складальне виробництво системи керування: 0,25; 0,25; 0,5. Ймовірності забезпечення гамма-процентного (гарантійного) строку служби мікросхем відповідно становлять 0,8; 0,9; 0,95. Після відвантаження продукції не відомо, яка мікросхема потрапила в систему керування машиною. Визначити ймовірність того, що встановлена за таких умов у систему керування машиною мікросхема відпрацює гарантійний строк служби.

3 ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН, ЩО ВИКОРИСТОВУЮТЬСЯ ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ЗАВДАНЬ НАДІЙНОСТІ

3.1 Основні поняття математичної статистики

3.1.1 Ряд розподілу, багатокутник розподілу

Випадкову величину (див. 2.2) в математичній статистиці позначають, наприклад, через X, можливі значення, які вона може прийняти, – через $x_1, x_2, ..., x_n$. Якщо випадкова величина X дискретна, то в результаті експерименту величина X набуде одне з цих значень $(X = x_1; X = x_2; X = x_3; ...; X = x_n)$, появи кожного з яких являють собою повну групу несумісних подій. Імовірності цих подій позначають через p з відповідними індексами:

$$P(X = x_1) = p_1,\ P(X=x_2) = p_2,\ ...,\ P(X=x_n) = p_n.$$

Оскільки несумісні події утворюють повну групу, то $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Ця сумарна ймовірність якимось чином розподілена між окремими значеннями. Випадкова величина буде повністю описана, якщо ми задамо цей розподіл, тобто зазначимо, яку ймовірність має кожна подія. Цим ми встановимо закон розподілу.

Законом розподілу випадкової величини називається всяке співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними їм імовірностями.

Найпростішою формою задання закону розподілу є ряд розподілу.

Рядом розподілу дискретної випадкової величини X називається таблиця, у якій перераховані можливі значення цієї випадкової величини з відповідними їм імовірностями.

Графічне зображення ряду розподілу називається ***багатокутником розподілу***.

Приклад. Скласти ряд розподілу і побудувати багатокутник розподілу для числа підшипників, що вийшли з ладу протягом ресурсних випробувань за умовою завдання до ***прикладу 5*** (див. підрозділ 2.7.2).

Складемо ряд розподілу, заповнивши табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Ряд розподілу кількості підшипників, що вийшли з ладу протягом ресурсних випробувань

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,302	0,44	0,215	0,041	0,002

Побудуємо багатокутник розподілу кількості підшипників, що вийшли з ладу впродовж ресурсних випробувань (рис. 3.1)

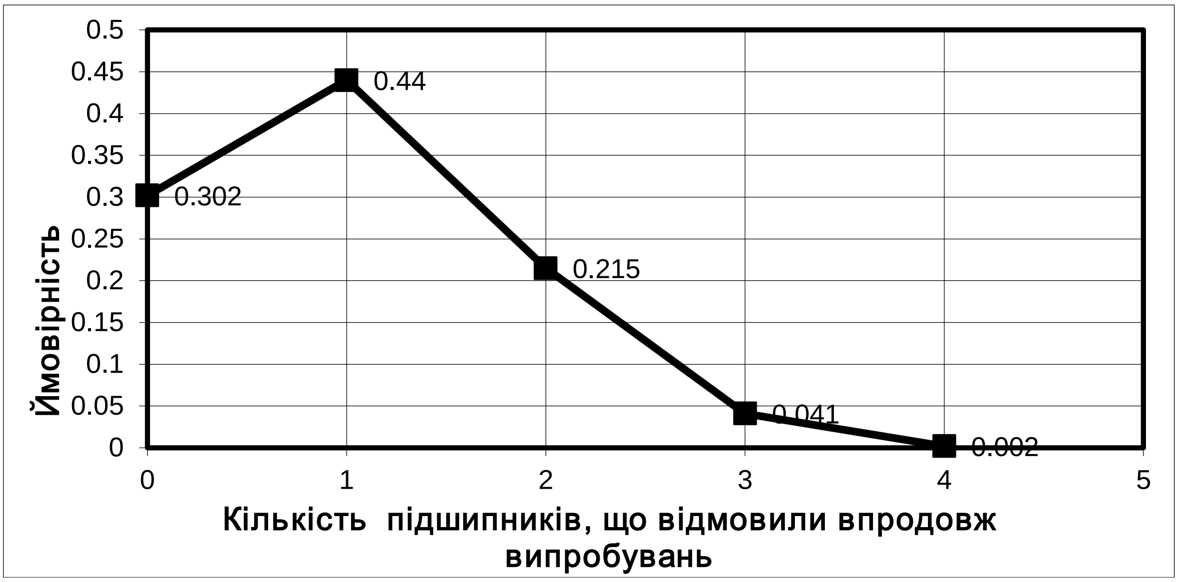


Рис. 3.1. Багатокутник розподілу кількості підшипників, що вийшли з ладу впродовж ресурсних випробувань

3.1.2 Функція розподілу (інтегральна функція розподілу або інтегральний закон розподілу)

Для неперервної випадкової величини не існує (не можна скласти) ряд розподілу у вигляді, аналогічному ряду розподілу для дискретних величин. Однак зрозуміло, що різні області можливих значень неперервної випадкової величини мають відмінні ймовірності появи. Крім того, ймовірність окремого значення випадкової величини звичайно дорівнює ***0***.

Тому для кількісної характеристики цього розподілу зручно скористатися не ймовірністю події, що випадкова величина ***X*** набуде якогось конкретного значення ***x***, тобто ***X = x***, а ймовірністю події, що набуде значення менше за ***x***, тобто ***X <x***, де ***x*** – деяка поточна змінна. Очевидно, що ймовірність цієї події є функцією ***x***.

Функцією розподілу (інтегральною функцією розподілу або інтегральним законом розподілу) випадкової величини ***X*** називається функція ***F (x)***, що виражає ймовірність того, що ***X*** набуде значення менше, ніж ***x***:

$$F(x) = P\,(X < x). \qquad (3.1)$$

Функція розподілу – це найбільш універсальна характеристика випадкової величини. Вона існує для всіх випадкових величин: як дискретних, так і безперервних. Вона повністю характеризує випадкову величину з імовірнісної точки зору.

Загальні властивості функції розподілу

1. Функція розподілу $F(x)$ є неспадна функція свого аргументу, тобто при $x_2 > x_1$ $F(x_2) \geq F(x_1)$.

2. На мінус нескінченності функція розподілу дорівнює 0:

$$F(-\infty) = 0.$$

3. На плюс нескінченності функція розподілу дорівнює 1:

$$F(+\infty) = 1.$$

Знаючи ряд розподілу дискретної випадкової величини, можна побудувати функцію розподілу цієї величини

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i);$$

де нерівність $x_i < x$ під знаком суми зазначає, що підсумовування поширюється на всі значення x_i менші x.

Коли поточна координата x проходить через значення дискретної величини X, функція $F(x)$ змінюється стрибкоподібно на величину ймовірності цього значення.

Приклад. Побудувати функцію розподілу для випадкової величини, ряд розподілу якої ми склали в 3.1.1. Для цього послідовно розрахуємо значення функції для всіх можливих кількостей відмов:

1) при $x \leq 0$ $F(x) = P(X < x) = 0$;

2) при $0 < x \leq 1$ $F(x) = P(X < x) = P(x = 0) = 0{,}302$;

3) при $1 < x \leq 2$ $F(x) = P(X < x) = P(x = 0) + P(X = 1) = 0{,}302 + 0{,}44 = 0{,}742$ і так далі.

Результати розрахунку зведемо в табл. 3.2 і побудуємо функцію розподілу числа підшипників, що відмовили протягом випробувань (рис. 3.2.).

Таблиця 3.2

Таблиця розрахунку функції розподілу числа підшипників, що відмовили протягом випробувань

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,302	0,44	0,215	0,041	0,002
$F(x)$	0,302	0,742	0,957	0,998	1,0

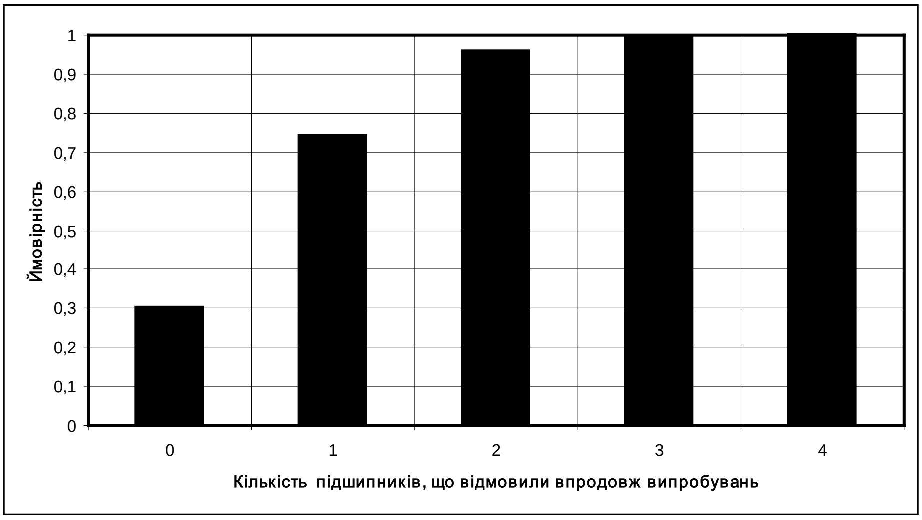


Рис. 3.2. Функція розподілу числа підшипників, що відмовили протягом ресурсних випробувань

З рисунка видно, що функція розподілу будь-якої дискретної випадкової величини завжди є розривна ступінчаста функція, стрибки якої відбуваються в точках, що відповідають можливим значенням випадкової величини і дорівнюють імовірностям цих значень. Сума всіх стрибків ***F (x)*** дорівнює ***1***.

Функція розподілу неперервної випадкової величини являє собою функцію, безперервну в усіх точках (рис. 3.3).

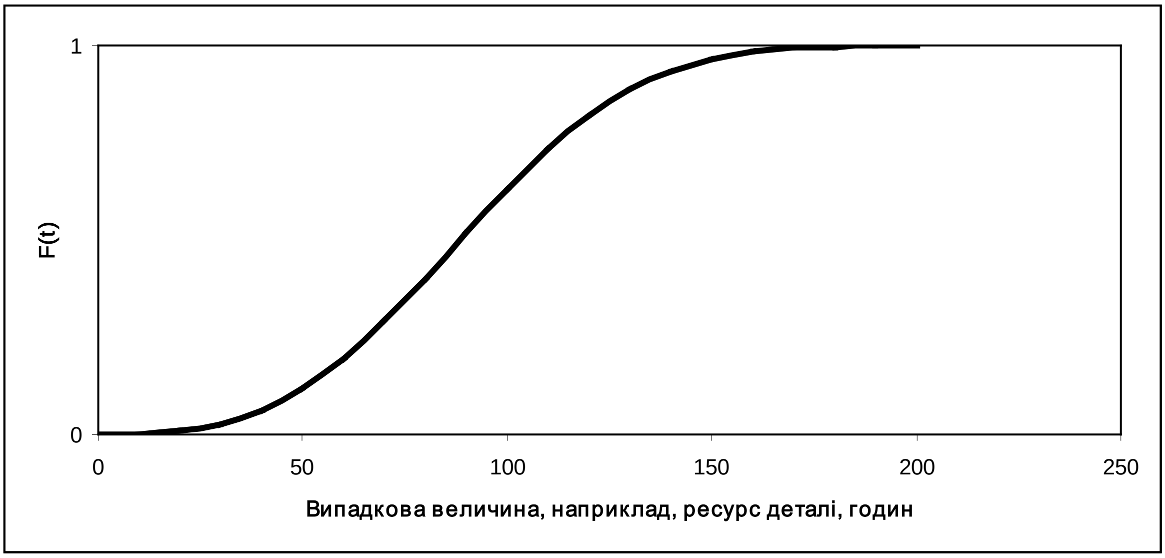


Рис. 3.3. Функція розподілу неперервної випадкової величини

3.1.3 Ймовірність потрапляння випадкової величини на задану ділянку

При вирішенні практичних завдань надійності часто виявляється необхідним обчислювати ймовірність того, що випадкова величина X потрапляє на ділянку $\alpha \le X < \beta$.

З визначення функції розподілу випливає, що ймовірність попадання випадкової величини на задану ділянку дорівнює приросту функції розподілу на цій ділянці:

$$P(\alpha \le x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \tag{3.2}$$

Для з'ясування деяких моментів розглянемо межу ймовірності (3.2) у разі, коли точка β прагне до точки α, тобто визначимо ймовірність окремого значення випадкової величини

$$P(X = \alpha) = \lim_{\beta \to \alpha} P(\alpha \le X < \beta) = \lim_{\beta \to \alpha} \left[F(\beta) - F(\alpha) \right]. \tag{3.3}$$

У цьому випадку маємо два варіанти.

1. Якщо випадкова величина дискретна і в точці α має розрив, то межа ймовірності (3.3) дорівнює значенню стрибка $F(x)$ в точці α.

2. Якщо $F(x)$ в точці α неперервна, то ця межа ймовірності дорівнює нулю, тобто ймовірність будь-якого окремого значення неперервної випадкової величини дорівнює нулю.

3.1.4 Щільність розподілу

Щільністю розподілу (вона ж щільність ймовірності; диференціальна функція розподілу; диференційний закон розподілу, вагова функція) неперервної випадкової величини X називається функція $f(x)$, що виражає першу похідну від функції розподілу

$$f(x) = F^{/ /}(x). \tag{3.4}$$

Крива, що зображає щільність розподілу, називається кривою розподілу. Не важко побачити, що в разі взяття похідної від функції розподілу неперервної випадкової величини, наприклад, часу безперервної роботи машини (рис. 3.3), функція (3.4) графічно буде виглядати як зображено на рис. 3.4.

Задання закону розподілу випадкової величини за допомогою щільності розподілу можливо тільки для безперервних випадкових величин тому, що ймовірність будь-якого окремого значення неперервної випадкової величини дорівнює нулю.

Величина ***f(x)d(x)*** називається елементом ймовірності, вона являє собою площу, що обмежена щільністю ймовірності, межами інтервалу ***d(x)*** та віссю абсцис.

Рис. 3.4. Крива щільності розподілу неперервної випадкової величини

Визначимо ймовірність потрапляння випадкової величини на ділянку $\boldsymbol{\alpha} \leq \boldsymbol{X} < \boldsymbol{\beta}$. У зв'язку з тим, що ймовірність будь-якого окремого значення неперервної випадкової величини дорівнює нулю, зазначену ділянку можна записати у вигляді $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{X} < \boldsymbol{\beta}$**.** Шукана ймовірність являє собою визначений інтеграл з відповідними межами інтегрування:

$$\boldsymbol{P}(\propto < X < \beta) = \int_{\propto}^{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}). \quad (3.5)$$

Застосовуючи цю формулу до визначення функції розподілу, отримаємо

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \int_{-\infty}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}). \quad (3.6)$$

Властивості щільності розподілу

1. Щільність розподілу є невід'ємною функцією: ***f(x)≥ 0.***

2. Повна площа, обмежена кривою розподілу і віссю абсцис, дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{1}. \quad (3.7)$$

Щільність розподілу ***f(x***) має розмірність, обернену розмірності випадкової величини.

3.1.5 Числові характеристики випадкових величин

У багатьох питаннях практики немає необхідності характеризувати випадкову величину повністю. Характеристики, що дозволяють у стислій формі висловити найбільш суттєві особливості розподілу, називаються числовими характеристиками випадкової величини. Наведемо їх для дискретних і безперервних випадкових величин.

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини називається сума добутків усіх можливих значень випадкової величини на ймовірності цих значень:

$$\boldsymbol{M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i}. \tag{3.8}$$

Механічним аналогом математичного сподівання є координата центру ваги механічної системи з $\boldsymbol{n}$ тілами та масами $\boldsymbol{p_i}$.

Для неперервної випадкової величини:

$$\boldsymbol{M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx}. \tag{3.9}$$

У разі, коли ***M [X]*** треба позначити однією буквою, писатимемо ***M [X]*** $= \boldsymbol{m_x}$**.**

Модою випадкової величини називається її найбільш імовірне значення або значення, при якому щільність імовірності максимальна, її позначимо через $\boldsymbol{M_o}$.

Медіаною випадкової величини ***X*** називається таке її значення $\boldsymbol{M_e}$, для якого ***P(X < M_e) = P(X > M_e),*** тобто площа під кривою розподілу за значенням $\boldsymbol{M_e}$ ділиться навпіл.

Центрованою випадковою величиною називається різниця між випадковою величиною ***X*** і її математичним сподіванням:

$$\boldsymbol{\dot{X} = X - m_x}. \tag{3.10}$$

Дисперсією випадкової величини ***X*** називається математичне сподівання квадрата відповідної центрованої випадкової величини і тому вона має розмірність квадрата розмірності випадкової величини:

$$\boldsymbol{D[X] = M\left[\dot{X}^2\right]}. \tag{3.11}$$

Для дискретної величини:

$$\boldsymbol{D[X] = D_x = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_i)^2 p_i}. \tag{3.12}$$

Для неперервної випадкової величини:

$$\boldsymbol{D[X] = D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2\, f(x)\, dx}. \tag{3.13}$$

Середньоквадратичним відхиленням, або стандартом випадкової величини ***X*** називається корінь квадратний з її дисперсії:

$$\boldsymbol{\sigma_x = \sqrt{D_x}}. \tag{3.14}$$

Стандарт випадкової величини має розмірність випадкової величини.

Коефіцієнтом варіації випадкової величини називається відношення середньоквадратичного відхилення до математичного сподівання. Найчастіше його виражають у відсотках:

$$\boldsymbol{\nu_x = \frac{\sigma_x}{m_x} \cdot 100,\ \%}. \tag{3.15}$$

3.1.6 Моменти випадкової величини

Початковим моментом $\boldsymbol{k}$-го порядку випадкової величини $\boldsymbol{X}$ називається математичне сподівання $\boldsymbol{k}$-го ступеня цієї випадкової величини:

$$\boldsymbol{\alpha_k[X] = M[X^k].} \tag{3.16}$$

Для дискретної величини:

$$\boldsymbol{\alpha_k[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i.} \tag{3.17}$$

Для неперервної випадкової величини:

$$\boldsymbol{\alpha_k[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx}. \tag{3.18}$$

Центральним моментом $\boldsymbol{k}$-го порядку випадкової величини $\boldsymbol{X}$ називається математичне сподівання $\boldsymbol{k}$-го ступеня центрованої випадкової величини $\dot{\boldsymbol{X}}$

$$\boldsymbol{\mu_k[X] = M[\dot{X}^k].} \tag{3.19}$$

Для дискретної величини:

$$\boldsymbol{\mu_k[X] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^k p_i.} \tag{3.20}$$

Для неперервної випадкової величини:

$$\boldsymbol{\mu_k[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k f(x)\,dx.} \tag{3.21}$$

З визначень моментів випадкових величин випливає, що математичне сподівання випадкової величини $\boldsymbol{X}$ є її *перший початковий момент*:

$$\boldsymbol{M[X] = \alpha_1[X]};$$

дисперсія – *другий центральний момент*:

$$\boldsymbol{D[X] = \mu_2[X]}.$$

Третій центральний момент служить для характеристики асиметрії (або «скісності») розподілу. Якщо розподіл симетричний відносно математичного очікування, то всі моменти непарного порядку дорівнюють нулю, тому що кожному додатному доданку відповідає рівний йому за абсолютною величиною від'ємний доданок.

Момент $\boldsymbol{\mu_3}$ має розмірність куба випадкової величини. Тому для отримання безрозмірної характеристики його ділять на куб середньоквадратичного відхилення. Отримана величина носить назву ***коефіцієнта асиметрії*** чи ***скісності розподілу***:

$$\boldsymbol{S_k} = \frac{\boldsymbol{\mu}_3}{\boldsymbol{\sigma}^3}. \tag{3.22}$$

Характер впливу значення коефіцієнта асиметрії на криву розсіювання зображено на рис. 3.5.

Рис. 3.5. Вплив коефіцієнта асиметрії на криву розсіювання

Четвертий центральний момент служить для характеристики крутості розподілу, яка описується ***ексцесом***:

$$\boldsymbol{E_x} = \frac{\boldsymbol{\mu}_4}{\boldsymbol{\sigma}^4} - 3 \; . \qquad (3.23)$$

У формулі (3.23) введено доданок – константа «–3» – у зв'язку з тим, що для нормального закону розподілу співвідношення $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$. Ця поправка застосована для того, щоб для нормального закону за аналогією зі скісністю ексцес дорівнював нулю (рис. 3.6).

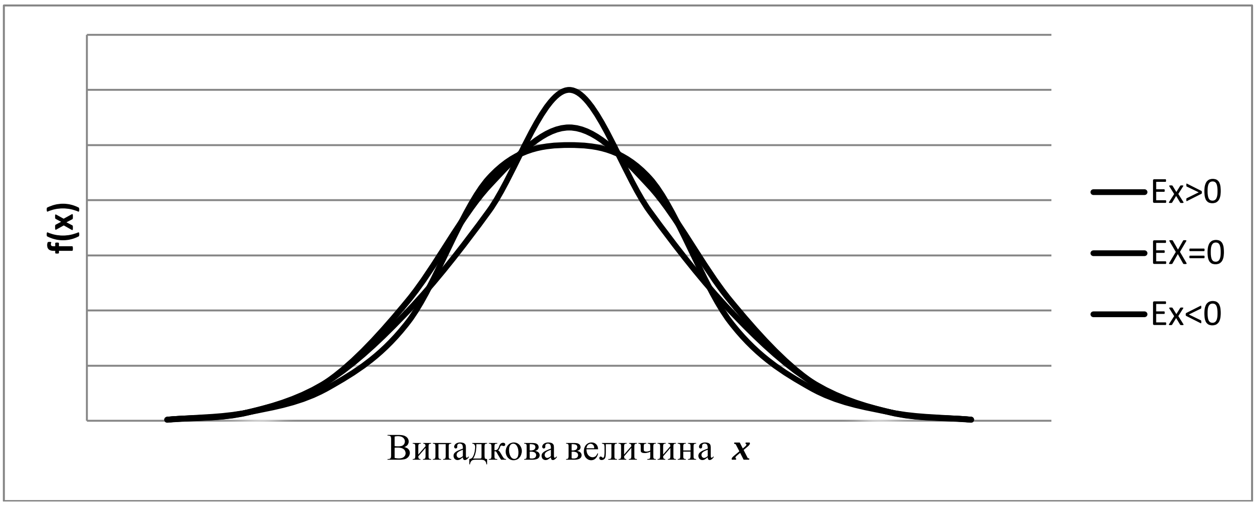


Рис. 3.6. Вплив коефіцієнта ексцесу на криву розсіювання

Тому додатне значення ексцесу означає загострення вершини кривої розподілу відносно нормального закону, коли ***Ex=0***, а від'ємне – притуплення вершини.

3.2 Закони розподілу дискретних випадкових величин

3.2.1 Біноміальний розподіл

Дискретна випадкова величина X називається розподіленою за біноміальним законом, якщо її можливі значення $0, 1, 2, \ldots n$, а ймовірність того, що $X = m$, виражається формулою Бернуллі (2.12):

$$P\,(X = m) = P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}\ ,$$

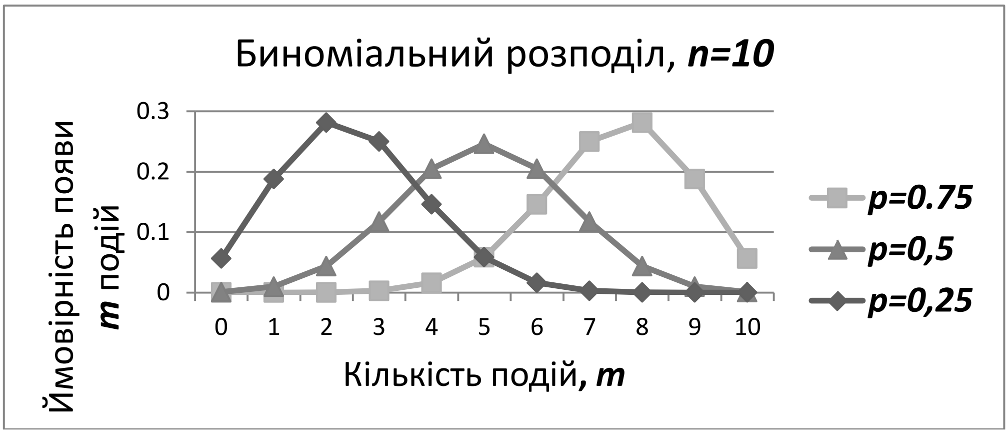
де $0 < p < 1$ – параметр розподілу, що являє собою ймовірність деякої події A в кожному окремому досліді;

n – параметр розподілу, являє собою число проведених дослідів;

$q = 1 - p$ – ймовірність події, протилежної до події A.

Математичне сподівання і дисперсія випадкової величини, розподіленої за біноміальним законом, відповідно визначаються таким чином: $m_x = np$; $D_x = npq$.

Багатокутники біноміального розподілу при різних значеннях його параметрів наведені на діаграмах рис. 3.7.



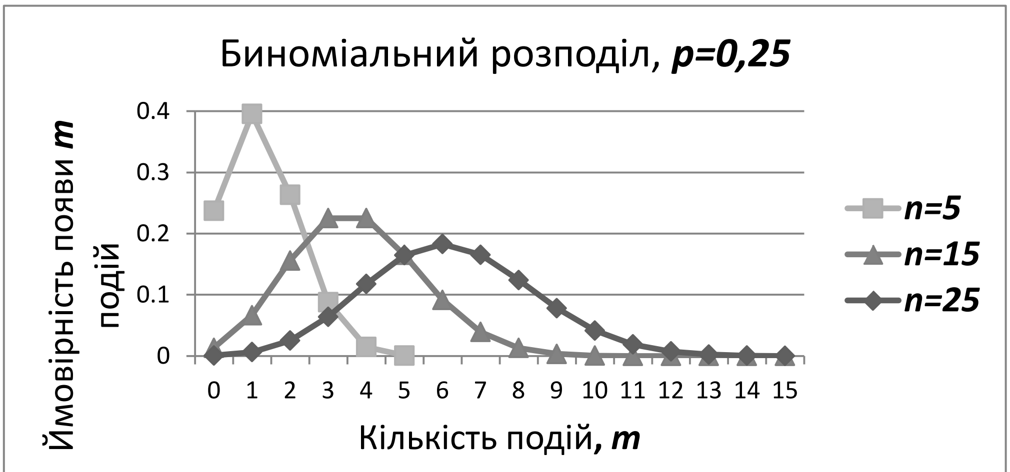


Рис. 3.7. Багатокутники біноміального розподілу при різних значеннях його параметрів

Біноміальний розподіл застосовують для вирішення задач надійності, що виникають при аналізі кількості відмов однорідних елементів машин у ситуаціях, що відповідають математичним засадам його формування, тобто частинній теоремі про повторення дослідів (див. 2.7.1).

3.2.2 Розподіл Пуассона

Розподіл Пуассона (закон Пуассона, закон рідкісних явищ) є граничним випадком біноміального, коли кількість дослідів $\boldsymbol{n}$ прагне до нескінченності ($n \to \infty$), а ймовірність $\boldsymbol{p}$ – до нуля ($p \to O$) таким чином, що добуток $\boldsymbol{np}$ зберігає деяке постійне значення $\boldsymbol{a}$, що є середньою кількістю подій (відмов) на деякому проміжку часу, тобто:

$\boldsymbol{lim_{n\to\infty}\, np = a}$, при цьому $\boldsymbol{a > 0}$.

У такому випадку ймовірність $\boldsymbol{P_m}$ того, що дана подія в нескінченно довгій серії випробувань з'явиться рівно $\boldsymbol{m}$ раз, визначається таким чином:

$$\boldsymbol{P(X = m) = P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}}, \qquad (3.24)$$

де $\boldsymbol{a > 0}$ – параметр закону Пуассона.

Отже, дискретна випадкова величина $\boldsymbol{X}$ називається розподіленою за законом Пуассона, якщо її можливі значення $\boldsymbol{0, 1, 2, 3, ..., m, ...}$, а ймовірність того, що $\boldsymbol{X = m}$, виражається формулою (3.24).

Багатокутники розподілу Пуассона при різних значеннях його параметра $\boldsymbol{a}$ зображені на рис. 3.8.

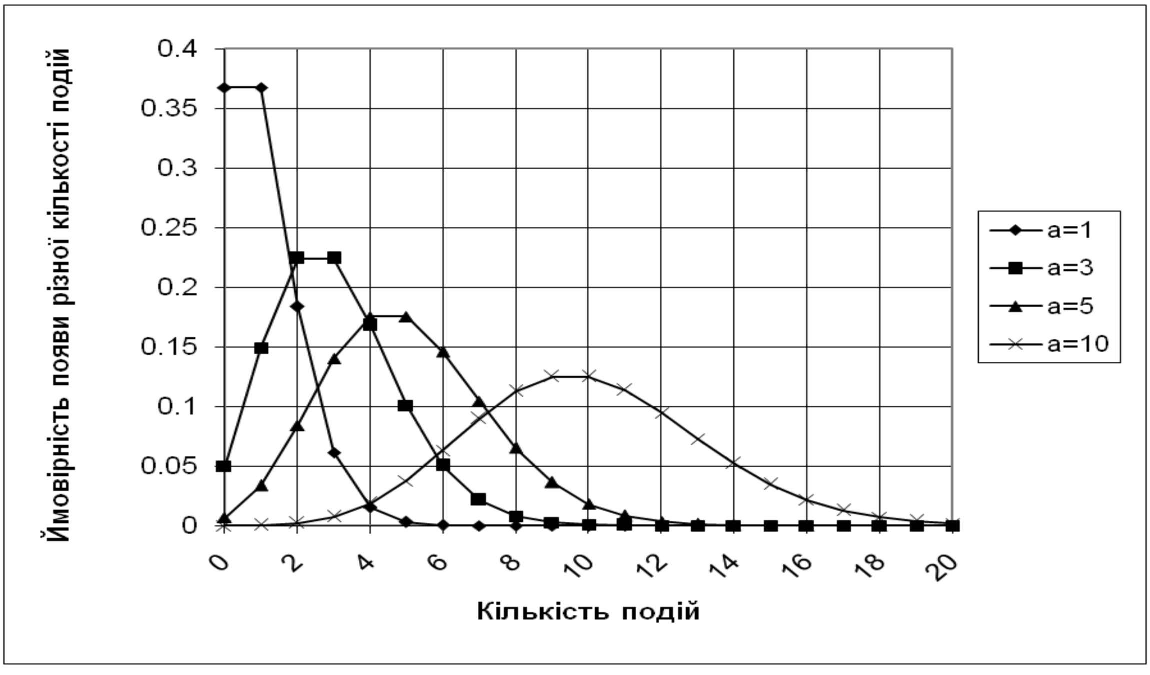


Рис. 3.8. Багатокутники розподілу Пуассона при різних значеннях його параметра $\boldsymbol{a}$

Для цього закону розподілу математичне сподівання та дисперсія однакові та дорівнюють його параметру: $\boldsymbol{m_x = D_x = a}$.

Розподіл Пуассона описує число подій, що відбуваються в однакові проміжки часу або на однакових відрізках простору за умови, що події відбуваються незалежно одна від одної з постійною середньою інтенсивністю.

Розподіл Пуассона можна застосовувати замість біноміального розподілу при вирішенні задач надійності, визначенні раціональної кількості запасних частин та контролю якості продукції, якщо ймовірність відмови або частка браку не перевищує 0,1.

Приклад. Вивчення якості продукції, що випускається заводом, показало, що частка браку дорівнює 0,5 %. Знайти ймовірність того, що в партії, яка містить 1000 виробів, кількість бракованих виробів дорівнює 15.

Для вирішення задачі можна застосувати біноміальний розподіл (2.12), при цьому $\boldsymbol{p = 0{,}005,\ n = 1000,\ m = 15}$:

$$\boldsymbol{P_{m,n} = P_{15,1000} = C_{1000}^{15}} \cdot 0{,}005^{15} \cdot 0{,}9958^{985} = 0.000157.$$

Оскільки частка браку не перевищує 0,1, можна використовувати закон Пуассона, для чого слід визначити його єдиний параметр – математичне сподівання кількості бракованих виробів в партії у 1000 штук:

$$\boldsymbol{a = pn = 0{,}005 \cdot 1000 = 5.}$$

З формули (3.24) маємо:

$$\boldsymbol{P_m = P_5 =} \frac{5^{15}}{15!} e^{-5} = 0{,}000151.$$

З результатів розрахунків видно, що в даному випадку закон Пуассона при достатній для практики точності дозволяє виконати розрахунок простіше.

3.3 Потоки відмов елементів машин

Потоком відмов (подій) називається послідовність відмов (подій), що наступають одна за одною у випадкові моменти часу.

Інтенсивністю (щільністю) потоку відмов (подій) називається середнє число відмов (подій) в одиницю часу.

Потік відмов називається ***потоком без післядії***, якщо ймовірність появи на будь-якій ділянці часу того чи іншого числа відмов не залежить від того, яке число відмов потрапило на інші ділянки, що не перетинаються з даним.

Потік відмов називається ***ординарним***, якщо ймовірність появи на елементарній ділянці $\boldsymbol{\Delta t}$ двох або більше відмов дуже мала порівняно з імовірністю появи одної відмови.

Ординарний потік відмов без післядії називається ***пуассонівським***.

Якщо відмови утворюють пуассонівський потік, то кількість відмов, що потрапляють на будь-яку ділянку часу $(t_o,\ t_o + \tau)$, розподілена згідно із законом Пуассона (3.24). При цьому математичне сподівання кількості відмов $\boldsymbol{a}$, що потраплять на потрібну ділянку, визначається інтегралом:

$$\boldsymbol{a} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \boldsymbol{\lambda(t)\, dt}, \tag{3.25}$$

де $\boldsymbol{\lambda(t)}$ – функція інтенсивності потоку відмов.

Якщо $\lambda\ (t) = const$, пуассонівський потік називається «стаціонарним пуассонівським» або ***найпростішим потоком відмов***.

Для найпростішого потоку кількість відмов, що потрапляють на будь-яку ділянку довжиною $\boldsymbol{\tau}$, розподілена за законом Пуассона з параметром $\boldsymbol{a = \lambda\tau}$.

У цьому випадку не розглядаються періоди припрацювання деталей і наближення граничного стану машин, протягом яких інтенсивність відмов вище і нестаціонарна.

Найпростіший потік відмов формується, коли експлуатується велика кількість різноманітних машин і пристроїв, які в своїй більшості пройшли період припрацювання. Періодично в них з’являються відмови, після яких необхідно відновлювати їх працездатний стан за умови, що вони не досягли свого граничного стану. Таким вимогам, зазвичай, відповідають умови експлуатації більшості машин і устаткування технологічних ліній усіх галузей промисловості в світі.

Однією з важливіших завдань служби механіка на будь-якому виробництві є планування замовлень на запасні частини до машин і устаткування. Методика визначення раціональної їх кількості, що врахує не тільки середні витрати, а також можливі їх коливання, ґрунтується на наведеному в даному посібнику матеріалі. Ця методика з прикладами вирішення та індивідуальними завданнями викладена в [6].

3.4 Функції ймовірності безвідмовної роботи та інтенсивності відмов машин

Для практичного використання статистичного аналізу надійності роботи машин його результати доцільно подавати з використанням функцій ймовірності безвідмовної роботи та інтенсивності відмов.

Більшість величин, використовуваних при аналізі надійності машин, мають значну випадкову складову і пов'язані з часом. Наприклад, відома з математичної статистики функція розподілу випадкової величини (3.11) відносно до випадкового часу безвідмовної роботи ***t*** по суті виражає функцію ймовірності відмови, яка з ростом часу ***t*** збільшується за якимось законом від 0 до 1. Отже, функція ймовірності безвідмовної роботи (у ранніх джерелах інформації – крива спаду або функція надійності) є протилежною до функції розподілу часу безвідмовної роботи. Вона описується формулою (3.26) і зображена на рис. 3.9.

$$P(t) = 1 - F(t). \tag{3.26}$$

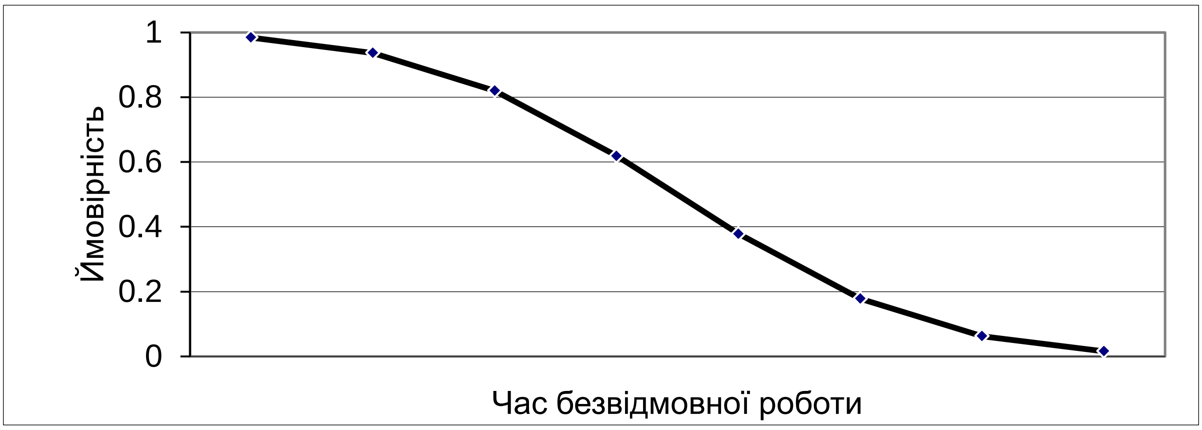


Рис. 3.9. Приклад функції ймовірності безвідмовної роботи

Слід зазначити, що ця функція в разі аналізу інших складових властивостей надійності об'єкта оперує іншими величинами, що мають розмірність часу. Так, при дослідженні довговічності аналогічна функція називається ***функцією ймовірності забезпечення ресурсу***; при аналізі ремонтопридатності **–** ***функцією ймовірності забезпечення тривалості відновлення працездатного стану***, а для характеристики зберігання об'єктів використовується функція ймовірності забезпечення терміну зберігання.

Функцією інтенсивності відмов за дуже короткий проміжок часу (умовною функцією відмов або інтенсивністю виходу з ладу) за умови, що до цього проміжку часу відмов не було, називається відношення щільності розподілу часу безвідмовної роботи до функції ймовірності безвідмовної роботи:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)}, \tag{3.27}$$

де ***f(t)*** та ***F(t)*** **–** відповідно щільність і функція розподілу часу безвідмовної роботи.

Інтенсивність відмов, що трапляється у багатьох випадках, має "коритоподібну" форму (рис. 3.10).

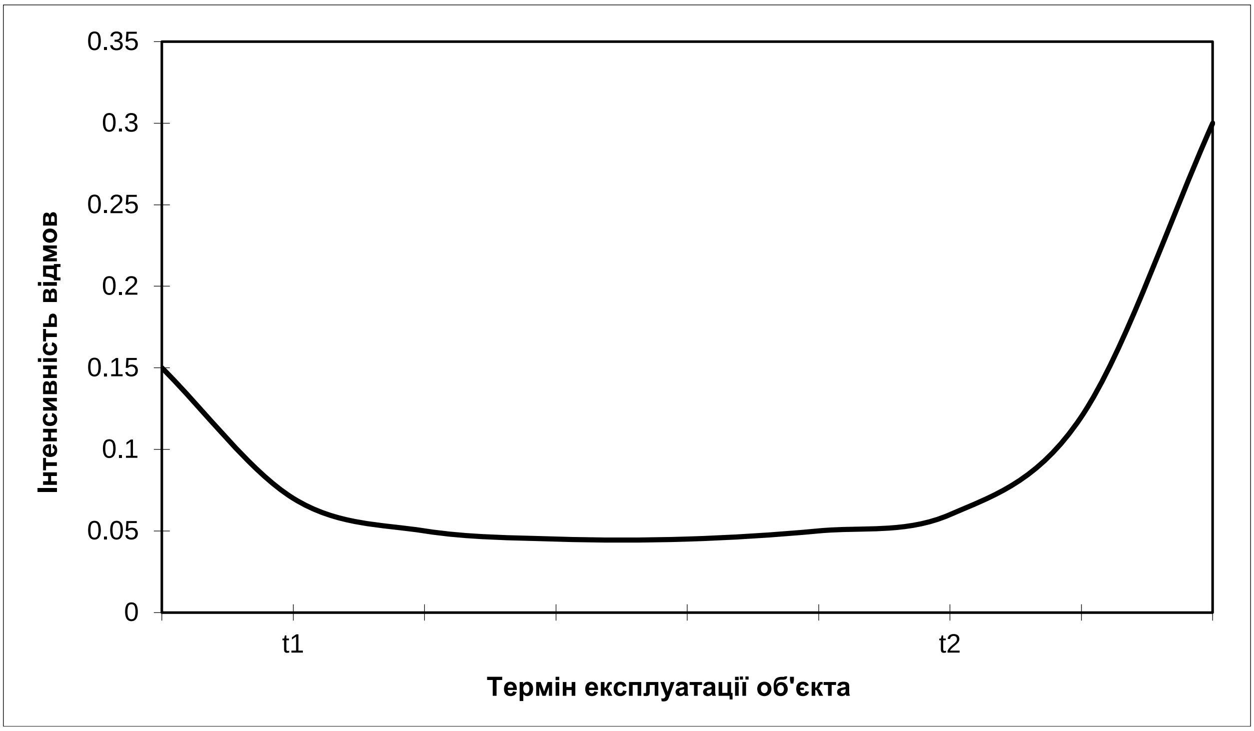


Рис. 3.10. Вигляд функції інтенсивності відмов, властивий більшості машин

Для початкового періоду (до моменту t_1) інтенсивність відмов відносно велика внаслідок припрацювання машини і виходу з ладу дефектних деталей. Потім до моменту часу t_2 інтенсивність відмов залишається приблизно постійною на відносно невисокому рівні, після якого вона зростає внаслідок наближення граничного стану машини та виникнення відмов з причин спрацювання і втоми матеріалу її елементів.

Складальні одиниці й деталі створюваних машини повинні бути розраховані таким чином, щоб їх моменти часу t_2 групувалися разом і припадали на періоди капітальних або проміжних ремонтів машини. Така сама вимога застосовується до машини, що є елементами складного технологічного комплексу. Бажано, щоб у них граничний стан наступав майже одночасно.

3.5 Закони розподілу неперервних випадкових величин

3.5.1 Нормальний закон розподілу (закон Гаусса – Лапласа)

Нормальний розподіл являє собою межу біноміального розподілу (2.12), коли число випробувань $\boldsymbol{n}$ збільшується безмежно, однак, жодна з ймовірностей $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$ не надто мала. При цьому формується розподіл неперервної випадкової величини з такою щільністю ймовірності:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}, \tag{3.28}$$

де $\boldsymbol{x}$ **–** неперервна випадкова величина, наприклад, час безвідмовної роботи;

$\boldsymbol{m}$ **–** параметр закону розподілу, що в даному разі збігається з математичним сподіванням випадкової величини, тобто $\boldsymbol{m = m_x}$**;**

$\boldsymbol{\sigma}$ **–** параметр закону розподілу, що в даному разі збігається із середньоквадратичним відхиленням випадкової величини, тобто $\boldsymbol{\sigma = \sigma_x}$**.**

Функція розподілу випадкової величини визначається інтегралом:

$$\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} d(x)}. \tag{3.29}$$

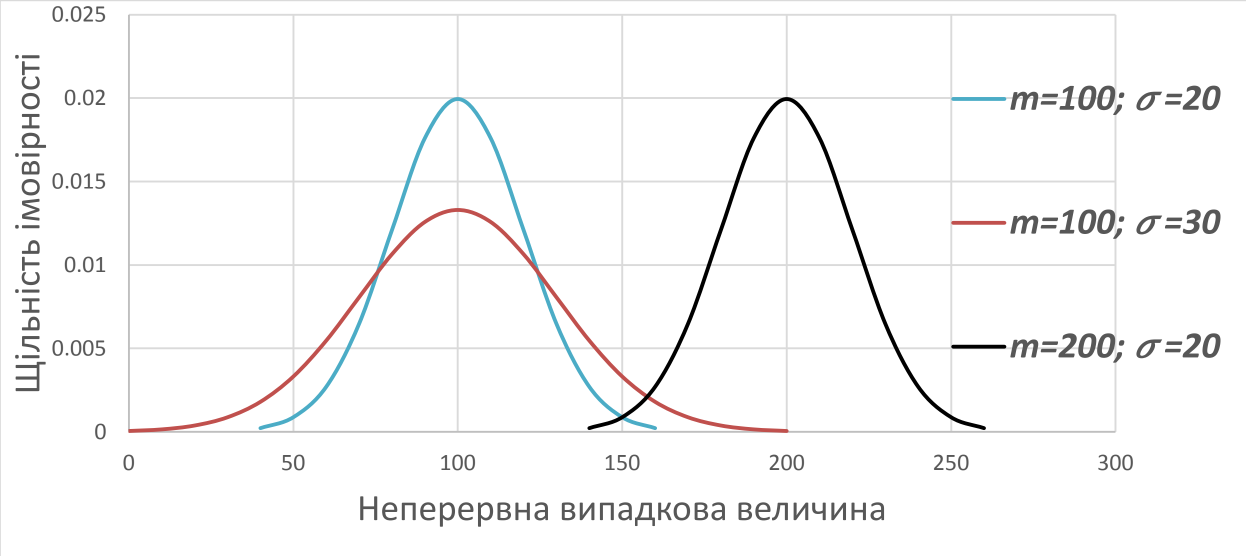
Центральні моменти випадкових величин, розподілених за нормальним законом, складають відповідно $\boldsymbol{\mu_3 = 0}$, $\boldsymbol{\mu_4 = 3\sigma^4 - 3}$, тому скісність і ексцес $\boldsymbol{S_к = E_x = 0}$.

Щільність імовірності та функція розподілу випадкової величини при нормальному законі показані на графіках (рис. 3.11).

Задля узагальнення результатів багатьох досліджень стосовно фізичних величин, розподілених за нормальним законом, уведено ***центровану нормовану нормально розподілену випадкову величину***. Її визначають за формулою:

$$\boldsymbol{z = \frac{x-m}{\sigma}}. \tag{3.30}$$

При цьому за суттю формули початок координат переноситься в позицію розташування математичного сподівання. Ця величина є безрозмірною, вона показує, скільки середньоквадратичних відхилень від математичного сподівання величини складає відхилення розглядуваного її конкретного значення.



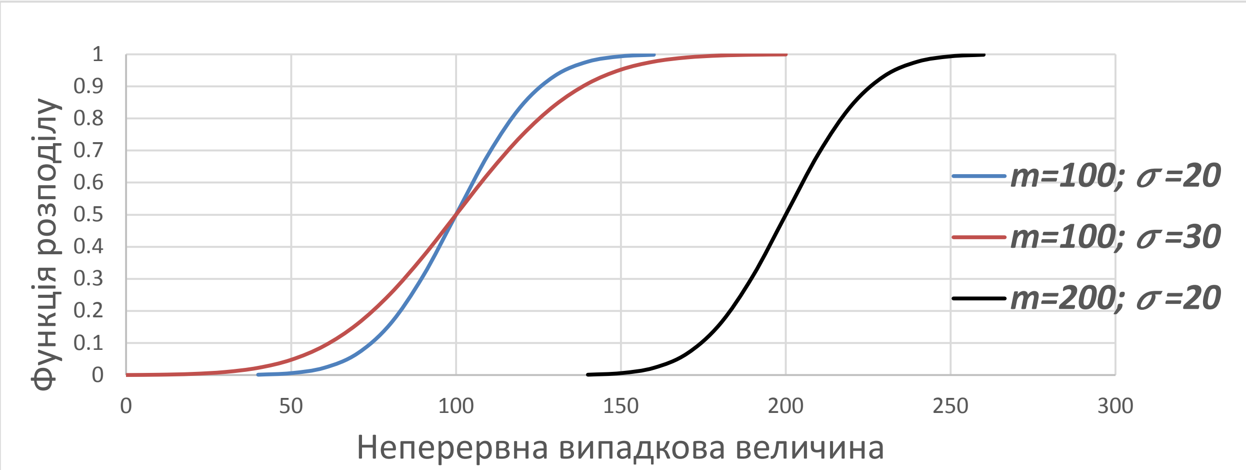


Рис. 3.11. Статистичні функції нормального закону розподілу випадкових величин при різних параметрах

Установлено, що для всіх нормально розподілених випадкових величин інтегральні функції розподілу їх центрованих нормованих величини є однаковими. Цю загальну для нормального закону функцію позначають через ***Ф(х).*** Для цієї функції $\boldsymbol{m_z} = \mathbf{0}$ і $\boldsymbol{\sigma_z} = \mathbf{1}$, вона наведена на рис. 3.12. Функцію розподілу для конкретної величини ***X*** визначають таким чином:

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}}\int_{-\infty}^{x} \boldsymbol{e}^{-\frac{z^2}{2}} \boldsymbol{d}(\boldsymbol{z}). \qquad (3.31)$$

Розрахунки можна здійснювати за допомогою програми ***Excel*** чи складених таблиць вирішення цього інтегралу для величини ***Z***, що подані в додатках довідників і книг з математичної статистики**.** При цьому функцію розподілу величини ***X*** визначають за формулою:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \Phi\left(\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}}{\boldsymbol{\sigma}}\right). \qquad (3.32)$$

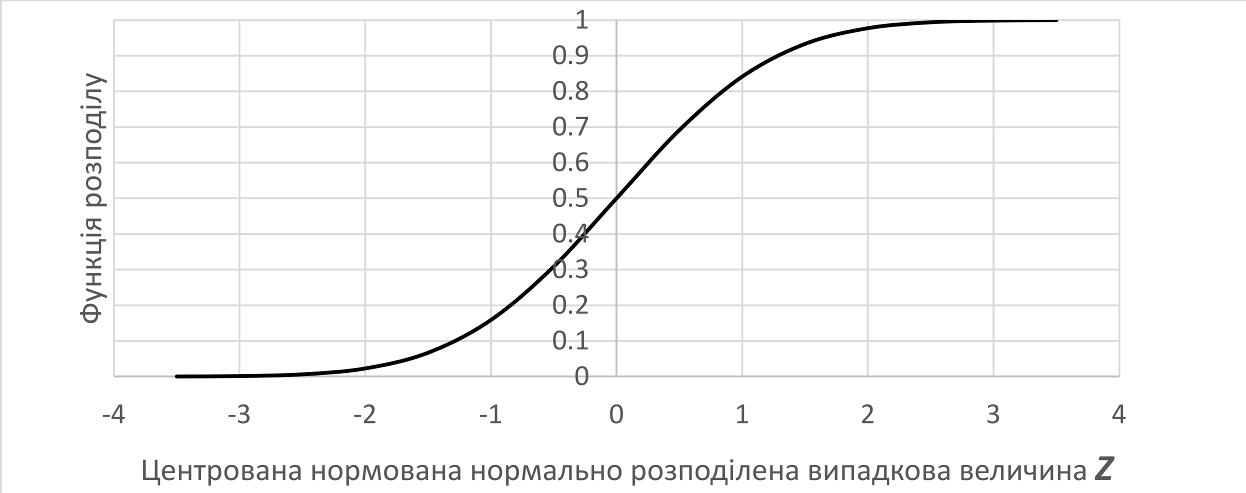


Рис. 3.12. Функція розподілу центрованої нормованої нормально розподіленої випадкової величини

Імовірність влучення випадкової величини $\boldsymbol{X}$ в інтервал ($\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$) можна визначити як різницю двох значень цієї функції для меж інтервалу:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\alpha} < X < \boldsymbol{\beta}) = \Phi\left(\frac{\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{m}}{\boldsymbol{\sigma}}\right) - \Phi\left(\frac{\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{m}}{\boldsymbol{\sigma}}\right). \tag{3.33}$$

Слід зазначити, що нормальний розподіл застосовується в багатьох галузях знань, де потрібно визначити ймовірність відхилення досліджуваних параметрів від заданих, наприклад у теорії похибок (рис. 3.13). Зрозуміло, що в даних випадках не важливо, у який бік є відхилення – до збільшення чи зменшення параметру. В цих випадках у формулі (3.31) використовують симетричні межі інтегрування. Описану функцію прийнято позначати і розраховувати таким чином:

$$\Phi^*(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}}\int_{-\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{z}^2}{2}} \boldsymbol{d}(\boldsymbol{z}). \tag{3.34}$$

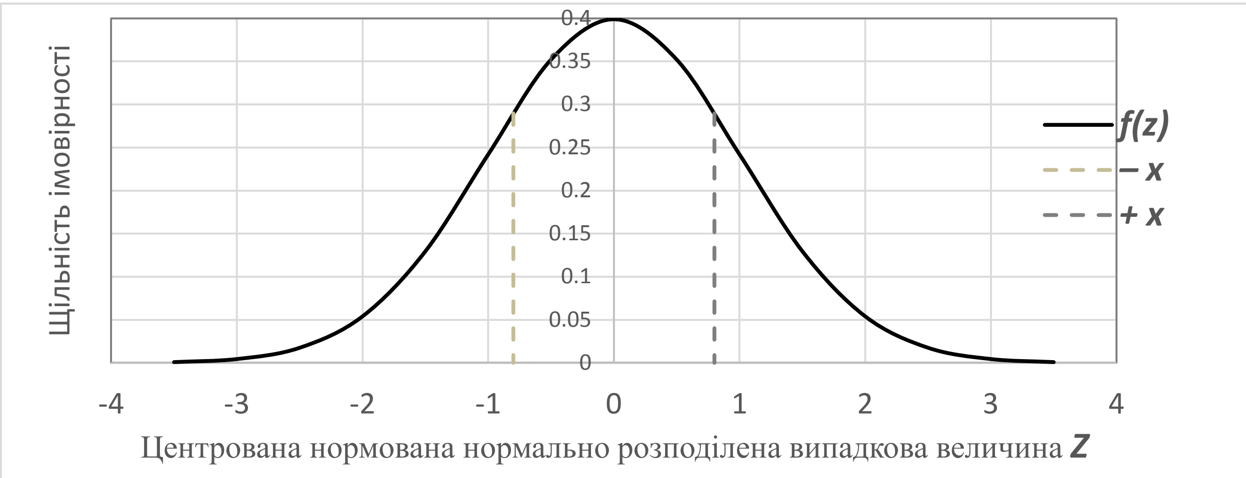


Рис. 3.13. Щільність розподілу центрованої нормованої нормально розподіленої випадкової величини та симетричні межі інтегрування

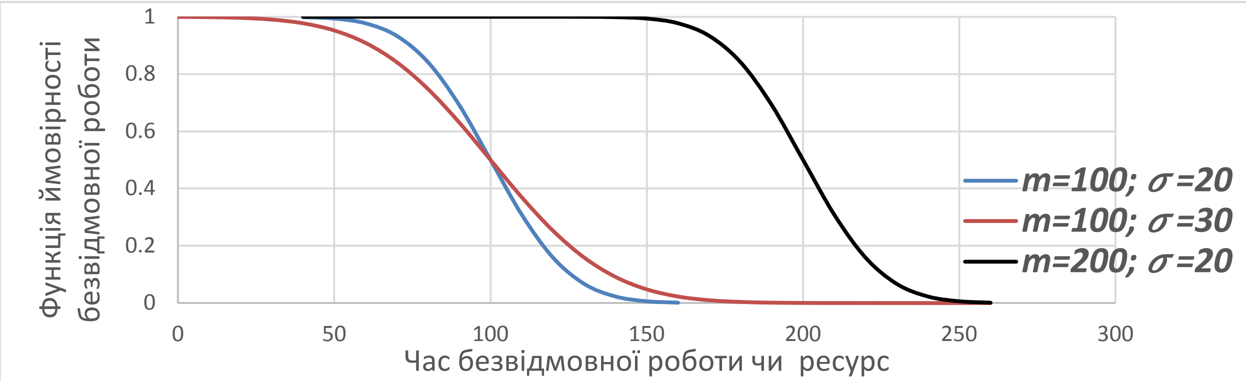
Для прикладу наведемо характерні значення цієї функції:

$\Phi^*(x=\sigma)=0{,}683$; $\Phi^*(x=2\sigma)=0{,}955$; $\Phi^*(x=3\sigma)=0{,}9973$.

Доречно додати, що іноді зустрічається стара характеристика розсіювання – так званий ***імовірний*** або ***серединний відхил*** чи ***середня помилка.*** Це половина довжини ділянки осі абсцис, симетричної відносно точки $\boldsymbol{m_x}$, на яку спирається половина площі кривої розсіювання. Його зазвичай позначають через $\boldsymbol{E}$. Зрозуміло, що ймовірний відхил жорстко пов'язаний із середньоквадратичним відхиленням. Розраховано, що $\boldsymbol{E = 0{,}6\,74\,\sigma}$.

Область застосування нормального розподілу, що є основним законом математичної статистики, обумовлюється способом його формування. Він утворюється тоді, коли діє (складається у ймовірнісному сенсі, див. підрозділ 2.3) велика кількість відносно рівноправних чинників.

У теорії надійності нормальний розподіл приймають як розподіл часу роботи до відмови ($\boldsymbol{t}$) ***елементів машин, які втрачають працездатність через спрацювання і старіння при стабільних умовах експлуатації***, коли коефіцієнт варіації $\boldsymbol{\nu_t}$ **< 33 %**, тобто при $\boldsymbol{m_t < 3\sigma_t}$**.** Функція ймовірності безвідмовної роботи та умовна функція інтенсивності відмов, що відповідно визначаються за формулами (3.26) і (3.27), наведені на рис. 3.14.



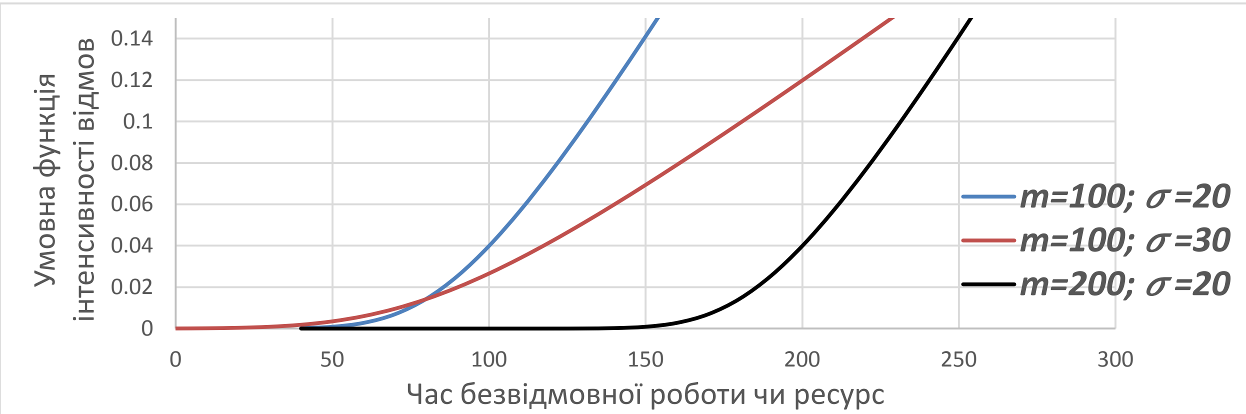


Рис. 3.14. Функції, що характеризують надійність деталей машин при нормальному розподілі часу їх безвідмовної роботи

При значеннях $\boldsymbol{\nu_t}$, більших за 33 %, і використанні нормального розподілу для часу безвідмовної роботи з'являється ймовірність його від'ємних значень, що є аномальним. Отримання такого результату при визначенні показників надійності свідчить про на те, що фізика формування розсіювання шуканого параметру не відповідає нормальному розподілу і в даному разі застосовувати його як статистичну модель для часу безвідмовної роботи не припустимо.

Як видно з графіків, інтенсивність відмов машини при нормальному розподілі ресурсів її деталей необмежено збільшується з часом експлуатації $\boldsymbol{t}$. Збільшення інтенсивності відмов відбувається синхронно із зменшенням імовірності безвідмовної роботи деталей.

3.5.2 Логарифмічно-нормальний закон розподілу

При логарифмічно-нормальному законі розподілу випадкова величина розподілена таким чином, що її логарифм розподілений за нормальним законом. Щільність ймовірності набуває такого вигляду:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x\sigma_{Lnx}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(Lnx - m_{Lnx})^2}{2(\sigma_{Lnx})^2}}} \quad \text{при } \boldsymbol{x \geq 0}; \tag{3.35}$$

$$\boldsymbol{f(x) = 0} \quad \text{при } \boldsymbol{x < 0},$$

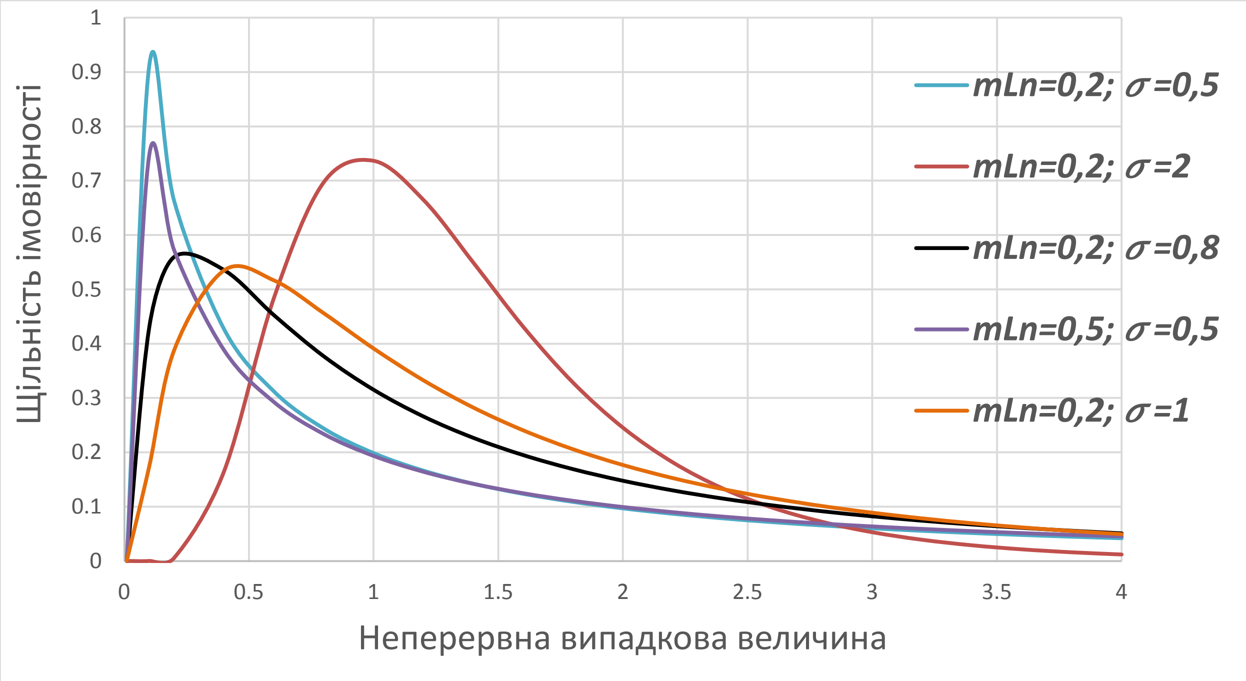
де $\boldsymbol{x}$ – неперервна випадкова величина;

$\boldsymbol{m_{Lnx}}$ – параметр закону розподілу, який є математичним сподіванням логарифму випадкової величини, що перебуває в інтервалі $-\infty < m_{Lnx} < \infty$;

$\boldsymbol{\sigma_{Lnx}}$ – параметр закону розподілу, який є середньоквадратичним відхиленням логарифму випадкової величини.

Функція розподілу випадкової величини за цим законом визначається інтегралом і графічно зображена на рис. 3.15:

$$\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{\sigma_{Lnx}\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{(Lnx - m_{Lnx})^2}{2(\sigma_{Lnx})^2}} d(x).} \tag{3.36}$$



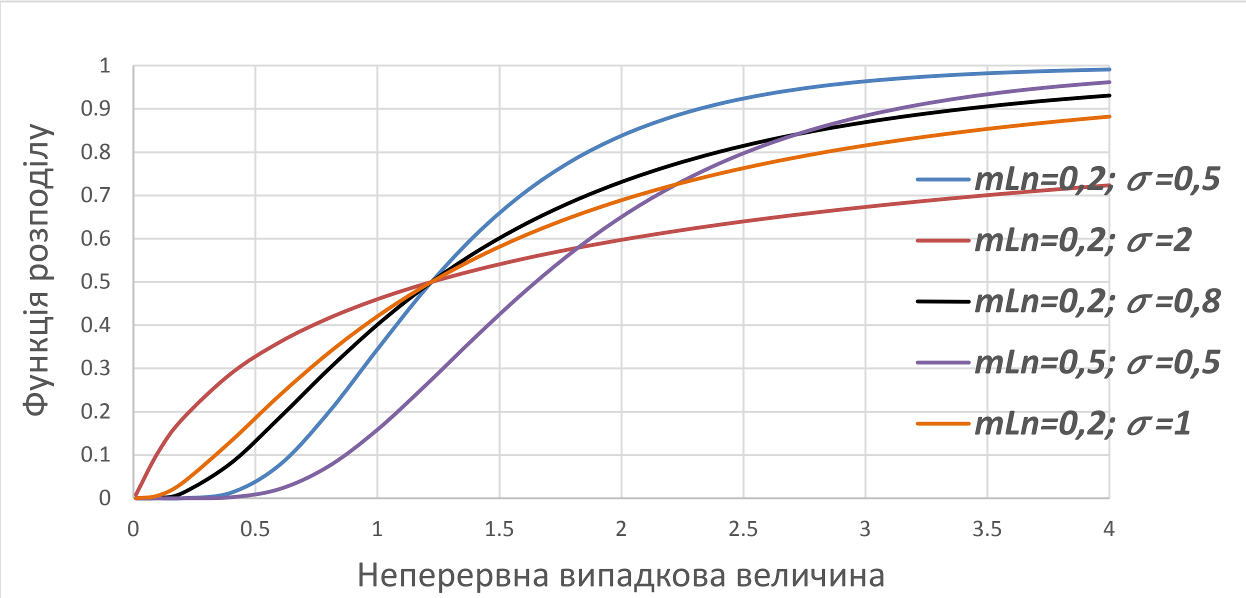


Рис. 3.15. Статистичні функції логарифмічно-нормального закону розподілу випадкових величин при різних параметрах

При застосуванні центрованої нормованої величини

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\boldsymbol{Lnx} - \boldsymbol{m_{Lnx}}}{\boldsymbol{\sigma_{Lnx}}}$$

функція розподілу випадкової величини набуває вигляду:

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}} \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{z}^2}{2}} \boldsymbol{d}(\boldsymbol{z}). \qquad (3.37)$$

Математичне сподівання і дисперсія випадкової величини визначаються відповідно за формулами:

$$m_x = e^{m_{Lnx}+\frac{\sigma_{Lnx}}{2}};$$

$$D_x = exp(2m_{Lnx} + \sigma_{Lnx}^2)(exp\sigma_{Lnx}^2 - 1).$$

Скісність розподілу завжди додатна, ексцес – різноманітний.

У результаті аналізу впливу параметрів закону на форму його статистичних функцій (рис. 3.15) можна зробити такі висновки:

- при постійному значенні параметра m_{Lnx} і рості σ_{Lnx} зростає мода кривої розподілу ***f(x)***, тобто вершина зміщується вправо;
- при постійному значенні параметра m_{Lnx} інтегральні функції розподілу ***F(x)*** з різними значеннями параметра σ_{Lnx} перетинаються в одній точці, при σ_{Lnx}**=2** ця функція не має перегину і завжди випукла;
- із збільшенням параметра m_{Lnx} розподіл розтягується вздовж осі абсцис і зростає ексцес.

Функція ймовірності безвідмовної роботи є протилежною до функції розподілу при раніше застосованих параметрах (рис. 3.16).

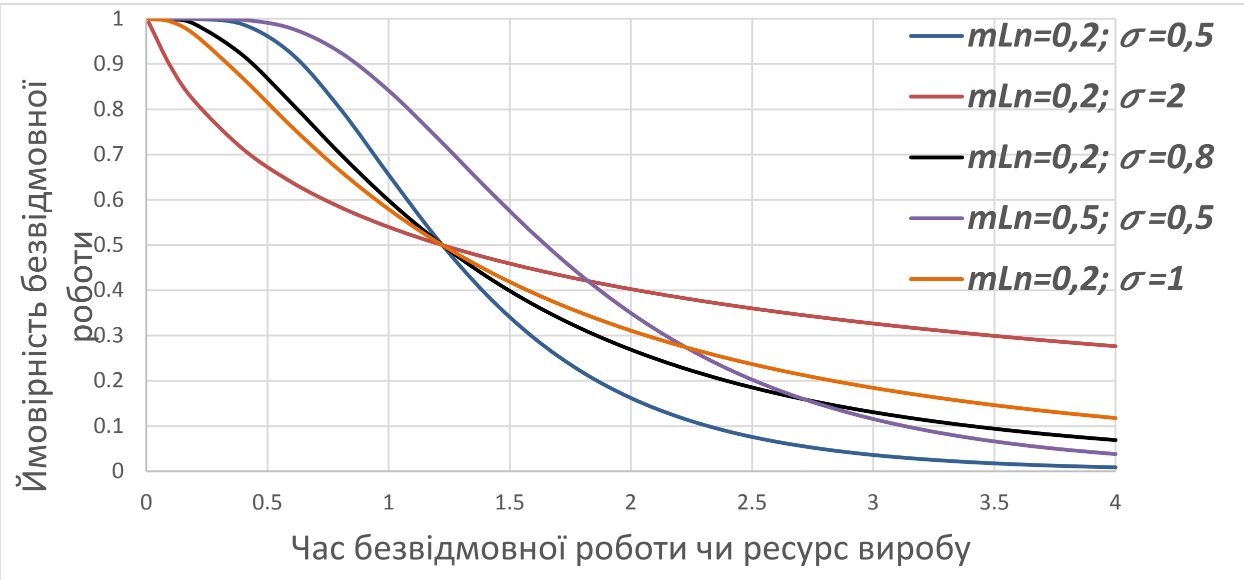


Рис. 3.16. Функція ймовірності безвідмовної роботи логарифмічно-нормального закону розподілу

Логарифмічно-нормальний розподіл утворюється в результаті множення (у ймовірнісному сенсі) великого числа незначних факторів і описує процеси, у яких спостережуване значення величини становить випадкову частку значення цієї величини, утвореної дією попереднього фактора.

Унаслідок описаного способу утворення закону він має особливий вигляд функції інтенсивності відмов (рис. 3.17).

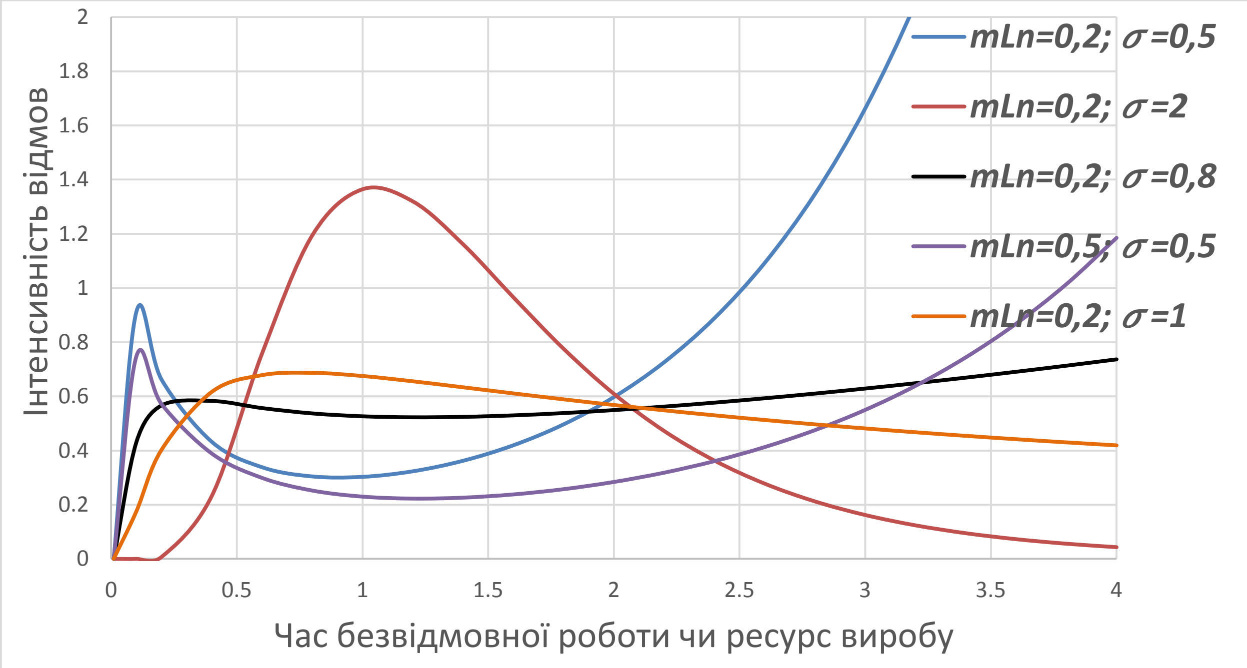


Рис. 3.17. Функція інтенсивності відмов при різних параметрах логарифмічно-нормального закону розподілу

Логарифмічно-нормальний закон розподілу є єдиним, у якого функція інтенсивності відмов $\boldsymbol{\lambda(t)}$ може мати максимум. Це відбувається при значеннях параметра $\boldsymbol{\sigma_{Lnx}} > 1$. При значеннях параметра $\boldsymbol{\sigma_{Lnx} \leq 1}$ зі збільшенням часу роботи функція $\boldsymbol{\lambda(t)}$ спочатку швидко зростає до деякого піку, потім після зменшення знову зростає вже необмежено.

Унаслідок викладених особливостей ***логарифмічно-нормальний закон використовується для опису***:

1) розподілу випадкових значень часу відновлення чи перебування в ремонті машин і комплексів,
2) ступеня спрацювання, коли приріст спрацювання пропорційний миттєвому значенню спрацювання (тобто відбувається з прискоренням у часі),
3) розподілу розмірів шматків породи при її дробленні,
4) часу безвідмовної роботи електронних систем керування машинами.

Спільною рисою всіх цих випадків є обов’язкова поява багатьох подій для отримання певного результату. Наприклад, відновлення машини відбудеться в разі наявності запасних деталей, відповідних фахівців, інструменту, обладнання, грошей тощо.

3.5.3 Гамма-розподіл випадкових величин

Гамма-розподіл є основним розподілом математичної статистики для випадкових величин, обмежених з одного боку (*0 ≤ x <1*). Щільність ймовірності гамма-розподілу має вигляд:

$$f(x) = \frac{\lambda^{\eta}}{\Gamma(\eta)} x^{\eta-1} e^{-\lambda x} \qquad \text{при } x \geq 0,\ \lambda > 0,\ \eta > 0; \qquad (3.38)$$

$$f(x) = 0 \qquad \text{при } x < 0,$$

де η **–** параметр форми розподілу;

λ – параметр масштабу, що є постійною інтенсивністю відмов, до якої з часом прийде досліджувана система;

$\Gamma(\eta)$ – гамма-функція, яка являє собою інтеграл, що виражає факторіал якого завгодно позитивного числа

$$\Gamma(\eta) = \int_0^{\infty} x^{\eta-1}\, e^{-x} dx. \qquad (3.39)$$

Якщо η ціле, позитивне число, то $\Gamma(\eta) = (\eta - 1)!$. Значення цієї функції для будь-якого аргументу можна визначити в програмі Excel чи в довідниках з математики.

Параметр форми впливає таким чином:

- якщо $\eta \leq 1$, щільність розподілу є крива спадної функції;
- якщо $\eta > 1$, щільність розподілу – одновершинна крива з максимумом у точці з координатою (рис. 3.18)

$$x = \frac{\eta - 1}{\lambda}.$$

Інтегральну функцію гамма-розподілу визначають за формулою:

$$F(x) = \frac{\lambda^{\eta}}{\Gamma(\eta)} \int_0^{\infty} x^{\eta-1}\, e^{-\lambda x} dx \qquad \text{при } x \geq 0,\ \lambda > 0,\ \eta > 0; \qquad (3.40)$$

$$F(x) = 0 \qquad \text{при } x < 0.$$

Математичне сподівання і дисперсію можна знайти за формулами:

$$m_x = \frac{\eta}{\lambda}; \qquad D_x = \frac{\eta}{\lambda^2}.$$

Скісність і ексцес визначають з виразів:

$$S_k = \frac{\eta}{\sqrt{\lambda}}; \qquad E_x = \frac{6}{\eta}.$$

Функції розподілу, імовірності безвідмовної роботи та інтенсивності відмов при різних параметрах гамма-розподілу також наведені на рис. 3.18.

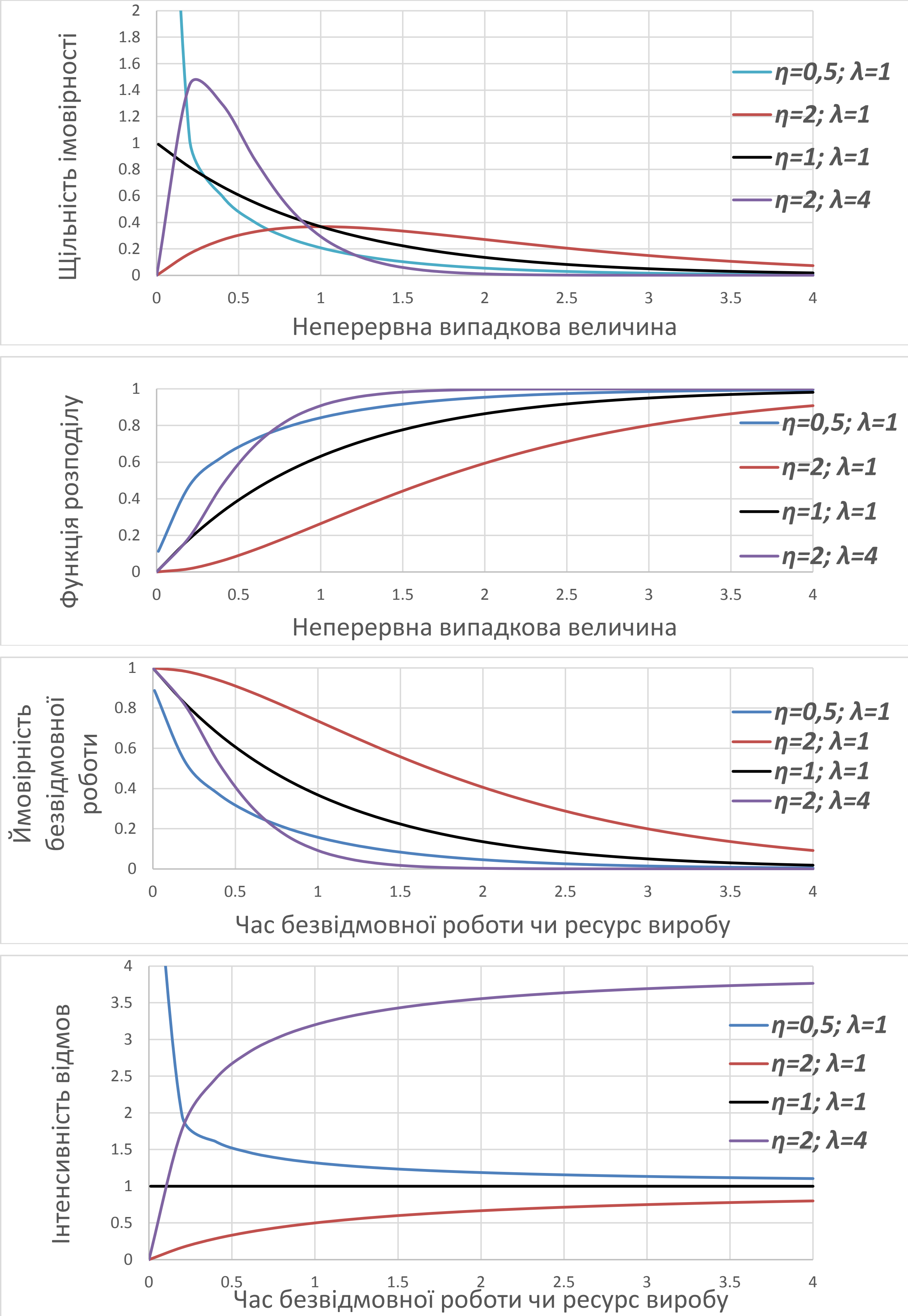


Рис. 3.18. Функції гамма-розподілу при різних значеннях параметрів

У разі застосування розглядуваного закону в надійності випадковою величиною є час безвідмовної роботи чи ресурс виробу. При цьому ***гамма-розподіл описує час, необхідний для появи рівно η незалежних подій, якщо події відбуваються з постійною інтенсивністю λ.***

При різних значеннях параметрів η і λ гамма-розподіл набуває найрізноманітніших форм.

- При $\eta < 1$ інтенсивність відмов монотонно спадає, що відповідає ситуації, при якій відбувається швидкий вихід з ладу ненадійних елементів машин (наприклад, на початку експлуатації).
- При $\eta > 1$ інтенсивність відмов об'єкта як системи зростає, що характерно для поступових спрацювання і старіння її елементів. При цьому, як видно з графіків щільності ймовірності, з ростом параметра λ зменшується мода розподілу та її крива притискається до осі ординат, збільшуючись уздовж неї.
- При $\eta > 10$ гамма-розподіл мало відрізняється від нормального розподілу і при $\eta \to \infty$ практично з ним збігається. Ця властивість гамма-розподілу часто дозволяє його апроксимувати нормальним розподілом, для якого легко знайти таблиці функції розподілу.
- Якщо параметр η обмежений цілими позитивними числами, гамма-розподіл називається розподілом Ерланга. Цей розподіл, крім опису надійності складних систем, широко використовується в теорії масового обслуговування.
- Якщо $\eta = 1$, гамма-розподіл перетворюється в експоненціальний, який буде розглянуто окремо.
- Якщо закон не є експоненціальним, функція інтенсивності відмов з часом збільшується чи зменшується з асимптотичним наближенням до своєї межі, що являє собою параметр розподілу λ.

Гамма-розподіл служить для опису:

1) відмов об’єктів унаслідок спрацювання деталей при нестабільних умовах експлуатації чи навантаження;
2) відмов елементів систем унаслідок накопичення пошкоджень, які можна порахувати (наприклад, кількість порваних дротинок на одиницю довжини каната підйомної машини);
3) розподілу часу безвідмовної роботи системи з резервними елементами;
4) розподілу часу відновлення машин з блочним компонуванням;
5) розподілу часу між моментами поповнення запасних частин і матеріалів.

3.5.4 Розподіл Вейбулла

Розподіл Вейбулла є найбільш загальним розподілом часу безвідмовної роботи при найрізноманітніших функціях інтенсивності відмов. Він використовується виключно в надійності, тому випадковою величиною є час безвідмовної роботи $\boldsymbol{t}$ чи ресурс.

Щільність ймовірності має формулу

$$\boldsymbol{f(t) = \frac{b}{a}\left(\frac{t}{a}\right)^{b-1} e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^{b}}} \qquad \text{при } \boldsymbol{t \geq 0,\ a > 0,\ b > 0;} \qquad (3.41)$$

$$\boldsymbol{f\,(t) = 0} \qquad \text{при } \boldsymbol{t < 0},$$

де $\boldsymbol{a}$ – параметр масштабу, має розмірність часу;

$\boldsymbol{b}$ – параметр форми.

Функція розподілу

$$\boldsymbol{F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^{b}}.} \qquad (3.42)$$

Функція ймовірності безвідмовної роботи з (3.27)

$$\boldsymbol{P(t) = e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^{b}}.} \qquad (3.43)$$

Математичне сподівання і дисперсія відповідно визначаються так:

$$\boldsymbol{m_t = ak_b;}$$

$$\boldsymbol{D_t = a^2 C_b^2,}$$

де $\boldsymbol{K_b} = \Gamma\left(\boldsymbol{1} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{b}}\right)$;

$\boldsymbol{C_b^2} = \Gamma\left(\boldsymbol{1} + \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{b}}\right) - \boldsymbol{K_b^2}$.

Розподілу Вейбулла відповідає така функція інтенсивності відмов:

$$\boldsymbol{\lambda(t) = \frac{b}{a}\left(\frac{t}{a}\right)^{b-1}.} \qquad (3.44)$$

Щільність розподілу Вейбулла й інтенсивності відмов при ньому набувають найрізноманітніших форм (рис. 3.19):

- при $\boldsymbol{b} < 1$ розподіл Вейбулла має вигляд кривої спадаючої функції і протягом часу інтенсивність відмов зменшується;
- при $\boldsymbol{b = 1}$ інтенсивність відмов постійна і розподіл Вейбулла перетворюється в експоненціальний;
- при $\boldsymbol{b > 1}$ розподіл Вейбулла є одновершинним й інтенсивність відмов зростає необмежено;

- при $\boldsymbol{b} = \mathbf{2}$ інтенсивність відмов є лінійно зростаючою функцією часу $\boldsymbol{t}$. (Цей окремий випадок розподілу Вейбулла досліджував інший учений, тому він носить назву розподілу Релея.)

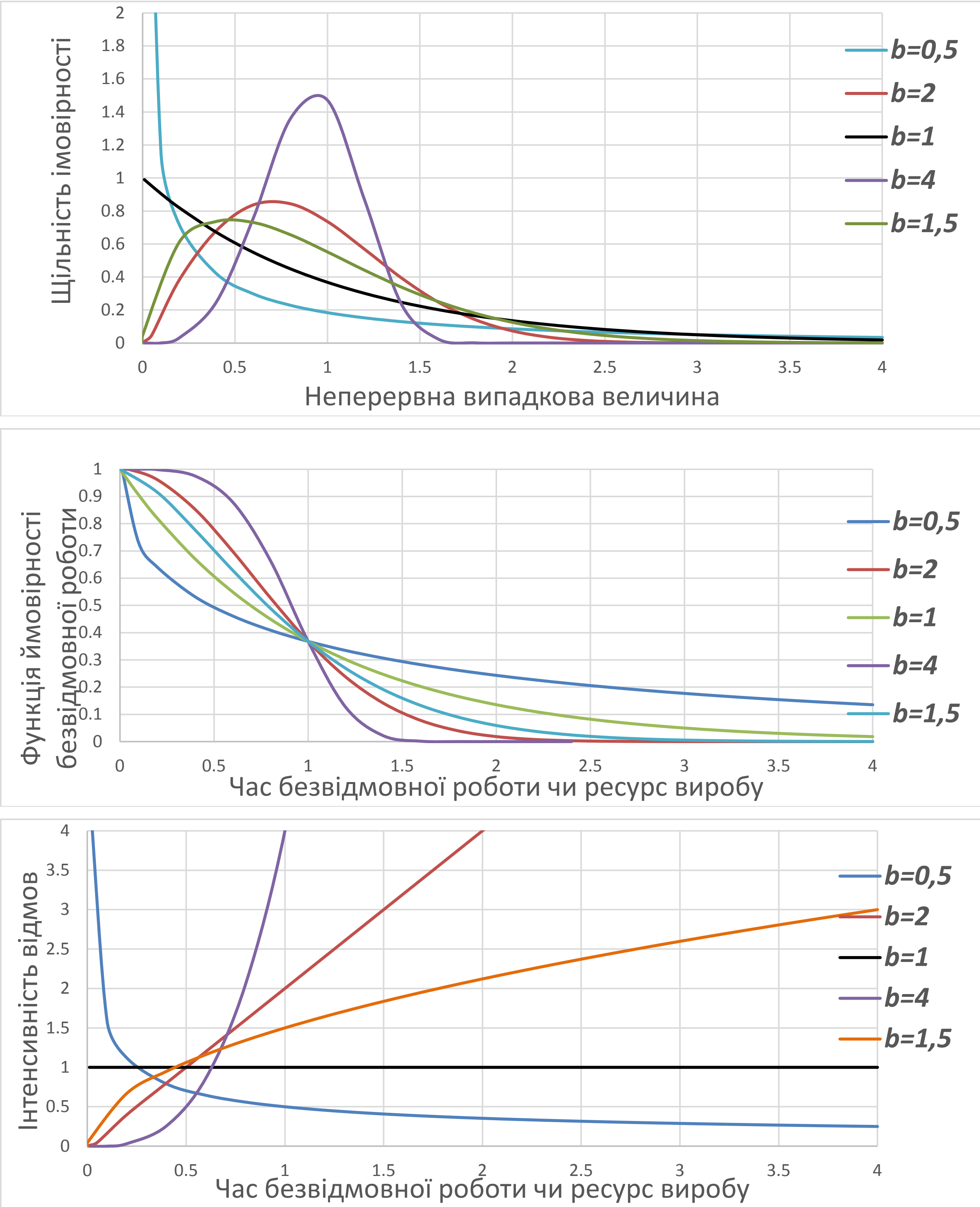


Рис. 3.19. Статистичні функції закону розподілу Вейбулла при параметрі масштабу $\boldsymbol{a} = \mathbf{1}$ і різних значення параметра форми $\boldsymbol{b}$

Розподіл Вейбулла використовується для опису:

1) розсіювання ресурсів деталей машин, що втрачають працездатність унаслідок накопичення їх матеріалом утоми;
2) відмов важливіших складових машин – підшипників кочення;
3) часу роботи до граничного стану циклічно навантажених машин і тих, що працюють у змінних умовах експлуатації (дробарки, грохоти, гірничі та вібраційні машини);
4) ресурсів вакуумної, електронної та іншої техніки.

3.5.5 Експоненціальний розподіл

Як було показано вище, експоненціальний розподіл є окремим випадком гамма-розподілу при $\boldsymbol{\eta = 1}$ та окремим випадком розподілу Вейбулла при $\boldsymbol{b = 1}$, тобто ***експоненціальне розподілення описує час, необхідний для появи рівно однієї незалежної події, якщо події відбуваються з постійною інтенсивністю*** $\boldsymbol{\lambda}$.

Або: ***експоненціальне розподілення описує випадковий час між двома сусідніми відмовами при найпростішому потоці відмов.*** Закон має щільність розподілу:

$$\boldsymbol{f(t) = \lambda e^{-\lambda t}} \qquad \text{при } t \geq 0,\ \lambda > 0; \qquad (3.45)$$

$$\boldsymbol{f(t) = 0} \qquad \text{при } t < 0.$$

Функція розподілу має вигляд:

$$\boldsymbol{F(t) = 1 - e^{-\lambda t}}. \qquad (3.46)$$

Функція ймовірності безвідмовної роботи протягом $\boldsymbol{t}$ має формулу:

$$\boldsymbol{P(t) = e^{-\lambda t}}. \qquad (3.47)$$

Для випадкової величини $\boldsymbol{t}$ її математичне очікування становить:

$$\boldsymbol{m_t = \frac{1}{\lambda}}.$$

Дисперсію визначають за формулою:

$$\boldsymbol{D_t = \frac{1}{\lambda^2}}, \qquad \text{тобто} \quad \boldsymbol{\sigma_t = m_t,\ \nu_x = 1}.$$

Функція інтенсивність відмов є постійною величиною, що дорівнює параметру розподілу: $\boldsymbol{\lambda(t) = \lambda}$ (рис. 3.20).

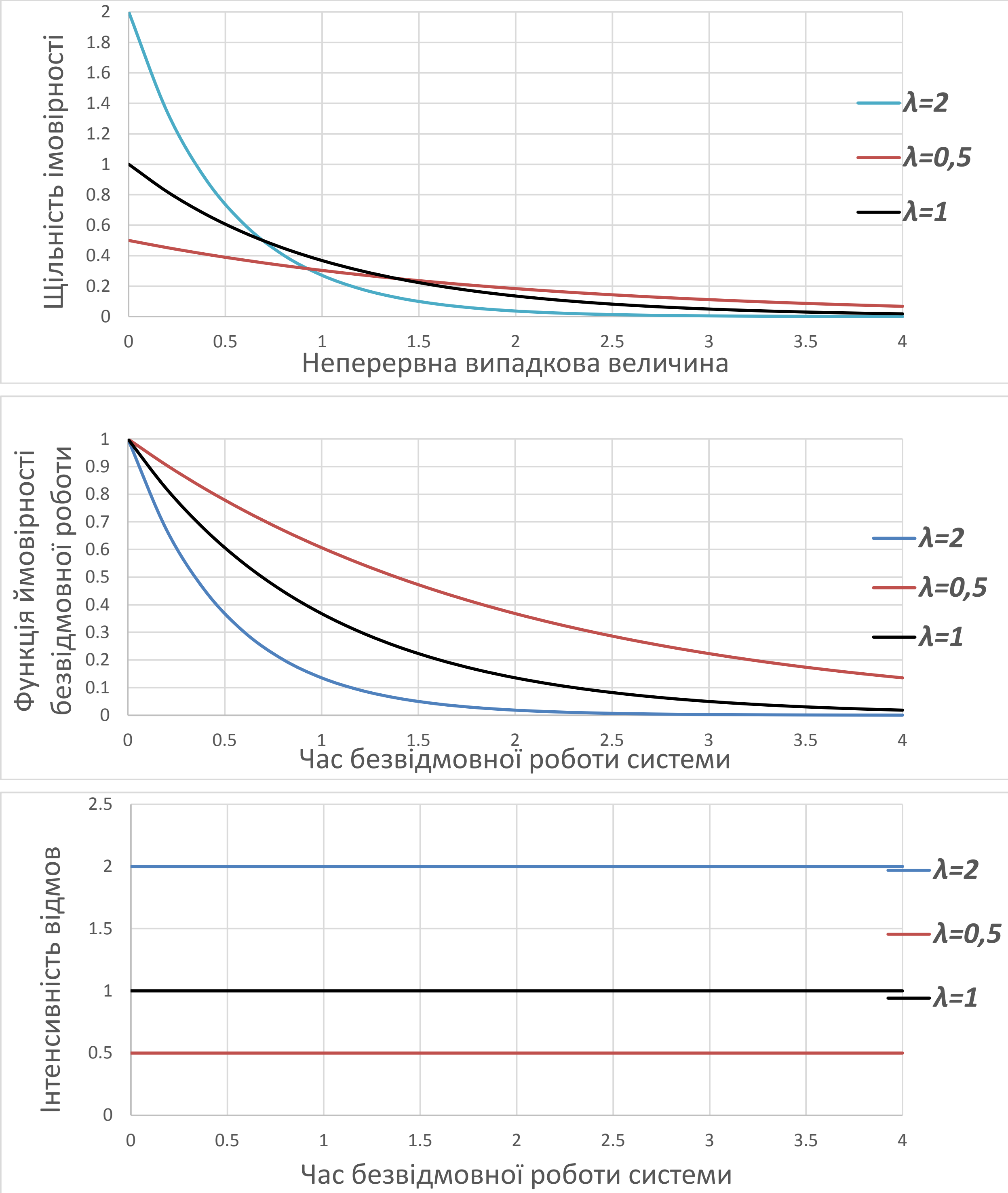


Рис. 3.20. Статистичні функції експоненціального закону розподілу при різних значення його параметра

Експоненціальний розподіл використовується для опису:

1) раптових відмов елементів машин виходячи з того, що кожна відмова є наслідком випадкового несприятливого поєднання зовнішніх і внутрішніх факторів і може не залежати від стану елемента (наприклад, заклинювання конуса конусної інерційної дробарки через

попадання в неї негабариту, зламування нових лопатей змішувача через потрапляння в нього стороннього тіла тощо);

2) часу безвідмовної роботи складних систем, що пройшли період припрацювання та їм ще далеко до настання граничного стану, тобто в період основної експлуатації (порівняйте рис. 3.10 і 3.20);
3) безвідмовності об'єктів, елементи яких відновлюються в процесі функціонування;
4) часу безвідмовної роботи системи з великим числом послідовно з'єднаних елементів, якщо кожен з них окремо не робить великого впливу на ймовірність відмови системи, навіть якщо розподіл часу безвідмовної роботи окремих компонентів не є експоненціальним;
5) безвідмовності об'єктів, що мають *простіший* потік відмов.

Простота визначення параметрів експоненціального розподілу є основною причиною його широкого використання, у тому числі й помилкового. Можна довести, якщо пристрій має експоненціальний розподіл часу роботи до відмови, то попереднє використання пристрою ніяк не впливає на його подальший розподіл часу безвідмовної роботи. Отже, якщо пристрій ще не відмовив до моменту ***t***, то розподіл часу його безвідмовної роботи з цього моменту буде таким самим, якби замість нього розпочали використовувати зовсім новий пристрій. Наведена ситуація може мати місце тільки в зазначених вище 4-х випадках. Тому використовувати експоненціальний розподіл для моделювання довговічності, особливо ресурсів деталей, неприпустимо.

* * *

Дослідні дані зазвичай можуть бути однаково гарно описані за допомогою декількох з наведених законів розподілу. Тому важливо, щоб обрання розподілу часу безвідмовної роботи чи ресурсу ґрунтувалося на відповідності фізичних механізмів відмов обраній математичній моделі, особливо коли результати будуть використовуватися за межами області отриманих даних.

3.6 Питання та задачі для самоконтролю

1. На машинобудівному підприємстві використовують декілька токарних верстатів, для яких на місяць у середньому треба 5 різців певного типу. Якого потоку відмов різців слід чекати при визначенні їх кількості для замовлення на наступний квартал чи місяць?
2. За яким законом слід чекати розподіл часу безвідмовної роботи токарних верстатів від впливу потоку відмов різців, що має місце в першій задачі?
3. Нормативний строк служби електродвигунів вугільних комбайнів становить 12 місяців. На видобувній ділянці працює 2 комбайни, що мають

по одному двигуну. Якого потоку відмов електродвигунів слід чекати впродовж півріччя на видобувній ділянці? Чи можна в даному разі користуватися законом Пуассона для замовлення двигунів на наступне півріччя?

4. Чи можна в ситуації з електродвигунами попередньої завдачі користуватися законом Пуассона для замовлення двигунів на наступний рік, якщо замовлення роблять для всієї шахти, де використовується 10 комбайнів?

5. Деякі деталі втрачають працездатність унаслідок спрацювання. Дослідами встановлено, що їх середній ресурс становить 1000 годин, а стандартне відхилення ресурсів – 200 годин. За яким законом і з якими параметрами слід чекати розподілу ресурсів деталей?

6. За яким законом і з якими параметрами слід чекати розподілу ресурсів деталей за умовою задачі 5, якщо стандартне відхилення ресурсів удвічі більше – 400 годин?

7. Визначити ймовірність того, що ресурс деталі за умовами задачі 5 становитиме не менше 800 годин.

8. Визначити ймовірність того, що ресурс деталі за умовами задачі 6 становитиме не менше 800 годин.

9. Проаналізуйте в порівнянні результати розрахунків за завдачами 7 та 8. Визначте, на скільки відсотків буде завищено результат при застосуванні нормального розподілу для нестабільних умов експлуатації при даних значеннях параметрів.

4 ПОКАЗНИКИ НАДІЙНОСТІ

4.1 Загальні відомості та визначення

Показник надійності – величина, що характеризує одну з властивостей (одиничний показник) або кілька властивостей надійності (комплексний показник).

Строк збереженості – календарна тривалість зберігання і (або) транспортування об'єкта в заданих умовах, протягом і після яких зберігаються справність, а також значення показників безвідмовності, довговічності та ремонтопридатності в межах, встановлених нормативно-технічною документацією на даний об'єкт.

Оперативний час відновлення – витрати часу кожного виконавця окремо на виконання операцій з відновлення працездатності об'єкта, що визначаються його конструкцією і технічним станом.

Оперативна тривалість відновлення – час проведення операцій з відновлення працездатності об'єкта, який визначається його конструкцією, технічним станом та пристосованістю до одночасного виконання робіт декількома виконавцями.

Оперативним часом вимірюються трудові витрати виконавців ремонтних робіт, а оперативною тривалістю – період знаходження об'єкта в процесі відновлювальних операцій.

Оперативна трудомісткість відновлення – сума витрат часу всіх виконавців, які брали участь у відновленні працездатності об'єкта.

Оперативна вартість відновлення – вартість виконання операцій відновлення працездатності об'єкта, що визначається його конструкцією, станом і кваліфікацією виконавців.

4.2 Показники безвідмовності

1. ***Середній наробіток до відмови*** – математичне сподівання наробітку об'єкта до першої відмови. Використовується для невідновлювальних об'єктів.

Якщо для об'єкта відомий закон розподілу часу безвідмовної роботи $\boldsymbol{f(t)}$, то середній наробіток до відмови $\boldsymbol{T_1}$ можна визначити за формулою математичного сподівання для безперервної функції (3.9) таким чином:

$$\boldsymbol{T_1 = \int_0^\infty tf(t)\, d(t)}, \tag{4.1}$$

де $\boldsymbol{f(t)}$ – щільність розподілу часу безвідмовної роботи.

Якщо цей показник визначають за наслідками спостережень або випробувань упродовж деякого періоду і при цьому кожен з $\boldsymbol{N}$ однотипних, невідновлюваних об'єктів з номером $\boldsymbol{i}$ мав наробіток до відмови $\boldsymbol{t_i}$, то його визначають як середнє арифметичне:

$$\boldsymbol{\widehat{T}_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i}. \tag{4.2}$$

2. ***Середній наробіток на відмову*** $(\boldsymbol{T_o})$ **–** відношення наробітку відновлюваного об'єкта до математичного сподівання числа його відмов протягом цього наробітку (або середній час роботи об'єкта між двома послідовними його відмовами).

Якщо $\boldsymbol{T_o}$ визначається за результатами роботи або випробувань $\boldsymbol{N}$ однотипних об'єктів, кожен з яких мав сумарний наробіток $\boldsymbol{t_i}$ та $\boldsymbol{n_i}$ відмов, то

$$\boldsymbol{\widehat{T}_o = \frac{\sum_{i=1}^{N} t_i}{\sum_{i=1}^{N} n_i}}. \tag{4.3}$$

3. ***Імовірність безвідмовної роботи*** **–** імовірність того, що в межах заданого наробітку відмова об'єкта не виникне.

Цей показник нормують для об'єктів, відмова яких може викликати небезпечну ситуацію для життя або здоров'я людей. Значення показників обирають відповідно діючим нормативам на даний об'єкт. Для інших об'єктів цей показник може використовуватися як інформаційний чи допоміжний. Ймовірність безвідмовної роботи, що відповідає заданому наробітку, визначають з використанням функції ймовірності безвідмовної роботи ***P(t))*** (3.26), яка є протилежною відповідній функції розподілу часу безвідмовної роботи ***F(t)***:

$$\boldsymbol{P(t) = 1 - F(t)}. \tag{4.4}$$

Для аналізу частоти відмов окремих елементів системи використовують ***коефіцієнт відмов***, що є відношенням числа $\boldsymbol{n_i}$ відмов $\boldsymbol{i}$-го елемента до загальної кількості відмов системи $\boldsymbol{n}$ за той самий наробіток:

$$\boldsymbol{K_{oi} = \frac{n_i}{n}}.$$

Оскільки $\sum \boldsymbol{n_i} = \boldsymbol{n}$, то для системи в цілому $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{N} K_{oi} = 1}$. Цей коефіцієнт, як і ймовірність, іноді подають у відсотках.

4.3 Показники довговічності

1. ***Гамма-процентний ресурс ($T_{p\gamma}$)*** – наробіток, протягом якого об'єкт не досягне граничного стану із заданою ймовірністю гамма, вираженою у відсотках.

Значення цього ресурсу можна обчислити за допомогою функції ймовірності забезпечення ресурсу ***P(t)*** (так званої «кривої спаду», рис. 4.1), яка з математичної точки зору аналогічна функції ймовірності безвідмовної роботи. Для цього треба математично вирішувати обернену задачу – знайти таке значення ресурсу, якому відповідає потрібна ймовірність його забезпечення. Графічно це виглядає простіше. Наприклад, заданій ймовірності забезпечення ресурсу деякого виробу ***γ=0,8*** відповідає значення гамма-процентного ресурсу ***$T_{p\gamma}$=60 годин.*** Це, до речі, означає, що 80 % таких виробів відпрацюють 60 годин до граничного стану, з настанням якого ці вироби треба бути відправляти на капітальний ремонт чи утилізацію.

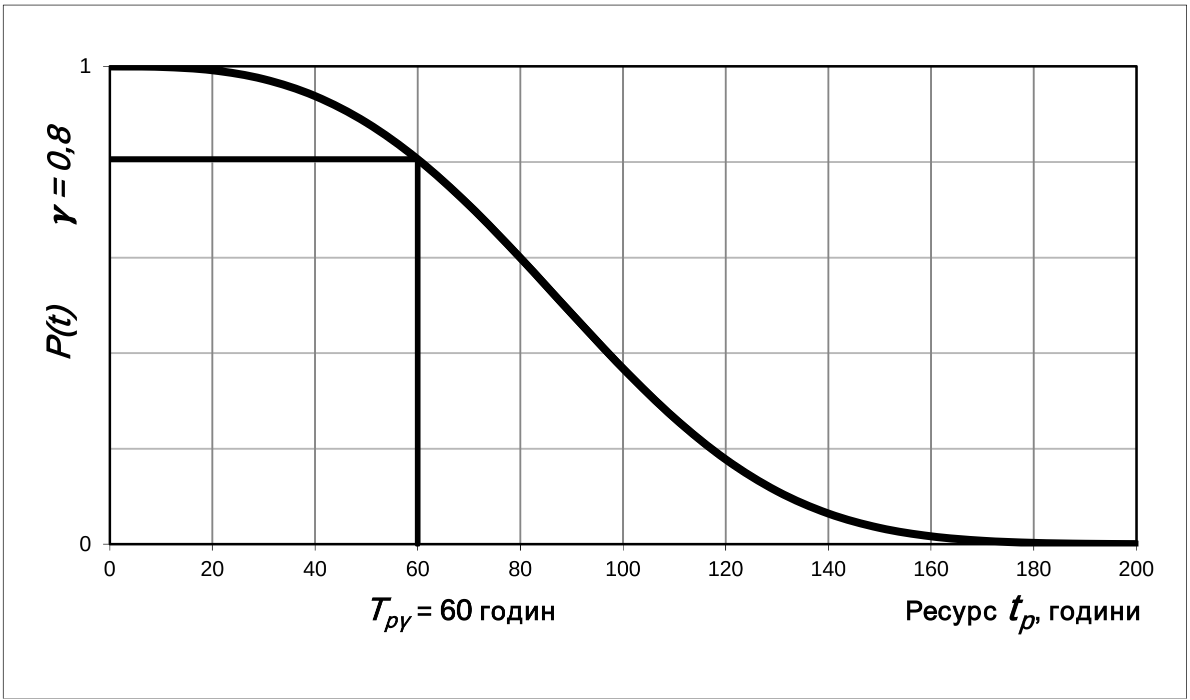


Рис. 4.1. Функція ймовірності забезпечення ресурсу

Маючи такий графік чи функцію для деякого виробу можна вирішити і пряму задачу. Наприклад, ймовірність того, що цей виріб пропрацює до граничного стану 80 годин складає 0,6, чи 60 %.

При відомій функції щільності розподілу ресурсів $f(t_p)$ деякого виробу машинобудування його гамма-процентний ресурс математично дорівнює нижній межі інтегрування зазначеної функції в разі, якщо її використовують для визначення ймовірності того, що ресурс цього виробу потрапить в інтервал від $T_{p\gamma}$ до нескінченності. З формули (3.5), що дозволяє визначити ймовірність потрапляння випадкової величини на ділянку, шукана ймовірність $P(T_{\text{р}\gamma})$, вона ж γ, складе:

$$P(T_{\text{р}\gamma}) = \gamma = \int_{\text{Т}_{\text{р}\gamma}}^{\infty} f(t_p)\ dt_p\ , \tag{4.5}$$

де t_p – ресурс деякого виробу даного виду,

$f(t_p)$ – щільність розподілу ресурсів,

γ – ймовірність забезпечення ресурсу (гамма-процентного).

Значення гамма-процентного ресурсу $(T_{\text{р}\gamma})$ виробу, як вже зазначалося, отримують у результаті розв'язання оберненої задачі (рис. 4.2), тобто знаходять таке значення ресурсу, для якого інтеграл (4.5), що дорівнює площі, розташованій справа від шуканого значення ресурсу $T_{\text{р}\gamma}$ та обмеженою кривою розподілу ресурсів $f(t_p)$ і віссю абсцис.

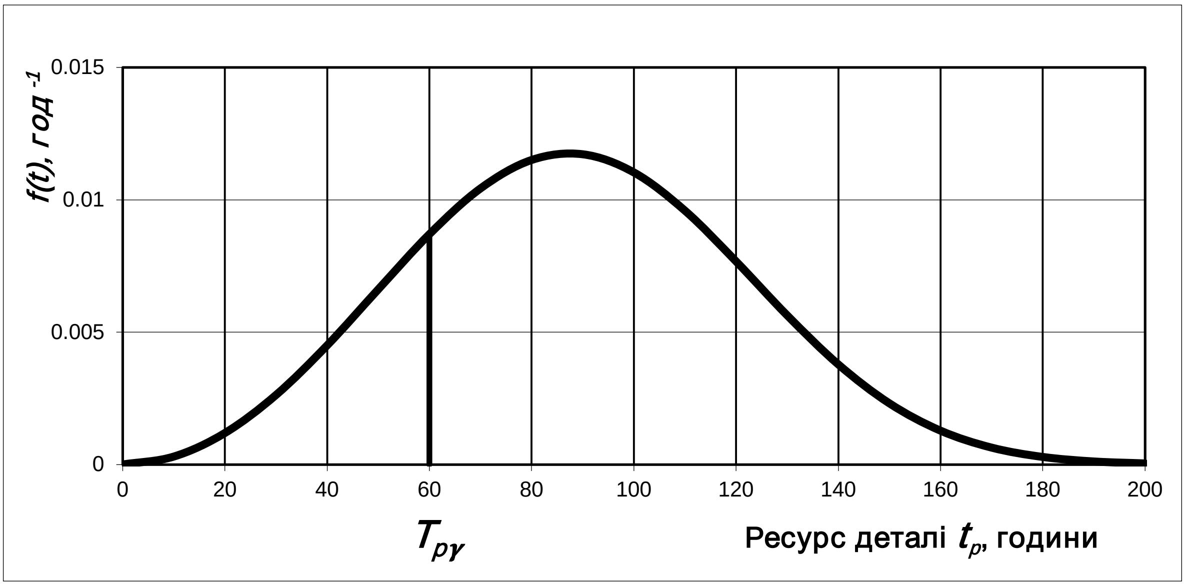


Рис. 4.2. Функція щільності ймовірності розподілу ресурсів виробу

2. ***Середній ресурс до капітального ремонту або між капітальними ремонтами (T_p)*** – математичне сподівання ресурсу до капітального ремонту або між капітальними ремонтами відповідно.

На підставі визначення з використанням формул математичної статистики для математичного сподівання (3.9) можна записати вираз для визначення середнього ресурсу:

$$T_p = \int_0^{\infty} t_p f(t_p) d(t_p). \tag{4.6}$$

У разі, якщо ресурс виробу розподілений за нормальним законом, який є симетричним навколо математичного сподівання, середній ресурс цього виробу буде відповідати гамма-процентному ресурсу при ймовірності його забезпечення $\boldsymbol{\gamma}$ = *50 %*, тобто $\boldsymbol{T_p} = \boldsymbol{T_{p,(\gamma=50\%)}}$.

У разі визначення середнього ресурсу за результатами спостережень використовують відповідну формулу для математичного сподівання з математичної статистики:

$$\widehat{\boldsymbol{T}}_p = \frac{\sum_{i=1}^{N} t_{p_i}}{N}\,, \tag{4.7}$$

де $\widehat{\boldsymbol{T}}_p$ – середній статистичний ресурс виробу даного виду,

$\boldsymbol{t_{pi}}$ – ресурс $\boldsymbol{i}$-го виробу даного виду,

$\boldsymbol{N}$ – кількість однотипних виробів даного виду, що досліджені на довговічність.

Якщо, наприклад, середній ресурс футерування млинів на збагачувальних фабриках складає 5000 год і при цьому для 90 % футерування даного типу він перевищує 3500 год, то $\boldsymbol{T_{p,\,(\gamma=90\%)}}$ = 3500 год.

Для об'єктів, що працюють практично безперервно (металеві конструкції машин і комплексів, гідравлічні стояки секції кріплення гірничих виробок, бункери, відстійники тощо), використовуються аналогічні показники в календарному обчисленні часу.

3. ***Гамма-процентний термін служби*** $\boldsymbol{(T_{сл,\gamma})}$ – календарна тривалість експлуатації, протягом якої об'єкт не досягне граничного стану з імовірністю, вираженою у відсотках.

4. ***Середній термін служби до капітального ремонту або між капітальними ремонтами*** $\boldsymbol{(T_{сл})}$ – математичне сподівання терміну служби в календарному обчисленні часу.

Ці показники визначаються за формулами, аналогічними (4.5) – (4.7).

4.4 Показники ремонтопридатності

Показників ремонтопридатності значна кількість. Але багато їх є подібними один одному за методом визначення чи відрізняються тільки одиницями вимірювання. Тому вони згруповані у чотири групи. В дужках подані інші назви таких показників.

1. ***Середня оперативна тривалість (трудомісткість, вартість) ремонту (технічного обслуговування) даного виду*** – математичне сподівання оперативної тривалості ремонту (обслуговування) даного виду за певний період експлуатації або наробіток.

Зазвичай під певним періодом експлуатації розуміють ремонтний цикл, який є найменшим повторюваним періодом експлуатації об'єкта, протягом якого здійснюють у певній послідовності всі встановлені нормативно-технічною документацією види технічного обслуговування і ремонту.

$$\widehat{T}_{вj} = \frac{1}{n_{вj}} \sum_{i=1}^{nвj} t_{вij}, \qquad (4.8)$$

де j – номер виду ремонту;

i – номер ремонту j-го виду;

$n_{вj}$ – число ремонтів j-го виду;

$t_{вij}$ – оперативна тривалість i-го ремонту j-го виду.

Середня оперативна трудомісткість ремонту визначається як сума середніх значень оперативних часів роботи всіх виконавців за всіма видами операцій, необхідних при виконанні ремонту даного виду, вимірюється в годинах.

2. ***Питома сумарна тривалість (трудомісткість, вартість) ремонтів (технічних обслуговувань)*** – відношення суми математичних очікувань оперативних тривалостей (трудомісткостей, вартостей) усіх видів ремонтів (технічних обслуговувань) до заданого наробітку об'єкта.

Якщо середня оперативна тривалість ремонту за формулою (4.8) підраховувалася на базі ремонтного циклу, то заданим наробітком при визначенні питомої оперативної тривалості ремонту є середній ресурс до першого капітального ремонту, тобто

$$\widehat{T}_{ву} = \frac{1}{T_p} \sum_{j=1}^{nв} n_{вj} \widehat{T}_{вj}, \qquad (4.9)$$

де $\widehat{T}_{ву}$ – питома сумарна оперативна тривалість відновлення, вимірюється в годинах ремонту на годину роботи, тобто по суті є безрозмірною;

T_p – середній ресурс,

$n_в$ – кількість видів ремонтів.

3. ***Середня сумарна тривалість (трудомісткість, вартість) ремонтів (технічних обслуговувань)*** – сума оперативних тривалостей (трудомісткостей, вартостей) ремонтів (технічних обслуговувань) усіх видів за певний період експлуатації або наробіток об'єкта.

Ці показники визначають за допомогою середніх оперативних показників ремонтопридатності (4.8):

$$\widehat{T}_{в} = \sum_{j=1}^{nв} n_{вj} \widehat{T}_{вj}, \qquad (4.10)$$

де $\widehat{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{в}}$– середня сумарна оперативна тривалість ремонтів.

Порівняння формул (4.9) і (4.10) дозволяє зробити висновок, що

$$\widehat{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{ву}} = \frac{\widehat{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{в}}}{\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{р}}}.$$

4. ***Об'єднана питома тривалість (трудомісткість, вартість) ремонтів і технічних обслуговувань*** – сума питомих тривалостей (трудомісткостей, вартостей) технічних обслуговувань і ремонтів усіх видів за певний наробіток об'єкта:

$$\widehat{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{об}} = \widehat{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{ву}} + \widehat{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{ТОу}}\,, \qquad (4.11)$$

де $\widehat{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{об}}$ – об'єднана питома тривалість ремонтів і технічних обслуговувань;

$\widehat{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{ТОу}}$ – питома тривалість технічних обслуговувань, що визначена аналогічно показнику $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{ву}}$, формула (4.9).

Усі показники ремонтопридатності оцінюються витратами праці, часу і коштів, необхідними для виконання всіх операцій з ремонту та підготовчих і заключних робіт у конкретних умовах експлуатації і ремонту об’єкта.

4.5 Показники збереженості

Показниками збереженості оцінюють здатність об'єкта протистояти негативному впливу умов зберігання і (або) транспортування на показники безвідмовності, довговічності та ремонтопридатності, які були в об'єкта до початку його зберігання і (або) транспортування.

Для виробів машинобудування використовують три показники збереженості.

Гамма-процентний термін збереженості $(\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{зб\gamma}})$ – календарна тривалість зберігання і (або) транспортування, протягом і після якої показники безвідмовності, довговічності та ремонтопридатності об'єкта не вийдуть за встановлені межі з ймовірністю, вираженою у відсотках.

Гамма-процентний термін зберігання визначається шляхом знаходження нижньої межі інтегрування функції щільності розподілу терміну зберігання аналогічно гамма-процентному ресурсу:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{зб\gamma}}) = \int_{\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{зб\gamma}}}^{\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{зб}})\boldsymbol{d}(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{зб}}), \qquad (4.12)$$

де $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{зб\gamma}}) = \boldsymbol{\gamma}$ – ймовірність забезпечення гама-процентного терміну зберігання,

$t_{зб}$ – термін зберігання деякого виробу даного виду,

$f(t_{зб})$ – щільність розподілу терміну зберігання.

Середній термін збереженості ($T_{зб}$) – математичне сподівання терміну зберігання. Його обчислюють за формулами, аналогічними (4.6) і (4.7).

Призначений термін зберігання – календарна тривалість зберігання в заданих умовах, після закінчення якої застосування об'єкта за призначенням не допускається незалежно від його технічного стану.

Цей показник використовують для техніки і засобів, що призначені для ліквідації наслідків аварій, наприклад, вогнегасники, вибухівка, різні речовини тощо.

4.6. Комплексні показники надійності

Коефіцієнт готовності – ймовірність того, що об'єкт виявиться працездатним в довільний момент часу, крім запланованих періодів, протягом яких застосування об'єкта за призначенням не передбачається.

Коефіцієнт готовності оцінює надійність об'єкта на певному інтервалі експлуатації і є середньою величиною на даному інтервалі. Тому при нормуванні цього показника необхідно в нормативно-технічній документації зазначати інтервал експлуатації об'єкта, протягом якого слід оцінювати коефіцієнт готовності.

Статистично середнє значення коефіцієнта готовності за певний інтервал експлуатації об'єкта розраховується так:

$$\widehat{K}_г = \frac{\sum_{i=1}^{N} t_i}{\sum_{i=1}^{N} t_i + \sum_{i=1}^{N} t_{вi}}, \qquad (4.13)$$

де t_i – сумарний наробіток i-го об'єкта в заданому інтервалі експлуатації;

$t_{вi}$ – сумарна оперативна тривалість відновлення працездатності (ремонту) i-го об'єкта в тому ж інтервалі експлуатації;

N – кількість спостережуваних об'єктів.

Якщо для заданого інтервалу експлуатації встановлені значення середнього наробітку на відмову ***(T_o)*** і середньої тривалості відновлення працездатного стану після відмови $\widehat{T}_{в1}$ за формулою, що аналогічна (4.8), то коефіцієнт готовності визначають таким чином:

$$\widehat{K}_г = \frac{T_o}{T_o + \widehat{T}_{в1}}. \qquad (4.14)$$

Для капітально-ремонтованих об'єктів коефіцієнт готовності зазвичай визначають на інтервалі експлуатації до першого капітального ремонту за формулою

$$\widehat{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{г}} = \frac{\widehat{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{p}}}{\widehat{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{p}} + \widehat{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{в}}}, \qquad (4.15)$$

де $\widehat{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{p}}$ – середній статистичний ресурс до 1-го капітального ремонту (4.7);

$\widehat{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{в}}$ – середня сумарна оперативна тривалість відновлення (4.10).

Коефіцієнт технічного використання – відношення математичного сподівання наробітку об'єкта за певний період експлуатації до суми математичних очікувань наробітку, тривалості технічного обслуговування і ремонтів за той же період експлуатації.

Зазвичай коефіцієнт технічного використання визначають на базі ремонтного циклу:

$$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{тв}} = \frac{\widehat{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{p}}}{\widehat{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{p}} + \widehat{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{TO}} + \widehat{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{в}}}, \qquad (4.16)$$

де $\widehat{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{TO}}$ – середня сумарна оперативна тривалість технічного обслуговування, визначається за формулою, аналогічною (4.10).

Коефіцієнт оперативної готовності – ймовірність того, що об'єкт виявиться працездатним у довільний момент часу, крім запланованих періодів, протягом яких застосування об'єкта за призначенням не передбачається і, починаючи з цього моменту, буде працювати безвідмовно протягом заданого інтервалу часу

$$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{ог}} = \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{г}}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{0}};\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{1}}), \qquad (4.17)$$

де $\boldsymbol{t_0}$ – момент часу, з якого виникає необхідність застосування об'єкта за призначенням;

$\boldsymbol{t_1}$ – момент часу, коли застосування об'єкта за призначенням припиняється;

$\boldsymbol{P(t_o; t_1)}$ – ймовірність безвідмовної роботи об'єкта в інтервалі $\boldsymbol{(t_o; t_1)}$;

$\boldsymbol{K_г}$ – коефіцієнт готовності, визначений на базі періоду очікування роботи, що безпосередньо передує моменту $\boldsymbol{t_0}$, у календарному обчисленні часу.

При цьому під режимом очікування роботи слід розуміти не тільки той час, коли об'єкт, перебуваючи в працездатному стані, не діє, але і той час, коли механізми його працюють, однак ефект від функціонування об'єкта не використовується (наприклад, режим навчальних маневрів пожежної техніки).

4.7 Вибір критеріїв відмов і граничних станів

Основним критерієм втрати працездатності виробів машинобудування є максимально допустиме значення втрати ефективності функціонування даного об'єкта. Залежно від призначення цього об'єкта ***критеріями відмов і граничних станів*** можуть служити ***економічні, технічні*** чи ***параметричні*** характеристики ефективності функціонування об'єкта окремо кожний, а також їх поєднання.

Економічними критеріями відмов і граничних станів можуть служити ***прямі витрати з відновлення працездатності***, виражені через їх тривалість, трудомісткість або вартість, а також через ***непрямі втрати продукції*** від простоїв і зростання ймовірності браку.

Технічними критеріями відмов і граничних станів є неприпустимі зміни геометричних форм елементів об'єкта (граничне спрацювання пар тертя, граничні значення деформацій, втомних тріщин, вібрації, шуму), які можна виміряти.

Параметричними критеріями відмов і граничних станів можуть служити виходи параметрів якості функціонування за встановлені в нормативно-технічній документації межі. (Наприклад, зниження об'ємного ККД гідродвигунів і гідронасосів нижче допустимого рівня, зниження точності металообробного верстата, зниження точності дозування компонентів шихти або магнітної сепарації).

При виборі критеріїв відмов і граничних станів необхідно керуватися таким:

– критерій повинен прямо або побічно характеризувати зменшення ефективності функціонування об'єкта нижче допустимого рівня;

– критерій повинен бути зручним для використання його при розрахунку надійності об'єкта;

– критерій повинен бути контрольованим діагностичними приладами, органами почуттів або іншими засобами контролю.

4.8 Задачі та питання для самоконтролю

1. Чим відрізняється одиничний показник надійності від комплексного?

2. Чим відрізняються та що спільного в таких показниках надійності: «середній наробіток до відмови» і «середній наробіток на відмову»?

3. Чим відрізняються, вимірюються та що спільного в таких показниках надійності: «середній ресурс до капітального ремонту» і «середній термін служби до капітального ремонту»?

4. Чим відрізняються, вимірюються та що спільного в таких показниках надійності: «гамма-процентний ресурс» і «гамма-процентний термін збереженості»?

5. Чим відрізняються, вимірюються та що спільного в таких показниках надійності: «середній термін служби до капітального ремонту» і «середній термін збереженості»?

6. Чим відрізняються та що спільного в таких показниках надійності: «середня оперативна тривалість ремонту даного виду» і «середня сумарна тривалість технічних обслуговувань»?

7. Чим відрізняються, вимірюються та що спільного в таких показниках надійності: «питома сумарна тривалість ремонтів» і «об'єднана питома тривалість ремонтів і технічних обслуговувань»?

8. Чим відрізняються, вимірюються та що спільного в таких показниках надійності: «коефіцієнт готовності» та «коефіцієнт оперативної готовності»?

9. Який показник надійності для об'єкта більше: «коефіцієнт готовності» чи «коефіцієнт технічного використання»?

10. Призначте критерії граничних станів для таких об'єктів: різець, сито грохота, канат, підшипник ковзання, підшипник кочення, стріла екскаватора, двигун внутрішнього згоряння, об'ємний гідропривід, гідродомкрат, водяний насос, електродвигун, пластинчастий ланцюг.

11. Ви працюєте на підприємстві, яке виробляє деталі, що описані в задачах 5 і 6 підрозділу 3.6. Після проведення випробувань на довговічність і попередньої статистичної обробки результатів, що наведені в зазначених завданнях, вам поставлена задача: *розрахувати гамма-процентний ресурс* для призначення гарантії на кожну з цих деталей окремо. Ймовірність забезпечення ресурсу повинна складати $\gamma = 90$ %, тобто виробництво буде рентабельним у разі, якщо доля замінених за гарантією деталей не буде перевищувати 10 %.

12. Деталі мають бути вкриті зносостійким покриттям, яке повинне забезпечити їм гамма-процентний ресурс 1000 годин (γ = 90 %). Випробування дослідної партії деталей дозволили встановити: 1) середній ресурс деталей дослідної партії складає 1100 годин (критерій граничного стану деталі – спрацювання захисного шару); 2) дисперсія ресурсу окремих деталей є наслідком коливань товщини шару зносостійкого покриття і становить 40000 годин квадратних; 3) розсіювання товщини шару зносостійкого покриття формується внаслідок додавання в імовірнісному сенсі багатьох малозначних чинників, діючих в апараті для нанесення покриття; 4) конструкція цього апарату така, що дисперсія товщини шару не залежить від товщини шару. Визначити, як треба змінити товщину захисного шару й відповідно налаштування апарату для нанесення покриття, щоб виконати вимоги технічного завдання? Визначити також середній ресурс деталей з новою товщиною покриття.

5 СТРУКТУРНИЙ АНАЛІЗ НАДІЙНОСТІ МАШИН І КОМПЛЕКСІВ

Надійність роботи машин і комплексів визначається не тільки надійністю елементів, з яких складено об'єкт, але і схемою їх з'єднання між собою. Можна виділити п'ять схем взаємозв'язку елементів в об'єкті, які мають різні методи розрахунку характеристик надійності об'єкта залежно від відомих характеристик надійності його елементів: послідовна; паралельна; резервована; послідовна з акумулятором і комбінована.

5.1 Послідовна схема з'єднання елементів машин і комплексів

При послідовній взаємодії елементів відмова будь-якого з них є необхідною і достатньою умовою для відмови всієї системи. Послідовну схему графічно прийнято відображати аналогічно однойменній схемі з'єднання електричних провідників (рис. 5.1).

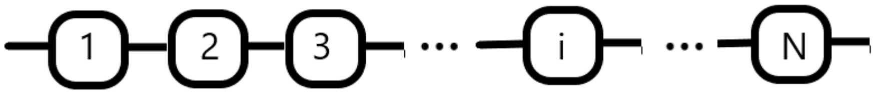


Рис. 5.1. Послідовна схема взаємодії елементів системи при аналізі її надійності: i – номер елементів, N – кількість послідовно взаємодіючих елементів

Якщо відмова кожного елемента є випадковою незалежною подією і відомі ймовірності безвідмовної роботи елементів $\boldsymbol{P_i(t)}$ протягом необхідного часу $\boldsymbol{t}$, то ймовірність безвідмовної роботи системи $\boldsymbol{P(t)}$ визначається відповідно до теореми множення ймовірностей для незалежних подій (3.10):

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t}) = \prod_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{P_i}(\boldsymbol{t}). \tag{5.1}$$

З формули (5.1) випливає, що з ростом числа послідовно взаємодіючих елементів імовірність безвідмовної роботи всього об'єкта за інших рівних умов знижується.

При послідовній взаємодії всі елементи працюють одночасно і, як видно зі схеми, результуючий потік відмов системи являє собою суперпозицію потоків відмов усіх елементів. Параметр потоку відмов системи визначається як сума параметрів потоку всіх її складових:

$$\boldsymbol{\lambda(t)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(t)}, \qquad (5.2)$$

де $\boldsymbol{\lambda_i(t)}$ – інтенсивності відмов елементів, вимірюється кількістю відмов в одиницю часу.

У цьому випадку показник надійності «середній наробіток на відмову» $\boldsymbol{T_o}$ для системи в цілому впродовж деякого часу $\boldsymbol{t'}$ складе

$$\boldsymbol{T_o=\frac{t'}{n_1+n_2+n_3+\cdots+n_N}},$$

де $\boldsymbol{n_1}$; $\boldsymbol{n_2}$; $\boldsymbol{n_i}$; $\boldsymbol{\dots n_N}$ – кількість відмов відповідного елемента системи впродовж $\boldsymbol{t'}$.

Тоді середній наробіток на відмову відповідних елементів системи $\boldsymbol{T_{oi}}$ аналогічно буде:

$$\boldsymbol{T_{o_1}=\frac{t'}{n_1};\quad T_{o2}=\frac{t'}{n_1}\ ;\quad \dots\ ;\quad T_{o_i}=\frac{t'}{n_i};\quad \dots\ ;\quad T_{o_N}=\frac{t'}{n_1}\ .}$$

Звідси кількість відмов елементів системи відповідно становитиме:

$$\boldsymbol{n_1=\frac{t'}{T_{o_1}};\quad n_2=\frac{t'}{T_{o2}}\ ;\quad \dots\ ;\quad n_{\mathrm{i}}=\frac{t'}{T_{o_{\mathrm{i}}}};\quad \dots\ ;\quad n_N=\frac{t'}{T_{o_N}}\ .}$$

Виконавши необхідні підстановки, отримаємо аналітичний вираз для середнього наробітку на відмову системи $\boldsymbol{T_o}$ залежно від середніх напрацювань на відмову всіх елементів:

$$\boldsymbol{T_o=\frac{1}{\frac{1}{T_{o_1}}+\frac{1}{T_{o_2}}+\frac{1}{T_{o_3}}+\cdots+\frac{1}{T_{o_N}}}=\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{T_{o_i}}\right)^{-1}}. \qquad (5.3)$$

Послідовна взаємодія елементів характерна для з’єднання складових одиниць і деталей у машинах. За послідовною схемою з’єднують технологічне устаткування в лініях виробничих ділянок більшості машинобудівних, хімічних, будівельних та інших виробництв, а також підприємствах гірничо-металургійного комплексу.

Слід зауважити, що ця схема в складних умовах виробництва, пов’язаних з переробкою сировини із суттєво змінними фізико-механічними властивостями, чи при видобутку корисних копалин дає задовільний результат тільки при обмеженій кількості послідовно з’єднаних машин – не більше 6 – 7 одиниць.

Для машин, що складаються з великої кількості елементів (деталей, підшипників, манжетних ущільнень тощо), кожен з яких має малу величину параметра потоку відмов, після періоду припрацювання відбувається формування результуючого потоку відмов, близького до найпростішого (дивись підрозділ 3.3). Подібна ситуація також складається з технологічними лініями машин виробничих ділянок. Тому для них випадкові значення напрацювань системи між відмовами підпорядковуються експоненціальному закону розподілу (дивись підрозділ 3.5) з параметром $\boldsymbol{\lambda = 1/T_{\text{o}}}$. Для цього закону ймовірність безвідмовної роботи об'єкта впродовж будь-якого часу функціонування технологічної лінії $\boldsymbol{t}$ можна визначити за формулою (3.47):

$$\boldsymbol{P(t) = e^{-\frac{1}{T_o}t}}. \qquad (5.4)$$

Технологічні умови використання техніки на багатьох виробництвах є дуже стислими в просторі й тому дозволяють застосовувати тільки послідовне з’єднання машин і устаткування, наприклад, прохідницькі роботи при будівництві тунелів, виробок у шахтах та в метро. Безвідмовність прохідницьких щитів з ростом їх складності знижується за рахунок збільшення кількості послідовно взаємодіючих елементів, яких не можна зменшити. Тому для забезпечення відмовостійкості зазначених об'єктів використовують навантажувальне резервування елементів, пов'язане із забезпеченням їх здатності витримувати діючі навантаження.

Виробничі машини, що працюють у таких комплексах, проєктують таким чином, що після визначення потужності їх приводів, необхідної для виконання технологічних операцій з номінальним навантаженням і продуктивністю, обирають двигуни з більшою на 30 – 50 % потужністю. Подальший розрахунок деталей приводів виконують від двигуна таким чином, щоб обраний двигун не міг їх зламати, а накопичення втоми при перевантаженнях відбувалося не швидко. В конструкцію також закладають: відповідні запаси зусиль, що повинні розвивати механізми подачі та різного роду гідродомкрати; запаси міцності стріл і опорних конструкцій; запобіжні клапани в гідроприводі та муфти граничного моменту.

5.2 Паралельна схема з’єднання елементів системи

Для підвищення надійності відділень багатьох виробництв, коли технологія передбачає велику кількість операцій з матеріалом і відповідну кількість машин (більшу за 6 – 7одиниць), використовують паралельну схему з’єднання декількох первинно однакових ліній виробничих машин (рис. 5.2). У даному разі продуктивність, що має виробляти це відділення підприємства, розподіляють у рівних частинах між однаковими паралельними лініями устаткування, обираючи для них відповідно менші за продуктивністю машини. При паралельній схемі з’єднання елементів системи ймовірність втрати частини продуктивності на виробничій ділянці дорівнює ймовірності втрати повної продуктивності при послідовній схемі.

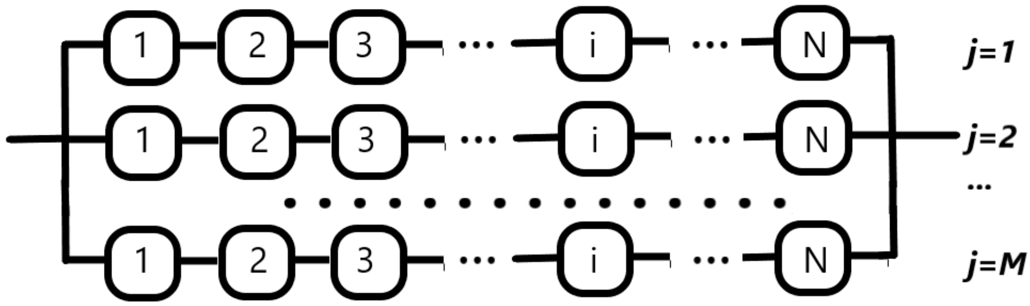


Рис. 5.2. Паралельна схема з'єднання елементів системи: j – номер паралельної лінії, M – кількість паралельних ліній

При паралельній схемі взаємодії елементів ймовірність повної відмови системи тим менше, чим більше кількість паралельних гілок устаткування в системі. Доки підприємство нове, усі паралельні лінії виробництва мають однакову ймовірність безвідмовної роботи. З часом унаслідок появи відмов і заміни їх елементів ця ймовірність і середній наробіток на відмову ліній змінюється. Тому ймовірності безвідмовної роботи ***j***-ї гілки устаткування, що визначається в загальному випадку за формулою (5.4), позначимо через ***Pj (t).*** Тоді ймовірність безвідмовної роботи системи з паралельним з'єднанням її елементів чи виробничих технологічних ліній визначимо через протилежну подію за допомогою слідства 2 теореми додавання ймовірностей та теореми їх множення:

$$\boldsymbol{P(t) = 1 - \prod_{j=1}^{M}(1 - Pj\,(t))}, \tag{5.5}$$

де ***P (t)*** – ймовірність безвідмовної роботи системи з паралельною схемою з'єднання елементів (виробничих технологічних ліній).

Середній наробіток на відмову виробничої ділянки з паралельною схемою з'єднання технологічних ліній устаткування $\boldsymbol{T}_{\text{о}}$ при відомих цих показниках для кожної лінії визначають за формулами (5.6), (5.7). У разі, коли лінії за надійністю однакові, наприклад, коли вони нові та у них однакові середні наробітки на відмову, тобто $\boldsymbol{T_{o1} = T_{o2} = \ldots = T_{oM}}$, то

$$\boldsymbol{T}_{\text{о}} = \boldsymbol{T_{o,1}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{M}\right)}. \tag{5.6}$$

У разі, коли лінії за надійністю різні, тоді

$$\boldsymbol{T}_{\text{о}} = \boldsymbol{T_{o,1} + \frac{T_{o,2}}{2} + \frac{T_{o,3}}{3} + \cdots + \frac{T_{o,N}}{M}}, \tag{5.7}$$

де ***M*** – кількість паралельних ліній устаткування.

За паралельною схемою з'єднані технологічні лінії виробничих ділянок більшості багатотоннажних виробництв, що дозволяє мінімізувати збитки від вимушених простоїв при відновленні устаткування після відмов. Зазвичай кількість паралельних ліній становить дві чи три. Більша кількість призводить до підвищення собівартості продукції за рахунок суттєвого збільшення капітальних затрат, пов'язаних із збільшенням кількості машин, обслуговуючого персоналу та виробничої площі.

5.3 Схеми зі структурним резервуванням елементів системи

Схеми з резервуванням (структурним резервуванням) використовуються для забезпечення ще більш високої надійності роботи об'єктів, ніж при паралельній схемі взаємодії елементів. Резервування технологічних ліній на виробничих ділянках дозволяє забезпечити високу ймовірність роботи з повною продуктивністю. Така потреба має місце на виробництвах, що працюють цілодобово впродовж значного періоду. Наприклад, лінії підготовки шихти до доменного виробництва чавуну, установки безперервного розливу сталі, підготовка паливної суміші до котлів теплових електростанцій, системи електропостачання важливих об'єктів тощо. Під час проєктування перелічених виробничих ділянок передбачають дві однакові технологічні лінії зі спільною продуктивністю, що задана для всієї ділянки, і додають ще одну таку саму лінію як резервну. При цій схемі для втрати 50 % продуктивності треба, щоб водночас відмовило дві лінії. У загальному вигляді схема з резервуванням наведена на рис. 5.3.

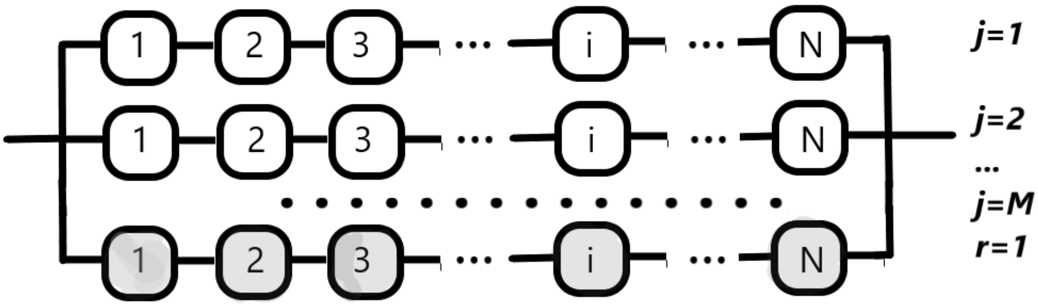


Рис. 5.3. Резервована схема з'єднання елементів системи:
j – номер паралельної технологічної лінії, M – кількість основних ліній, r – кількість резервних ліній

Відношення числа резервних елементів об'єкта $\boldsymbol{r}$ до кількості основних $\boldsymbol{M}$, виражене нескороченим дробом, називається ***кратністю резерву***, позначимо її через $\boldsymbol{h}$:

$$\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{M}}. \tag{5.8}$$

Резервування з кратністю резерву ***h = 1:1*** називається ***дублюванням***.

При кратності резерву $h < 1$ має місце резервування з дробовою кратністю. Цей спосіб резервування забезпечує менше зростання безвідмовності об'єкта, ніж при $h > 1$, але є більш економічним.

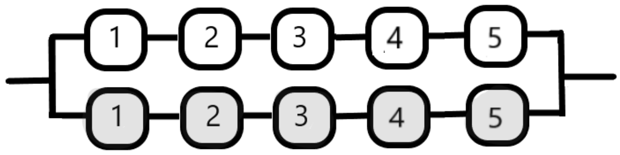
Імовірність безвідмовної роботи визначається за формулою, аналогічною (5.5), з добутком по $M + r$ елементів:

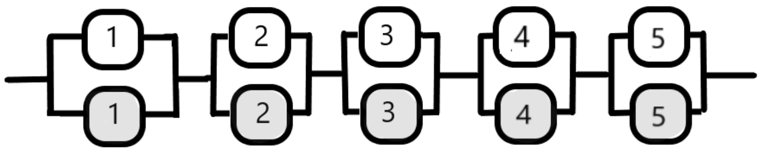
$$P(t) = 1 - \prod_{j=1}^{M+r} (1 - P_j(t)). \qquad (5.9)$$

Резервування значно збільшує ймовірність безвідмовної роботи. Так, при одній резервній гілці машин, яка дорівнює основним гілкам за надійністю, імовірність втрати частини продуктивності дорівнює квадрату ймовірності відмови однієї технологічної лінії.

Якщо резервні елементи включаються в роботу по черзі й не відновлюються до настання відмови всієї сукупності елементів, середній час роботи до відмови системи збільшується прямо пропорційно кількості резервних елементів.

Виділяють такі ***способи резервування*** елементів системи: *загальне* резервування ланцюга елементів, *роздільне поелементне* резервування та *роздільне групове* (рис. 5.4). Резервування, при якому резервується об'єкт у цілому, називається загальним. При роздільному резервуванні резервуються окремі елементи або їх групи.

а) 

б) 

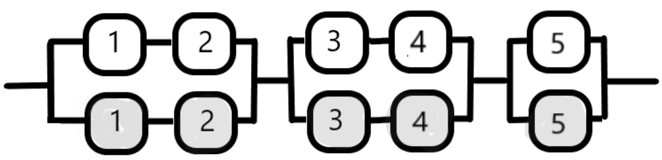
в) 

Рис. 5.4. Схеми способів резервування елементів у системі: а – загальне резервування; б – роздільне поелементне; в – роздільне групове

Ці схеми застосовують переважно для технологічних ліній машин. Зі схем видно, що найбільшу безвідмовність забезпечує роздільне поелементне резервування, а найменшу – загальне. На практиці не завжди можна зробити всі ці з’єднання, що потребують додаткових пристроїв для перенаправлення потоків перероблюваних матеріалів. Крім того, ці пристрої теж набувають статус додаткових елементів системи, що мають неприємну властивість відмовляти, особливо якщо вони є нестандартними і відповідно невідпрацьованими стосовно надійності конструкціями. При розрахунку надійності таких скорегованих схем ці пристрої для перенаправлення потоків матеріалів треба вставляти послідовно відповідним резервним машинам і враховувати їх характеристики безвідмовності. Велика кількість цих пристроїв може суттєво зменшити ефект від резервування машин. Тому на практиці після ретельних розрахунків з урахуванням економічних оцінок з'являється роздільно групове резервування машин у технологічних лініях.

Резервування із застосуванням резервних елементів структури об'єкта може бути: ***навантаженим***, якщо резервні елементи знаходяться в режимі основного елемента, тобто включені в роботу разом з основним елементом, і ***ненавантаженим***, якщо резервні елементи знаходяться в ненавантаженому режимі до початку виконання ними функцій основного елемента.

Резервування, здійснюване без перебудови структури об'єкта при виникненні відмови його елемента, називається ***постійним***.

Резервування, пов'язане з перебудовою структури об'єкта, при якій функції основного елемента передаються резервному тільки після відмови основного елемента, називається ***резервуванням-заміщенням*** або ***динамічним***. Основні переваги цього резервування:

- можливість використання одного резервного екземпляра устаткування на кілька працюючих;
- значне підвищення надійності системи при відносно малих витратах;
- збереження технічного ресурсу резервного устаткування, тому що до включення в роботу воно перебуває в стані очікування роботи.

До недоліків резервування-заміщенням належать:

- наявність перемикаючих пристроїв (перекидні шибери, засувки), які знижують загальну надійність системи;
- можливі простої технологічних ланцюгів машин при переході на резервне устаткування.

На підприємствах перед усім дублюють об'єкти життєзабезпечення, наприклад, вентиляційні, водопостачальні, водовідливні установки, деякі елементи систем енергопостачання та автоматики технологічних машин. Привідні блоки машин, інструмент їх виконавчих органів, робочі поверхні, що взаємодіють з перероблюваним матеріалом, резервують з дробовою кратністю.

Найбільша ефективність у підвищенні безвідмовності об'єкта як при постійному, так і при динамічному резервуванні досягається при роздільно поелементному варіанті схеми з'єднання.

Розрахунки показників надійності різних варіантів комплектування систем устаткування показують, що резервування забезпечує істотне збільшення надійності систем при різних режимах використання й особливо при малій ймовірності безвідмовної роботи складових технологічних ліній. З ростом надійності окремих елементів системи виграш в надійності від застосування резервування зменшується і в цьому випадку питання про його використання має вирішуватися з урахуванням конкретних умов використання комплексів машин.

Аналіз структурних схем технологічних комплексів на багатьох діючих підприємствах і досвід їх експлуатації показують, що резервування машин та структурних зв’язків між ними необхідно здійснювати так, щоб забезпечити нормальні умови ремонтів їх елементів, що вийшли з ладу, без зупинки іншого устаткування в технологічному ланцюгу. Найбільш повно цій вимозі відповідає динамічне резервування, чим і пояснюється його широке застосування на підприємствах.

5.4 Послідовна схема з’єднання технологічних машин з акумулятором

Послідовна схема з’єднання технологічних машин з акумулятором (у більшості випадків це проміжний бункер), або з часовим резервуванням, збільшує надійність роботи схем з послідовним з'єднанням (рис. 5.5).

Рис. 5.5. Послідовна схема з’єднання елементів з акумулятором

Сутність збільшення надійності роботи такої системи полягає в тому, що послідовні короткочасні відмови елементів схеми до акумулятора і після нього при однаковому коефіцієнті технічного використання цих гілок машин (до та після бункера) вирівнюються акумулятором. Наприклад, якщо відмовила машина 3 та простояла годину в ремонті, місткість бункера дозволила працювати машинам 1 і 2, на виході буде певна втрата продукції. Коли через деякий час станеться відмова машин 1 чи 2, то на виході впродовж години буде вироблятися продукція машинами 3, 4, 5. Таким чином, два ремонти протягом години кожний «вкладуться» в одну годину простою всієї лінії.

Розрахунок показників безвідмовності системи проводиться аналогічно розрахунку при послідовній схемі з'єднання елементів за формулами (5.1), (5.2) та (5.3) з урахуванням скоригованих значень величин імовірностей відмов при виключенні відмов тривалістю менших, ніж забезпечує роботу системи місткість бункера.

5.5 Комбінована схема з’єднання елементів

Комбінована схема при аналізі надійності складних технологічних комплексів і цілком підприємств являє собою поєднання схем послідовного, паралельного та інших з'єднань. Визначення характеристик безвідмовності роботи таких схем проводиться послідовно: визначаються характеристики для окремих однорідних послідовних ділянок, а потім для системи їх взаємодії.

5.6 Види структурних зв’язків машин і їх вплив на надійність спільної роботи

При аналізі надійності роботи об’єктів як систем (див. 1.4) технологічні машини можуть об'єднуватися для спільної роботи у виробничі комплекти, комплекси чи агрегати за допомогою технологічних, кінематичних і конструктивних зв’язків.

Технологічний зв'язок здійснюється узгодженням з технологічним процесом відокремлених машин для їх доцільного поєднання, тобто є зв'язком логічного порядку, на базі якого утворюються набори машини, що звуться комплектами. Технологічні зв'язки можуть бути паралельними або послідовними. Наприклад, при виробництві порошкоподібних матеріалів функцію провітрювання та пиловловлювання вентиляційна система здійснює безперервно, тому технологічний зв'язок вентиляційної системи з будь-якою іншої функціональною машиною паралельний. Млини, сушарки, грохоти та інші функціональні машини можуть технологічно зв'язуватися як паралельно, так і послідовно.

При *паралельному технологічному зв'язку* функціональних машин потоки їх відмов накладаються один на одний і, отже, розрахунок показників безвідмовності устаткування з паралельними технологічними зв'язками здійснюють для випадку послідовної взаємодії елементів у системі (рис. 5.1) за формулами (5.1) – (5.4).

При *послідовному технологічному зв'язку* функціональних машин потоки їх відмов продовжують один одного в часі. У цьому випадку параметр потоку відмов системи машин у кожен конкретний період часу дорівнює параметру потоку відмов відповідної машини. Для тривалого періоду роботи системи ***t*** параметр потоку відмов системи визначається як середньозважене за часом значення серед його величин, що мають місце впродовж періодів виконання кожної технологічної операції відповідними машинами.

Саме технологічний зв'язок не є джерелом відмов, хоча і впливає на спосіб розрахунку безвідмовності системи машин.

Кінематичний зв'язок здійснюється зчленуванням технологічно узгоджених функціональних машин, що зберегли свою індивідуальність. Цей зв’язок веде до утворення систем машин, званих технологічними комплексами. Зчленування машин вимагає узгодження швидкостей і напрямку їх взаємного переміщення в процесі роботи і здійснюється тільки на основі паралельного технологічного зв'язку. Такий зв'язок між машинами формується, наприклад, у вуглевидобувних комплексах між комбайном і конвеєром і в сучасних автоматизованих лініях безперервних машинобудівних виробництвах.

Конструктивний зв'язок здійснюють поєднанням базових елементів кінематично пов'язаних функціональних машин, узгоджених на основі паралельного технологічного зв'язку. Цей зв'язок веде до утворення систем машин, званих агрегатами, що зумовлює зміну конструкції індивідуальних машин і втрату ними своєї окремості. Конструктивний зв'язок зумовлює необхідність високого ступеня автоматизації виробничих процесів.

На відміну від технологічних, *кінематичні й конструктивні зв'язки є матеріальними*. Тому вони, зумовлюючи послідовне, у плані надійності з’єднання елементів у системі (при паралельній технології їх роботи) поряд з функціональними машинами беруть участь у формуванні величини параметра потоку відмов системи в цілому. Зрозуміло, що цей параметр визначається як сума інтенсивності відмов усіх складових системи, включно з інтенсивністю відмов кінематичних і конструктивних зв’язків.

5.7 Надійність відновлюваних систем

Поєднання принципів резервування з відновленням устаткування, що відмовило, при використанні недостатньо надійних агрегатів і машин є основним способом підвищення показників експлуатаційної надійності технологічних комплексів машин багатьох підприємств, особливо тих, що працюють у складних умовах, перероблюють небезпечні матеріали або є критичними складовими інфраструктури.

Визначення параметрів надійності відновлюваних систем проводиться з використанням теорії масового обслуговування, у якій розглядаються такі системи: «Вхідний потік»; «Обслуговуюча система»; «Вихідний потік відновленої техніки» (рис. 5.6).

Рис. 5.6. Моделювання надійності відновлюваних систем

Вхідний потік – це потік відмов, створюваний при роботі обладнання. Обслуговуюча система – сукупність засобів для відновлення справності устаткування. Продуктивність обслуговування системи характеризується середнім часом відновлення устаткування.

Потоки відмов устаткування і потоки відновлення його справності є потоками випадкових подій. Суперпозиція потоків відмов і відновлень визначає параметри вихідного потоку, який характеризує готовність техніки виконувати робочі функції. Розрахунки параметрів обслуговуючої системи виконуються за допомогою розподілу Ерланга (див. підрозділ 3.5).

Надійність систем, наприклад машин, суттєво залежить від усіх послідовно з'єднаних її деталей. У свою чергу, довговічність деталей, будь-то нових чи відновлених, залежить від рівня технології їх виготовлення та відновлення, що детально викладені в [5].

Однією з класичних і водночас буденних задач служби механіка будь-яких підприємств є розрахунок раціональної кількості запасних частин до технологічного устаткування з наступним замовленням їх на певний період експлуатації. Замовлення запасних частин відповідно їх середнім витратам упродовж деякого періоду забезпечить ймовірності того, що їх вистачить на рівні 50 %. Тому зрозуміло, що замовляти треба з деяким запасом, але не із зайвим. Метод, що дозволяє визначати кількість запасних частин з наперед заданою ймовірністю гарантії забезпечення їх достатності, базується на законі Пуассона. Цей метод з теоретичними засадами, прикладом вирішення та індивідуальними завданнями для студентів викладено в [6].

5.8 Задачі та питання для самоконтролю

1. Чим відрізняються послідовна схема взаємодії елементів системи від послідовної схеми з бункером при аналізі їх надійності та в чому сенс бункера?

2. Цех підготовки шихти для виготовлення ливарних форм машинобудівного підприємства має дві технологічні лінії, кожна з яких виробляє окремі складові компоненти шихти та змішувач цих компонентів. Перша лінія має млин і грохот із середніми напрацюваннями на відмову 45 і 52 години відповідно. Друга лінія має дробарку, млин і грохот із середніми наробітками на відмову 80, 70 і 100 годин відповідно. Змішувач має цей показник кількістю в 200 годин. Зміна триває 8 годин, час технічного обслуговування устаткування цеху на початку зміни 20 хвилин. Відомо, що лінія вже працює декілька років. Визначити середній наробіток на відмову устаткування в цеху та ймовірність його безвідмовної роботи впродовж зміни.

3. Система керування лінією верстатів з числовим програмним керуванням має п`ять блоків ***A1 , A2 , A3, A4 , A5***. Блок ***A2*** дублює блок ***A1***, блок ***A3*** не дубльований, блок ***A5*** дублює блок ***A4***. При відмові блоків ***A1*** і ***A4*** спрацьовують автоматичні перемикачі, що запускають блоки ***A2*** та ***A5***. Ймовірності безвідмовної роботи блоків упродовж гарантованого строку служби відповідно складають ***p1***, ***p2***, ***p3***, ***p4***, ***p5***, перемикачів – ***p***. Усі блоки виходять з ладу незалежно, ***p1 = p2*** = 0,8; ***p3*** = 0,95***; p4 = p5*** = 0,85***; p*** = 0,9. Скласти схему з`єднання блоків для структурного аналізу надійності системи керування. Визначити, який вид резервування основних блоків системи має місце: загальне, роздільне поелементне, роздільне групове чи яка комбінація схем з’єднання. Визначити ймовірність відмови системи керування впродовж гарантованого строку служби. Для порівняння визначити ймовірність відмови системи керування впродовж гарантованого строку служби при відсутності в пульті дублюючих елементів.

4. Цех підготовки агломерату до доменного виробництва чавуну має чотири однакових технологічних лінії машин. Кожна лінія містить дробарку, грохот і конвеєр, що повертає завеликі шматки агломерату до дробарки. Виробничу програму постійно виконують три лінії. Четверта знаходиться в резерві на випадок відмови основних ліній. Виробництво безперервне. Середні наробітки на відмову машин у кожній лінії відповідно складають 24, 56 і 96 годин. Служба механіка працює таким чином, що середній час відновлення машин після відмови становить півзміни – 4 години. Скласти схему з`єднання устаткування цеху для аналізу його надійності. Визначити: 1) кратність резерву устаткування в цеху; 2) середній наробіток на відмову однієї лінії; 3) середній наробіток на відмову устаткування цеху; 4) ймовірність безвідмовної роботи однієї лінії

впродовж часу відновлення деякої машини після відмови; 5) ймовірність повної зупинки цеху підготовки агломерату впродовж середнього часу відновлення машини; 6) ймовірність ситуації, при якій цех упродовж 4 годин ремонту однієї машини, що вийшла з ладу, буде працювати із зменшеною на дві третини продуктивністю; 7) ймовірність ситуації, при якій цех упродовж 4 годин ремонту однієї машини, що вийшла з ладу, буде працювати зазначений час із зменшеною на третину продуктивністю; 8) ймовірність ситуації, при якій цех упродовж 4 годин ремонту однієї машини, що вийшла з ладу, буде працювати з повною продуктивністю.

6 ВІДПОВІДІ НА ЗАДАЧІ Й ПИТАННЯ САМОКОНТРОЛЮ

У цьому розділу наведені відповіді на задачі та на найбільш складні питання. Номери, що передують відповідям, є номерами питань.

Відповіді на питання, викладені в 1.6

5. Відновлення відбувається на робочому місці машини, а ремонт – у спеціалізованих майстернях. Тому двигун ремонтовний.

11. Для цих підшипників показник кривої втоми 3, тому відповідь – у 8 разів.

12. Удвічі.

Відповіді на задачі, викладені в 2.8

1. 0,33.
2. Питання 1, відповідно: 0,4416; 0,1636; 0,0232; 0,0016.

   Питання 2: 0,3456.
3. 0,7373.
4. 0,2641.
5. 0,9.

Відповіді на задачі й питання, викладені в 3.6

1. Розуміючи процес роботи зазначеного виробництва, можна впевнено припустити, що кількість різців, які вийшли з ладу впродовж попереднього кварталу або навіть місяця, не повинна вплинути на розподіл імовірностей виходу з ладу будь-якої їх кількості в наступний період. Тому потік відмов є потоком без післядії. Оскільки ймовірність одночасної поломки різців нескінченно мала, потік відмов є ординарним і взагалі Пуассонівським. У зв'язку з тим, що питання не містить інформації про зміни в об'ємі виконуваних робіт упродовж часу, потік відмов можна вважати стаціонарним. З'єднавши всі три характеристики, зробимо висновок, що потік відмов є найпростішим. До речі, цей висновок указує на можливість застосування закону Пуассона для визначення раціонального об'єму замовлення.

2. Слід чекати експоненціального розподілу часу безвідмовної роботи верстатів.

3. У зв'язку з тим, що обмотки електродвигунів унаслідок перевантажень накопичують пошкодження впродовж усього строку служби,

який більше півріччя, потік відмов є потоком з післядією, тому законом Пуассона для замовлення двигунів на наступне півріччя користуватися не можна.

4. У даному разі період замовлення двигунів становить рік, що не менше за їх середній строк служби. Тому потік відмов є потоком без післядії. Не важко доказати (відповідь на питання 1), що потік відмов є ординарним та стаціонарним. Таким чином, в описаній ситуації закон Пуассона можна використовувати.

5. У зв'язку з тим, що деталі втрачають працездатність унаслідок спрацювання, є два переважно підходящих закони – нормальний і гамма-розподіл. Перший з них застосовується в стабільних умовах роботи, що визначаються рівнем коефіцієнта варіації ресурсів. З формули (3.15): $\boldsymbol{\nu_x = \frac{\sigma_x}{m_x}}$·100, % = (1000 / 200)·100 = 20 %, що менше за 33 %. Тому слід чекати нормального розподілу з параметрами: $\boldsymbol{m}$ = 1000 годин, σ = 200 годин.

6. У цьому разі σ = 400 годин і $\boldsymbol{\nu_x =}$ 40 %. Тому закон нормальним для ресурсу бути не може, бо в разі його застосування з'явиться можливість появи аномального явища – коли деталь спрацюється до її включення в роботу. У цьому разі умови експлуатації є нестабільними і треба використовувати гамма-розподіл. Його параметри можна визначити, склавши систему рівнянь з двох формул для математичного сподівання та дисперсії при цьому законі (див. підрозділ 3.5.3). Вирішення зазначеної системи дає такий результат:

$$\boldsymbol{\lambda = \frac{m_t}{D_t} = 0,00625}\ \text{відмов/годину}; \qquad \boldsymbol{\eta = \frac{{m_t}^2}{D_t} = 6,25}.$$

7. Задачу простіше за все можна вирішити за допомогою програми Excel. Для цього в окремі комірки листа треба ввести вихідні дані стосовно значень $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{m}$ і $\boldsymbol{\sigma}$, що відповідно становлять 800, 1000 та 200 годин. У наступній комірці викликати функцію нормального закону =НОРМ.РАСП(800;1000;200;1) і ввести посилання на потрібні параметри, обравши в 4-му вікні потрібну функцію для розрахунку. У даному разі це функція розподілу, що позначається як ИСТИНА, чи 1. Якщо щось не зрозуміло, читайте «довідку щодо функції». Отримаємо ймовірність відмови деталі впродовж 800 годин ***P(t)*** = 0,1587. Імовірність безвідмовної роботи деталі впродовж того ж часу ***P(t)*** =1 – 0,1587 = 0,8413.

8. Задача вирішується аналогічно задачі 7 тільки з використанням функції гамма-розподілу, наприклад, =ГАММА.РАСП(A15;C$7;F$6;1). Слід зазначити, що в Excel закони розподілу наведені в загально-математичному вигляді (не тільки для надійності). Тому параметри мають трішки інший вигляд і не несуть того фізичного навантаження, про яке викладено в розділі 3. Щоб не помилитися, треба порівнювати формули законів розподілу, які наведені в посібнику та в Excel, і визначити їх параметри. У більшості

законів в Excel всі параметри позначаються $\boldsymbol{\alpha}$ і $\boldsymbol{\beta}$. Для гамма-розподілу $\boldsymbol{\alpha = \eta}$, $\boldsymbol{\beta = \lambda m_t}$. Результат отримаєте такий: 0,6561.

9. Як бачимо, при тому самому значенні середнього ресурсу 1000 годин і збільшенні розсіювання ресурсів (стандартне відхилення $\boldsymbol{\sigma}$ зростає з 200 до 400 годин), що спостерігається у нестабільних умовах експлуатації, зменшується ймовірність роботи деталі впродовж певного часу. Імовірність того, що деталь пропрацює 800 годин, зменшується з 0,8413 до 0,6561. За цих умов звертаємо також увагу на зміну закону розподілу з нормального на гамма-розподіл. Отже, не важко пересвідчитись, що нормальний закон в даному разі застосовувати не можна, бо він дає аномальний результат: ймовірність того, що деталь спрацюється ще до її включення в роботу, становить 6,21 %, а ймовірність безвідмовної роботи впродовж 800 годин становитиме 0,6915. Цей результат є завищеним на 5,4 % порівняно з правильним, який дає гамма-розподіл (0,6561).

Відповіді на задачі й питання, викладені в 4.8

1. Відповіді на питання 1 – 9 наведені в тексті розділу 4.

10. Критеріями граничних станів для запропонованих об'єктів можуть бути: різець – затуплення чи злом, сито – порив, канат – порив нормованої кількості дротинок на одиницю довжини, підшипник ковзання – граничний люфт у кінематичній парі, підшипник кочення – сторонній шум чи вібрація складової одиниці машини, стріла екскаватора – поява тріщини втомленості чи граничний вигин, двигун внутрішнього згоряння – підвищений шум, люфт колінчастого валу, зменшення обертів чи моменту на валу, які можна виміряти, об'ємний гідропривід – зниження об'ємного ККД, гідродомкрат – зменшення зусилля нижче граничного рівня, водяний насос – зменшення напору нижче граничного рівня, електродвигун – зменшення електричного опору ізоляції дротів нижче граничного рівня, пластинчастий ланцюг – подовження шагу внаслідок спрацювання шарнірів більше граничного рівня.

11. Спочатку підказка – задача зворотна з використанням тих самих законів з тими самими параметрами. =НОРМ.ОБР(__;___;___) і =ГАММА.ОБР(___;__;___). Відповіді: для деталі в задачі 5 $\boldsymbol{T_{p\gamma}}$ = 745 годин; для деталі в задачі 6 $\boldsymbol{T_{p\gamma}}$ = 534 години.

12. ***Відповіді:*** 1. Для забезпечення вимог замовника товщину захисного шару треба збільшити в 1,34 раза. 2. Середній ресурс деталей з новою товщиною покриття (до його спрацювання) становитиме 1256 годин.

Розв'язування. Щоб визначити, як треба змінити товщину захисного шару й відповідно налаштування апарату для нанесення покриття, спочатку треба розрахувати гама-процентний ресурс з пробною товщиною покриття, яке було нанесено на дослідну партію деталей. Для подальшого викладу вирішення задачі позначимо через T_{p1} і $T_{p\gamma 1}$ – відповідно середній і гамма-процентний ресурси дослідної партії, через T_{p2} і $T_{p\gamma 2}$ – відповідно середній і гамма-процентний ресурси подальшої серійної продукції.

Коливання ресурсу окремих деталей є наслідком різної товщини шару їх зносостійкого покриття. Розсіювання товщини шару зносостійкого покриття формується внаслідок дії багатьох малозначних чинників в апараті для нанесення цього покриття, тобто, з імовірнісної точки зору, ці чинники додаються один до одного. Конструкція апарату для нанесення покриття така, що дисперсія товщини шару не залежить від товщини шару. Все це відповідно до викладеного в підрозділі 3.5.1 указує на можливість припустити нормальний розподіл ресурсів.

Кількісна перевірка гіпотези полягає у значенні коефіцієнта варіації, що повинен бути меншим за 33 % задля виключення ймовірності появи від'ємного ресурсу деталі, що при нормальному розподілу виникає, коли $\boldsymbol{\nu_t} > 33$ %. Для перевірки цього спочатку визначимо середньо-квадратичне відхилення ресурсів за формулою (3.14), що, нагадаємо, є стандартом розподілу:

$\boldsymbol{\sigma_t} = \sqrt{\boldsymbol{D_t}}$; $\boldsymbol{\sigma_t} = \boldsymbol{D}^{0,5} = 40000^{0,5} = 200$ годин; потім – коефіцієнт варіації за формулою (3.15):

$$\boldsymbol{\nu_t} = \frac{\boldsymbol{\sigma_t}}{\boldsymbol{m_t}} = \frac{200}{1000} \cdot 100\ \% = 20\ \%,$$

де $\boldsymbol{m_t}$ – математичне сподівання, яке в даному разі є середнім ресурсом і складає $\boldsymbol{m_t} = T_{p1} = 1000$ годин.

Таким чином, $\boldsymbol{\nu_t} < 33$ % і закон розподілу ресурсів є нормальним. Він має параметри $\boldsymbol{m_t} = 1000$ годин і $\boldsymbol{\sigma_t} = 200$ годин. Розрахунок ресурсу $T_{p\gamma 1}$ виконаємо в Excel за допомогою зворотної функції нормального закону: значення функції розподілу ***F(t)***, якій відповідає шуканий результат ресурсу $T_{p\gamma 1}$, є ймовірністю того, що деталь не відпрацює заданий ресурс, тобто ***F(t)*** = 1 – γ = 1 – 0,9 = 0,1. Підставимо це значення й параметри у відповідні діалогові вікна зворотної функції нормального закону =НОРМОБР(0,1;1000;200) та отримаємо результат: $T_{p\gamma 1}$ = 744 годин при потребі 1000 годин. Визначимо, у скільки раз апарат для нанесення покриття повинен накладати більший шар захисного покриття, щоб забезпечити вимоги замовника:

$\kappa = T_{p\gamma 2} / T_{p\gamma 1} = 1000 / 744 = 1,34.$

У зв'язку з тим, що закон розподілу ресурсів є нормальним, крива його розподілу зі збільшенням математичного сподівання (в даній задачі середнього ресурсу деталей) переміщується плоско-паралельно вздовж осі абсцис такою, як вона є. Це означає, що при збільшенні товщини зносостійкого шару зберігається різниця між середнім і гамма-процентним ресурсами деталей. Тому середній ресурс деталей з новою товщиною покриття складе

$$T_{p2} = T_{p1} + (T_{p\gamma 2} - T_{p\gamma 1}) = 744 + (1000 - 744) = 1256 \text{ годин.}$$

Відповіді на задачі й питання, викладені в 5.8

1. Порівняння схем знайдіть у підрозділах 5.1 і 5.4.

2. ***Відповіді:*** 12 годин, імовірність безвідмовної роботи – 0,624.

Пояснення. Перш за все треба з’ясувати схему з’єднання елементів у системі. Дві лінії підготовлюють компоненти шихти паралельно, але цей зв’язок технологічний. Змішувач не зможе працювати при зупинці будь-якої передуючої лінії. Тому на підставі визначення послідовної схеми взаємодії елементів (підрозділ 5.1) витікає, що в даному разі для аналізу надійності роботи устаткування в цеху треба використовувати саме послідовну схему. В даному разі схема містить $\boldsymbol{N}$ = 5 машин (див. рис. 5.1).

Середній наробіток на відмову устаткування цеху, визначений за формулою (5.3), складає 12 годин, тобто зупинка цеху в середньому трапляється раз на 1,5 зміни. Оскільки лінія вже працює декілька років і має інтенсивність відмов $\boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{T}_0} = 0{,}0832$ відмови на годину, то зрозуміло, що сформувався найпростіший потік відмов (підрозділ 3.3). Перелічене дає підстави вважати, що час безвідмовної роботи лінії розподілено за експоненціальним законом. Тому для визначення ймовірності безвідмовної роботи цеху впродовж будь-якого часу можна застосовувати формулу (3.47). При визначенні ймовірності відмови впродовж зміни треба підставляти протяжність зміни, зменшену на час технічного обслуговування техніки, тобто 7,666 годин.

3. ***Відповіді:*** має місце роздільне поелементне резервування в комбінації з його відсутністю; ймовірність відмови системи керування впродовж гарантованого строку служби 0,1348, для пульта без дублюючих елементів – 0,354, тобто понад удвічі більше.

Пояснення. Перш за все треба скласти схему з’єднання елементів у системі для *розрахунку надійності*. Опис пульта свідчить про наявність у нього трьох функціональних груп блоків. Перша та третя групи мають по парі однакових блоків $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$ і $\boldsymbol{A_4}$, $\boldsymbol{A_5}$, що ввімкнуті паралельно, але другий і п’ятий блоки запрацюють при спрацюванні свого автоматичного перемикача. Тому дублюючі блоки з’єднані зі своїми перемикачами послідовно (підрозділ 5.1) і, як наслідок, події «безвідмовна робота» цих ланцюжків підпадають під добуток подій: «безвідмовна робота перемикача» та «безвідмовна робота $\boldsymbol{A_2}$ чи $\boldsymbol{A_4}$». Для розрахунку використовуємо відповідну теорему.

Далі визначимо ймовірності безвідмовної роботи першої та третьої груп. Для підвищення надійності ці групи мають паралельне з'єднання двох гілок однакових блоків. Тому треба застосовувати теорему додавання ймовірностей для двох сумісних подій (див. підрозділ 2.4). Результат розрахунку ймовірностей безвідмовної роботи 1-ї та 3-ї груп блоків – 0,944 і 0,9675 відповідно.

Три функціональні групи блоків з'єднані між собою послідовно. Тому використаємо теорему добутку ймовірностей і перемножимо три відповідні ймовірності для груп блоків. У підсумку отримаємо ймовірність безвідмовної роботи пульта – 0,8552. Таким чином, імовірність відмови пульта впродовж строку гарантії буде 1 – 0,8552 = 0,1348. Аналогічно останньому розрахунку визначена ймовірність відмови пульта впродовж строку гарантії в разі відсутності в ньому дублюючих елементів.

4. ***Відповіді.*** Схема з`єднання устаткування цеху для аналізу його надійності наведена на рис. 5.3: кількість елементів у лінії $\boldsymbol{N}$ = 3, кількість паралельних ліній $\boldsymbol{M}$ = 3 одиниці та ще одна резервна $\boldsymbol{r}$ = 1. Питання: 1) кратність резерву устаткування в цеху **1:3**; 2) відповідь – $\boldsymbol{T_o}$ = 14,43 години; 3) 30,05 години (подумайте, чому цей результат є більшим за відповідний показник для однієї лінії, тобто за попередній?); 4) ймовірність безвідмовної роботи однієї лінії впродовж середнього часу відновлення машин – 0,7578; 5) ймовірність повної зупинки цеху впродовж часу відновлення машин – 0,00344; 6) ймовірність ситуації, при якій цех буде працювати із зменшеною на дві третини продуктивністю виробництва – 0,04305; 7) ймовірність праці цеху впродовж часу відновлення машин із зменшеною на третину продуктивністю – 0,2021; 8) ймовірність праці цеху впродовж часу відновлення машин з повною продуктивністю – 0,7514; 9) середній наробіток на відмову цеху впродовж зміни складає 30 годин.

Пояснення. До питання 2 – розрахунок здійснено за формулою (5.3) для послідовного з'єднання 3-х елементів.

До питання 3 – розрахунок середнього наробітку на відмову устаткування цеху здійснено за формулою (5.6) для паралельного з'єднання 4-х ліній машин (це з урахуванням того, що в разі якоїсь відмови резервна буде запущена і час безвідмовної роботи системи збільшиться), слід звернути увагу на те, що за умовчанням середній наробіток на відмову в формулі (5.6) – це наробіток між повними зупинками виробництва на всіх лініях і тому він є більшим за відповідний показник для однієї лінії.

До питання 4 – для розрахунку ймовірності безвідмовної роботи однієї лінії впродовж часу відновлення деякої машини після відмови треба обрати відповідний фізиці процесу формування потоку відмов закон розподілу часу безвідмовної роботи лінії. Аналізуючи потік відмов за аргументами, аналогічними тим, що наведені вище у відповідях до підрозділу 3.5 (задача 1), можна довести, що потік відмов кожної окремої лінії є найпростішим: лінія складається з трьох послідовно з'єднаних машин; кожна машина є великою кількістю послідовно, з позиції надійності, з'єднаних деталей, які зношуються, втомлюються, старіють до появи першої відмови незалежно одна від одної. Все це є ознаками найпростішого потоку відмов кожної окремої лінії. У таких випадках час безвідмовної роботи об'єкта розподіляється за експоненціальним законом (підрозділ 3.5.5). Функція ймовірності безвідмовної роботи протягом $\boldsymbol{t}$ (у даному разі $\boldsymbol{t}$ = 4 год) визначається за формулою (3.47): $\boldsymbol{P(t)} = \boldsymbol{e^{-\lambda t}}$, де $\boldsymbol{\lambda} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{T_o}} = 0{,}06933$ відмов у годину. В результаті $\boldsymbol{P(t)} = 0{,}7578$. Розрахунок також можна виконати в Excel за допомогою відповідної функції. З урахуванням того, що вона повертає в комірку значення функції розподілу, шукана відповідь буде доданком до одиниці:

$\boldsymbol{P(t)} = 1$ – ЭКСП.РАСП(4; 0,06933;1) = 0,7578.

Стосовно задач, що треба вирішити в ***питаннях 5 – 8***, перш за все слід зауважити, що потік відмов у системі з паралельним з'єднанням технологічних ліній вже не є ординарним і відповідно найпростішим, оскільки наявні одночасні відмови ліній. В цьому разі не можна використовувати ні експоненціальний розподіл для часу безвідмовної роботи системи, ні закон Пуассона для визначення ймовірності виходу з ладу будь-якої кількості ліній упродовж заданого часу, що нам і потрібно для вирішення питань 5 – 8.

Дана ситуація підпадає під умови використання частинної теореми про повторення дослідів, що довів Бернуллі (підрозділ 2.7.1) і яка є основою біноміального розподілу (підрозділ 3.2.1). Ми нібито «випробовуємо» одночасно $\boldsymbol{n}$ = 4 технологічні лінії впродовж 4-х годин можливого ремонту, кожна з яких має ймовірність безвідмовної роботи, що визначена в питанні 4, тобто $\boldsymbol{p}$ = 0,7578. При цьому $\boldsymbol{m}$ є випадковою невідомою величиною. Вона являє собою кількість ліній, що не відмовили впродовж 4 годин, і може набути значень 0; 1; 2; 3; 4. Шукані ймовірності $\boldsymbol{P_{m,n}}$ є ймовірностями безвідмовної роботи відповідної кількості ліній устаткування.

Слід зауважити, що, на перший погляд, виникає колізія – резервна лінія спочатку не включена в роботу, як то передбачає запропонована теорема, зумовлюючи однакове навантаження всіх ліній. Однак ми довели, що потік відмов для однієї лінії є найпростішим і для нього немає значення, з якого моменту починається використання об'єкта (підрозділ 3.3), тобто з початку зміни чи відразу після відмови якоїсь основної лінії машин. На практиці це означає, що результат розрахунку ймовірності, наприклад, втрати третини продуктивності цеху, не зміниться від того, коли було ввімкнуто резервну лінію – з початку зміни чи з моменту відмови основної лінії. Момент вмикання не впливає на ймовірність її відмови впродовж періоду експлуатації, якщо настання граничного стану технологічної лінії ще далеко, тобто при простішому потоку відмов.

Розрахунки можна зробити двома способами – за допомогою калькулятора за формулою (2.12) чи програми ExceI, обравши функцію біноміального розподілу, наприклад для $\boldsymbol{m}$ = 2, $\boldsymbol{n}$ = 4 і $\boldsymbol{p}$ = 0,7578:

$\boldsymbol{P_{2.4}}$ = =БИНОМ.РАСП(2;4;0,7578;0).

Імовірність того, що цех буде працювати з повною продуктивністю впродовж часу, що дорівнює можливому ремонту, буде складатися із суми ймовірностей, що в працездатному стані будуть перебувати 3 або 4 лінії:

$\boldsymbol{P_{100\%} = P_{3,4} + P_{4,4}}$.

7 ПІСЛЯМОВА

Відповідно до освітньо-професійної програми «Комп'ютерний інжиніринг у машинобудуванні» підготовки бакалаврів спеціальності «Галузеве машинобудування» дисципліна «Надійність машин і комплексів» включена до переліку обов'язкових і поряд з іншими забезпечує такі результати навчання: РН4 «Здійснювати інженерні розрахунки для вирішення складних задач і практичних проблем у галузевому машинобудуванні» та РН5 «Аналізувати інженерні об'єкти, процеси та методи». Зміст навчального посібника відповідає робочій програмі навчальної дисципліни «Надійність машин і комплексів» для бакалаврів спеціальності 133 Галузеве машинобудування / Нац. техн. ун-т. «Дніпровська політехніка», каф. інжинірингу та дизайну в машинобудуванні – Д.: НТУ «ДП», 2020. – 14 с.

Сертифікація досягнень студентів здійснюється за допомогою прозорих процедур, що ґрунтуються на об'єктивних критеріях відповідно до положення університету «Про оцінювання результатів навчання здобувачів вищої освіти». Досягнутий рівень компетентностей відносно очікуваних, що ідентифікований під час контрольних заходів, відображає реальний результат навчання студента за дисципліною.

Засвоєння навчального контенту посібника є необхідним для формування наступних загальних і спеціальних компетентностей, регламентованих стандартом вищої освіти та зазначеною освітньою програмою щодо забезпечення надійності створюваних й експлуатованих машин і комплексів: ЗК6 «Здатність проведення досліджень на певному рівні», ФК3 «Здатність оцінювати та забезпечувати якість виконуваних робіт» і ФК10 «Здатність розробляти плани і проєкти у сфері галузевого машинобудування за невизначених умов, спрямованих на досягнення мети з урахуванням наявних обмежень, розв'язувати складні задачі й практичні проблеми підвищення якості продукції та її контролювання».

8 ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. ДСТУ 2860-94. Надійність техніки. Терміни та визначення – [Чинний від 1996 – 01 – 01] – Київ : Держстандарт України, 1994. – 75 с.

2. Канарчук В.Є. Надійність машин: підруч. для студентів напряму «Інженерна механіка» / В.Є. Канарчук, С.К. Полянський, М.М. Дмитрієв. – Київ : Либідь, 2003. – 424 с.

3. Грабар І.Г. Основи надійності машин: навчальний посіб. / І.Г. Грабар. – Житомир : ЖІТІ, 1998. – 298 с.

4. Конспект лекцій з навчальної дисципліни «Надійність та довговічність обладнання» для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня зі спеціальності 133 Галузеве машинобудування за освітньо-професійною програмою «Галузеве машинобудування» / укл. Бельмас І.В. : – Кам'янське: ДДТУ, 2017. – 38 с.

5. Барнік М.А. Технологічні методи забезпечення надійності деталей машин / М.А. Барник, І.С. Афтаназів, Ш.О. Сівак. – Київ : КИ, 2004. – 148 с.

6. Методичні рекомендації до самостійної роботи студентів при виконанні розрахункового завдання «Визначення раціональної кількості запасних частин до гірничих машин» для студентів спеціалізації «Гірничі машини та комплекси» / Є.С. Запара. – Дніпропетровськ : Національний гірничий університет, 2014. – 18 с.

Навчальне видання

Запара Євген Семенович

НАДІЙНІСТЬ МАШИН І КОМПЛЕКСІВ

Підручник

Редактор Ю.В. Рачковська

Підписано до видання 30. 08. 2021
Електронний ресурс. Авт. арк. 5,5.

Підготовлено й видано
у Національному технічному університеті
«Дніпровська політехніка».

Свідоцтво про внесення до Державного
реєстру ДК № 1842 від 11.04.2006

49005, м. Дніпро, просп. Яворницького, 19.