МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

В.Ф. Сторчай, Л.С. Коряшкіна

ПРАКТИКУМ
З ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Навчальний посібник

Дніпро
НТУ «ДП»
2021

УДК 517.53/.54
С 82

Рекомендовано Вченою радою Національного технічного університету «Дніпровська політехніка» як навчальний посібник (протокол № 11 від 08.12.2021).

Рецензенти:
Д.Г. Зеленцов, д-р техн. наук, проф.;
С.А. Ус, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Сторчай В.Ф.
С 82 Практикум з теорії функції комплексної змінної / В.Ф. Сторчай, Л.С. Коряшкіна / М-во освіти і науки України; Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Д.: НТУ «ДП», 2021. – 264 с.

ISBN 978-966-350-770-5

Викладено основні відомості з теорії функцій комплексної змінної: комплексні числа та дії з ними, послідовності комплексних чисел, диференціювання та інтегрування функцій комплексної змінної, конформні відображення, інтеграл Коші, застосування інтегральної формули Коші, ряди та особливі точки, лишки та їх використання. Наведені приклади розв'язання практичних задач з фізики, механіки, електротехніки, геодезії, картографії за допомогою потужного математичного апарата теорії функції комплексної змінної.

Посібник містить велику кількість прикладів з розв'язанням, а також завдання для самостійної роботи.

Буде корисним студентам університетів та педагогічних вишів інженерних і фізико-технічних спеціальностей.

УДК 517.53/.54

ISBN 978-966-350-770-5

Зміст

ПЕРЕДМОВА

Одна з головних ідей реформи системи вищої освіти полягає в посиленні практичної орієнтації її результатів. Це означає, зокрема, що зміст дисциплін основної освітньої програми має забезпечувати випускника ВНЗ не стільки низкою знань у відповідній предметній галузі, скільки можливістю їх застосування для вирішення професійних завдань. При цьому неможливо переоцінити значимість математичної підготовки фахівців з комп’ютерна інженерії, системного аналізу, інженерів з електроенергетики і електротехніки.

Існують різні підходи до визначення професійної математичної компетентності майбутніх інженерів. В науковій літературі вона розглядається як інтегративна сукупність, що включає в себе логіко-аналітичну, візуально-образну, інформаційно-комп'ютерну, дослідницьку, креативну і прогностичну компоненти [1]. Також її трактують як єдність гносеологічної й аксіологічної компонент, які забезпечують здатність вирішувати теоретичні і інженерно-практичні завдання, що є важливими у професійній діяльності.

Професійно-прикладну математичну компетентність інженера з програмного забезпечення обчислювальної техніки і автоматизованих систем визначають як системне особистісне новоутворення, котре складається із здібностей до алгоритмічного мислення, готовності до творчого застосування математичного інструментарію для вирішення інженерно-практичних завдань та мотиваційної потреби в безперервному самонавчанні і саморозвитку.

Все це має на меті забезпечити високу якість природничо-математичної освіти майбутнього фахівця, спрямованої на успішне виконання професійних задач. Тобто математична компетентність, як властивість особистості інженера, включає в себе здібності, що дозволяють формулювати конкретні фізичні задачі на мові математичних моделей, які можна досліджувати, інтерпретувати отримані результати в термінах поставленої задачі.

На практиці виявляється, що студенти інженерних напрямів не завжди усвідомлюють важливість математичних знань під час опанування майбутньою професією, відчувають значні труднощі в використанні їх для вирішення завдань прикладного змісту при освоєнні спеціальних дисциплін. Серед сюжетних умов задачі вони часто-густо не вловлюють її математичну суть. Отже, ефективне формування математичної компетентності студентів пов'язано з необхідністю подолання суперечності між значимістю математичних дисциплін у підготовці майбутніх інженерів і недостатнім рівнем їх математичної підготовленості.

Теорія функцій комплексної змінної (ТФКЗ), разом з алгеброю і геометрією, математичним аналізом, диференціальними та інтегральними рівняннями, теорією математичної фізики складають основу математичної освіти. В рамках теорії функцій комплексної змінної узагальнюються (на випадок комплексних змінних) поняття функціональних рядів та інтегралів, що розглядаються під час вивчення дисциплін "Математичний аналіз" і «Вища математика». З іншого боку, аналітичні методи, що розробляються на основі базових понять ТФКЗ, використовуються під час вивчення таких розділів як «Диференціальні рівняння в комплексній області» (дисципліни «Диференціальні рівняння» і «Рівняння математичної фізики»). На базі ТФКЗ будуються приклади, що ілюструють основні елементи теорії метричних, нормованих і гільбертових просторів. Властивості функцій комплексної змінної використовуються при побудові спектральної теорії операторів і теорії розв'язання деяких класів інтегральних рівнянь (дисципліна «Функціональний аналіз»).

В книзі наведено матеріал, що стосується використання понять як класичних, так і сучасних розділів природознавства.

Метою посібника є не лише підвищення рівня професійної компетентності студентів, формування поняття про технічні можливості одного з розділів математичного аналізу, але й формування умінь застосування технічних можливостей комплексного аналізу, самостійної побудови і дослідження математичних моделей.

Основні завдання, які вирішуються під час вивчення теорії функцій комплексної змінної:

– освоєння найважливіших понять теорії функцій комплексної змінної (границя, неперервність, диференційованість);

– знайомство з поняттям багатозначних функцій комплексної змінної і поняття аналітичного продовження;

– вивчення основ теорії інтегрування і освоєння спеціальних прийомів інтегрування функцій комплексної змінної, в тому числі різних аспектів теорії лишків;

– вивчення основ геометричної теорії функцій комплексної змінної і набуття навичок побудови спеціальних відображень елементарними функціями;

– розробка елементів теорії рядів в комплексній області та визначення особливих точок однозначного характеру.

Автори вважають, що навчальний посібник допоможе студентам набути систематизовані знання в галузі теорії функції комплексної змінної, узагальнити на випадок комплексної площини основні поняття, що використовуються в математичному аналізі (функція, границя, неперервність, диференційованість, інтегрованість), зорієнтувати в підборі спеціальної літератури для підготовки до практичних занять, математичних змагань, спрямувати на розвиток навичок самостійного розв'язання практичних задач.

Вивчення теорії функцій комплексної змінної спирається на математичний аналіз, алгебру і геометрію, диференціальні рівняння, функціональний аналіз.

Відтак, студенти узагальнюють знання, отримані під час освоєння вказаних курсів, простежують зв’язки між ними та взаємовплив, тобто у такий спосіб реалізується професійна спрямованість освітнього процесу.

Засвоєння дисципліни «Теорія функцій комплексної змінної» є необхідною умовою формування наукового світогляду майбутнього фахівця в галузі системного аналізу, інформаційних технологій, електроенергетики та електротехніки.

I. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

1.1. Комплексні числа та їх геометричне зображення. Алгебраїчна, тригонометрична та показникова форми комплексного числа

Комплексним числом називається вираз вигляду
$$z = x + iy, \tag{1.1}$$
де x, y – довільні дійсні числа, а i – уявна одиниця, яка задовольняє умову $i^2 = -1$. Числа x і y називаються відповідно дійсною та уявною частинами комплексного числа і позначаються символами
$$x = \mathrm{Re}z, y = \mathrm{Im}z,$$
де Re та Im – відповідно початкові букви латинських слів *realis* (дійсний) та *imaginaries* (уявний). Наприклад, $\mathrm{Re}(6 + 2i) = 6$, $\mathrm{Im}(6 + 2i) = 2$.

Запис комплексного числа у вигляді (1.1) є його алгебраїчною формою.

Два комплексних числа $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називаються рівними тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Re}z_1 = \mathrm{Re}z_2$ і $\mathrm{Im}z_1 = \mathrm{Im}z_2$. Поняття «більше» і «менше» для комплексних чисел не вводиться.

Якщо $y = \mathrm{Im}z = 0$, то $z = x$ є дійсним числом.

Якщо $\mathrm{Re}z = x = 0$ і $y \neq 0$, то $z = iy$ є суто уявне число.

Комплексне число $x - iy$ називається спряженим до числа $z = x + iy$ і позначається символом $\bar{z}$. Очевидно, що
$$\bar{z}z = x^2 - y^2, \qquad \mathrm{Re}z = \frac{\bar{z} + z}{2}, \qquad \mathrm{Im}z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Для геометричного зображення комплексних чисел виберемо на площині прямокутну систему координат xOy і поставимо в відповідність кожному комплексному числу $z = x + iy$ точку M з координатами x та y. При цьому множина дійсних чисел зображується точками на осі Ox, яка називається дійсною віссю, а множина суто уявних чисел виду $z = bi$ буде лежати на осі Oy, яку називають уявною віссю. Зазначимо, що одна точка уявної осі, а саме початок координат, зображає дійсне число $z = 0$.

Таким чином, встановлено взаємно однозначну відповідність між множиною всіх комплексних чисел і точками площини.

Площина, точки якої зображують комплексні числа, називається к о м п л е к с н о ю або просто п л о щ и н о ю z. Терміни «комплексне число z» і «точка z» вживаються як синоніми.

Комплексне число $z = x + iy$ можна також зображати вектором з проєкціями x та y на координатні осі, який дорівнює радіус-вектору точки z.

Довжина ρ вектора $\overline{OM}$ (рис. 1) називається м о д у л е м комплексного числа z і позначається через $|z|$,

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1.2}$$

Кут φ, утворений вектором $\overline{OM}$ (рис. 1) з додатним напрямком осі *Ox*, називається а р г у м е н т о м комплексного числа z ($z \neq 0$, для комплексного числа $z = 0$ аргумент не визначається) і позначається $\varphi = \mathrm{Arg}z$. При цьому кут φ вважається додатним, якщо обертання додатної частини дійсної осі навколо початку координат відбувалося проти годинникової стрілки, і від'ємним, якщо це обертання відбувалося за годинниковою стрілкою.

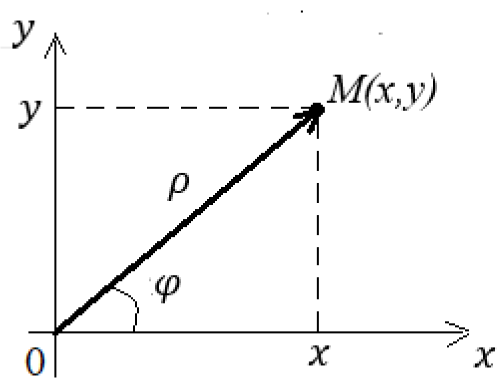


Рис. 1. Зв'язок між декартовими та полярними координатами

Аргумент визначається не однозначно, а з точністю до доданка, кратного 2π. Одне і лише одне значення φ аргументу z задовольняє умову $-\pi < \varphi \leq \pi$. Воно називається г о л о в н и м значенням аргументу і позначається $\mathrm{arg}z$. Отже,

$$\mathrm{Arg}z = \mathrm{arg}z + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$
$$-\pi < \mathrm{arg}z \leq \pi,$$

причому (див. рис. 2)

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \text{ якщо } x > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \text{ якщо } x < 0, y \geq 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \text{ якщо } x < 0, y < 0; \\ \frac{\pi}{2}, \text{ якщо } x = 0, y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, \text{ якщо } x = 0, y < 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

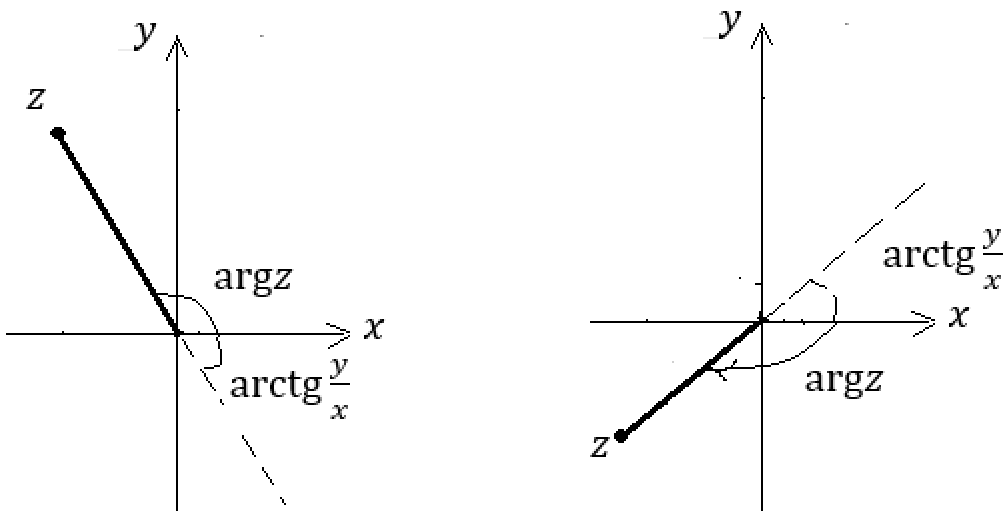


Рис. 2. Аргумент комплексного числа

Перейдемо від прямокутної системи координат до полярної. Тоді (ρ, φ) – полярні координати точки *M(x,y)*, яка зображає комплексне число z, якщо *Ox* є полярною віссю. У випадку розміщення осей *Ox* і *Oy*, вказаному на рис. 1, враховуючи зв'язок між декартовими і полярними координатами: $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$, маємо

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{1.4}$$

Ця форма комплексного числа називається т р и г о н о м е т р и ч н о ю .

Два комплексних числа, заданих в тригонометричній формі, є рівними тоді і тільки тоді, коли їх модулі дорівнюють одне одному, а аргументи рівні або відрізняються на число, кратне 2π. Тобто якщо $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то звідси випливає, що $r = \rho, \varphi = \alpha + 2k\pi$, k – ціле число.

Скориставшись формулою Ейлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \tag{1.5}$$

будь-яке комплексне число $z \neq 0$ можна записати в формі

$$z = \rho e^{i\varphi}, \tag{1.6}$$

яка називається показниковою. Тоді

$$\bar{z} = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \rho e^{-i\varphi}. \tag{1.7}$$

Позначення (1.5) пояснюється схожістю властивостей виразу вигляду $e^{i\varphi}$ з властивостями показникової функції. Наприклад, при будь-яких α, β і φ справедливі такі формули:

$$e^{i\cdot 0} = 1, e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}, \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} = e^{i(\alpha-\beta)},$$

$$\left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}, n - \text{довільне число.}$$

Із формул (1.5) і (1.7) матимемо

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right), \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right).$$

Приклад 1.1. Зобразити комплексні числа:

$z_1 = i, z_2 = -2i, z_3 = 2 + i, z_4 = 1 - 2i, z_5 = -1 + 2i, z_6 = -2 - 3i.$

Розв'язання.

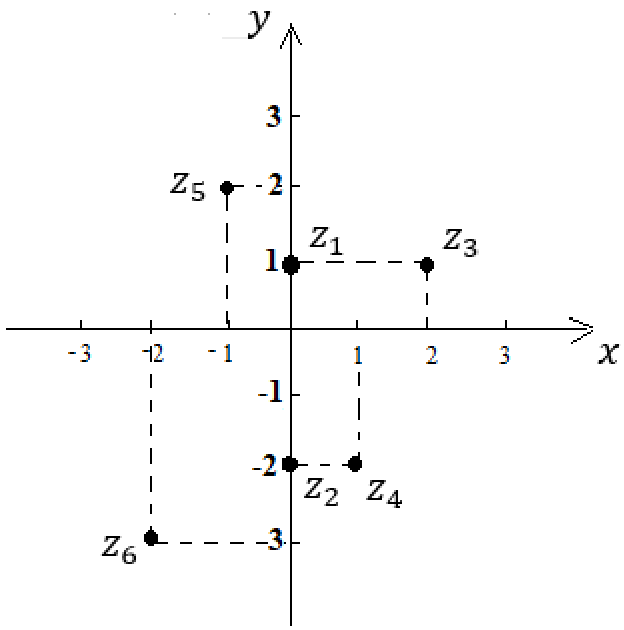


Рис. 3. Геометричне зображення комплексних чисел

Приклад 1.2. Де розташовані на площині точки, для яких

$$|z - z_0| = r?$$

Розв'язання. Нехай $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, тоді

$$|z - z_0| = |(x + iy) - (x_0 + iy_0)| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r,$$

звідки

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2.$$

Отже, точки, для яких $|z-z_0|=r$ будуть розміщені на колі радіуса r з центром в точці $M_0(x_0,y_0)$.

Очевидно, що нерівності $|z-z_0|\le r,\ r\le|z-z_0|\le R$ задають відповідно круг і кільце (рис. 4).

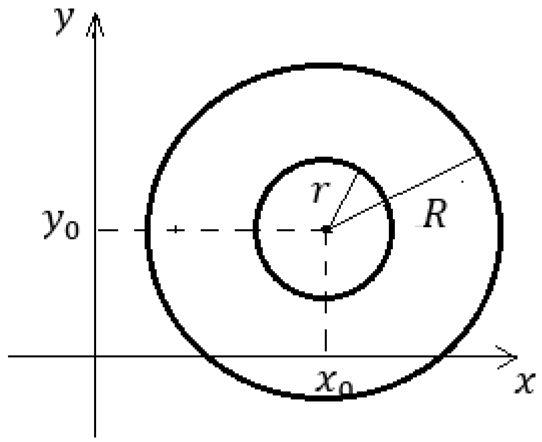


Рис. 4. Геометричне зображення точок $r\le|z-z_0|\le R$

Розглянемо вироджені випадки кільця $r\le|z-z_0|\le R$:

1) $0<|z-z_0|<R$ $(r=0, 0<R<\infty)$ – круг з виколотим центром і без границі;

2) $r\le|z-z_0|<R$ $(0<r<\infty, R=\infty)$ – зовнішність круга $|z-z_0|\le r$ без границі;

3) $0<|z-z_0|<\infty$ $(r=0, R=\infty)$ – вся площина з виколотою точкою z_0.

Приклад 1.3. Нехай $|z|=2$. Де розташовані точки $2z$?

Розв'язання. Точки z, які задовольняють рівняння $|z|=2$, розташовані на колі радіуса 2 з центром на початку координат. Точки $2z$ знаходяться на тому ж промені, що і точки z, але на відстані від початку координат вдвічі більшій. Відтак, точки $2z$, де $|z|=2$, розташовані на колі радіуса 4 з центром на початку координат.

Приклад 1.4. Де розташовані точки $1+2z$, якщо $|z|=1$?

Розв'язання. Всі точки $2z$, де $|z|=1$, розташовані на колі $|z|=2$ з центром на початку координат. Точку $2z+1$ отримаємо із точки $2z$

зсувом праворуч на 1. Отже, точки 1+2z, де $|z| = 1$, розташовані на колі радіуса 2 з центром у точці (1,0) (рис. 5).

Приклад 1.5. Комплексне число z задовольняє рівняння

$$|z - i| = |z + 2|.$$

Де знаходяться точки, які зображують ці числа?

Розв'язання. Вираз $|z - i|$ – відстань від точки z до фіксованої точки, яка зображає число i, $|z + 2| = |z - (-2)|$ – відстань від точки z до фіксованої точки, яка зображає число (-2). Отже, розв'язанням задачі буде геометричне місце точок, рівновіддалених від двох фіксованих точок площини i та -2. Із геометрії відомо, що це пряма, перпендикулярна до відрізка, який з’єднує дві зазначені точки і проходить через його середину (рис. 6).

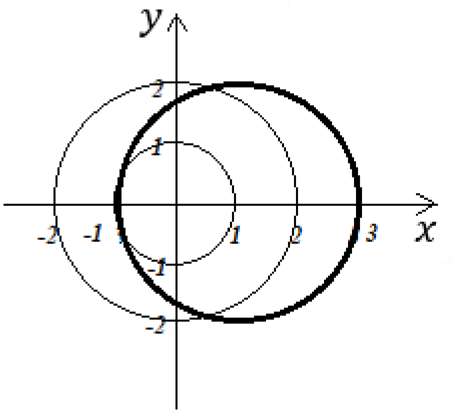


Рис. 5. Побудова множини точок
1+2z, якщо $|z| = 1$

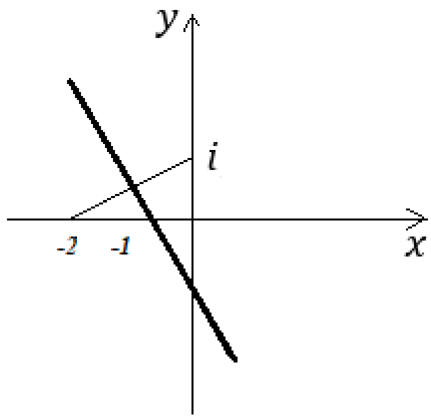


Рис. 6. Множина точок, для яких
$|z - i| = |z + 2|$

Приклад 1.6. Знайти множину всіх точок комплексної площини, які задовольняють нерівність

$$0 < \arg\frac{i - z}{z + i} < \frac{\pi}{2}.$$

Розв'язання. Нехай $z = x + iy$, а

$$w = u + iv = \frac{i - z}{z + i}.$$

Тоді

$$w=\frac{(i-z)(\overline{z+i})}{(z+i)(\overline{z+i})}=\frac{(i-z)(\bar{z}-i)}{|z+i|^2}=$$
$$=\frac{i(x-iy)+1-(x^2+y^2)+i(x+iy)}{|z+i|^2}=$$
$$=\frac{1-(x^2+y^2)+2ix}{x^2+(1+y)^2},$$

звідки знаходимо

$$u=\frac{1-(x^2+y^2)}{x^2+(1+y)^2},$$
$$v=\frac{2x}{x^2+(1+y)^2}.$$

Оскільки за умовою $0<\arg w<\frac{\pi}{2}$, то враховуючи означення (1.3), ця подвійна нерівність може бути виконана тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} u>0, \\ v>0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x^2+y^2<1, \\ x>0\,. \end{cases}$$

Шукана множина точок зображена на рис. 7.

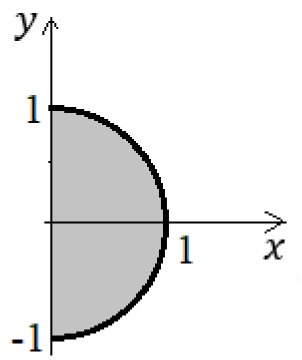


Рис. 7. Множина точок z, для яких $0<\arg\frac{i-z}{z+i}<\frac{\pi}{2}$

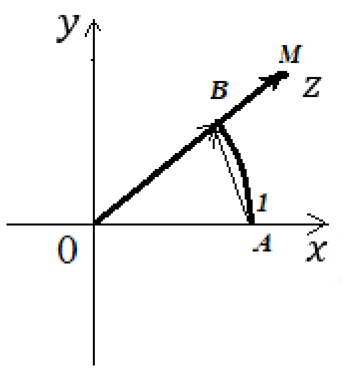


Рис. 8. Множина точок, для яких $\left|\frac{z}{|z|}-1\right|\le|\arg z|$

Приклад 1.7. Користуючись геометричною інтерпретацією комплексних чисел, довести нерівність

$$\left|\frac{z}{|z|}-1\right|\le|\arg z|.$$

Розв'язання. Нехай точка z для визначеності розташована в першій чверті (рис. 8). Тоді вектор $\overline{OM}$ зображає комплексне число z, вектор $\overline{OB}$ – одиничний, який зображає число $\frac{z}{|z|}$, $\overline{AB}$ зображає комплексне число $\frac{z}{|z|}-1$, довжина дуги AB дорівнює $\arg z$. З рис. 8 видно, що довжина хорди $\left|\frac{z}{|z|}-1\right|$ є меншою ніж довжина дуги $|\arg z|$ одиничного кола з центром на початку координат. Відтак, задана нерівність доведена.

Аналогічно доводиться справедливість заданої нерівності, коли точка z розташована не в першій чверті комплексної площини.

Приклад 1.8. Користуючись геометричною інтерпретацією комплексних чисел, довести нерівність

$$|z-1| \le ||z|-1| + |z|\arg z.$$

Розв'язання. Нехай для визначеності точка z розташована в першій чверті. Розглянемо два випадки: $|z| > 1$ і $|z| < 1$. Оскільки в трикутнику довжина будь-якої сторони не перевищує суми довжин двох інших сторін, то, як видно із рис. 9, справедливість нерівності доведена. Аналогічно розглядаються випадки, коли точки z розташовані не в першій чверті.

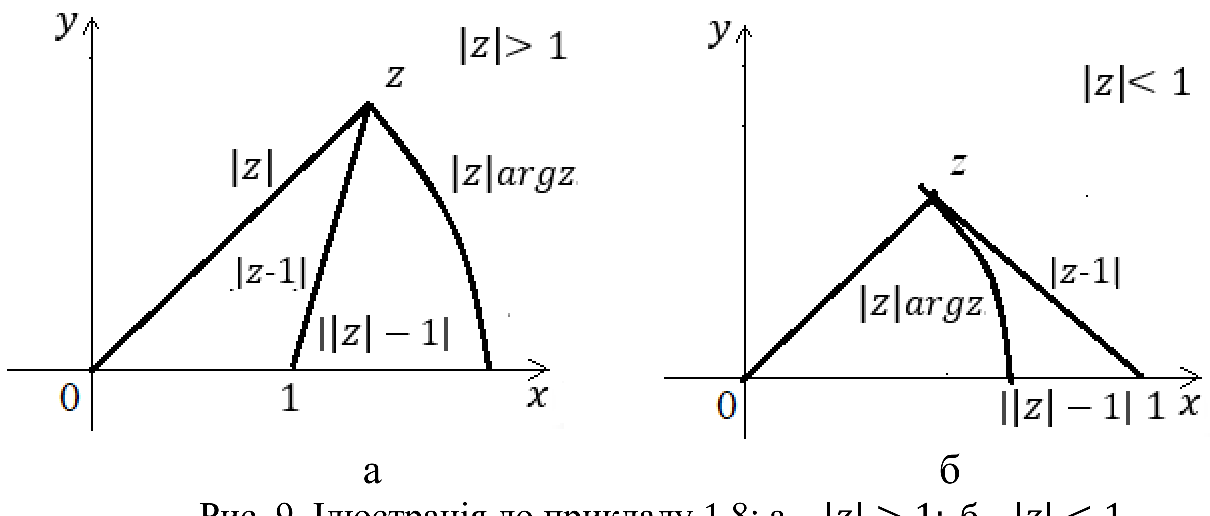


Рис. 9. Ілюстрація до прикладу 1.8: а – $|z| > 1$; б – $|z| < 1$

Приклад 1.9. Знайти множину точок, які задовольняють умову

$$|2z| > |1+z^2|.$$

Розв'язання. Для комплексного числа $z = x + iy$, за означенням модуля та піднесення обох частин рівності до квадрата, маємо

$$2\sqrt{x^2 + y^2} > \sqrt{(1 + x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2};$$
$$4(x^2 + y^2) > (1 + x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2,$$

звідки після перетворень одержимо

$$1 + x^4 + y^4 + 2x^2 - 2y^2 - 2x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 4x^2y^2 < 0,$$
$$(1 - x^2 - y^2)^2 - 4y^2 < 0$$

або

$$(1 - x^2 - y^2 - 2y)(1 - x^2 - y^2 + 2y) < 0.$$

Ця нерівність еквівалентна двом таким системам:

$$\begin{cases} x^2 + (y + 1)^2 > 2, \\ x^2 + (y - 1)^2 < 2, \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x^2 + (y + 1)^2 < 2, \\ x^2 + (y - 1)^2 > 2, \end{cases}$$

розв'язки яких належать внутрішній частині кіл $|z - i| < \sqrt{2}$ і $|z + i| < \sqrt{2}$, крім їх спільної частини (рис. 10).

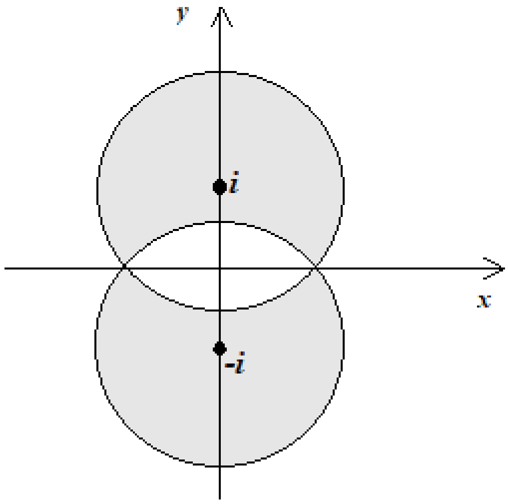


Рис. 10. Множина точок, які задовольняють умову $|2z| > |1 + z^2|$

Приклад 1.10. Обчислити модулі і головні значення аргументів комплексних чисел:

а) $-1 - i$; б) $-1 + i$; в) $\sqrt{3} - i$; г) $-2i$.

Розв'язання. Модулі і аргументи заданих комплексних чисел знаходимо відповідно за формулами (1.2) і (1.3):

а) $|-1 - i| = \sqrt{2}$; $\arg z = -\pi + \mathrm{arctg}1 = -\frac{3\pi}{4}$;

б) $|-1 + i| = \sqrt{2}$; $\arg z = \pi + \mathrm{arctg}(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$;

в) $|\sqrt{3}-i| = 2$; $\arg z = \operatorname{arctg}(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{\pi}{6}$;

г) $|-2i| = 2$; $\arg z = -\frac{\pi}{2}$.

Приклад 1.11. Знайти модуль і головне значення аргументу комплексного числа

$$z = -\sin\frac{\pi}{9} + i\cos\frac{\pi}{9}.$$

Розв'язання. Оскільки

$$x = -\sin\frac{\pi}{9} < 0, \qquad y = \cos\frac{\pi}{9} > 0,$$

то за формулою (1.3)

$$\arg z = \pi + \operatorname{arctg}\left(-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{9}\right) = \pi - \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{9}\right)\right) =$$

$$= \pi - \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{7\pi}{18}\right) = \pi - \frac{7\pi}{18} = \frac{11\pi}{18}.$$

Отже,

$$\operatorname{Arg} z = \frac{11\pi}{18} + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\sin^2\frac{\pi}{9} + cos^2\frac{\pi}{9}} = 1.$$

Приклад 1.12. Подати в тригонометричній формі комплексне число

$$z = 1 - \sin\alpha + i\cos\alpha \ (0 < \alpha < \tfrac{\pi}{2}).$$

Розв'язання. Для заданого комплексного числа маємо

$$x = 1 - \sin\alpha, \qquad y = \cos\alpha.$$

За формулами (1.2) і (1.3) відповідно знаходимо

$$|z| = \sqrt{(1-\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2} = \sqrt{2(1-\sin\alpha)} = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right).$$

$$\arg z = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\right) =$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\right)\right) = \operatorname{arctg}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}.$$

Згідно з формулою (1.4) маємо

$$1 - \sin\alpha + i\cos\alpha = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\right).$$

Приклад 1.13. Записати в показниковій формі комплексні числа: а) –1; б) – i; в) 1 – i; г) $-\sqrt{3}-i$.

Розв'язання. Використовуючи формули (1.2), (1.3) і враховуючи (1.6), маємо:

а) | –1| = 1; arg(–1) = π; $-1 = e^{\,i\pi}$;

б) | –i | = 1; arg(–i) = $-\frac{\pi}{2}$; $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$;

в) | 1 – i | = $\sqrt{2}$; arg(1 – i) =$-\frac{\pi}{4}$; $1 - i = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$;

г) | $-\sqrt{3} - i$ | = 2; arg($-\sqrt{3} - i$) = $-\pi +$ arctg($\frac{1}{\sqrt{3}}$) =$-\frac{5\pi}{6}$;

$-\sqrt{3} - i = 2\,e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

1.2. Дії над комплексними числами

Арифметичні операції над комплексними числами $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ виконуються за такими формулами:

1) $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$;

2) $z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$;

3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$.

Для комплексних чисел справедливі такі закони:

1) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (асоціативний закон додавання);

2) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (комутативний закон додавання).

Якщо комплексні числа z_1і z_2 задані в тригонометричній формі

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

то мають місце рівності:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;$$

$$\mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \varphi_1 + \varphi_2;$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|};$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \varphi_1 - \varphi_2,$$

де $\varphi_1 = \mathrm{Arg}(z_1),\ \varphi_2 = \mathrm{Arg}(z_2)$.

Тому при піднесенні комплексного числа $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ до цілого степеня n будемо мати вираз

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

який називається ф о р м у л о ю М у а в р а .

Корінь n-го степеня із комплексного числа $z\ (|z| > 0)$ має n різних значень, які визначаються формулою

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

де $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $\varphi = \arg z$, $\sqrt[n]{|z|}$ – арифметичний.

Із виразу видно, що всі n різних значень коренів мають один і той самий модуль $\sqrt[n]{|z|}$, а аргументи двох значень, які відповідають числам k і $k+1$, відрізняються один від одного на $\frac{2\pi}{n}$. Тому n значень $\sqrt[n]{z}$ зображуються вершинами правильного n-кутника, вписаного в коло з центром у початку координат і радіусом $\sqrt[n]{|z|}$.

Приклад 1.14. Записати в комплексній формі рівняння:

а) $x^2 + 2x + y^2 - y = 1$; б) $x^2 - y^2 = 1$.

Розв'язання. Нехай $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$. Оскільки

$$x = \mathrm{Re}z = \frac{z+\bar{z}}{2}; y = \mathrm{Im}z = \frac{z-\bar{z}}{2i}; \quad z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2,$$

то:

а) $x^2 + 2x + y^2 - y = 1;$

$$z \cdot \bar{z} + z + \bar{z} - \frac{z-\bar{z}}{2i} = 1; z \cdot \bar{z} + z\left(1 - \frac{1}{2i}\right) + \bar{z}\left(1 + \frac{1}{2i}\right) = 1;$$

$$z \cdot \bar{z} + \left(1 + \frac{i}{2}\right)z + \left(1 - \frac{i}{2}\right)\bar{z} = 1;$$

б) $x^2 - y^2 = 1;$

$$\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 = 1;$$

$$\frac{z^2 + 2z \cdot \bar{z} + \bar{z}^2 + z^2 - 2z \cdot \bar{z} + \bar{z}^2}{4} == 1; \ z^2 + \bar{z}^2 = 2.$$

Приклад 1.15. При яких дійсних значеннях x і y будуть спряженими числа

$$z_1 = x^2 y + 4i \text{ і } z_2 =-5 + i(x^2 + y)?$$

Розв'язання. Шукані значення x і y визначаються системою рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 y = -5, \\ x^2 + y = -4, \end{cases}$$

яка має два розв'язки: $x_1 = 1, y_1 =-5; \ x_2 =-1, y_2 =-5.$

II. ПОСЛІДОВНОСТІ І РЯДИ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

2.1. Послідовність комплексних чисел. Границя послідовності

Якщо кожному числу n із натурального ряду

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

поставлено у відповідність комплексне число z_n, то множина

$$z_1, z_2, z_3, \ldots z_n, \ldots$$

називається п о с л і д о в н і с т ю к о м п л е к с н и х ч и с е л .

Інакше кажучи, послідовність комплексних чисел – це перенумерована нескінченна їх множина.

Далі послідовність комплексних чисел будемо позначати символом $\{z_n\}$.

Комплексне число $c = a + ib$ називається с к і н ч е н н о ю г р а н и ц е ю п о с л і д о в н о с т і $\{z_n\}$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться натуральне число $N(\varepsilon)$ таке, що $|z_n - c| < \varepsilon$ для всіх $n > N(\varepsilon)$.

Послідовність, котра має скінченну границю, називається з б і ж н о ю, а та, що не має, р о з б і ж н о ю . Те, що число c є границею послідовності, символічно записується так:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = c \text{ або } z_n \to c \ (n \to \infty).$$

ε - о к о л о м т о ч к и c називається круг $|z - c| < \varepsilon$ з центром в точці c радіуса ε. Якщо число c є границею послідовності $\{z_n\}$, то це означає, що всі точки z_n для $n > N(\varepsilon)$ містяться в ε-околі точки c.

Послідовність $\{z_n\}$ називається о б м е ж е н о ю , коли існує таке число $M > 0$, що $|z_n| < M$ для всіх n = 1, 2, … В протилежному випадку послідовність називається н е о б м е ж е н о ю .

Послідовність $\{z_n\}$ має нескінченну границю, якщо для довільного числа $M > 0$ знайдеться таке натуральне число $N(M)$, при якому $|z_n| > M$ для всіх $n > N(M)$.

Якщо послідовність $\{z_n\}$ має нескінченну границю, то кажуть, що вона прямує до нескінченності, або розбігається до нескінченності, і записують

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \text{ або } z_n \to \infty \ (n \to \infty).$$

Теорема 1. Збіжна послідовність обмежена і має тільки одну границю.

Теорема 2. Нехай $z_n = x_n + iy_n$. Для того щоб послідовність $\{z_n\}$ мала скінченну границю $c = a + ib$, необхідно і достатньо, щоб

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \ \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

Теорема 3. Якщо $\lim_{n\to\infty} z_n = c$, то $\lim_{n\to\infty} | z_n | = |c|$; якщо $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$, то $\lim_{n\to\infty} | z_n | = \infty$; а $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\lim_{n\to\infty} | z_n | = 0$.

Теорема 4. Нехай $\{z_n\}$ і $\{z'_n\}$ – збіжні послідовності комплексних чисел. Тоді їх сума $\{z_n + z'_n\}$, добуток $\{z_n \cdot z'_n\}$ і частка $\left\{\frac{z_n}{z'_n}\right\}$ (за умови, що $z'_n \neq 0$ і $\lim_{n\to\infty} z'_n \neq 0$) – збіжні послідовності, причому

$$\lim_{n\to\infty} (z_n + z'_n) = \lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} z'_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} (z_n \cdot z'_n) = \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \lim_{n\to\infty} z'_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{z'_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} z_n}{\lim_{n\to\infty} z'_n}.$$

Теорема 5. (критерій Коші) Для того щоб послідовність збігалася, тобто мала скінченну границю, необхідно і достатньо, аби для довільного $\varepsilon > 0$ існувало натуральне число $N(\varepsilon)$ таке, що

$$|z_m - z_n| < \varepsilon \text{ для всіх } m, n > N(\varepsilon).$$

Теорема 6. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c \quad (c \neq 0, \infty)$ тоді і лише тоді, коли $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |c|$ і існує така послідовність $\{\operatorname{Arg} z_n\}$, що $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Arg} z_n = \operatorname{Arg} c$.

Приклад 2.1. Користуючись означенням границі довести, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n + in - 1 + i}{n} = 2 + i.$$

Розв'язання. Нехай ε – довільне число. Оскільки

$$|z_n - (2+i)\,| = \left|\frac{2n + in - 1 + i}{n} - (2+i)\right| = \left|\frac{-1+i}{n}\right| = \frac{\sqrt{2}}{n},$$

то для знаходження значення n, задовольняючого умову $|z_n - c| < \varepsilon$, тобто $|z_n - (2+i)\,| < \varepsilon$, достатньо розв'язати нерівність $\frac{\sqrt{2}}{n} < \varepsilon$, звідки маємо $n > \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$. Отже, за N можна взяти цілу частину числа $\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$, тобто $N(\varepsilon) = \left[\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\right]$ (якщо $\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} < 1$, то візьмемо $N=1$). Тоді нерівність $|z_n - (2+i)\,| < \varepsilon$ виконуватиметься для всіх $n > N(\varepsilon)$. Оскільки ε – довільне число, то це означає, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n + in - 1 + i}{n} = 2 + i.$$

Приклад 2.2. Обчислити границю послідовності

$$z_n = \frac{n^2 + i}{n^2 - i}.$$

Розв'язання. Перший спосіб. Для знаходження границі послідовності $\{z_n\}$ виділимо її дійсну і уявну частини. Маємо

$$z_n = \frac{n^2 + i}{n^2 - i} = \frac{(n^2+i)^2}{n^4 + 1} = \frac{n^4 - 1 + i2n^2}{n^4 + 1} = \frac{n^4 - 1}{n^4 + 1} + i\,\frac{2n^2}{n^4 + 1}.$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 - 1}{n^4 + 1} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^4 + 1} = 0,$$

то за теоремою 2 послідовність $\{z_n\}$ має границю, причому

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 1 + 0 \cdot i = 1.$$

Другий спосіб. Перетворюючи z_n і користуючись теоремами про границю послідовностей, знайдемо

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + i}{n^2 - i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + i\frac{1}{n^2}}{1 - i\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + i\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - i\frac{1}{n^2}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + i\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{1 - i\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{(1 + i \cdot 0)}{(1 - i \cdot 0)} = 1.$$

Приклад 2.3. Обчислити границю послідовності

$$z_n = \left(\frac{3i + 4}{6}\right)^n.$$

Розв'язання. Оскільки $\left|\frac{3i+4}{6}\right| = \frac{5}{6} < 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{3i + 4}{6}\right|^n = 0.$$

Тоді за теоремою 3 і

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3i + 4}{6}\right)^n = 0.$$

Приклад 2.4. Обчислити границю послідовності

$$z_n = \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^n + in^2\left(1 - \cos\frac{2}{n}\right).$$

Розв'язання. Нехай

$$x_n = \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^n; \quad y_n = n^2\left(1 - \cos\frac{2}{n}\right).$$

Знайдемо границі цих послідовностей

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{2n+1}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1 + \frac{2}{2n+1}\right)^{\frac{2n+1}{2}}\right)^{\frac{2n}{2n+1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+1}} = e,$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} n^2\left(1 - \cos\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2\sin^2\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = 2.$$

Відтак, за теоремою 2 маємо

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = e + 2\,i.$$

Приклад 2.5. Обчислити границю послідовності

$$z_n = \frac{a^n}{1+a^n}, |a| \neq 1.$$

Розв'язання. Якщо $|a| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}|a^n| = \lim\limits_{n\to\infty}|a|^n$=0. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a^n) = 1$. За теоремою 3 про границю частки

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a^n}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+a^n)} = 0.$$

У випадку $|a| > 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = 0$ і

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1 + a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{a^n} + 1\right)} = 1.$$

Отже, задана послідовність збігається для $|a| < 1$ і $|a| > 1$.

Приклад 2.6. Обчислити границю послідовності $z_n = y_n$, де

$$y_n = \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{3\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

Розв'язання. Нехай

$$x_n = \frac{1}{n}\left(\cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{3\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right),$$

а

$$z_n = x_n + iy_n =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n} + \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{(n-1)\pi}{n} \right.$$
$$\left. + i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\exp\left(i\frac{\pi}{n}\right) + \exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right) + \ldots + \exp\left(i\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right).$$

Враховуючи, що вираз в дужках є сумою $(n-1)$ членів геометричної прогресії і $exp(i\pi) = -1$, одержимо

$$z_n = \frac{1}{n}\frac{\exp\left(i\frac{\pi}{n}\right)\left(1-\exp\left(i\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right)}{1-\exp\left(i\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1+\exp\left(i\frac{\pi}{n}\right)}{1-\exp\left(i\frac{\pi}{n}\right)} =$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}=$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}{\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2+\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}=$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}=i\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{n\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.$$

Звідси

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\mathrm{Im}z_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\frac{\pi}{2n}\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}=\frac{2}{\pi}.$$

Приклад 2.7. Довести, що

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^x(\cos y+i\sin y)=e^z,\quad z=x+iy.$$

Доведення. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2}{n^2}+\frac{y^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{\frac{2x}{n}+\frac{x^2}{n^2}+\frac{y^2}{n^2}}}\right)^{\frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2}{n^2}+\frac{y^2}{n^2}\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(x+\frac{x^2}{2n}+\frac{y^2}{2n}\right)}=e^x,$$

а

$$\mathrm{Arg}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=n\cdot\mathrm{Arg}\left(1+\frac{z}{n}\right)$$

і

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\arg\left(1+\frac{z}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\mathrm{arctg}\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{y}{1+\frac{x}{n}} = y,$$

то за теоремою 6 маємо

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z.$$

Вправи.

Користуючись означенням границі, довести, що послідовність $\{z_n\}$ має границею число C, коли:

1. $z_n = \frac{3n+2i}{5n+3i}$; $C = \frac{3}{5}$.

2. $z_n = \frac{2-5ni}{7n+i}$; $C = -\frac{5i}{7}$.

3. $z_n = \frac{n^2-i}{n^2+3i}$; $C = 1$.

4. $z_n = \frac{(5i)^n-1}{(5i)^n+2}$; $C = 1$.

Обчислити границі послідовностей $\{z_n\}$

5. $z_n = \frac{5n+5}{4n} + i\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{5^n}\right)$.

6. $z_n = \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2} + i\left(\frac{(n+1)!+n!}{(n+1)!-n!}\right)$.

7. $z_n = \left(\cos\frac{1}{n} + 2\sin\frac{3}{n}\right)^n + i\left(\frac{1-\sin\frac{2}{n}-\cos\frac{2}{n}}{1+\sin\frac{2}{n}-\cos\frac{2}{n}}\right)$.

8. $z_n = \frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}$; $|a| < 1$, $|b| < 1$.

9. $z_n = \left(1+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$.

10. $z_n = \left(\frac{4}{5}\sin\frac{\pi}{6}+\frac{16}{25}\sin\frac{\pi}{3}+\ldots+\frac{4^n}{5^n}\sin\frac{n\pi}{6}\right)$.

Відповіді: **5**. $\frac{5}{4}+\frac{5}{4}i$. **6**. $\frac{1}{2}+i$. **7**. e^6-i. **8**. $\frac{1-b}{1-a}$. **9**. $\frac{4-\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}}$. **10**. $\frac{10}{41-20\sqrt{3}}$.

2.2. Числові ряди

Нехай $\{z_n = x_n + y_n\}$ – послідовність комплексних чисел. Вираз

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots + = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \tag{2.1}$$

називається *числовим рядом*. Числа $z_1, z_2, \ldots$ – це *члени ряду*, z_n – n-й, або *загальний член ряду*; суми $S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ $(n = 1,2,\ldots)$ – *часткові суми ряду*.

Ряд (2.1) називається *збіжним*, якщо збігається послідовність його часткових сум, і *розбіжним*, якщо вона розбігається. Якщо ряд (2.1) збігається, то границю

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n$$

називають *сумою ряду* (2.1) і записують

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Виходячи з означення збіжності ряду і його суми, можна довести наведені нижче властивості рядів з комплексними членами.

1. Необхідна умова збіжності ряду (2.1) – прямування до нуля n-го члена, тобто

$$\lim_{n \to \infty} z_n = 0.$$

2. Якщо ряд (2.1) збігається і має суму S, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} k z_n$ є збіжним, причому

$$\sum_{n=1}^{\infty} k z_n = k \sum_{n=1}^{\infty} z_n = kS.$$

3. Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{z}_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{z}_n$ збіжні, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{z}_n + \hat{z}_n)$ також є збіжним, причому

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{z}_n + \hat{z}_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{z}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{z}_n.$$

Теорема 7 (К р и т е р і й К о ш і). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ збігається тоді і тільки тоді, коли для довільного $\varepsilon > 0$ існує натуральне число $N(\varepsilon)$ таке, що

$$|z_{n+1}+z_{n+2}+\ldots+z_m| < \varepsilon \text{ для всіх } m > n > N(\varepsilon).$$

Теорема 8. Для збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + iy_n)$ до числа $S = A+iB$ необхідно і достатньо, щоб ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ збігалися відповідно до A і B, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + iy_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i\sum_{n=1}^{\infty} y_n = A + iB.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ називається а б с о л ю т н о з б і ж н и м , якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ збігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ розбігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ називається у м о в н о з б і ж н и м .

Із критерія Коші випливає, що кожний абсолютно збіжний ряд збігається. В свою чергу, абсолютна збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + iy_n)$ є еквівалентною абсолютній збіжності рядів $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

Оскільки $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ є рядом з невід'ємними членами, то при дослідженні його на абсолютну збіжність можна використовувати всі ознаки для цих рядів. Наведемо їх.

О з н а к и п о р і в н я н н я р я д і в

1. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний і, починаючи з деякого номера n, виконується умова $b_n \leq a_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ є збіжним.
2. Якщо існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = k \ (0 < k < \infty),$$

то ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігаються або розбігаються разом.

О з н а к а Д ' А л а м б е р а . Якщо існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний при $q < 1$ і розбіжний при $q > 1$.

Число λ називається *верхньою межею* послідовності дійсних чисел $\{a_n\}$ (записується $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \lambda$), якщо:

1) існує підпослідовність $\{a_{n_k}\}$, для якої $\lim\limits_{n_k\to\infty} a_{n_k} = \lambda$;

2) для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке натуральне число $N(\varepsilon)$, при якому для всіх $n > N(\varepsilon)$ виконується нерівність $a_n < \lambda + \varepsilon$.

Із означення верхньої межі випливає, що коли послідовність $\{a_n\}$ має границю, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$. Якщо послідовність необмежена зверху, то будемо говорити, що $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \infty$.

Ознака Коші. Якщо

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний при $q < 1$ і розбіжний при $q > 1$.

Узагальнена ознака Коші. Якщо

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \beta,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний при $\beta < 1$ і розбіжний при $\beta > 1$.

Знакозмінними називаються ряди вигляду:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^n a_n + \ldots,$$

де $a_1, a_2, a_3, \ldots$ – додатні числа.

Ознака Лейбніца. Якщо в знакозмінному ряді абсолютне значення загального члена монотонно прямує до нуля (тобто $0 < a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$), до того ж $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то знакозмінний ряд збігається.

В прикладах 2.8, 2.9 обчислити суму рядів.

Приклад 2.8.

1) $1 + r\cos\alpha + r^2\cos 2\alpha + \ldots + r^n\cos n\alpha + \ldots$;
2) $r\sin\alpha + r^2\sin 2\alpha + \ldots + r^n\sin n\alpha + \ldots$, де $0 < r < 1$.

Розв'язання. Для обчислення сум заданих рядів перейдемо до ряду з комплексними членами:

$$1+r\cos\alpha+\ldots+r^n\cos n\alpha+\ldots+i(r\sin\alpha+\ldots+r^n\sin n\alpha+\ldots)=$$
$$=1+r(\cos\alpha+i\sin\alpha)+\ldots+r^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)+\ldots=1+$$
$$+re^{i\alpha}+\ldots+r^ne^{in\alpha}+\ldots$$

Отриманий ряд буде збіжним, бо є геометричною прогресією із знаменником $|re^{i\alpha}|=|r|<1$. Тому, позначивши відповідно через S_1 і S_2 суми рядів 1) і 2), маємо

$$S_1+iS_2+\ldots=1++re^{i\alpha}+\ldots+r^ne^{in\alpha}+\ldots=\frac{1}{1-re^{i\alpha}}=$$
$$=\frac{1}{1-r(\cos\alpha+i\sin\alpha)}=$$
$$=\frac{1-r\cos\alpha+ir\sin\alpha}{1-2r\cos\alpha+r^2}=\frac{1-r\cos\alpha}{1-2r\cos\alpha+r^2}+i\frac{r\sin\alpha}{1-2r\cos\alpha+r^2}.$$

Звідси

$$S_1=1+r\cos\alpha+r^2\cos2\alpha+\ldots+r^n\cos n\alpha+\ldots=\frac{1-r\cos\alpha}{1-2r\cos\alpha+r^2};$$
$$S_2=r\sin\alpha+r^2\sin2\alpha+\ldots+r^n\sin n\alpha+\ldots=\frac{r\sin\alpha}{1-2r\cos\alpha+r^2}.$$

Приклад 2.9.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+4n+3}+\frac{i}{3^n}\right).$$

Розв'язання. Обчислимо суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+3}$, користуючись безпосередньо означенням збіжності ряду. Оскільки

$$a_n=\frac{1}{n^2+4n+3}=\frac{1}{(n+3)(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right),$$

то сума ряду

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\ldots\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{5}{12}.$$

Суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ знайдемо за формулою суми нескінченної геометричної прогресії із знаменником $\frac{1}{3}$. Маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1/3}{1 - 1/3} = \frac{1}{2}.$$

Отже,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2 + 4n + 3} + \frac{i}{3^n} \right) = \frac{5}{12} + \frac{i}{2}.$$

В прикладах 2.10 – 2.13 дослідити ряди на збіжність.

Приклад 2.10.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{n} + i \frac{2n+1}{n^3 + 2} \right).$$

Розв'язання. За теоремою 7 необхідно і достатньо, щоб збігалися ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n} \qquad \text{і} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^3 + 2}.$$

Але ж перший ряд розбігається, бо не виконується необхідна умова збіжності ряду:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \cos \frac{1}{n} = 1 \neq 0.$$

Тому даний ряд буде розбіжний незалежно від збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^3+2}$.

Приклад 2.11.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \operatorname{tg} \frac{\pi}{3^n} + i n^2 \sin \frac{\pi}{3^n} \right).$$

Розв'язання. Оскільки при $n \to \infty$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3^n} \approx \frac{\pi}{3^n} \qquad \text{і} \qquad \sin \frac{\pi}{3^n} \approx \frac{\pi}{3^n},$$

то, застосовуючи до кожного із рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{3^n} \qquad \text{і} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{3^n}$$

ознаку Д’Аламбера, відповідно отримаємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\mathrm{tg}\frac{\pi}{3^{n+1}}}{n\mathrm{tg}\frac{\pi}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)3^n}{n3^{n+1}}=\frac{1}{3}<1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}}{n^2\sin\frac{\pi}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 3^n}{n^2 3^{n+1}}=\frac{1}{3}<1.$$

Звідси випливає збіжність обох рядів. Тому за теоремою 7 даний ряд є збіжним.

Приклад 2.12.

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{in}.$$

Розв'язання. Позаяк $e^{in}=\cos n+i\sin n$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{in}=\sum_{n=1}^{\infty}\cos n+i\sum_{n=1}^{\infty}\sin n.$$

Ряди $\sum_{n=1}^{\infty}\cos n$ і $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n$ розбігаються, бо границі їх загальних членів $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ не існують, а це означає, що не виконується необхідна умова збіжності рядів. Тому за теоремою 7 буде розбіжним і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}e^{in}$.

Приклад 2.13.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in}{2^n}.$$

Розв'язання. Скориставшись формулою Ейлера $\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$, знаходимо

$$a_n=\frac{\cos in}{2^n}=\frac{e^n+e^{-n}}{2^{n+1}}=\frac{1+e^{2n}}{2^{n+1}e^n},$$

$$a_{n+1}=\frac{\cos i(n+1)}{2^{n+1}}=\frac{e^{n+1}+e^{-n-1}}{2^{n+2}}=\frac{1+e^{2n+2}}{2^{n+2}e^{n+1}}.$$

Оскільки даний ряд з додатними членами, то за ознакою Д’Аламбера маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1+e^{2n+2}}{e(1+e^{2n})}=\frac{e}{2}>1.$$

Відтак, заданий ряд розбігається.

В прикладах 2.14 – 2.18 дослідити ряди на абсолютну збіжність.

Приклад 2.14.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}.$$

Розв'язання. Оскільки

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}=i-\frac{1}{2}-\frac{i}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k}-i\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1},$$

то його збіжність еквівалентна збіжності обох рядів $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k}$ і $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1}$, які збігаються за ознакою Лейбніца, але умовно. Отже, даний ряд збігається умовно.

Приклад 2.15.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ni)^n}{3^n\cdot n!}.$$

Розв'язання. Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n\cdot n!}$, який складено із модулів заданого ряду. До нього застосуємо ознаку Д’Аламбера. Позаяк

$$a_n=\frac{n^n}{3^n\cdot n!},\qquad a_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}\cdot(n+1)!},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3^n\cdot n!\,(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}\cdot(n+1)!\,n^n}=\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\frac{e}{3}<1,$$

то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n\cdot n!}$ збігається, а заданий ряд збігається абсолютно.

Приклад 2.16.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(1+i)^n}.$$

Розв'язання. За формулою Коші маємо

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{|1+i|^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{|1+i|}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1.$$

Відтак, даний ряд збігається абсолютно.

Приклад 2.17.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2+\ i}{5}\right)^{n^2}.$$

Розв'язання. До ряду, складеного із модулів членів заданого ряду, застосуємо ознаку Коші. Маємо

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{2+\ i}{5}\right)^{n^2}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2+\ i}{5}\right|^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n=0<1.$$

Даний ряд збігається абсолютно.

Приклад 2.18.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!\,(e+2i)^n}.$$

Розв'язання. Застосовуючи ознаку Д'Аламбера до ряду, складеного із модулів даного ряду, отримаємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}\,n!\,|e+2i|^n}{(n+1)!\,|e+2i|^{n+1}n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\frac{1}{|e+2i|}=$$

$$=\frac{e}{\sqrt{e^2+4}}<1.$$

Отже, даний ряд збігається абсолютно.

Вправи.

В прикладах **1, 2** обчислити суму рядів.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4n^2-1}+\frac{2i}{5^n}\right)$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+3n+2}+\frac{i}{2n(n+1)}\right)$.

В прикладах **3 – 8** дослідити ряди на збіжність.

3.$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}+\frac{i}{n^2+1}\right)$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+5n+6}+\frac{i}{2^n}\right)$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2\left(1-\cos\frac{2}{n}\right)+\frac{i}{\sqrt{n}}\right)$.

6.$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)3^{2n-1}}+\frac{2^n}{n!}i\right)$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+3}+\left(\frac{i}{2}\right)^n\right)$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi}{5^n}+\frac{i}{(n+1)(n+3)}\right)$

В прикладах **9 – 14** дослідити ряди на абсолютну збіжність.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin in}{3^n}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2in}}{\sqrt{n^3}}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2ni}{5n-i}\right)^n$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3ni^n-2}{5n}\right)^n$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{\sqrt[3]{n^2}}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2+i^n}{n}\right)^n$.

Відповіді: **1.** $\frac{1}{2}(1+5i)$. **2.** $\frac{1}{2}(1+i)$. **3**. Розбіжний. **4**. Збіжний. **5**. Розбіжний. **6**. Збіжний. **7**. Розбіжний. **8**. Збіжний. **9**. Абсолютно збіжний. **10**. Абсолютно збіжний. **11**. Абсолютно збіжний. **12**. Абсолютно збіжний. **13**. Умовно збіжний. **14**. Розбіжний.

ІІІ. ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

3.1. Множини точок на площині. Функції

Позначимо через E деяку множину точок комплексної площини. Множина E називається обмеженою, якщо є круг, в якому вона цілком міститься. Якщо його не існує, то множина E називається необмеженою.

Наприклад, круг $|z-2|<1$ – множина обмежена, оскільки вона цілком міститься в крузі $|z|<R$, де $R>3$. А верхня півплощина $\mathrm{Re}z>0$ є прикладом необмеженої множини.

$z_0\in E$ називається внутрішньою точкою множини E, якщо вона міститься в E разом з деяким своїм околом.

Так, точка $z_0=2+3i$ – внутрішня для множини E: $\mathrm{Re}z=x\geq 0$, оскільки ця півплощина містить в собі, наприклад, круг $|z-2-3i|<1$.

Інтервал $-1<x<2,\ y=0$ не має внутрішніх точок – він не містить в собі ніякого круга.

Множина E називається відкритою, якщо кожна її точка є внутрішньою для неї.

Наприклад, круг $|z-a|<R$, кільце $r<|z-a|<R$ – відкриті множини.

$z_0\in E$ називається граничною точкою множини E, якщо довільний її окіл містить нескінченно багато точок множини E. Кожна точка відкритої множини є граничною. Множина, яка містить в собі всі свої граничні точки, називається замкненою.

$z_0\in E$ називається межовою точкою множини E, якщо будь-який її окіл містить як точки множини E, так і точки, які їй не належать. Кожна точка відкритої множини є граничною. Множина всіх межових точок множини E називається її межею.

Відкрита множина називається областю, якщо вона є зв'язною, тобто, якщо будь-які дві її точки можна з'єднати ламаною, яка цілком належить множині E.

Область E разом із своєю межею називається замкненою і позначається $\bar{E}$.

Наприклад, круг $|z-a|<R$ і кільце $r<|z-a|<R$ – області, позаяк ці множини відкриті й зв'язні. Якщо ж $|z-a|\leq R$ і $r\leq|z-a|\leq R$, то вони є замкненими областями.

Множина E – об'єднання двох кругів $|z+1|<1$ і $|z-1|<1$ – відкрита, але не є зв'язною, оскільки, наприклад, центри цих кругів не можна з'єднати ламаною, всі точки якої належали б множині E.

Якщо кожному числу $z \in E$ за певним законом ставиться у відповідність одне або декілька комплексних чисел w, то кажуть, що на множині E визначена функція комплексної змінної $w = f(z)$ – відповідно однозначна чи багатозначна.

E називається множиною визначення функції, а $\{w: w = f(z), z \in E\}$ – множиною значень цієї функції.

Приміром, функції $w = z^2$, $w = |z|$, $w = \mathrm{Re}z$ – однозначні і визначені на всій комплексній площині, функція ж $w = Argz$ $(z \neq 0)$ – нескінченнозначна.

Прикладом n-значної функції є $w = \sqrt[n]{z}$ (n∈N, n ≥ 2), яка визначена на всій комплексній площині.

Функцію $w = f(z)$ можна записати у вигляді

$$w = u + iv = f(x+iy),$$

тобто

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y),$$

де $u = u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(z)$, $v = v(x,y) = \mathrm{Im}\, f(z)$.

$u(x,y)$ і $v(x,y)$ при цьому називають дійсною і уявною частинами функції $f(z)$ відповідно.

Відтак, задавання функції комплексної змінної $w = f(z)$ рівносильне задаванню двох функцій двох дійсних змінних $u(x,y)$ і $v(x,y)$.

Точку w називають образом точки z, а точку z – прообразом точки w при відображенні $w = f(z)$.

3.2. Елементарні трансцендентні функції комплексної змінної

Показникова функція. Показникову функцію комплексної змінної $z = x + iy$ позначають e^z або $\exp z$ і визначають за допомогою рівності

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Якщо $y = 0$, то із цієї рівності випливає, що для дійсних чисел $z = x$ показникова функція e^z збігається з показниковою функцією дійсної змінної: $e^z = e^x$.

Показникова функція має такі властивості:

1. $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, де z_1, z_2– довільні комплексні числа;
2. $e^{z_1}/e^{z_2} = e^{z_1-z_2}$, де z_1, z_2– довільні комплексні числа;
3. $1/e^z = e^{-z}$;
4. $(e^z)^n = e^{nz}$, n∈ N;
5. Показникова функція комплексної змінної є періодичною з уявним основним періодом $2\pi i$:
$$e^{z+2\pi i} = e^z;$$
6. Функція e^z не перетворюється в нуль ні при яких значеннях z, оскільки $|e^z| = e^x$, хоча $e^{2\pi i} = 1$, а $e^{\pi i} = -1$.
7. Мають місце такі співвідношення:

$$\lim_{\mathrm{Re}z \to -\infty (x \to -\infty)} e^z = 0; \qquad \lim_{\mathrm{Re}z \to +\infty (x \to +\infty)} e^z = \infty.$$

Вираз e^z при $z \to \infty$ не має змісту.

Тригонометричні і гіперболічні функції комплексної змінної визначаються рівностями:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \mathrm{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \mathrm{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z};$$
$$\mathrm{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \mathrm{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \mathrm{th} z = \frac{\mathrm{sh} z}{\mathrm{ch} z}, \quad \mathrm{cth} z = \frac{\mathrm{ch} z}{\mathrm{sh} z}.$$

При дійсних значеннях z ці означення приводять до тригонометричних функцій дійсної змінної. Так, при $z = x$ маємо:

$$\cos z = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2}(\cos x + i\sin x + \cos x - i\sin x) = \cos x.$$

Зазначимо, що всі відомі співвідношення між тригонометричними і гіперболічними функціями дійсної змінної зберігаються і в комплексній області. Однак із основної тригонометричної тотожності $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ не випливає, що $|\cos z| \leq 1$ і $|\sin z| \leq 1$ для всіх z, оскільки

$$\lim_{y\to\pm\infty} \sin iy = \infty, \ \lim_{y\to\pm\infty} \cos iy = \infty.$$

Так, наприклад, $\cos i = \frac{e+e^{-1}}{2} \approx > 1.$

Між гіперболічними і тригонометричними функціями існує такий зв'язок:

$$\sin z =- i\mathrm{sh} iz, \cos z = \mathrm{ch} iz, \mathrm{tg} z =- i\mathrm{th} iz, \mathrm{ctg} z = i\mathrm{cth} iz.$$

Звідси випливає, що будь-які співвідношення між тригонометричними функціями переходять у відповідні співвідношення між гіперболічними функціями. Тобто паралельно ми отримали всі формули гіперболічної тригонометрії.

Зазначимо, що в комплексній області тригонометричні функції $\sin z$ і $\cos z$ періодичні з періодом 2π, $\mathrm{tg} z$ і $\mathrm{ctg} z$ – з періодом π. Гіперболічні функції $\mathrm{sh} z$ і $\mathrm{ch} z$ періодичні з періодом $2\pi i$, $\mathrm{th} z$ і $\mathrm{cth} z$ – з періодом πi.

Логарифмічною функцією комплексной змінної називається така, що обернена до показникової, тобто яка визначається рівнянням $e^w = z$ $(z \neq 0)$ і позначається $w = \mathrm{Ln} z$, причому

$$\mathrm{Ln} z = \ln|z| + i(\mathrm{Arg} z + 2k\pi), k\in \mathrm{Z}.$$

Ця функція нескінченнозначна. Головним значенням логарифма числа z $(z \neq 0, z \neq \infty)$, що позначається символом $\ln z$, називається вираз

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z.$$

Тоді для кожного комплексного числа z $(z \neq 0, z \neq \infty)$

$$\mathrm{Ln} z = \ln z + 2k\pi i, \ k\in \mathrm{Z}.$$

Справедливі наступні співвідношення:

$\mathrm{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Ln} z_1 + \mathrm{Ln} z_2, \ \mathrm{Ln}(z_1/z_2) = \mathrm{Ln} z_1 - \mathrm{Ln} z_2 \ (z_1 \cdot z_2 \neq 0),$

де z_1, z_2 – довільні комплексні числа.

У кожній із цих рівностей ліва і права частини при заданих z_1 і z_2 зображають нескінченні множини комплексних чисел. В них множини обох частин кожного із співвідношень є однаковими.

Обернені тригонометричні функції $\mathrm{Arcsin}z, \mathrm{Arccos}z$, $\mathrm{Arctg}z$, $\mathrm{Arcctg}z$ визначаються як обернені відповідно до $\sin w$, $\cos w$, $\mathrm{tg}w$, $\mathrm{ctg}w$.

Всі вони нескінченнозначні і виражаються через логарифмічну функцію наступним чином:

$$\mathrm{Arcsin}z = -i\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right),$$

$$\mathrm{Arccos}z = -i\mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right),$$

$$\mathrm{Arctg}z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{i-z}{i+z}, z \neq \pm i,$$

$$\mathrm{Arcctg}z = \frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{z-i}{z+i}, z \neq \pm i.$$

Головні значення обернених тригонометричних функцій $\arcsin z$, $\arccos z$, $\mathrm{arctg}z$, $\mathrm{arcctg}z$ отримаємо із наведених формул, якщо візьмемо головні значення відповідних логарифмічних функцій.

Загальна степенева функція $w = z^a$, де $a = \alpha + i\beta$ – будь-яке комплексне число, визначається рівністю

$$z^a = e^{a\mathrm{Ln}z}.$$

Вона є нескінченнозначною, а її головне значення – $z^a = e^{a\ln z}$.

Загальна показникова функція $w = a^z$ ($a \neq 0$ – будь-яке комплексне число) визначається рівністю

$$a^z = e^{z\mathrm{Ln}a}.$$

Головне значення цієї нескінченнозначної функції – $a^z = e^{z\ln a}$.

Приклад 3.1. Записати в показниковій формі комплексні числа: $1+i$; $-1+i$; $-1-i$.

Розв'язання. Оскільки показникова форма комплексного числа має такий вигляд: $z = |z|\, e^{-i\varphi}$, де $\varphi = \arg z$, то

$$1+i = \left\{|1+i| = \sqrt{2},\ \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}\right\} = \sqrt{2}\ e^{\frac{\pi}{4}i};$$

$$-1+i = \left\{|-1+i| = \sqrt{2},\ \arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4}\right\} = \sqrt{2}\ e^{\frac{3\pi}{4}i};$$

$$-1-i = \left\{|-1-i| = \sqrt{2},\ \arg(-1-i) = -\frac{3\pi}{4}\right\} = \sqrt{2}\ e^{-\frac{3\pi}{4}i}.$$

Відповідь. $1+i=\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}$; $-1+i=\sqrt{2}\,e^{\frac{3\pi}{4}i}$; $-1-i=\sqrt{2}\,e^{-\frac{3\pi}{4}i}$.

Приклад 3.2. Знайти модулі і головні значення аргументів комплексних чисел e^{2-2i}, e^{3+4i}, e^{-3-4i}.

Розв'язання. Враховуючи, що $-\pi<\arg z\le\pi$, отримаємо:

$$e^{2-2i}=e^{2}(\cos(-2)+i\sin(-2)),$$

звідки $\left|e^{2-2i}\right|=e^{2}, \arg(e^{2-2i})=-2$;

$$e^{3+4i}=e^{3}(\cos 4+i\sin 4)=e^{3}(\cos(4-2\pi)+i\sin(4-2\pi)),$$

отже $\left|e^{3+4i}\right|=e^{3}, \arg(e^{3+4i})=4-2\pi$;

$$e^{-3-4i}=e^{-3}(\cos(-4)+i\sin(-4))=e^{-3}(\cos(2\pi-4)+i\sin(2\pi-4)),$$

звідки $\left|e^{-3-4i}\right|=e^{-3}, \arg(e^{-3-4i})=2\pi-4$.

Відповідь. e^{2}, –2; $e^{3}, 4-2\pi$; $e^{-3}, 2\pi-4$.

Приклад 3.3. Знайти суми:

$$S_1(x)=1+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx;$$

$$S_2(x)=\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx.$$

Розв'язання. Скориставшись формулою суми геометричної прогресії $S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, знайдемо, що

$$\mathrm{S}(x)=S_1(x)+iS_2(x)=1+(\cos x+i\sin x)+\ldots+(\cos nx+i\sin nx)=$$

$$=1+e^{ix}+\cdots+e^{inx}=\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}=$$

$$=\frac{e^{\frac{i(n+1)x}{2}}\left(e^{\frac{i(n+1)x}{2}}-e^{-\frac{i(n+1)x}{2}}\right)}{e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{\frac{ix}{2}}-e^{-\frac{ix}{2}}\right)}=\frac{e^{\frac{inx}{2}}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}+i\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{sin\frac{x}{2}}.$$

Відповідь.

$$S_1(x)=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}},\quad S_2(x)=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Приклад 3.4. Виразити через тригонометричні і гіперболічні функції дійсної змінної дійсні та уявні частини, а також модуль функцій 1) $\sin z$ та 2) $\mathrm{tg} z$.

Розв'язання.

$$1)\ \sin z = \sin(x + iy) = \sin x\cos(iy) + \cos x\sin(iy) =$$
$$= \sin x\,\mathrm{ch} y + i\cos x\,\mathrm{sh} y,$$
$$u = \sin x\,\mathrm{ch} y, \qquad v = \cos x\,\mathrm{sh} y,$$
$$|\sin z| = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{\sin^2 x\,\mathrm{ch}^2 y + \cos^2 x\,\mathrm{sh}^2 y} =$$
$$= \sqrt{\sin^2 x\,\mathrm{ch}^2 y + (1 - \sin^2 x)\mathrm{sh}^2 y} =$$
$$= \sqrt{\mathrm{sh}^2 y + (\mathrm{ch}^2 y - \mathrm{sh}^2 y)\sin^2 x} = \sqrt{\mathrm{sh}^2 y + \sin^2 x}.$$
$$2)\ \mathrm{tg} z = \frac{\sin(x + iy)}{\cos(x + iy)} = \frac{\sin x\,\mathrm{ch} y + i\cos x\,\mathrm{sh} y}{\cos x\,\mathrm{ch} y - i\sin x\,\mathrm{sh} y} =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\sin 2x\,\mathrm{ch}^2 y - \sin 2x\,\mathrm{sh}^2 y + i(\sin^2 x\,\mathrm{sh} 2y + \cos^2 x\,\mathrm{sh} 2y)}{\cos^2 x\,\mathrm{ch}^2 y + \sin^2 x\,\mathrm{sh}^2 y} =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\sin 2x + i\,\mathrm{sh} 2y}{\mathrm{sh}^2 y + \cos^2 x},$$

бо

$$\cos^2 x\,\mathrm{ch}^2 y + \sin^2 x\,\mathrm{sh}^2 y = \mathrm{sh}^2 y + \cos^2 x(\mathrm{ch}^2 y - \mathrm{sh}^2 y) =$$
$$= \mathrm{sh}^2 y + \cos^2 x.$$

Отже,

$$u = \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{\mathrm{sh}^2 y + \cos^2 x}, \qquad v = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{sh} 2y}{\mathrm{sh}^2 y + \cos^2 x},$$
$$|\mathrm{tg} z| = \sqrt{u^2 + v^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\sin^2 2x + \mathrm{sh}^2 2y}}{\mathrm{sh}^2 y + \cos^2 x}.$$

Відповідь. 1) $u = \sin x\,\mathrm{ch} y,\ v = \cos x\,\mathrm{sh} y, \sqrt{\mathrm{sh}^2 y + \sin^2 x}$;

2) $\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{\mathrm{sh}^2 y + \cos^2 x}, \qquad \frac{1}{2}\frac{\mathrm{sh} 2y}{\mathrm{sh}^2 y + \cos^2 x}, \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\sin^2 2x + \mathrm{sh}^2 2y}}{\mathrm{sh}^2 y + \cos^2 x}$.

Приклад 3.5. Обчислити $\mathrm{Ln}(3 - 4i)$; $\mathrm{Ln}\frac{1+i}{1-i}$; $\ln(1 + i)$.

Розв'язання. За означенням

$$\text{Ln}z = \ln|z| + i(\text{Arg}z + 2k\pi), k \in \text{Z},$$
$$\ln z = \ln|z| + i\arg z.$$

Тому маємо наступне:

$$\text{Ln}(3-4i) = \left\{|3-4\,i| = 5, \arg(3-4i) = -\text{arctg}\frac{4}{3}\right\} =$$
$$= \ln 5 + \left(2k\pi - \text{arctg}\frac{4}{3}\right)i,$$

$$\text{Ln}\left(\frac{1+\ i}{1-\ i}\right) = \text{Ln}\frac{(1+\ i)^2}{(1-\ i)(1+\ i)} = \text{Ln}i = \left\{|i| = 1, \arg(i) = \frac{\pi}{2}\right\} =$$
$$= \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i,$$

$$\ln(1+\ i) = \left\{|1+\ i| = \sqrt{2}, \arg(1+\ i) = \frac{\pi}{4}\right\} =$$
$$= \frac{1}{2}\ln 2 + \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)i.$$

Відповідь. $\ln 5 + \left(2k\pi - \text{arctg}\frac{4}{3}\right)i$; $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i$;
$\frac{1}{2}\ln 2 + \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)i$, $k \in \text{Z}$.

Приклад 3.6. Обчислити

$$1^{-i},\ i^i,\ \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}.$$

Розв'язання.

$$1^{-i} = e^{\,-i\text{Ln}1} = e^{-i(\ln 1 + i(\arg 1 + 2k\pi))} = e^{\,2k\pi}, k \in Z,$$

$$i^i = e^{\,i\text{Ln}i} = e^{\,i(\ln|i| + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))} = e^{\,-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}, k \in \text{Z},$$

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\ e^{\,i\text{Ln}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\ e^{\,i(\ln 1 + i(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi))} =$$
$$= \frac{1-i}{\sqrt{2}}\ e^{\,-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}, k \in \text{Z}.$$

Відповідь.

$$e^{\,2k\pi};\ e^{\,-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)};\ \frac{1-i}{\sqrt{2}}\ e^{\,-\frac{\pi}{4}+2k\pi},\ \ k\in\mathrm{Z}.$$

Приклад 3.7. Знайти $\sin(3-i)$ та $\mathrm{Acctg}(1+i)$.

Розв'язання. Скориставшись формулою

$$\sin(3-i)=\sin3\cos i-\cos3\sin i=\sin3\,\mathrm{ch}1-i\cos3\,\mathrm{sh}1.$$

За означенням маємо

$$\mathrm{Arcctg}(1+i)=\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+i-i}{1+i+i}=\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1-2i}{5}=$$

$$=\frac{i}{2}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{5}}+i(-\mathrm{arctg}2+2k\pi)\right)=\frac{1}{2}(\mathrm{arctg}2-2k\pi)-\frac{i}{4}\ln5,k\in\mathrm{Z}.$$

Відповідь. $\sin3\,\mathrm{ch}1-i\cos3\,\mathrm{sh}1;\ \frac{1}{2}(\mathrm{arctg}2-2k\pi)-\frac{i}{4}\ln5,k\in\mathrm{Z}.$

Приклад 3.8. Розв'язати наступні рівняння: $\cos z=\mathrm{ch}z$; $\sin z+\cos z=2$.

Розв'язання.

$$\cos z=\mathrm{ch}z;\quad \cos z-\cos iz=0;$$

$$-2\sin\frac{z+iz}{2}\sin\frac{z-iz}{2}=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}(1+i)z=2k\pi, z=k\pi-ik\pi,\\ (1-i)z=2k\pi, z=k\pi+ik\pi;\end{array}\right.$$

$$\sin z+\cos z=2,$$

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}+\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=2,$$

$$(1+i)e^{2iz}-4ie^{iz}-1+i=0,$$

$$e^{iz}=\frac{i}{1+i}\left(2\pm\sqrt{2}\right)=\frac{\left(2\pm\sqrt{2}\right)}{2}(1+i),$$

$$iz=\ln(\sqrt{2}\pm1)+i(\frac{\pi}{4}+2k\pi),$$

$$z=\frac{\pi}{4}+2k\pi-i\ln(\sqrt{2}\pm1).$$

Відповідь. $k\pi\pm ik\pi;\ \frac{\pi}{4}+2k\pi-i\ln(\sqrt{2}\pm1),k\in\mathrm{Z}.$

Вправи.

Знайти суми:

1. $\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n-1)x$;
2. $\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin(2n-1)x$
3. $\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \ldots + \cos(\alpha + n\beta)$;
4. $\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \ldots + \sin(\alpha + n\beta)$;

Знайти логарифми наступних чисел:

5. $1+i$; **6.** $\frac{1}{i}(1+i)$; **7.** i^i.

Виразити через тригонометричні і гіперболічні функції дійсного аргумента дійсні і уявні частини, а також модулі наступних функцій:

8. $\cos z$; **9.** $\mathrm{sh} z$; **10.** $\mathrm{ch} z$.

Обчислити значення:

11. $(1-i)^{1+i}$; **12.** $(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})^{1+i}$; **13.** $(1+i)^i$;

Розв'язати наступні рівняння:

14. $\mathrm{sh} z - \mathrm{ch} z = 2i$; **15.** $\sin z = i\,\mathrm{sh} z$.

Відповіді. **1.** $\frac{\sin 2nx}{2\sin x}$; **2.** $\frac{\sin^2 nx}{\sin x}$ **3.** $\frac{\cos(\alpha+\frac{\pi\beta}{2})\sin\frac{n+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}$; **4.** $\frac{\sin\frac{n+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}$;

5. $\ln\sqrt{2} + \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)i, k\in\mathrm{Z}$; **6.** $\ln\sqrt{2} + \left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)i, k\in\mathrm{Z}$;

7. $-(2k+1/2)\pi + 2n\pi, k, n\in\mathrm{Z}$; **8.** $u = \cos x \operatorname{ch} y,\ v = -\sin x \operatorname{sh} y$, $\sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}$; **9.** $u = \sin x \cos y,\ v = \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \sqrt{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$;

10. $u = \operatorname{ch} x \cos y,\ v = \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,\ \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \sin^2 y}$;

11. $(1-i)e^{\frac{\pi}{4} - 2k\pi + i\ln\sqrt{2}}, k\in\mathrm{Z}$; **12.** $e^{(i-1)(2k+\frac{1}{6})\pi}, k\in\mathrm{Z}$;

13. $e^{-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)+i\ln\sqrt{2}}, k\in\mathrm{Z}$; **14.** $z = -\ln 2 + (2k+1)\pi i, k\in\mathrm{Z}$;

15. $z = (1+i)k\pi,\ z = \frac{2k+1}{1+i}\pi,\ k\in\mathrm{Z}$.

3.3. Границя і неперервність функцій комплексної змінної

Нехай однозначна функція $f(z)$ визначена на множині E і z_0 – гранична точка цієї множини.

Скінченне число А називається *границею функції* $f(z)$ в точці z_0 (або при $z \to z_0$), якщо для будь-якої збіжної до z_0 послідовності $\{z_n\}$, де $z_n \in E$, $z_n \neq z_0$, послідовність $\{f(z_n)\}$ має границю, яка дорівнює числу А, і записують

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \mathrm{A}. \tag{3.1}$$

Якщо ж для деякої хоча б однієї послідовності $\{z'_n\}$ $(z'_n \neq z_0)$, збіжної до z_0, послідовність $\{f(z'_n)\}$ границі не має, або ж для двох різних, збіжних до z_0 послідовностей $\{z'_n\}$ і $\{z''_n\}$ відповідні послідовності $\{f(z'_n)\}$ і $\{f(z''_n)\}$ мають різні границі, то функція $f(z)$ не має границі в точці z_0.

Функція $f(z)$ може мати в точці z_0 тільки одну границю.

Друге означення границі: скінченне число А називається *границею функції* $f(z)$ в точці z_0 (або при $z \to z_0$), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon) > 0$, при якому для всіх $z \in E$, котрі задовольняють нерівність $0 < |z - z_0| < \delta$, виконується нерівність

$$|f(z) - \mathrm{A}| < \varepsilon.$$

Скориставшись цим означенням і нерівностю

$$||f(z)| - |\mathrm{A}|| < |f(z) - \mathrm{A}|$$

отримаємо, що із рівності (3.1) випливає рівність

$$\lim_{z \to z_0} | f(z) | = |\mathrm{A}|.$$

Зазначимо, що наведені означення рівносильні. Перше називають *означенням «мовою послідовностей»*, або *границі за Гейне*. Друге – *«мовою $\varepsilon - \delta$»* або *границі за Коші*.

Означенням за Гейне зручно користуватися, коли треба довести, що функція $f(z)$, якщо $z \to z_0$, не має границі. Для цього достатньо навести дві послідовності $\{z'_n\}$ і $\{z''_n\}$, які відповідають такій умові: $\lim\limits_{z \to z_0} z'_n = \lim\limits_{z \to z_0} z''_n = z_0$, а відповідні їм послідовності $\{f(z'_n)\}$ і $\{f(z''_n)\}$, коли $n \to \infty$, мають різні границі.

Аналогічно розглядається випадок, коли замість скінченної граничної точки береться нескінченно віддалена точка.

Комплексне число A $(\mathrm{A} \neq \infty)$ називається границею функції $f(z)$ у нескінченно віддаленій точці, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $N(\varepsilon)$ таке, що з нерівності $|z| > N(\varepsilon)$, $z \in E$ випливає нерівність

$$|f(z) - \mathrm{A}| < \varepsilon,$$

і записують

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \mathrm{A}.$$

Нехай z_0 – будь-яка гранична точка множини E (скінченна чи нескінченно віддалена) і для будь-якого $N > 0$ існує такий окіл точки z_0, що нерівність $|f(z)| > N$ буде виконуватись, якщо z належить цьому околу $(z \in E, z \neq z_0)$. Тоді кажуть, що $f(z)$ прямує до ∞, коли z прямує до z_0, і пишуть

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty.$$

Всі три часткові випадки границі функції можна об'єднати одним загальним означенням. Нехай z_0 – гранична точка множини E (скінченна чи нескінченно віддалена) і A – комплексне число (скінченне чи нескінченне). Якщо кожному околу A_ε точки A відповідає окіл B_δ точки z_0, який задовольняє умову: $f(z) \in \mathrm{A}_\varepsilon$, коли $z \in B_\delta$ $(z \in E, z \neq z_0)$, то кажуть, що $f(z)$ прямує до границі A і пишуть:

$$\lim_{z \to z_0, z \in E} f(z) = \mathrm{A}.$$

Теорема 1. Нехай $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $\mathrm{A} = a + ib \neq \infty$, $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $z \in E, z \neq z_0$. Тоді співвідношення $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \mathrm{A}$ еквівалентне двом співвідношенням

$$\lim_{x \to x_0, y \to y_0} u(x,y) = a \quad \text{та} \quad \lim_{x \to x_0, y \to y_0} v(x,y) = b.$$

Ця теорема дозволяє перенести найпростіші властивості функцій двох дійсних змінних на випадок функції комплексної змінної. Наприклад, якщо існують границі

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \mathrm{A}, \ \lim_{z \to z_0} \varphi(z) = B,$$

то

$$\lim_{z \to z_0} (f(z) \pm \varphi(z)) = \mathrm{A} \pm B,$$

$$\lim_{z\to z_0} f(z)\cdot\varphi(z) = \mathrm{A}\cdot B,$$

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{\varphi(z)} = \frac{\mathrm{A}}{B} \ (B \neq 0).$$

Нехай функція $f(z)$ визначена на множині E і $z_0 \in E$.

Функція $f(z)$ називається неперервною в точці z_0, якщо границя функції і її значення в цій точці дорівнюють одне одному, тобто

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Це означення рівносильне такому: функція $f(z)$ неперервна в точці z_0, якщо для будь-якої послідовності $\{z_n\}$ точок з множини E, котра збігається до z_0,

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0).$$

Згідно з теоремою 1 функція $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ $((x,y)\in E)$ неперервна в точці $z_0 = x_0 + iy_0 \in E$ тоді і лише тоді, коли функції $u(x,y)$, $v(x,y)$ неперервні в точці (x_0, y_0). Звідси випливає, що більшість властивостей неперервних функцій двох дійсних змінних зберігається для неперервних функцій комплексної змінної. Сума, різниця, добуток і частка неперервних функцій є функціями неперервними (для частки включаються ті точки, в яких знаменник обертається в нуль).

Функція $f(z), z\in E$, яка неперервна в кожній точці множини E, називається неперервною на E.

Функція $f(z)$ називається *рівномірно неперервною*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке число δ, при якому нерівність

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$$

виконується для будь-якої пари точок $z', z'' \in E$, котрі задовольняють умову $|z' - z''| < \delta$.

Теорема 2. Нехай функція $f(z)$ неперервна на обмеженій і замкнутій множині E. Тоді:

1. Функція $f(z)$ обмежена на множині E, тобто існує число $\mathrm{M} > 0$, при якому нерівність $|f(z)| < \mathrm{M}$ виконується для всіх точок множини E;

2. Функція $f(z)$ рівномірно неперервна на множині E.

Нехай на скінченному відрізку $\alpha < t < \beta$ задана неперервна комплекснозначна функція $z = \lambda(t)$. Тоді кажуть, що задана неперервна крива

$$z = \lambda(t), \alpha < t < \beta,$$

а вираз називають параметричним рівнянням цієї кривої.

Для кожної кривої можна фіксувати один із двох можливих напрямків руху вздовж кривої. Якщо він відповідає зростанню параметра, то називається додатним. $z_0 = \lambda(\alpha)$ називається початковою, а $z_1 = \lambda(\beta)$ кінцевою точкою кривої. Якщо вони збігаються, то крива називається замкненою.

Якщо одна і та сама точка кривої відповідає двом чи більше значенням параметра, із яких принаймні одне відмінне від α і від β, то така точка називається кратною. Крива, яка не має кратних точок, називається простою чи жордановою.

Область E називається однозв'язною, якщо внутрішність будь-якої замкненої простої кривої, яка в ній лежить, також належить E. В протилежному випадку область E є многозв'язною.

Число не пов'язаних між собою частин кривих, з яких складається вся границя області, називається порядком зв'язності області.

В областях з порядком зв'язності $n \geq 2$ внутрішні криві можуть вироджуватись в точку чи подвійну лінію (так звані розрізи).

Границю однозв'язної області можна, неперервно деформуючи, стягнути в точку, не виходячи за межі самої області.

Крива $z = \gamma(t)$ називається гладкою, якщо $z(t)$, має неперервну похідну $z_t^{/} \neq 0$, $(\alpha \leq t \leq \beta)$. Геометрично це означає, що в кожній точці ця крива має дотичну. Крива називається кусково-гладкою, якщо вона складається із скінченної кількості гладких кривих.

Приклад 3.9. Довести, що

$$\lim_{z \to a} \frac{1}{z - a} = \infty.$$

Розв'язання. Нехай M – будь-яке як завгодно велике додатне число. Оскільки $\left|\frac{1}{z-a}\right| > M$ буде тільки тоді, коли $|z-a| < \frac{1}{M}$, то беремо $\delta = \frac{1}{M}$. Тоді за означенням

$$\lim_{z\to a}\frac{1}{z-a} = \infty.$$

Приклад 3.10. Довести, що

$$\lim_{z\to -i}\frac{z^2+1}{z^2+i} =- 2i.$$

Розв'язання. Нехай $\varepsilon = \delta,\ |z+i| < \delta,$ де $\varepsilon > 0$ – довільне число. Оскільки $z^2+1 = (z+i)(z-i)$, то

$$\left|\frac{z^2+1}{z^2+i} + 2i\right| = |z+i| < \delta = \ \varepsilon.$$

Звідси за означенням випливає, що

$$\lim_{z\to -i}\frac{z^2+1}{z^2+i} =- 2i.$$

Приклад 3.11. Довести, що

$$\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z}$$

не існує.

Розв'язання. Із означення границі за Гейне випливає, що для доведення достатньо навести дві різні послідовності z_n' і z_n'', які збігаються до нуля, але відповідні послідовності $\{f(z_n')\}$ і $\{f(z_n'')\}$ мають різні границі.

Нехай $z_n' = \frac{i}{n}$ і $z_n'' = \frac{1}{n}$, для них $f(z_n') =- 1$, а $f(z_n'') = 1$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n') \neq \lim_{n\to\infty} f(z_n'').$$

Отже, $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z}$ не існує.

Приклад 3.12. Знайти

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2z}{\mathrm{ch} iz + i\mathrm{sh} iz}.$$

Розв'язання. Скориставшись формулами $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$, $\mathrm{ch} iz = \cos z$, $\mathrm{sh} iz = i\sin z$, отримаємо

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2z}{\mathrm{ch}iz+i\mathrm{sh}iz}=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos z-\sin z)(\cos z+\sin z)}{\cos z-\sin z}=\sqrt{2}.$$

Відповідь. $\sqrt{2}$.

Приклад 3.13. Знайти

$$\lim_{z\to-\frac{\pi}{2}i}\frac{e^{2z}+1}{e^z+i}.$$

Розв'язання. Оскільки $e^{2z}+1=(e^z+i)(e^z-i)$, $e^{-\frac{\pi}{2}i}=-i$, то

$$\lim_{z\to-\frac{\pi}{2}i}\frac{e^{2z}+1}{e^z+i}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{z\to-\frac{\pi}{2}i}\frac{(e^z+i)(e^z-i)}{e^z+i}=\lim_{z\to-\frac{\pi}{2}i}(e^z-i)=-2i.$$

Відповідь. $-2i$.

Приклад 3.14. Знайти

$$\lim_{z\to-i}\frac{z^2+4iz-3}{z+i}.$$

Розв'язання.

$$\lim_{z\to-i}\frac{z^2+4iz-3}{z+i}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{z\to-i}\frac{(z+i)(z+3i)}{z+i}=\lim_{z\to-i}(z+3i)=2i.$$

Відповідь. $2i$.

Приклад 3.15. Довести, що функція $f(z)=z^3$ неперервна при будь-якому значенні z.

Розв'язання. Нехай z_0 і $\varepsilon>0$ – довільні точки і число. Позаяк $f(z_0)={z_0}^3$, то покажемо, що існує число $\delta(\varepsilon)>0$, яке відповідає такій умові:

$$|z^3-{z_0}^3|<\varepsilon \text{ при } |z-z_0|<\delta.$$

Якщо $z\to z_0$, то існує число $M>0$, котре задовольняє умови: $|z|<M$ і $|z_0|<M$. Тоді

$$|z^3-{z_0}^3|=|(z-z_0)(z^2+zz_0+{z_0}^2)|\le|z-z_0|(|z|^2+|z||z_0|+|z_0|^2)<$$
$$<3M^2|z-z_0|.$$

Позначивши через $\delta=\frac{\varepsilon}{3M^2}$, із нерівності $|z-z_0|<\delta$ отримаємо

$$|z^3-{z_0}^3|<3M^2\delta=\varepsilon,$$

тобто в будь-якій точці z_0 функція $f(z) = z^3$ є неперервною.

Приклад 3.16. Чи можна функцію $f(z) = \frac{\mathrm{Im}z}{|z|}$ доозначити в точці z_0 так, щоб $f(z)$ стала неперервною в точці? Чи буде функція $f(z)$ рівномірно неперервна на множині $E = \{z: 0 < |z| \le 1\}$.

Розв'язання. Розглянемо дві послідовності $z_n' = \frac{1}{n}$ і $z_n'' = \frac{i}{n}$, які збігаються до 0. Для них $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n') = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n'') = 1$. Отже,

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n') \ne \lim_{n\to\infty} f(z_n'').$$

Тому, як би ми не доозначували задану функцію в точці $z = 0$, вона не стане неперервною в цій точці, бо за означенням за Гейне в такому випадку границі функції не існує.

Оскільки $|\, z_n' - z_n''| = \frac{\sqrt{2}}{n} \to 0$, а $|\, f(z_n') - f(z_n'')| = 1$, то це означає, що функція $f(z)$ не може бути рівномірно неперервною на множині E.

Відповідь. $f(z)$ не може бути рівномірно неперервною на множині E.

Визначити, які криві визначаються наступними параметричними рівняннями (зазначити множину точок площини і порядок їх проходження):

Приклад 3.17. $z = e^{2it} - 1, 0 \le t \le 2\pi$.

Розв'язання. Оскільки $e^{2it} = \cos 2t + i\sin 2t$, то

$z = \cos 2t - 1 + i\sin 2t$,

$$\begin{cases} x + 1 = \cos 2t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$$

Після виключення параметра із цієї системи отримаємо рівняння кола $(x+1)^2 + y^2 = 1$, $|z+1| = 1$, контур якого обходиться двічі проти годинникової стрілки.

Відповідь. Коло $|z+1| = 1$, контур якого обходиться двічі проти годинникової стрілки.

Приклад 3.18.

$$z = ae^{it} + \frac{1}{a}e^{-it}, 0 \le t \le 2\pi, a > 1.$$

Розв'язання. Спочатку виділимо дійсну і уявну частини заданої функції:

$$z = a\cos t + ai\sin t + \frac{1}{a}\cos t - \frac{1}{a}i\sin t = \left(a + \frac{1}{a}\right)\cos t + \left(a - \frac{1}{a}\right)i\sin t,$$

$$\begin{cases} x = \left(a + \frac{1}{a}\right)\cos t, \\ y = \left(a - \frac{1}{a}\right)\sin t, \end{cases} \quad \begin{cases} \cos t = x/\left(a + \frac{1}{a}\right), \\ \sin t = y/\left(a - \frac{1}{a}\right). \end{cases}$$

Далі, після виключення параметра із останньої системи, отримаємо рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2} = 1,$$

контур якого обходиться один раз проти годинникової стрілки.

Відповідь. Еліпс

$$\frac{x^2}{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2} = 1,$$

контур якого обходиться один раз проти годинникової стрілки.

Вправи.

Знайти границі функцій:

1. $\lim\limits_{z \to -i} \dfrac{z^2 + 3iz - 2}{z + i}$

2. $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{(z + 1)(z - 4) + (z + 3) + 12}{z}$

3. $\lim\limits_{z \to -\frac{\pi}{2}i} \dfrac{e^{3z} - i}{e^z + i}$

Чи можна наведені нижче функції доозначити в точці $z = 0$ так, щоб вони були неперервними:

4. $f(z) = \dfrac{\mathrm{Re} z}{z}$.

5. $f(z) = \dfrac{z}{|z|}$.

6. $f(z) = \dfrac{z\mathrm{Re}z}{|z|}$.

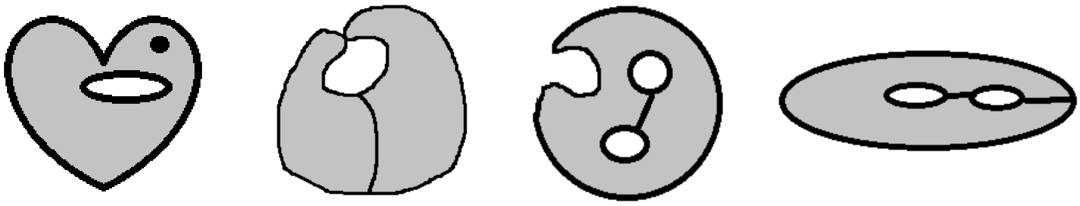
Визначити, які криві задаються наступними параметричними рівняннями (вказати множину точок площини і порядок їх проходження):

7. $z = i\cos t, 0 \le t \le 2\pi$;

8. $z = \begin{cases} e^{\pi i t}, & 0 \le t \le 1, \\ t = 2, & 1 \le t \le 3; \end{cases}$

9. $z = 1 + e^{-it},\ 0 \le t \le 2\pi$.

10. Визначити порядок зв'язності областей, зображених на рисунку:



а) б) в) г)

Відповіді: **1**. i. **2**. -13. **3.** –1. **4**. Ні. **5**. Ні. **6**. Так, $f(0) = 0$. **7**. Прямолінійний відрізок між точками $z =- i$ і $z = i$, який обходиться двічі: спочатку від точки $z = i$ до точки $z =- i$, а потім назад. **8.** Контур верхньої половини круга $|z| < 1$, який обходиться один раз проти годинникової стрілки. **9**. Коло $|z-1| = 1$, яке обходиться один раз за годинниковою стрілкою. **10. а)** тризв'язна; **б)** однозв'язна; **в)** двозв'язна; **г)** однозв'язна.

IV. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

4.1. Диференційовність функції комплексної змінної. Умови Коші – Рімана. Аналітичні функції

Нехай $f(z)$ – визначена і однозначна функція на деякій множині E. Візьмемо будь-яку точку $z_0 \in E$ і надамо аргументу z в точці z_0 приросту Δz, такого що точка z_0+Δz також буде належати E. Функція $f(z)$ отримає приріст $\Delta f(z) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$.

Похідною функції $f(z)$ в точці z_0 по множині E називається границя (якщо вона існує) відношення приросту функції в цій точці до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля, тобто

$$f'_E(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z}.$$

Коротко будемо записувати $f'(z_0)$

Функція $f(z)$, яка має в точці z_0 похідну $f'(z_0)$, називається диференційовною в цій точці, а диференційовною в області G, якщо вона є диференційовною в кожній точці цієї області.

З'ясуємо на прикладі, яку роль в означенні похідної відіграє множина E, за якою вона береться. Розглянемо такі випадки:

1. $E = R, f(z) = x \Rightarrow f'_E = 1$ для будь-якого $x \in R$;

2. E – вся комплексна площина, $f(z) = \mathrm{Re}z = x$. Ця функція неперервна при будь-якому z і збігається з першою функцією, коли $z \in R$, але ж функція $f(z) = \mathrm{Re}z$ на множині E не має похідної в жодній точці $z \in E$, бо

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{x - x_0}{(x - x_0) + i(y - y_0)} = \begin{cases} 0, & x = x_0, y \to y_0, \\ 1, & y = y_0, x \to x_0, \end{cases}$$

тобто це відношення не має границі в жодній точці.

Функція $f(z)$ називається аналітичною в області G, якщо вона диференційовна в кожній точці цієї області. Аналітичність функції визначається тільки в області. Якщо кажуть, що функція аналітична в точці, то це означає, що вона диференційовна не тільки в точці z_0, а і в деякому околі цієї точки. Точки комплексної площини, в яких однозначна функція аналітична, називаються правильними, а точки, в яких функція не є аналітичною, називаються її о с о б л и в и м и точками.

Із означення похідної і властивостей границі функції комплексної змінної отримаємо основні правила диференціювання, що є аналогічними до відповідних правил диференціального числення функції дійсної змінної.

Теорема 1. Для того щоб функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, визначена в деякій області G, була диференційовною в точці $z = x + iy \in$ G як функція комплексної змінної необхідно і достатньо, щоб функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ були диференційовні в точці (x, y) як функції двох дійсних змінних і їх часткові похідні задовольняли рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{4.1}$$

При виконанні всіх умов теореми похідну $f'(z)$ можна обчислити за однією із формул:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Нагадаємо, що для диференційовності функції $u(x, y)$ двох дійсних змінних x, y достатньо, щоб функції $\frac{\partial u}{\partial x}$ і $\frac{\partial u}{\partial y}$ були неперервні. Співвідношення (4.1) називають умовами Коші – Рімана (рівняннями Коші – Рімана).

Зазначимо, що це загальновідоме в навчальній і науковій літературі найменування несправедливе з історичної точки зору, бо Д'Аламбер і особливо Ейлер значно раніше в своїх дослідженнях користувалися цими формулами.

В багатьох випадках важливо мати умови диференційовності функції комплексної змінної $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в точці $z \neq 0$, виражені за допомогою полярних координат $|z| = r, \varphi = \arg z$.

Теорема 2. Для того щоб функція $f(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$ була диференційовною в точці $z \neq 0$, необхідно і достатньо, щоб функції

$u(r,\varphi)$ і $v(r,\varphi)$ були диференційовними функціями аргументів r,φ, а часткові похідні цих функцій задовольняли умовам

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi},\qquad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}. \tag{4.2}$$

Тоді похідну $f'(z)$ можна обчислити за однією із формул:

$$f'(z)=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)$$

або

$$f'(z)=\frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}-i\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right).$$

4.2. Геометричний зміст модуля і аргумента похідної функції комплексної змінної

Нехай $w=f(z)$ – аналітична в точці z_0 і $f'(z_0)\neq 0$.

Геометричний зміст модуля похідної: величина $r=|f'(z_0)|$ визначає коефіцієнт розтягу (подібності) в точці z_0 при відображенні $w=f(z)$ площини z на площину w. Точніше, при $r>1$ відбувається розтяг, а при $r<1$ – стиснення.

Аргумент похідної $\varphi=\arg f'(z_0)$ геометрично дорівнює куту, на який треба повернути дотичну в точці z_0, щоб отримати напрямок дотичної в точці $w_0=f(z_0)$ до образа цієї кривої на площині w. Зазначимо, що якщо $\arg f'(z_0)>0$, то поворот відбувається проти руху годинникової стрілки, а якщо $\arg f'(z_0)<0$ – за ним.

Кут φ називається кутом повороту для відображення $w=f(z)$ в точці z_0.

4.3. Гідромеханічне тлумачення аналітичної функції

Нехай Ω область в C, на якій задана аналітична функція $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z=x+iy\in\Omega$. Будемо вважати, що $\{u,v\}\in C^2(\Omega)$. Тоді $\langle u,v\rangle$ – спряжена гармонічна пара в Ω.

За допомогою функції u визначимо плоскопаралельне векторне поле

$$\vec{V}(x,y):=\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y),\frac{\partial u}{\partial y}(x,y),0\right),(x,y)\in\Omega; \qquad (4.3)$$

при цьому функція u називається потенціалом векторного поля $\vec{V}$, а функцію f будемо називати *комплексним потенціалом поля* $\vec{V}$.

Тоді,

$$div\vec{V}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\Delta u=0 \text{ в } \Omega.$$

Це означає, що поле $\vec{V}$ – *соленоїдальне* (не має джерел та стоків).

Легко також перевірити, що

$$rot\vec{V}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & j & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial \mu}\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & 0\end{vmatrix}=\left(0,0,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)=\vec{0} \text{ в } \Omega.$$

Отже, поле $\vec{V}$ є безвихровим.

Таким чином, кожна аналітична функція f в області Ω є комплексним потенціалом деякого плоскопаралельного, соленоїдального і безвихрового поля.

Нехай тепер задано плоскопаралельне, соленоїдальне, безвихрове векторне поле $\vec{V}=(\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y),0)$ в однозв'язній області Ω. Вважатимемо, що $\{\varphi_1,\varphi_2\}\in C^1(\Omega)$ і $\vec{V}\neq 0$ в Ω. Оскільки $\vec{V}$ – безвихрове, то

$$rot\vec{V} = \vec{0} \iff \begin{vmatrix} \vec{i} & j & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial \mu} \\ \varphi_1 & \varphi_2 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \text{ в } \Omega.$$

Тому, враховуючи однозв'язність області Ω, можна стверджувати, що диференціальна форма $\omega_1 = \varphi_1 dx + \varphi_2 dy$ – точна в Ω. Відтак, існує функція $u \in C^2(\Omega)$, за умови якої $du = \omega_1$, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_1, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi_2 \text{ в } \Omega. \tag{4.4}$$

Рівності (4.3) означають, що u є потенціалом даного поля.

Оскільки $\vec{V}$ соленоїдальне, то

$$div\vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0 \iff -\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \text{ в } \Omega.$$

Тому форма $\omega_1 =- \varphi_2 dx + \varphi_1 dy$ точна в Ω, а значить існує функція

$v \in C^2(\Omega)$, за умови якої $dv = \omega_2$, тобто

$$\frac{\partial v}{\partial x} =- \varphi_2, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \varphi_1 \text{ в } \Omega. \tag{4.5}$$

З (4.4) і (4.5) випливає, що функції u та v з простору $C^2(\Omega)$ задовольняють умовам Коші – Рімана в області Ω, а тому можна визначити функцію $f(z) \coloneqq u + iv$, яка на підставі теореми 1 буде аналітичною в області Ω.

Отже, кожному плоскопаралельному, стаціонарному, соленоїдальному, безвихровому векторному полю в однозв'язній області відповідає аналітична функція, яка є комплексним потенціалом для цього поля.

З'ясуємо фізичний зміст функції v. Для цього розглянемо криву, яка неявно задається рівнянням $v(x, y) = const$. Згідно з (4.5)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}.$$

Вектор $\left(1, \frac{dy}{dx}, 0\right) = \left(1, \frac{\varphi_2}{\varphi_1}, 0\right)$ дотичної до кривої $v(x, y) = const$, є колінеарним вектору $(\varphi_1, \varphi_2, 0) = \vec{V}$. Відтак, крива $v(x, y) = const$ – траєкторія руху частинок рідини, вектор швидкості яких співпадає з $\vec{V}$. v називається *функцією струму векторного поля* $\vec{V}$.

4.4. Спряжені гармонічні функції

Функція $\varphi(x, y)$ називається *гармонічною* в області G, якщо вона має в ній неперервні часткові похідні другого порядку включно і задовольняє рівнянню Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Якщо функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ є аналітичною в деякій області G, то її дійсна $u(x, y)$ і уявна $v(x, y)$ частини – гармонічні функції в цій області. Але це не означає, що $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ буде аналітичною функцією для будь-яких гармонічних функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$. Необхідно, щоб $u(x, y)$ і $v(x, y)$ задовольняли умови Коші – Рімана.

Дві гармонічні функції, які задовольняють умови Коші – Рімана, називаються *спряженими гармонічними функціями*.

Теорема 3. Будь-яка гармонічна в однозв'язній області G функція $u(x, y)$ має сімейство спряжених гармонічних функцій $v(x, y)$, які відрізняються одна від одної на сталу величину:

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + C, \qquad (4.6)$$

де (x_0, y_0) – деяка фіксована точка області G, а (x, y) – довільна точка цієї області.

Зазначимо, що

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{\partial v}{\partial y}dx - \frac{\partial v}{\partial x}dy + C.$$

Приклад 4.1. Довести, що функція $f(z) = z\mathrm{Re}z$ диференційовна тільки в точці $z = 0$. Знайти $f'(0)$.

Розв'язання. Оскільки $f(z) = (x + iy)x,$ то $u(x, y) = x^2$; $v(x,y) = xy$.

Зазначимо, що ці функції мають неперервні часткові похідні в усіх точках площини і тому всюди диференційовні як функції двох дійсних змінних. Знайдемо, в яких точках виконується умова Коші – Рімана. Маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial v}{\partial y} = x, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = y.$$

Відтак, умови Коші – Рімана звелись до системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x = x, \\ y = 0, \end{cases}$$

яка має єдиний розв'язок: $x = 0$, $y = 0$. Таким чином, $f(z)$ диференційовна лише в одній точці $z = 0$, причому

$$f'(0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{z=0} = 0.$$

Приклад 4.2. Довести, що функція $f(z) = 2e^x siny + 3x - 2y + i(2x - 2e^x cosy + 3y)$ аналітична на всій площині, і знайти $f'(z)$

Розв'язання. Дійсна частина $u(x,y) = 2e^x siny + 3x - 2y$ і уявна частини $v(x,y) = 2x - 2e^x cosy + 3y$ мають неперервні часткові похідні, і, отже, диференційовні на всій площині. Крім того,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^x siny + 3 = \frac{\partial v}{\partial y};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} =- 2 + 2e^x cosy =- \frac{\partial v}{\partial x},$$

тобто умови Коші – Рімана виконуються, відтак, функція аналітична на всій площині. Похідна

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2e^x siny + 3i(2- 2e^x cosy).$$

Приклад 4.3. Чи існує аналітична функція $f(z) = u + iv,$ для якої

$$u(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Розв'язання. Перевіримо, чи є задана функція гармонічною. Для цього знайдемо часткові похідні другого порядку:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{6xy^2 - 2x^3}{(x^2 + y^2)^3};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y^3 - 6x^2 y}{(x^2 + y^2)^3};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6\frac{y^4 + x^4 - 6x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^4};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} =- 6\frac{y^4 + x^4 - 6x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^4};$$

Оскільки

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

то функція $u(x, y)$ буде гармонічною в будь-якій області на площині, яка не містить в собі точку (0,0). А це означає, що існує аналітична функція $f(z) = u + iv$, де u – задана функція, в деякій області, яка не містить в собі точку $z = 0$.

Відповідь. Існує.

Приклад 4.4. Знайти аналітичну функцію $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ за її дійсною частиною

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + x.$$

Розв'язання. Перший спосіб. Маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y.$$

Визначимо функцію $v(x, y)$, користуючись тим, що $u(x, y)$ і $v(x, y)$ – спряжені гармонічні функції, тобто із системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x + 1, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = 2y. \end{cases}$$

Інтегруючи першу рівність за аргументом y, знайдемо

$$v(x, y) = \int (2x + 1)dy = (2x + 1)y + \varphi(x),$$

а

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \varphi'(x).$$

Порівнюючи останню рівність з другою рівністю системи, отримаємо $\varphi'(x) = 0$, тобто $\varphi(x) = \mathrm{C}$.

Отже, $v(x, y) = (2x + 1)y + \mathrm{C}$, а $f(z) = x^2 - y^2 + x + i(2x + 1)y + \mathrm{C}$.

Другий спосіб. Оскільки функція гармонічна, то за теоремою 3 знаходимо, що

$$v(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy + \mathrm{C} = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (2x+1)dy + \mathrm{C} =$$

$$=(2x+1)y + \mathrm{C}.$$

Тому, $f(z) = x^2 - y^2 + x + i(2x+1)y + \mathrm{C}$.

Відповідь. $f(z) = x^2 - y^2 + x + i(2x+1)y + \mathrm{C}$.

Приклад 4.5. Довести, що $\frac{\partial u}{\partial x}$ і $\frac{\partial v}{\partial y}$ існують і

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

якщо для функції $f(z)$ існує границя

$$\lim_{\Delta z \to 0} \mathrm{Re}\frac{\Delta f}{\Delta z}.$$

Розв'язання. Оскільки

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{(\Delta u + i\Delta v)(\Delta x - i\Delta y)}{\Delta x^2 + \Delta y^2} =$$

$$= \frac{(\Delta u\Delta x + \Delta v\Delta y) + i(\Delta v\Delta x - \Delta u\Delta y)}{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

то

$$\mathrm{Re}\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{(\Delta u\Delta x + \Delta v\Delta y)}{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Для заданої границі розглянемо два способи наближення Δz до 0:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \mathrm{Re}\frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta z = \Delta y \to 0 \\ \Delta x = 0}} \mathrm{Re}\frac{\Delta v}{\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \mathrm{Re}\frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta z = \Delta x \to 0 \\ \Delta y = 0}} \mathrm{Re}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Відтак, звідси випливає існування $\frac{\partial u}{\partial x}$ і $\frac{\partial v}{\partial y}$ і рівність $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, бо за умовою задачі границя розглянутого виразу існує, а, значить, сама границя не залежить від напрямку наближення Δz до нуля.

Приклад 4.6. Визначити, в яких точках комплексної площини функція $f(z) =- 2r\sin\varphi + 2ir\cos\varphi$ має похідну. Чому дорівнює похідна в кожній з цих точок? Чи буде ця функція аналітичною в якій-небудь області площини?

Розв'язання. Визначимо, в яких точках виконуються умови Коші – Рімана. Функції $u =- 2r\sin\varphi$ і $v = 2r\cos\varphi$ диференційовні на всій комплексній площині і

$$\frac{\partial u}{\partial r} =- 2\sin\varphi, \frac{\partial u}{\partial \varphi} =- 2r\cos\varphi, \frac{\partial v}{\partial r} = 2\cos\varphi, \frac{\partial v}{\partial r} =- 2r\sin\varphi.$$

Умови Коші – Рімана виконуються на всій комплексній площині. А це означає, що функція аналітична на всій комплексній площині і

$$f'(z) = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{-2(\sin\varphi - i\cos\varphi)}{\cos\varphi + i\sin\varphi} =$$

$$=- 2(\sin\varphi - i\cos\varphi)(\cos\varphi - i\sin\varphi) = 2i.$$

Відповідь. Аналітична в усій комплексній площині, $f'(z) = 2i$.

Приклад 4.7. Чи буде гармонічною функція u^2, якщо $u(x, y)$ такою є.

Розв'язання. Нехай $\varphi(x, y) = u^2(x, y)$. Із умови задачі випливає, що функція $\varphi(x, y)$ має неперервні часткові похідні до другого порядку включно. Залишилось перевірити, чи задовольняє функція $\varphi(x, y)$ рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2u\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2u\frac{\partial u}{\partial y};$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=2\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)+2u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=$$

$$=2\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\neq 0.$$

Звідси випливає, що $u^2(x,y)$ – не є гармонічною функцією в кожній точці площини, якщо $u^2(x,y)\neq \mathrm{C}$.

Відповідь. Ні, якщо $u^2(x,y)\neq \mathrm{C}$.

Приклад 4.8. Знайти всі гармонічні функції вигляду $u(x,y)=\varphi\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)$.

Розв'язання. Позначимо $t=\frac{x^2+y^2}{x}$. Тоді отримаємо $u=\varphi(t)$, де $t=t(x,y)$. За правилами диференціювання складної функції знаходимо:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\varphi'(t)\frac{\partial t}{\partial x},\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\varphi'(t)\frac{\partial t}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\varphi''(t)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2+\ \varphi'(t)\frac{\partial^2 t}{\partial x^2},\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\varphi''(t)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2+\ \varphi'(t)\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}.$$

Складаючи останні дві рівності, отримаємо

$$\varphi''(t)\left(\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2\right)+\ \varphi'(t)\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)=0.$$

Оскільки

$$\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{2x^2-x^2-y^2}{x^2}=\frac{x^2-y^2}{x^2};\ \ \frac{\partial t}{\partial y}=\frac{2y}{x};$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}=\frac{2x^3-2x^3+2xy^2}{x^4}=\frac{2y^2}{x^3};\ \ \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}=\frac{2}{x};$$

то

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{x^2-y^2}{x^2}\right)^2+\left(\frac{2y}{x}\right)^2=\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right)^2;$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}=\frac{2y^2}{x^3}+\frac{2}{x}=\frac{2y^2+2x^2}{x^3}.$$

А диференціальне рівняння набуде такого вигляду:

$$\varphi''(t)t^2+\ \varphi'(t)2t=0,$$

або

$$\frac{d\varphi'}{\varphi'}+\frac{2dt}{t}=0,(t\neq 0),$$

$$\ln|\varphi'(t)|+2\ln|t|=lnC_1,$$

$$t^2\varphi'(t)=C_1,$$

$$\varphi(t)=-\frac{C_1}{t}+C_{2.}$$

Отже, шукані гармонічні функції мають вигляд

$$u=\varphi\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)=-\frac{C_1 x}{x^2+y^2}+C_{2.}$$

Відповідь. $u=-\dfrac{C_1 x}{x^2+y^2}+C_{2.}$

Приклад 4.9. Довести, що добуток спряжених гармонічних в області G функцій $u(x,y)$ і $v(x,y)$ буде гармонічною функцією в області G.

Розв'язання. Покажемо, що функція $\varphi=u\cdot v$ задовольняє рівняння Лапласа. Знайдемо частинні похідні цієї функції. Маємо

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}v+\frac{\partial v}{\partial x}u,\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}v+\frac{\partial v}{\partial y}u;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}v+\frac{\partial v}{\partial x}u,\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}v+\frac{\partial v}{\partial y}u;$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}v + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}u, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}v + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}u.$$

Склавши дві останні рівності, враховуючи спряженість гармонічних функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$, отримаємо

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)v - 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)u = 0.$$

Оскільки функція $\varphi = u \cdot v$ має неперервні часткові похідні до другого порядку включно (це випливає із умови) і задовольняє рівняння Лапласа, то добуток двох спряжених гармонічних функцій буде гармонічною функцією в області G, що і треба було довести.

Приклад 4.10. Знайти коефіцієнт розтягу і кут повороту при відображенні $w = z^2$ в точці $z_0 = 1 + i\sqrt{3}$.

Розв'язання. Маємо

$$f'(z) = 2z, f'\left(1 + i\sqrt{3}\right) = 2 + i2\sqrt{3}.$$

Перейдемо від алгебраїчної форми комплексного числа до тригонометричної і отримаємо:

$$2 + i2\sqrt{3} = 4\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right).$$

Відтак,

$$\left|f'\left(1 + i\sqrt{3}\right)\right| = 4, \arg f'\left(1 + i\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Тобто коефіцієнт розтягу $r = 4$, а кут повороту $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Відповідь. $r = 4, \quad \varphi = \frac{\pi}{3}.$

Приклад 4.11. Знайти множину точок z, в яких $r = 1$ при відображенні

$$w = \frac{z + i}{z - i}.$$

Розв'язання. Оскільки

$$f'(z) = -\frac{2i}{(z-i)^2},$$

то $r = 1$ для тих точок площини, для яких

$$\frac{2}{|z-i|^2} = 1,$$

тобто $|z-i| = \sqrt{2}$, а це рівняння кола з центром в точці i радіуса $\sqrt{2}$.

Відповідь. Коло $|z-i| = \sqrt{2}$.

Вправи.

Довести, що функція $f(z)$ не диференційовна в жодній точці комплексної площини, якщо:

1. $f(z) = |z|$;

2. $f(z) = \frac{z}{|z|}$;

3. $f(z) = \bar{z}$

4. $f(z) = a\bar{z} + b$.

Довести, що ці пари гармонічних функцій є спряженими, якщо:

5. $u(x,y) = 3x^2y - y^3$; $v(x,y) = -x^3 + 3xy^2$;

6. $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$; $v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$;

7. $u(x,y) = e^x cosy + x$; $v(x,y) = e^x siny + y$.

Знайти всі гармонічні функції такого вигляду:

8. $\varphi(ax + by)$;

9. $\varphi(\frac{y}{x})$;

10. $\varphi(x + y)$;

11. $\varphi(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

Побудувати аналітичну функцію $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ за її дійсною або уявною частиною:

12. $u(x,y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2}$;

13. $u(x,y) = e^x(xcosy - ysiny) + 2sinxsiny + x^3 - 3xy^2 + y$;

14. $v(x,y) = 3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2+y^2)}$;

15. $v(x,y) = x^3 - 3xy^2$;

16. $u(x,y) = x^2 + y^2 + x$.

Знайти коефіцієнт розтягу і кут повороту при відображенні $w = f(z)$ в точці z_0, якщо:

17. $f(z) = e^z$; $z_0 = ln2 + \frac{i\pi}{4}$;

18. $f(z) = z^3$; $z_0 = 2 - i$.

Яка частина площини стискається, а яка розтягується, коли відображення здійснюється функціями:

19. $f(z) = z^3 - 2z$; **20.** $f(z) = z^3$.

Відповіді: **8.** $\varphi = C_1(ax + by) + C_2$; **9**. $\varphi = C \cdot arctg(\frac{y}{x})$; **10.** $\varphi = C_1 ln(x^2 + y^2)$; **11.** $\varphi = C_1\sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + C_2$; **12.** $f(z) = z^2 + (5 - i)z - \frac{i}{z} + iC$; **13.** $f(z) = ze^z + 2icosz + z^3 - iz + iC$; **14.** $f(z) = \frac{1}{2z} + iz^2 + 3i + C$; **15.** $f(z) = iz^3 + C$; **16.** $f(z) = z^2 + z + C$;**17.** $r = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$; **18.** $r = 15$, $\varphi = -arctg\frac{4}{3}$; **19.** $r < 1$, якщо $|z - 1| < 1/2$; **20.** $r < 1$, якщо $|z| < 1/\sqrt{3}$.

4.5. Конформне відображення

4.5.1 Поняття конформного відображення

В і д о б р а ж е н н я, що здійснюється неперервною функцією $w = f(z)$, називається к о н ф о р м н и м в т о ч ц і z_0, якщо воно зберігає кути між кривими, що виходять із цієї точки z_0, і має сталий розтяг у точці z_0. Якщо при конформному відображенні зберігаються не тільки величини кутів, а й напрямок їх відліку, то воно називається к о н ф о р м н и м в і д о б р а ж е н н я м п е р ш о г о р о д у. Якщо ж напрямок відліку змінюється на протилежний, то воно має назву к о н ф о р м н о г о в і д о б р а ж е н н я д р у г о г о р о д у.

Відображення, котре є конформним в кожній точці області G, називається к о н ф о р м н и м в ц і й о б л а с т і G.

Відображення за допомогою аналітичної в деякій області G функції комплексної змінної буде конформним першого роду в усіх точках області G, в яких $f'(z_0) \neq 0$.

Теорема 1 (Рімана). Будь-яку однозв’язну область G розширеної площини, границя якої складається більш ніж з однієї точки, можна конформно відобразити на круг, наприклад, одиничний, і при цьому нескінченно багатьма способами.

Теорема 2 (про єдиність конформного відображення). Існує тільки одна функція $f(z)$, яка конформно відображає область G на одиничний круг і задовольняє умови $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$, де z_0 – фіксована точка області.

Далі розглянемо відображення деяких областей за допомогою лінійної, степеневої, показникової функцій, а також функції Жуковського. Конформні відображення найпростіших областей за допомогою тригонометричних функцій, а також функції кореня n-го степеня $\boldsymbol{w = \sqrt[n]{z}}$, наведено, наприклад, в [16,17].

4.5.2.Лінійна функція

Функція вигляду

$$w = az + b,$$

де a, b – комплексні числа, $a \neq 0$, називається лінійною.

Записавши a в показниковій формі $a = re^{i\varphi}$, помічаємо, що лінійне відображення

$$w = re^{i\varphi}z + b$$

є композицією наступних перетворень:

1) $w_1 = ze^{i\varphi}$ – поворот на кут φ навколо початку координат;
2) $w_2 = rw_1$ – гомотетія з центром у початку координат і коефіцієнтом r ;
3) $w = w_2 + b$ – паралельне перенесення на вектор b.

Оскільки лінійну функцію у випадку $a \neq 1$ можна записати у вигляді

$$w - z_0 = a(z - z_0),$$

то $z_0 = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{1}-a}$ – нерухома точка лінійного відображення.

Лінійна функція є аналітичною на всій комплексній площині і, оскільки $w' = a \neq 0$, то це відображення конформне в будь-якій точці.

Приклад 4.12. Знайти лінійну функцію, яка відображає трикутник з вершинами в точках 0, 1, i площини Oz на подібний йому трикутник з вершинами 0, 2, 1+i.

Розв'язання. Перший спосіб. Із рис. 1 видно, що ΔABC переходить в $\Delta A_1B_1C_1$ шляхом наступних перетворень:

1) Поворот навколо початку координат на кут $\frac{3\pi}{4}$, що відповідає перетворенню $w_1 = ze^{-i\frac{3\pi}{4}}$;

2) Гомотетія з центром на початку координат і коефіцієнтом $r = \sqrt{2}$ (оскільки $A_1B_1/AB = \sqrt{2}$): $w_2 = \sqrt{2}w_1$;

3) Паралельне перенесення, яке зміщує точку C(0,0) в точку C(1,1) (отримуємо $b = 1 + i$):

Враховуючи, що

$$e^{-i\frac{3\pi}{4}} = cos\frac{3\pi}{4} - isin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i),$$

остаточно отримаємо

$$w = -\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)z + 1 + i = (1 + i)(1 - z).$$

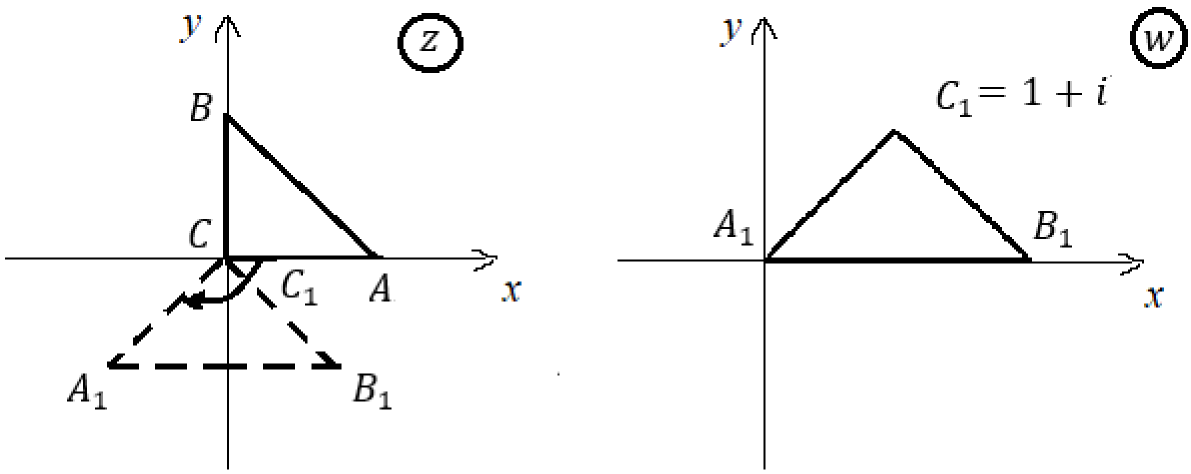


Рис. 1 Ілюстрація до прикладу 4.12

Другий спосіб: нехай $w = az + b$ – шукана функція, де a, b – поки невизначені коефіцієнти. За умовою задачі точки $z_1 = 0$ і $z_2 = 1$ повинні перейти відповідно в точки $w_1 = 1 + i$ і $w_2 = 0$. Із отриманої системи рівнянь

$$\begin{cases} 1 + i = b, \\ 0 = a + b \end{cases}$$

знаходимо $a = -1 - i$, $b = 1 + i$. Отже, $w = (1 + i)(1 - z)$.

Відповідь. $w = (1 + i)(1 - z)$.

Приклад 4.13. Знайти лінійну функцію $w(z) = \alpha z + \beta$, яка відображає смугу, що знаходиться між прямими $x = a, x = a + h$ при такому нормуванні: $w(a + h/2) = 1/2 + i$, $\mathrm{Im}w(a + h/2 + i) < 1$.

Розв'язання. Нехай $a = \alpha_1 + i\beta_1$, $\beta = \alpha_2 + i\beta_2$. Тоді

$$\begin{aligned} w(a + h/2) &= (\alpha_1 + i\beta_1)(a + h/2) + \beta = \\ &= \alpha_1 a + \alpha_1 h/2 + \alpha_2 + i(a\beta_1 + \beta_1 h/2 + \beta_2) = 1/2 + i; \end{aligned}$$

$$w(a) = (\alpha_1 + i\beta_1)a + \alpha_2 + i\beta_2 = \alpha_1 a + \alpha_2 + i(a\beta_1 + \beta_2) = 1 + i.$$

Звідси, прирівнюючи дійсні і уявні частини лівої та правої частин рівностей, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_1 a + \alpha_1 h/2 + \alpha_2 = 1/2, \\ a\beta_1 + \beta_1 h/2 + \beta_2 = 1, \\ \alpha_1 a + \alpha_2 = 1, \\ a\beta_1 + \beta_2 = 1, \end{cases}$$

яка має такий розв'язок: $\alpha_1 = -1/h, \alpha_2 = 1 + a/h, \beta_1 = 0, \beta_2 = 1$.

Тобто, $w(z) = (a + h - z)/h + i$. Оскільки

$$w(a + h/2 + i) = (a + h - a - h/2 - i)/h + i = 1/2 + i(1 - 1/h),$$

то

$$\mathrm{Im}w(a + h/2 + i) = 1 - \frac{1}{h} < 1.$$

Відтак, шукана функція $w(z) = (a + h - z)/h + i$.

Відповідь. $w(z) = \dfrac{1}{h}(a + h - z) + i$.

Приклад 4.14. Знайти лінійну функцію, яка відображає відрізок $z_1 z_2$ (з кінцями в точках z_1 і z_2) у відрізок $w_1 w_2$. Визначити коефіцієнт розтягу і кут повороту відображення.

Розв'язання. Нехай функція $w(z) = \alpha z + \beta$ задовольняє умови задачі. Тоді $w_1 = \alpha z_1 + \beta$, $w_2 = \alpha z_2 + \beta$. Виключаючи α і β, знаходимо:

$$\frac{w - w_1}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

або

$$w = \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1}(z - z_1) + w_1, w' = \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1}.$$

Коефіцієнт розтягу відображення є сталим і дорівнює $\left|\frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1}\right|$, тобто відношення довжин відрізків $w_1 w_2$ і $z_1 z_2$. Кут повороту відображення дорівнює різниці аргументів $w_2 - w_1$ і $z_2 - z_1$, тобто кут між відрізками $w_1 w_2$ і $z_1 z_2$.

Відповідь. $w = \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1}(z - z_1) + w_1$, $\left|\frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1}\right|$.

Приклад 4.15. Знайти лінійну функцію, яка відображає круг $|z - a| \leq r$ на круг $|w - b| \leq R$.

Розв'язання. Перший спосіб полягає у подібному відображенні радіуса, який з'єднує точки a і $a + r$, на радіус, котрий з'єднує точки b і $b + Re^{i\varphi}$. Це відображення має такий вигляд:

$$\frac{w - b}{Re^{i\varphi}} = \frac{z - a}{r},$$

тобто

$$w = \frac{R}{r} e^{i\varphi}(z - a) + b.$$

Другий спосіб. Нерівність $|z - a| \leq r$ рівносильна виразу $\left|\frac{z-a}{r}\right| \leq 1$. Перетворення $w_1 = \frac{z-a}{r}$ відображає круг $|z - a| \leq r$ в круг $|w_1| \leq 1$. Таке ж саме перетворення $w_1 = \frac{w-b}{R}$ відображає круг $|w - b| \leq R$ в круг $|w_1| \leq 1$. Звідси $\frac{w-b}{R} = \frac{z-a}{r}$ або в більш загальному вигляді, обертаючи один із кругів на кут φ,

$$\frac{w - b}{R} = \frac{z - a}{r} e^{i\varphi},$$

або

$$w = \frac{R}{r} e^{i\varphi}(z - a) + b.$$

Третій спосіб. Задачу можна розв'язати, користуючись геометричними перетвореннями наступним чином:

1) робимо паралельне перенесення на вектор a, тобто $w_1 = z - a$;

2) круг $|w_1| \leq r$ за допомогою перетворення $w_2 = \frac{R}{r} e^{i\varphi} w_1$, $-\pi < \varphi \leq \pi$ (гомотетія і поворот навколо початку координат) відобразимо на круг $|w_2| \leq R$;

3) здійснюємо паралельне перенесення на вектор b.

Отже, відображення має такий вигляд: $w = Re^{i\varphi}(z - a)/r + b$.

Відповідь. $w = \frac{R}{r} e^{i\varphi}(z - a) + b$.

Вправи.

1. Знайти лінійне відображення, яке точку $1 + 2i$ залишає нерухомою, а точку i перетворює на точку $-i$.

2. Знайти лінійну функцію, яка відображає трикутник з вершинами в точках $1 + i$, $2 + 4i$, $3 + i$ на подібний трикутник з вершинами в точках 1, $1 + 4i$, $7 + 2i$.

Знайти лінійну функцію $w(z)$, яка відображає смугу, що знаходиться між заданими прямими, на смугу $0 < u < 1$ при вказаному нормуванні:

3. $x = a, x = a + h, \ w(a) = 0$;

4. $y = kx, y = kx + b, \ w(0) = 0$.

5. Знайти образ півплощини $\mathrm{Re} z > 0$ при відображенні $w = (1 - i)z + i$.

Відповіді. **1**. $w = (2 + i)z + 1 - 3i$; **2**. $w = -2iz - 1 + 6i$;

3. $w = \frac{z-a}{h}$; **4**. $w = \frac{\sqrt{1+kz}}{b} e^{i(\pi/2 + arctgz)} z$; **5**. півплощина $u - v + 1 > 0$.

4.5.3. Степенева функція

Степеневою називається функція $w = (z - a)^n, n \in N, a \in C$. Вона визначена та однозначна в усій комплексній площині C і може бути довизначеною за неперервністю в узагальненому розумінні в точці $z = \infty$. Оскільки за допомогою перетворення паралельного перенесення $z' = z - a$ степенева функція зводиться до так званого канонічного вигляду

$$w = z^n, n \in N,$$

то далі, без обмеження загальності, степеневу функцію будемо записувати саме в такому вигляді.

Степенева функція однозначна й диференційовна в C, відтак, область, у всіх точках якої похідна відмінна від нуля, $\frac{dw}{dz} = nz^{n-1} \neq 0$ у $\bar{C} \backslash \{0\}$, нею відображається конформно.

Будемо вважати, що $z = re^{i\varphi}$, а $w = Re^{i\theta}$. Тоді з означення степеневої функції випливає, що $R = r^n$ і $\theta = n\varphi$ $(0 < r < \infty)$. Це означає, що кожне коло радіусом r із центром у точці $z = 0$ відображається в коло з радіусом $R = r^n$ та центром у точці $w = 0$. Якщо точка z рухається вздовж кола $|z| = r$ у додатному напрямку, тобто Argz неперервно збільшується від нуля до 2π, то точка w опише коло $|w| = r^n$ у тому самому напрямку n разів.

Побудуємо відображення області, обмеженої двома дугами AD та BC кіл $|z| = r_1$ та $|z| = r_2$, і двома променями l_1 та l_2, які виходять із початку координат і утворюють з додатною дійсною піввіссю кути φ_1 та φ_2 ($\varphi_2 - \varphi_1 = \alpha \neq 0$), відповідно (рис. 2). Відображеннями променів l_1 та l_2 у площині $w = u + iv$ є промені l'_1 та l'_2, які виходять із початку координат і мають кути нахилу $\theta_1 = n\varphi_1$ та $\theta_2 = n\varphi_2$ (рис. 3), а образами дуг AD та BC є дуги $A'D'$ і $B'C'$ кіл $|w| = r_1{}^n$ та $|w| = r_2{}^n$. Отже, при відображенні $w = z^n$ кут $\varphi_2 - \varphi_1 = \alpha$, утворений довільними променями l_1 та l_2, збільшиться в n разів і становитиме $\beta = \theta_2 - \theta_1 = n\alpha$.

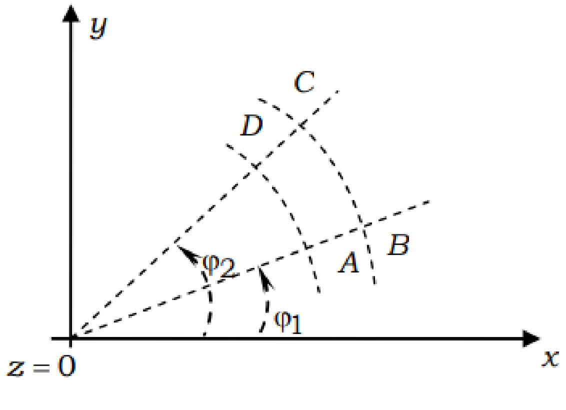


Рис. 2

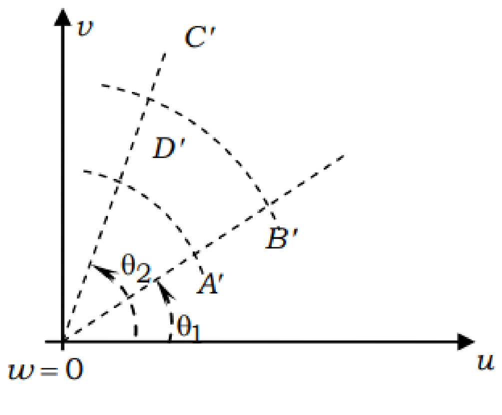
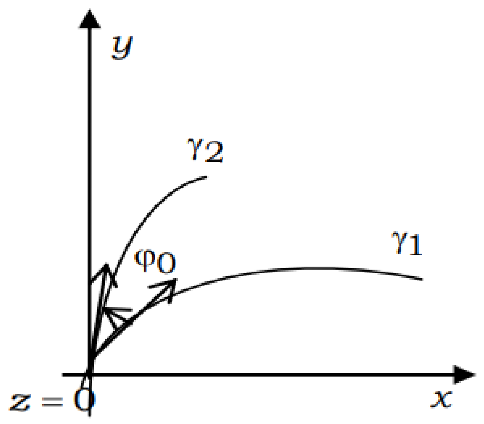


Рис. 3

Звідси легко зробити висновок, що в точці $z = 0$ конформність відображення порушується.

Дійсно, розглянемо дві криві γ_1 та γ_2, які перетинаються в точці $z = 0$ під кутом φ_0 і лежать у секторі нескінченно малого околу точки $z = 0$. Функція $w = z^n$ перетворює ці криві на криві Γ_1 та Γ_2, які перетинаються в точці $w = 0$ під кутом $\Phi_0 = n\varphi_0$. Відтак, умова консерватизму кутів порушується (рис. 4, 5).



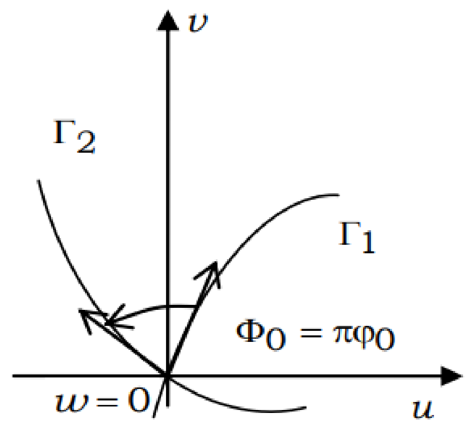


Рис. 4 Рис. 5

Область однолистості та поверхня Рімана. Визначимо області однолистості степеневої функції. Спочатку знайдемо границі областей D_k, де $\forall$ $z_1, z_2 \in D_k$, і таких, у яких при $z_1 \neq z_2$ виконується умова $w(z_1) \neq w(z_2)$. Нехай $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ і $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Якщо $|z_1| \neq |z_2|$, то $w(z_1) \neq w(z_2)$ при всіх значеннях φ_1 і φ_2. Нехай $|z_1| = |z_2|$, тоді знайдемо, при яких значеннях φ_1 і φ_2 $w(z_1) \neq w(z_2)$. З рівності $w(z_1) = w(z_2)$ маємо $e^{in\varphi_1} = e^{in\varphi_2}$, тобто $n\varphi_2 = n\varphi_1 + 2k\pi$, або $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{2k\pi}{n}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. Звідси випливає, що при довільному $\alpha \in R$ в області

$$D_k = \left\{ z \colon \alpha + \frac{2k\pi}{n} < \arg z < \alpha + \frac{2(k+1)\pi}{n}, k = \overline{0, n-1} \right\}$$

функція $w = z^n$ є однолистою. Надалі, якщо це не викликатиме непорозумінь, для однозначності трактування будемо вважати, що $\alpha = 0$ (рис. 6).

Отже, у всій комплексній площині степенева функція однозначна, але не взаємно, оскільки кожному значенню w, крім $w = 0$ та $w = \infty$, відповідає n значень змінної з площини z. З цієї властивості випливають наслідки, неможливі для взаємно однозначних відображень. Наприклад, довільна незамкнена дуга одиничного кола $|z| = 1, \frac{2k\pi}{n} < \arg z < \alpha + \frac{2(k+1)\pi}{n}$, де k – одне зі значень $k = \overline{0, n-1}$, при відображенні $w = z^n$ переходить у замкнене коло $|w| = 1$.

Відтак, для взаємної однозначності відображення області D функцією $w = z^n$ необхідно й достатньо, щоб ця область не містила точок з рівними модулями та аргументами, які відрізняються на величину, кратну $\frac{2\pi}{n}$.

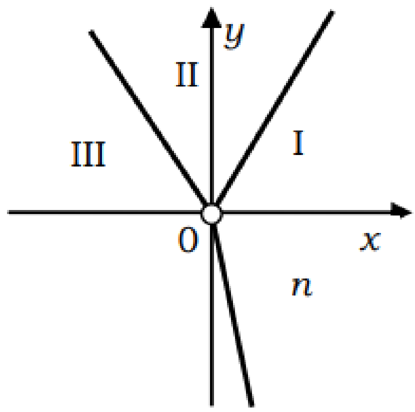


Рис. 6

Ідею розгляду багатозначних і неоднолистих функцій як однозначних на деякій абстрактній поверхні запропонував Б. Ріман. Загальна теорія побудови ріманових поверхонь виділяється в окремий розділ, який не є предметом розгляду нашого посібника. Тому обмежимося тільки елементарними фактами.

Аби зробити відображення $w = z^n$ усієї площини взаємно однозначним і з'ясувати, що буде образом усієї площини у такому разі, застосуємо поняття поверхні Рімана.

Означення. Поверхнею Рімана відображення $w = f(z)$ називається абстрактний геометричний образ, складений з образів областей однолистості цієї функції таким чином, що відповідність між точками z комплексної площини й точками поверхні Рімана є неперервною та взаємно однозначною.

Зауважимо (без доведення), що довільну аналітичну функцію можна розглядати як взаємно однозначне відображення на її рімановій поверхні. Для цього достатньо різні значення, яких набуває ця функція в одній точці, відносити до різних листів поверхні Рімана.

Побудуємо поверхню Рімана степеневої функції. За область однолистості виберемо при $\alpha = 0$ першу ($k = 0$) з указаних областей однолистості $D_0 = \left\{z: 0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}\right\}$ і знайдемо образи її границі. Очевидно, що промінь $\arg z = 0$ залишиться собою $\arg w = 0$, а промінь $\arg z = \frac{2\pi}{n}$ стане променем $\arg w = 2\pi$. Оскільки ці промені відповідають різним прообразам, то ми сприйматимемо їх як різні лінії. Тому образом області D_0 вважатимемо всю комплексну площину з розрізом уздовж дійсної додатної півосі. Точки границь при цьому перетворюються на верхній та нижній береги розрізу. Відображаючи наступні області однолистості, прийдемо до того, що образами кожної наступної області будуть області, обмежені парами променів $2k\pi$ та $2(k+1)\pi$ $(k = \overline{0, n-1})$. Це будуть знов-таки площини з розрізами вздовж дійсних додатних півосей. Щоб одержати поверхню Рімана, нам потрібно склеїти образи областей однолистості за неперервністю. Для цього підкладемо лист другого образу під перший, третій – під другий і т. д., n -й – під (n –1) -й так, аби розрізи збіглися, і умовно склеїмо нижній берег попереднього з верхнім наступного, а оскільки функція $w = z^n$ неперервна на дійсній додатній півосі в площині, то нижній берег останнього умовно склеїмо з верхнім першого. Схему поверхні Рімана функції $w = z^n$ подано на рис. 7.

Одержаний за такою побудовою n-листий геометричний образ і буде поверхнею Рімана функції $w = z^n$. Відображення всієї комплексної площини на цій поверхні конформне, за винятком точок $z = 0$ та $z = \infty$, у яких порушується консерватизм кутів.

Для функції $w = z^2$ областями однолистості є верхня ($\mathrm{Im} z > 0$) та нижня ($\mathrm{Im} z < 0$) півплощини (рис. 8).

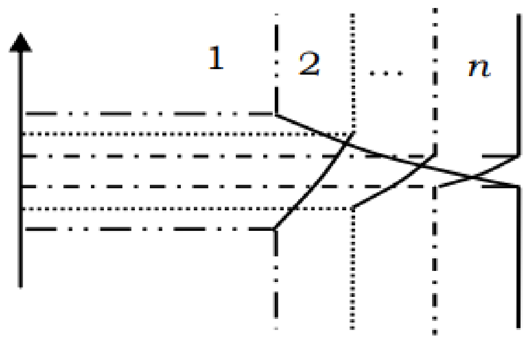


Рис. 7

Образами кожної з областей однолистості є вся розширена комплексна площина $\bar{C}$. Вона реалізує конформне відображення кожної з півплощин Imz > 0 та Imz < 0 на всій площині з розрізом уздовж додатної дійсної півосі. При цьому таке відображення в околі точки z = 0 подвоює величину кутів. Об'єднаємо два образи областей однолистості функції $w = z^2$ у поверхню Рімана. Підкладемо під перший лист (образ Imz > 0) другий (образ Imz < 0) так, щоб розрізи збігалися. Тепер кожній точці площини відповідатиме деяка точка (образ) верхнього або нижнього листа. Очевидно, що образом границі φ = π верхнього листа буде нижній берег розрізу першого листа, верхній берег розрізу другого листа – образом φ = 2π – границі нижнього листа, яка збігається з образом φ = 0 (верхній берег першого листа). Відповідно до цього умовно склеїмо береги розрізів хрест-навхрест. Ми одержали геометричний образ площини z при відображенні функцією $w = z^2$, який є поверхнею Рімана (рис. 9).

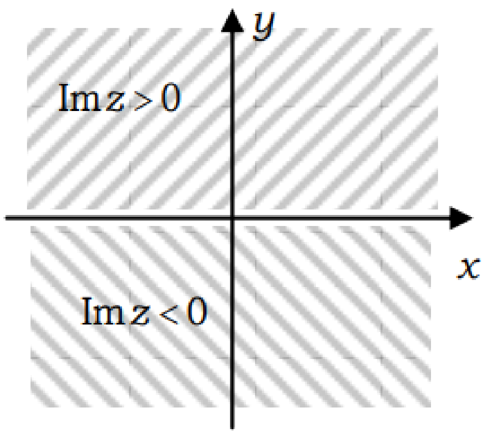


Рис. 8

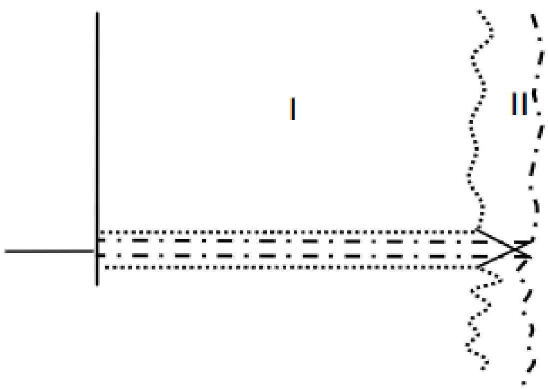


Рис. 9

Для пояснення поведінки образів замкнених кривих на поверхні Рімана розглянемо відображення цією функцією одиничного кола з центром у початку координат. Верхнє півколо ($0 < \varphi < \pi$) перейде в коло $|w| = 1$ з виключеною точкою w =1, яка лежить на першому листі поверхні Рімана. Нижнє півколо ($\pi < \varphi < 2\pi$) перетворюється на те саме коло на другому листі. Далі склеюємо чотири вільні кінці цих кіл хрест-навхрест, додаючи при цьому точки, які вважаємо різними, хоча геометрично вони збігаються. Одержана замкнена та умовно вільна від самоперетину крива, що лежить на двох листах поверхні Рімана, і буде взаємно однозначним образом кола $|z| = 1$.

Задля підтвердження справедливості гіпотези про відсутність самоперетинів на поверхні Рімана наведемо геометричну аналогію. Якщо розглядати плоску фігуру, зображену на рис. 10, як проєкцію просторової петлі, то очевидно, що її точку самоперетину недоцільно брати до уваги.

4.5.4. Відображення сітки полярних і декартових координат

Легко переконатися, що функція $w = z^2$ сітку полярних координат відображає на себе, а прообразами сім'ї прямих, паралельних координатним лініям $u = c_1$ та $v = c_2$ у площині змінної z (рис. 11), є дві сім'ї гіпербол $x^2 - y^2 = c_1$ та $2xy = c_2$, які зображено на рис. 12.

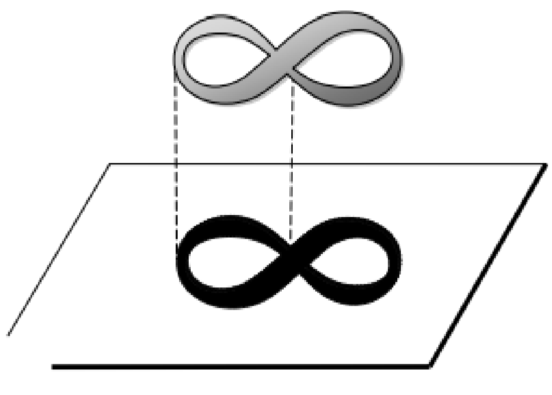


Рис. 10

Сім'я прямих, паралельних декартовим координатним осям, задана у площині змінної z, відобразиться у дві сім'ї парабол. Нехай $z = c + it\ (-\infty < t < \infty)$, тоді одержимо сім'ї $u = c^2 - t^2$, $v = 2ct\ (-\infty < t < \infty)$. Якщо з цього параметричного запису виключити параметр t, то маємо $v^2 = 4c^2(c^2 - u)$. Це рівняння параболи, вісь якої спрямована вздовж дійсної від'ємної півосі, а фокус розташовується на початку координат з параметром $p = 2c^2$. Аналогічно, якщо

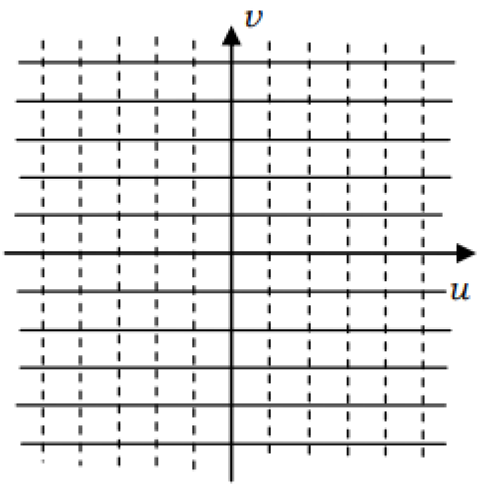


Рис. 11

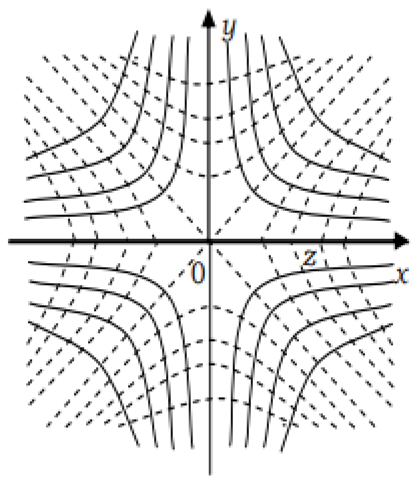


Рис. 12

вважатимемо, що $z = t + ic'$, то одержимо параболу

$$v^2 = 4c'^2(c'^2 + u)$$

з віссю, спрямованою вздовж дійсної додатної півосі з фокусом на початку координат і параметром $p' = 2c'^2$ (рис. 13, 14).

Розглядаючи відображення $w = z^2$, потрібно не забувати, що воно не взаємно однозначне, і кожна точка w має два прообрази. Зокрема, прообразом параболи $v^2 = 4c^2(c^2 - u)$ є дві прямі, симетричні відносно уявної осі, тобто прямі $z = c + it$ та $z = c - it$; прообразом параболи $v^2 = 4c'^2(c'^2 + u)$ є дві прямі, симетричні відносно дійсної осі, а саме прямі $z = t + ic'$ та $z = t - ic'$. Якщо ж ми розглядаємо тільки образ деякої півплощини, обмеженої прямою, що проходить через початок координат, то відображення буде взаємно однозначним.

З того, що сім'ї прямих ортогональні, а відображення конформне, випливає, що одержані сім'ї парабол взаємно ортогональні. Користуючись досить простими міркуваннями (зробити самостійно), можна показати, що прообразом сітки декартових координат $u = c$, $v = c'$ (рис. 15) у площині $w = u + iv$ ($w = z^n$, $u = r^n \cos n\varphi$, $v = r^n \sin n\varphi$, $z = re^{i\varphi}$) є дві множини кривих, які описуються рівняннями

$$r = \sqrt[n]{\frac{c}{cosn\varphi}}, r = \sqrt[n]{\frac{c'}{sinn\varphi}}.$$

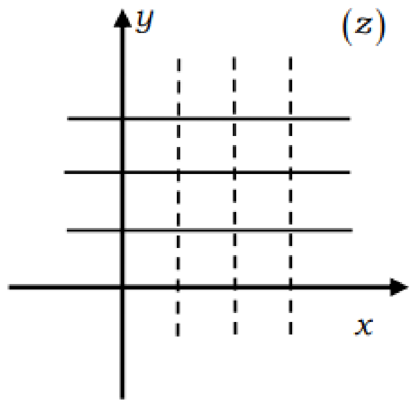


Рис. 13

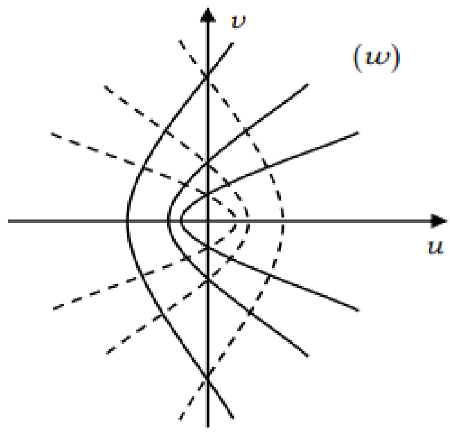


Рис. 14

Зокрема, при n = 2 вони є звичайними гіперболами. На рис.16 ці криві зображені при n = 5 (ті, що відповідають першому рівнянню, позначено пунктирними лініями, а другому – суцільними).

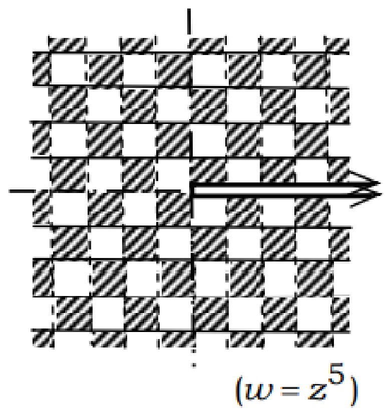


Рис. 15

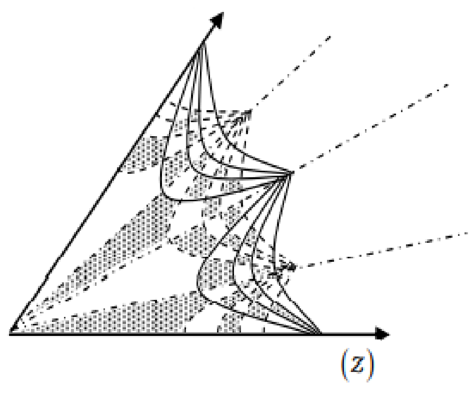


Рис. 16

4.5.5. Відображення кругових луночок (двокутників)

Відображення, що розглядається далі, є послідовним виконанням кількох елементарних перетворень: дробово-лінійного w_1, повороту на заданий кут w_2 і завершального піднесення до степеня.

Круговою луночкою (двокутником) будемо називати плоску фігуру, утворену перетином дуг двох кіл з необов'язково рівними радіусами.

Очевидно, що кути при вершинах двокутника дорівнюють один одному. Нехай є двокутник з вершинами в точках $A(z_1)$ та $B(z_2)$ і кутом при вершинах, що дорівнює α. Потрібно знайти конформне відображення області цього двокутника на верхню півплощину.

За допомогою цілої лінійної функції $w_1 = (z - z_1)e^{i\arg(z-z_1)}$ вершину луночки z_1 відобразимо у початок координат і повернемо луночку на кут $\arg(z - z_1)$ до суміщення другої вершини з точкою $w_1(z_2)$ дійсної осі, а саме $w_1(z_2) = |z_1 - z_2|$. Функція $w_2 = \frac{w_1}{w_1 - w_1(z_2)}$ точку $w_1(z_2)$ відображає у $w_2 = \infty$. Отже, за круговою властивістю дробово-лінійного відображення дуги кіл, що обмежують луночку, відобразяться в дуги кіл з нескінченним радіусом, тобто у промені, що виходять із початку координат. Це означає, що межа луночки відображається на сторони кута з вершиною на початку координат і, відповідно до властивості збереження кутів, розхил цього кута дорівнює α . Причому відрізок $[0, w_1(z_2)]$ відображається в додатну піввісь $\mathrm{Im} w_2 = 0$. Отже, указана дробово-лінійна функція відображає луночку на внутрішність кута, що визначається правилом обходу.

Відображення $w_3 = w_2 e^{i\theta}$ повертає кут проти руху стрілки годинника на величину θ так, що нижній промінь, який його обмежує, збігається з додатною дійсною піввіссю, а степенева функція $\varsigma = (w_3)^{\pi/\alpha}$ розширює кут до розгорнутого.

4.5.6. Дробово-лінійна функція

Так називають функцію вигляду

$$w = \frac{az+b}{cz+d},$$

де a, b, c, d – фіксовані комплексні числа, для яких $ac \neq 0, ad - bc \neq 0$.

Якщо $c = 0$, то отримаємо лінійну функцію, яка була досліджена раніше. Випадок $ad - bc = 0$ не має сенсу, оскільки за його умови $w(z) = Const$.

Відображення, що здійснюється цією функцією, називається дробово-лінійним.

Доозначимо функцію $w(z)$ в точках $z = -\frac{d}{c}$ і $z = \infty$ співвідношеннями:

$$w(-\frac{d}{c}) = \infty \text{ і } w(\infty) = \frac{a}{c}.$$

Функція $w(z)$ взаємно однозначно і конформно (зі збереженням кутів між кривими і напрямку їх відліку) здійснює відображення розширеної комплексної площини z на розширену комплексну площину w. При цьому слід помітити, що дві криві, які проходять через точку $z = \infty$, утворюють кут φ, якщо він формує на початку координат образи цих кривих.

Дві точки z_1 і z_2 називають симетричними відносно кола $|z - a| = R$, якщо:

1) Вони лежать на одному промені, який виходить із центра a кола $|z - a| = R$;
2) Добуток їх відстані до центра кола дорівнює квадрату радіуса кола, тобто

$$|z_1 - a||z_2 - a| = R^2.$$

Додамо до цього, що точкою, симетричною центру кола $z_1 = a$, вважається $z = \infty$. Точка кола $|z - a| = R$ є симетричною собі відносно цього кола.

Відображення, котре переводить кожну точку z в точку, яка симетрична з нею відносно деякого кола, називається і н в е р с і є ю відносно цього кола.

Оскільки

$$w(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z+\frac{d}{c}},$$

то скориставшись показниковою формою комплексного числа $\frac{bc-ad}{c^2} = R^2 e^{i\alpha}$, отримаємо

$$w(z) = \frac{a}{c} + e^{i\alpha}\frac{R^2}{z+\frac{d}{c}}.$$

Тоді це відображення можна розглядати як послідовне виконання таких перетворень:

1) $w_1 = z + \frac{d}{c}$ – паралельне перенесення на вектор $\frac{d}{c}$;

2) $w_2 = \frac{R^2}{w_1}$ – інверсія відносно кола $|z| = R$ і дзеркальне відображення відносно осі Ox;

3) $w_3 = e^{i\alpha} w_2$ – поворот на кут α навколо початку координат;

4) $w = w_3 + \frac{a}{c}$ – паралельне перенесення на вектор $\frac{a}{c}$.

Відмітимо найважливіші властивості дробово-лінійного відображення:

1. Прямі і кола, які проходять через точку $z = -\frac{d}{c}$, перетворюються в прямі, а прямі і кола, що через неї не проходять – в кола (к р у г о в а   в л а с т и в і с т ь).

2. Будь-яка пара точок, симетричних відносно прямої чи кола С, відображаються в пару точок, симетричних відносно образу С (в л а с т и в і с т ь   з б е р е ж е н н я   с и м е т р і ї). Зазначимо, якщо точки z_1 і z_2 симетричні відносно кола $|z - a| = R$, то

$$z_2 = a + \frac{R^2}{\overline{z_1 - a}}.$$

3. Існує одне і лише одне дробово-лінійне відображення $w(z)$, яке три довільні різні точки z_1, z_2, z_3 відображає в задані довільні різні точки w_1, w_2, w_3. Воно визначається із співвідношення

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2},$$

де різниці, в яких фігурують z_n чи $w_n, n = 1,2,3$, є нескінченно віддаленою точкою, треба замінити одиницями.

Отримане рівняння виражає важливу властивість образів будь-якої четвірки попарно різних точок при відображенні $w = w(z)$. А саме, якщо z_1,z_2, z_3, z_4 є такою четвіркою, а w_1,w_2, w_3, w_4 їх відповідними образами, то

$$\frac{w_4 - w_1}{w_4 - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

Відношення

$$\frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \stackrel{def}{=} (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

називається *подвійним* або *гармонічним* для чотирьох точок. Оскільки

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4),$$

то подвійне відношення четвірки точок комплексної площини є *інваріантом дробово-лінійного відображення*.

4. Які б не були прямі чи кола С і Г та дві трійки точок z_1, z_2, z_3 і w_1, w_2, w_3, котрі належать відповідно С і Г, то існує єдина дробово-лінійна функція $w(z)$, яка відображає С на Г у такий спосіб, коли z_1, z_2, z_3 відображаються відповідно в точки w_1, w_2, w_3.

Зазначимо, що С і Г – межі двох областей. Середина С може відобразитись як на середину, так і на зовнішність Г. Це можна визначити так: якщо при русі вздовж С в напрямку від z_1 до z_3 через z_2 внутрішність С залишається, наприклад, зліва від спостерігача, а при русі від w_1 до w_3 через w_2 вздовж Г справа, то середина С відображається на зовнішність Г.

5. Нехай D і G – дві кругові області (тобто, межами яких є кола в широкому сенсі слова), а $w(z)$ відображає D на G. Тоді образом межі області D є межа області G (п р и н ц и п   з б е р е ж е н н я   м е ж і).

Приклад 4.16. Знайти образ поля $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ при відображенні $w=\frac{1}{z}$.

Розв'язання. Оскільки для відображення $w=\frac{1}{z}$ маємо

$$u+iv=\frac{1}{x+iy}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{yi}{x^2+y^2},$$

то $u=\frac{x}{x^2+y^2}$, $v=-\frac{y}{x^2+y^2}$.

Тоді, враховуючи ці співвідношення й рівність

$$u^2+v^2=\frac{1}{x^2+y^2},$$

знайдемо образ заданого кола:

$$x^2+y^2+2x-4y+1=0$$

$$1+\frac{2x}{x^2+y^2}-\frac{4y}{x^2+y^2}+\frac{1}{x^2+y^2}=0$$

$$1+2u+4v+u^2+v^2=0$$

$$(u+1)^2+(v+2)^2=4$$

$$|w-1-2i|=2.$$

Відповідь. Коло $|w-1-2i|=2$.

Приклад 4.17. Знайти дробово-лінійну функцію, яка переводить точки –1, i, 1+i відповідно в точки 1) 0, 2i, 1–i; 2) i, ∞, 1.

Розв'язання. Скористаємося формулою

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$

і отримаємо: 1)

$$\frac{w}{w-2i}:\frac{1-i}{1-3i}=\frac{z+1}{z-i}:\frac{2+i}{1};\ \frac{(1-3i)w}{(1-i)(w-2i)}=\frac{z+1}{(z-i)(2+i)};$$

$$\frac{w}{(w-2i)}=\frac{(1-i)}{(1-3i)(2+i)}\frac{z+1}{(z-i)};\ \frac{w}{(w-2i)}=\frac{z+1}{5(z-i)};$$

$$w=-\frac{2i(z+1)}{4z-1-5i}.$$

2)

$$\frac{w-i}{w-\infty}:\frac{1-i}{1-\infty}=\frac{z+1}{z-i}:\frac{2+i}{1};\ \frac{w-i}{(1-i)}=\frac{z+1}{(z-i)(2+i)};$$

$$w=\frac{(1-i)(z+1)}{(2+i)(z-i)}+i;\ w=\frac{(1-3i)(z+1)+5i(z-i)}{5(z-i)};$$

$$w=\frac{(1+2i)z+6-3i}{5(z-i)}.$$

Відповідь. 1) $w=-\frac{2i(z+1)}{4z-1-5i}$. 2) $w=\frac{(1+2i)z+6-3i}{5(z-i)}$.

Приклад 4.18. Знайти дробово-лінійне відображення, яке точки $z_1=1, z_2=i$ залишає нерухомими, а точку $z_3=0$ переводить в точку $w_3=-1$.

Розв'язання. За умовою задачі маємо три пари відповідних точок:

$$z_1=1, z_2=i, z_3=0,$$

$$w_1=1, w_2=i, w_3=-1.$$

Цього достатньо, щоб знайти дробово-лінійне відображення:

$$\frac{w-1}{w-i}\cdot\frac{1+i}{2}=i\frac{z-1}{z-i};\ \frac{w-1}{w-i}=(1+i)\frac{z-1}{z-i};$$

$$w(z-i)-z+i=w(1+i)(z-1)-i(1+i)(z-1);$$

$$w\big(z-i-(1+i)(z-1)\big)=z-i+(1-i)(z-1);$$

$$(1-iz)w=2z-iz-1;$$

$$w = -\frac{(2-i)z-1}{1-iz}.$$

Відповідь. $w = -\frac{(2-i)z-1}{1-iz}.$

Приклад 4.19. Знайти симетричний образ кола $|z-1| = 1$ відносно одиничного кола.

Розв'язання. Точки, які лежать на колі $|z-1| = 1$, запишемо у вигляді $z = 1 + e^{i\varphi}$. Образи цих точок, симетричних відносно кола $|z| = 1$, будуть виражатися комплексними числами

$$\frac{1}{\overline{1+e^{i\varphi}}} = \frac{1}{1+cos\varphi - isin\varphi} = \frac{1+cos\varphi + isin\varphi}{2(1+cos\varphi)} = \frac{1}{2} + itg\frac{x}{2}.$$

Звідси випливає, що шуканий образ – пряма $x = \frac{1}{2}$.

Відповідь. пряма $x = \frac{1}{2}$.

Приклад 4.20. З'ясувати, на яку область функція

$$w(z) = \frac{z-1}{z-2}$$

відображає смугу $0 < x < 1$.

Розв'язання. Знайдемо образи прямих $x = 0$ і $x = 1$, котрі є межами смуги $0 < x < 1$. Далі виконаємо очевидні перетворення:

$$w = \frac{z-1}{z-2}, z = \frac{2w-1}{w-1}, Rez = Re\frac{2w-1}{w-1},$$

$$Rez = Re\frac{(2w-1)(\overline{w}-1)}{(w-1)(\overline{w}-1)} = Re\frac{(2w\overline{w}-2w-\overline{w}+1)}{|w-1|^2},$$

$$x = \frac{2(u^2+v^2)-3u+1}{(u-1)^2+v^2}.$$

Підставляючи в останню рівність $x = 0$, знайдемо образ прямої $x = 0$:

$$2(u^2+v^2)-3u+1=0, \qquad u^2+v^2-\frac{3}{2}u+\frac{1}{2}=0;$$

$$(u-\frac{3}{4})^2+v^2=\frac{1}{16}; \ \left|w-\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{4}.$$

Це коло радіуса $\frac{1}{4}$ з центром в точці $w_0=\frac{3}{4}$. Аналогічно знаходимо образ прямої $x=1$:

$$\frac{2(u^2+v^2)-3u+1}{(u-1)^2+v^2}=1,$$

$$u^2+v^2-u=0, \ (u-\tfrac{1}{2})^2+v^2=\tfrac{1}{4}, \ \left|w-\tfrac{1}{2}\right|=\tfrac{1}{2}.$$

Отримали коло радіуса $\frac{1}{2}$ з центром в точці $w_0=\frac{1}{2}$. Оскільки $w(\frac{1}{2})=\frac{1}{3}$, то смуга $0<x<1$ відображається в область, обмежену колами $\left|w-\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{4}$ і $\left|w-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ (рис. 17).

Відповідь. Область, яка обмежена колами $\left|w-\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{4}$ і $\left|w-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$.

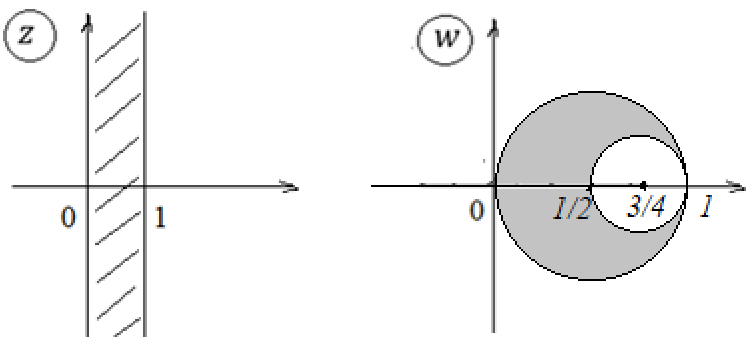


Рис. 17. Відображення в прикладі 4.20

Приклад 4.21. З’ясувати, в яку область функція

$$w=\frac{z}{z-1}$$

відображає кільце $1<|z|<2$.

Розв'язання. Оскільки

$$w = \frac{z}{z-1}, \qquad wz - w = z, \qquad z = \frac{w}{w-1}, \qquad |z| = \frac{|w|}{|w-1|},$$

то звідси і з умови випливає, що для знаходження образа області $1 < |z| < 2$ треба розв'язати нерівність

$$1 < \frac{|w|}{|w-1|} < 2.$$

Знайдемо розв'язок системи нерівностей, еквівалентної цій нерівності:

$$\begin{cases} \frac{|w|}{|w-1|} > 1, \\ \frac{|w|}{|w-1|} < 2, \end{cases} \begin{cases} |w| > |w-1|, \\ |w| < 2|w-1|, \end{cases} \begin{cases} u^2 + v^2 > (u-1)^2 + v^2, \\ u^2 + v^2 < 4((u-1)^2 + v^2), \end{cases}$$

$$\begin{cases} u > 1/2, \\ (u-4/3)^2 + v^2 > 4/9, \end{cases} \begin{cases} \mathrm{Re} w > 1/2, \\ |w-4/3| > 2/3. \end{cases}$$

Отже, образом кільця $1 < |z| < 2$ при заданому відображенні буде двозв'язна область, межа якої буде складатися із прямої $Rew = 1/2$ і кола $|w-4/3| = 2/3$ (рис. 18).

Відповідь. Двозв'язна область, межа якої буде складається із прямої

$\mathrm{Re} w = 1/2$ і кола $|w-4/3| = 2/3$.

Приклад 4.22. З’ясувати, що буде образом півкола $|z| < 1$, $\mathrm{Im} z > 0$ при відображенні

$$w = i\frac{1-z}{z+1}.$$

Розв'язання. При $z = 1$ і $z = -1$ відповідно маємо $w = 0$ і $w = \infty$. За круговою властивістю дробово-лінійного відображення це означає, що дуга ВСА (рис. 19) і діаметр АВ перейдуть в два промені площини w, які виходять з початку координат. При $z = 0$ і $z = i$ відповідно буде $w = i$ і $w = 1$. Відтак, діаметр АВ перейде в промінь $\arg w = \frac{\pi}{2}$, а дуга ВСА – в промінь $\arg w = 0$.

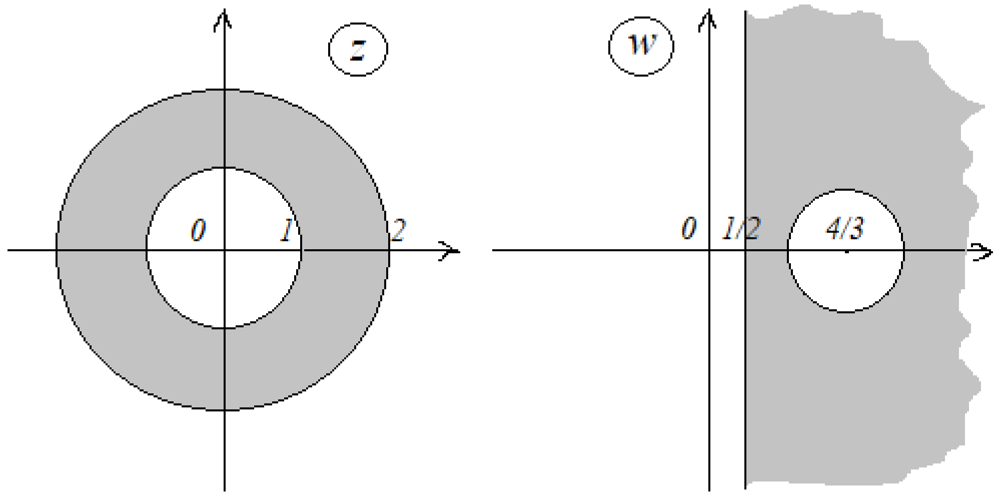


Рис. 18. Область і її образ в прикладі 4.21

Таким чином, розглянутий півкруг площини z перейде в один із двох нескінченних секторів розширеної площини w, обмежених променями $argw = 0$ і $argw = \frac{\pi}{2}$ (тобто або в перший квадрант, або в розширену площину без цього квадранта).

Для визначення, який саме із двох секторів є образом півкола, звернемося до принципу відповідності меж. При обході межі півкола в додатному напрямку АОВС (за цієї умови півколо залишається ліворуч) в площині w зліва залишається сектор $0 < argw < \frac{\pi}{2}$.

Зауваження. Цей самий результат можна отримати, скориставшись властивістю конформного відображення – збереження кутів не тільки за величиною, але й за напрямком. Кут між дугою ВСА і діаметром АВ в точці В, що відлічено від діаметра до дуги, дорівнює $\frac{\pi}{2}$. Отже, і кут, відрахований від променя $\arg w = \frac{\pi}{2}$ до променя $\arg w = 0$, становитиме $\frac{\pi}{2}$.

Відповідь. Сектор $0 < \arg w < \frac{\pi}{2}$.

Приклад 4.23. Знайти дробово-лінійну функцію, яка відображає область, що лежить між колами $|z| = 1, |z - i/2| = 1/2$, на смугу $-1 < \mathrm{Re} w < 1$.

Розв'язання. Необхідно межу заданої області відобразити в межу смуги, тобто обидва кола перевести в прямі. Ці кола проходять через точку i. За допомогою перетворення $w_1 = \frac{1}{z-i}$ переведемо її в нескінченність. Для знаходження образа кола $|z| = 1$ візьмемо на ньому дві точки $z_1 =-1, z_2 = 1$. Вони перейдуть відповідно в точки $w_{11} =-(-1+i)/2$, $w_{12} = (1+i)/2$.

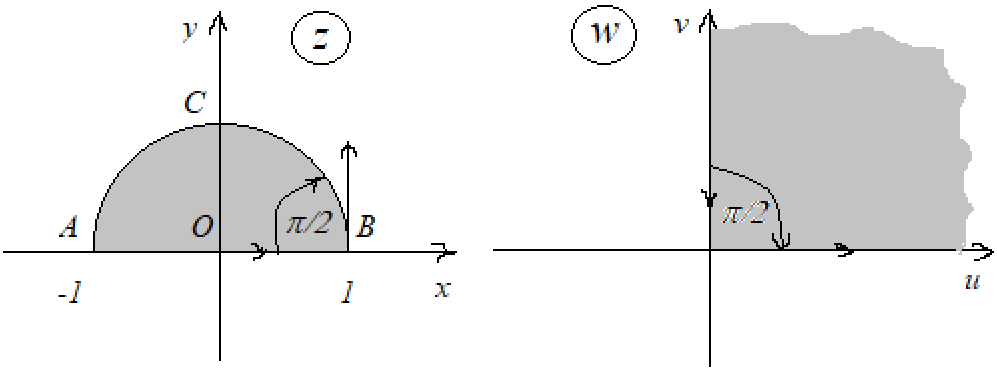


Рис. 19 Ілюстрація до прикладу 4.22

Відтак, коло $|z| = 1$ відобразилось на пряму, яка проходить через точки w_{11} і w_{12}.

Образ другого кола знайдемо тепер за образом тільки однієї точки, наприклад, $z = 0$: $w = i$. Отже, коло $|z-i/2| = 1/2$ перейде в пряму, що проходить через точку $w = i$ і паралельно першій прямій. З'ясуємо, чи відобразилась задана область в середину чи зовнішність отриманої смуги. Оскільки точка $z =-i/2$ належить заданій області і $w_1(-i/2\,) = 2i/3$, то задана область відобразилась в середину отриманої смуги.

Для завершення розв'язання треба виконати такі перетворення (рис. 20):

1) $w_2 = w_1 - \frac{3i}{4}$ – паралельне перенесення на вектор $-\frac{3i}{4}$;

2) $w_3 = e^{i\pi/2} w_2$ – поворот на кут $\frac{\pi}{2}$ навколо початку координат;

3) $w = 4w_3 = \frac{3z+i}{z-i}$ – гомотетія з центром на початку координат і коефіцієнтом 4.

Відповідь. $w = \dfrac{3z+i}{z-i}$.

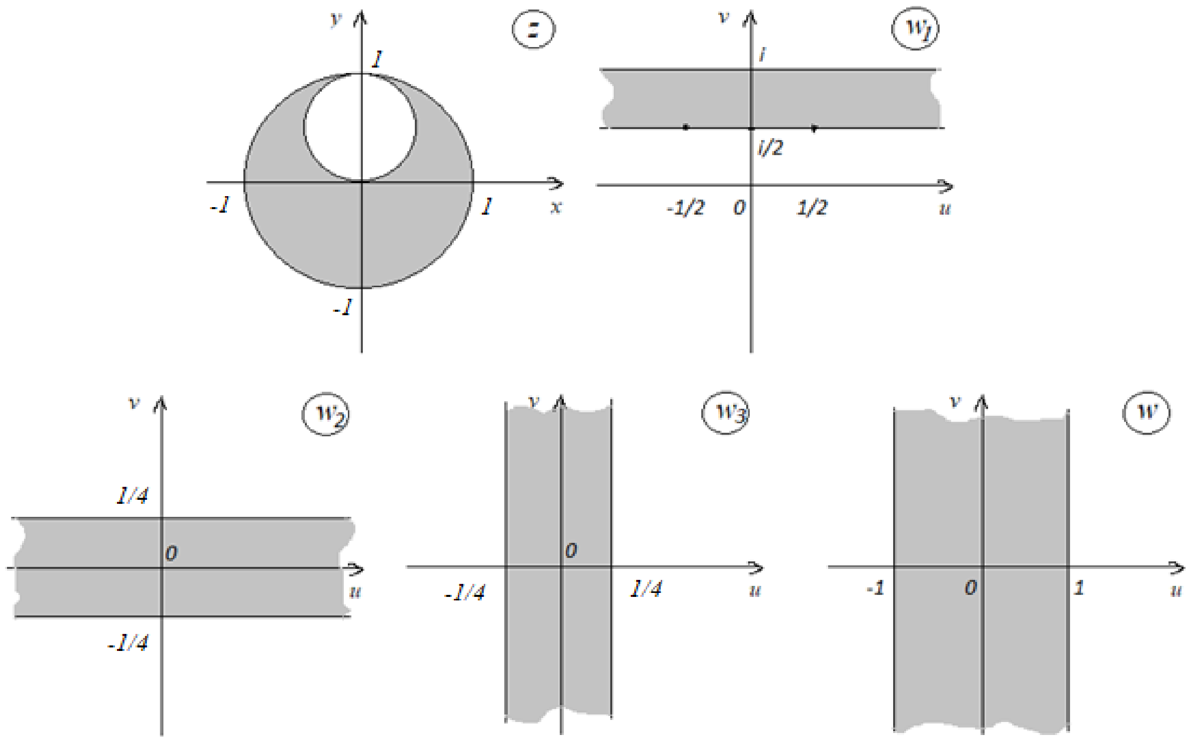


Рис. 20. Ілюстрація до прикладу 4.23

Приклад 4.24. Відобразити на верхню півплощину кругову луночку: $|z| < 1, |z-i| < 1$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо точку перетину кіл:

$$|z| = |z-i|, x^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2, \Rightarrow \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Функція

$$w_1 = \frac{z + \dfrac{\sqrt{3}-i}{2}}{z - \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}} = \frac{2z + \sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}$$

відобразить дуги, що обмежують луночку в промені, які утворюють кут на площині w_1 з вершиною в точці $w_1 = 0$. Для з'ясування розтягування цього кута зробимо такі обчислення:

$$w_1(0) = \frac{\sqrt{3}-i}{-\sqrt{3}-i} = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{3}\,\right), arg w_1(0) = \frac{2}{3}\pi,$$

$$w_1(i) = \frac{2i+\sqrt{3}-i}{2i-\sqrt{3}-i} = -\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} = -1-i\sqrt{3}, arg w_1(i) = -\frac{2}{3}\pi,$$

$$w_1(\frac{i}{2}) = -1.$$

Звідси випливає, що $w_1(z)$ відображає кругову луночку в середину кута з вершиною в точці $w_1 = 0$ і розхилом $\frac{2}{3}\pi$. Із рис. 21 видно, що для завершення розв'язання необхідно виконати такі перетворення:

1) $w_2 = e^{-2\pi i/3}w_1$ – поворот на кут $-\frac{2\pi}{3}$;

2) $w = (w_2)^{3/2} = e^{-\pi i}\left(\frac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^{3/2} = -\left(\frac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^{3/2}$ – відображення на півплощину.

Відповідь. $$w = -\left(\frac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^{3/2}.$$

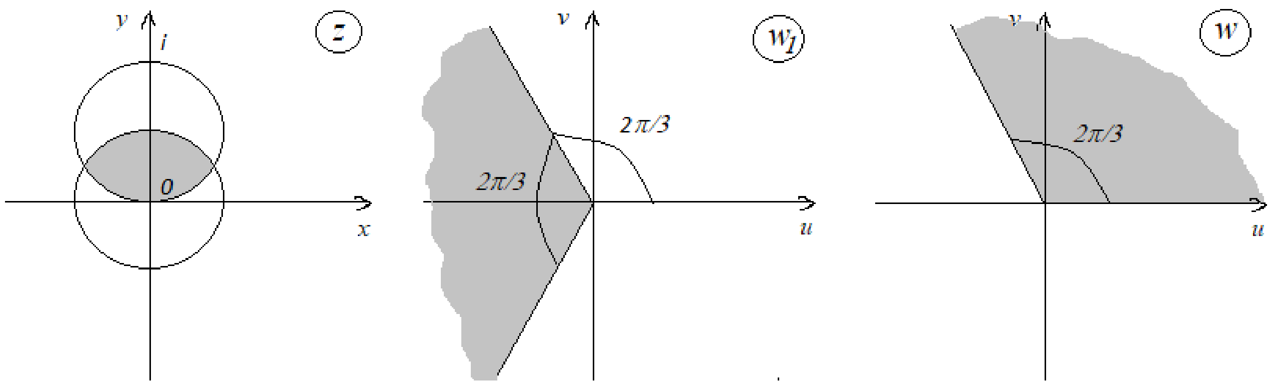


Рис. 21. Ілюстрація до прикладу 4.24

Вправи.

Знайти дробово-лінійну функцію, яка переводить точки –1, ∞, i відповідно в точки:

1. i, 1, 1+i; **2**. ∞,i, 1; **3**. 0, ∞, 1.

Знайти дробово-лінійні функції за такими умовами:

4. точки 1 –1 нерухомі, а точка i переходить в точку 0;

5. точки ½ і 2 нерухомі, а точка $\frac{5}{4}+\frac{3}{4}i$ переходить в ∞.

Знайти симетричний образ відносно одиничного кола наступних ліній:

6. $|z| = 1/2$; **7**. $|z-i| = 1$.

Знайти образи заданих областей при відображенні $w = w(z)$:

8. Квадрант $x > 0,\ y > 0;\ w = \frac{z-i}{z+i}$;

9. Напівкруг $|z| < 1,\ Imz > 0;\ w = \frac{2z-i}{2+iz}$;

10. Кут $0<\varphi < \frac{\pi}{4}$; $w = \frac{z}{z-1}$;

11. Смуга $0 < x < 1;\ w = \frac{z-1}{z}$.

Відобразити на вертикальну смугу $0 < \mathrm{Re}w < 1$:

12. Півплощину $Rez > 0$ з вилученим кругом $\left|z-\frac{\alpha}{2}\right| \le \frac{\alpha}{2}$;

13. Двокутник, який міститься між колами $\left|z-\frac{d_1}{2}\right| = \frac{d_1}{2}$, $\left|z-\frac{d_2}{2}\right| = \frac{d_1}{d_2}$; $d_1 < d_2$;

14. Зовнішність кругів $\left|z-\frac{d_1}{2}\right| = \frac{d_1}{2}$, $\left|z-\frac{d_2}{2}\right| = \frac{d_2}{2}$; так щоб $w(d_2) = 0$.

15. Відобразити круг $|z-4i| < 2$ на півплощину $v > u$, аби центр кола перейшов в точку –4, а точка кола $2i$ – на початок координат.

Знайти образи заданих областей при відображенні $w = w(z)$:

16. $Rez < 1, w = \frac{z}{z-1+i}$;

17. $|z| < 1,\ Imz > 0;\ w = \frac{1-z}{1+z}$;

18. $|z-i| > 1,\ Imz > 0;\ w = \frac{1}{z}$;

19. $Rez < 1, w = \frac{z-3+i}{z-1+i}$;

20. $|z| < 1,\ Imz > 0;\ w = i\frac{1-z}{1+z}$.

Відповіді. **1**. $w = \frac{(1+i)z+1+3i}{(1+i)z+3+i}$. **2**. $w = \frac{iz+2+i}{z+1}$. **3**. $w = \frac{(1-i)}{2}(z+1)$. **4**. $w = \frac{iz+i}{z+i}$. **5.** $w = \frac{(1-4i)z-2(1-i)}{2(1-i)z-(4-i)}$. **6**. $|z| = 2$. **7**. Пряма $y = \frac{1}{2}$. **8**. Півкруг $|w| < 1, Imw < 0$. **9**. Область, яка містить в собі точку $w = 0$ і обмежена колами $|w| = 1$ і $\left|w+\frac{5i}{4}\right| = \frac{3}{4}$. **10**. Область, отриману із нижньої півплощини ($Imw < 0$) шляхом вилучення із неї частини круга $\left|w + \frac{5i}{4}\right| = \frac{3}{4}$, який знаходиться в ній. **11**. Область, обмежена прямою $Rew = 1$ і колом $\left|w - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{2}$, яка дотикається до неї. **12**. $w = -\frac{\alpha}{z} + 1 + hi$ або $w = -\frac{\alpha}{z} + hi$. **13**. $w = \frac{d_1}{(d_1 - d_2)}\left(\frac{d_2}{z} - i\right) + hi$ або $w = \frac{d_2}{(d_1 - d_2)}\left(\frac{d_2}{z} - 1\right) + 1 + hi$. **14**. $w = \frac{d_1(z - d_2)}{z(d_1 + d_2)}$. **15**. $w = -4\frac{zi + 2}{z - 2 - 4i}$. **16**. $Rew - Imw < 1$. **17**. $-\frac{\pi}{2} < argw < 0$. **18**. $-\frac{1}{2} < Imw < 0$. **19.** $|w| > 1$. **20**. $Rew > 0, Imw > 0$.

4.5.7. Функція Жуковського

Так називають функцію

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \tag{4.7}$$

застосування якій в аеродинаміці знайшов Н.Є. Жуковський. Вона є аналітичною в своїй області визначеності ($z \neq 0$), причому

$$w'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right). \tag{4.8}$$

Тому в кожній точці $z \neq \pm 1$ відображення, яке здійснює ця функція, буде конформним.

Її областями однолистості можуть бути тільки ті, які не містять в собі двох точок z_1 і z_2, пов'язаних рівністю $z_1 \cdot z_2 = 1$.

Отже, функція Жуковського однолиста в області тоді і лише тоді, коли область не містить в собі пари точок, які можна отримати одну з одної подвійною симетрією: відносно одиничного кола і дійсної осі. Тому областями однолистості можуть бути, наприклад, такі області: $|z| < 1, |z| > 1, Imz > 0, Imz < 0$.

Функція $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ відображає взаємно однозначно як середину, так і зовнішність одиничного круга на зовнішність відрізка $-1 \leq u \leq 1$ (дійсної осі).

При цьому кола $|z| = r$ відображаються на еліпси з фокусами ± 1 і півосями $\frac{1}{2}\left|\frac{1}{r} \pm r\right|$, а пари діаметрів, симетричних відносно координатних осей (складених із радіусів $z = \pm r(cos\alpha \pm isin\alpha)$, $0 \leq r < 1$), відображаються на гіперболи з фокусами ± 1 і півосями $|cos\alpha|$, $|sin\alpha|$, виключаючи вершини цих гіпербол. Відрізки променів $\alpha = 0$ $(0 < r \leq 1)$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $(0 < r \leq 1)$, $\alpha = \pi$ $(0 < r \leq 1)$, $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ $(0 < r \leq 1)$ – відповідно в проміжки $[1, +\infty)$, $(-\infty i, 0]$, $(-\infty, -1]$ і $[0, +\infty\, i)$.

Обернена до функції Жуковського функція

$$w = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

є двозначною, що обумовлено двозначністю квадратного кореня. Кожну точку z вона відображає в дві точки w_1 і w_2, пов'язаних умовою $w_1 \cdot w_2 = 1$. Точки $z = 1$ і $z = -1$ будуть точками розгалуження цієї функції. Отже, в будь-якій області, яка не містить в собі замкнених кривих, що обходять лише одну із цих точок, можна виділити дві однозначні вітки цієї функції. Такій умові, зокрема, задовольняє вся площина z з розрізом вздовж відрізка $[-1,1]$ дійсної осі. Вітки функції (4.8) однолистно відобразять площину z з указаним розрізом або на круг $|w| < 1$, або на круг $|w| > 1$.

Приклад 4.25. Відобразити верхню половину круга $|z| < 1$ з розрізом по відрізку $[\alpha i, i]$ $(0 < \alpha < 1)$ на верхню півплощину.

Розв'язання. (рис. 22)

1. $w_1 = z^2$;
2. $w_2 = \frac{1}{2}(w_1 + \frac{1}{w_1})$;
3. $w_3 = w_2 + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2})$;
4. $w = \sqrt{w_3} = \sqrt{\frac{1}{2}(z^2 + \frac{1}{z^2}) + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2})}$.

Відповідь. $w = \sqrt{\frac{1}{2}(z^2 + \frac{1}{z^2}) + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2})}$.

Рис. 22. Відображення для прикладу 4.25

Приклад 4.26. Відобразити круг $|z| < 1$ з розрізом по відрізку $[1/2,1]$ на верхню півплощину.

Розв'язання. (рис. 23)

$$w_1 = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}); w_2 = -\frac{w_1 + 1}{w_1 - 5/4}; \quad w = \sqrt{w_2} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) + 1}{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})}}.$$

Відповідь. $$w = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) + 1}{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})}}.$$

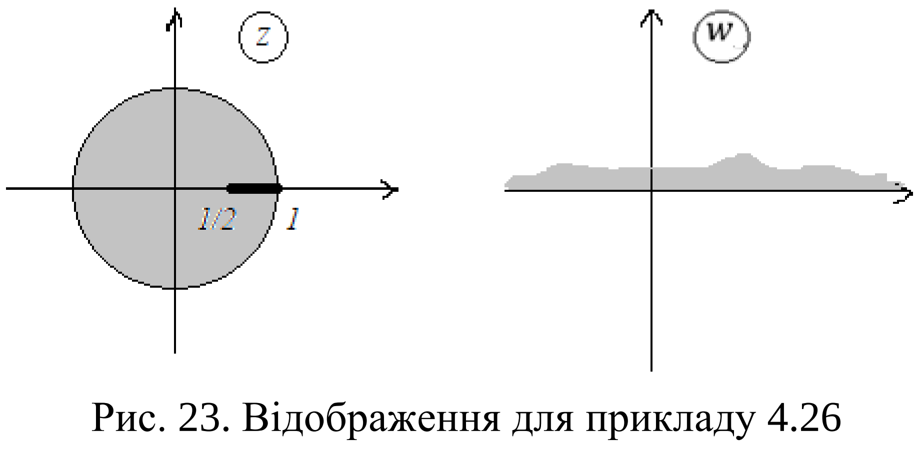


Рис. 23. Відображення для прикладу 4.26

Приклад 4.27. Відобразити круг $|z| < 1$ з розрізом по радіусу $[-1,0]$ і відрізку $[\alpha,1]$ $(0 < \alpha < 1)$ на верхню півплощину.

Розв'язання. (рис. 24)

1. $w_1 = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$;
2. $w_2 = e^{i\pi} w_1 = -w_1$;
3. $w_3 = \frac{1}{2}(\alpha + \frac{1}{\alpha}) - w_1$;
4. $w = \sqrt{w_3} = \sqrt{\frac{1}{2}(\alpha + \frac{1}{\alpha}) - \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})}$.

Відповідь. $w = \sqrt{\frac{1}{2}(\alpha + \frac{1}{\alpha}) - \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})}$.

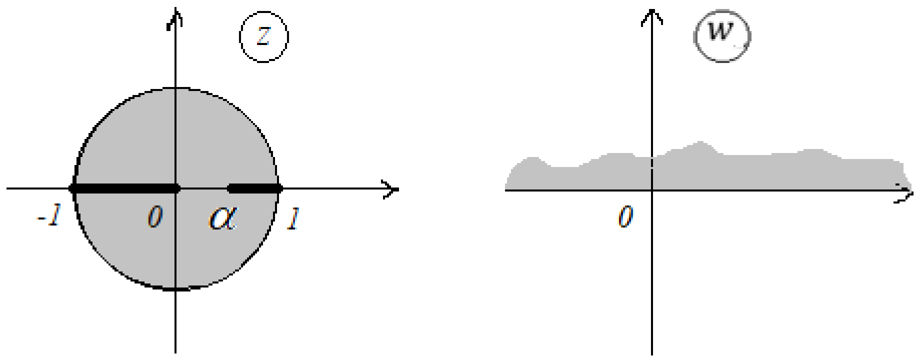


Рис. 24. Відображення для прикладу 4.27

Вправи.

Знайти образи наступних областей при відображенні функцією $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), w = u + iv$:

1. $|z| > 2$.
2. $\frac{\pi}{4} < argz < \frac{3\pi}{4}$.
3. $|z| < 1, z \notin [0,1]$.
4. $|z| > 1, z \notin [-2,-1], z \notin [1,\infty]$.
5. $|z| < 1, -\frac{3\pi}{4} < argz < -\frac{\pi}{4}$.
6. $\mathrm{Im}z > 0$.
7. $\mathrm{Im}z < 0$.
8. $|z| < 1, \mathrm{Im}z < 0$.
9. $|z| > 1, \mathrm{Im}z > 0$.
10. $1 < |z| < R, \mathrm{Im}z > 0$.

Відповіді. **1**. $\frac{16}{25}u^2 + \frac{16}{9}v^2 > 1$. **2**. $u^2 - v^2 < \frac{1}{2}$. **3**. $w \notin [-1,\infty]$.

4. $w \notin \left[-\frac{5}{4}, +\infty\right)$. **5**. $u^2 - v^2 < \frac{1}{2}, v > 0$. **6**. Вся площина з розрізами вздовж променів $(-\infty,-1]$ і $[1,\infty)$. **7**. Вся площина з розрізами вздовж променів $(-\infty,-1]$ і $[1,\infty)$. **8**. $\mathrm{Im}w > 0$. **9**. $\mathrm{Im}w > 0$. **10**. Верхня половина внутрішності еліпса $\frac{4u^2}{(R+1/R)^2} + \frac{4v^2}{(R-1/R)^2} = 1$.

4.5.8. Показникова функція

Оскільки $w' = e^z \neq 0$, то відображення, яке здійснює ця функція, буде конформним в будь-якій точці комплексної площини, але воно не буде взаємно однозначним. Будь-яка точка $\boldsymbol{z} \neq 0$ має нескінченну множину прообразів, які лежать на вертикальній прямій на відстані 2π одна від одної.

Прямі $y = b$ відображуються в промені $argw = b$, прямі $x = a$ – в кола $|w| = \boldsymbol{e}^a$.

Будь-яка область, котра не містить в собі двох різних точок, де дійсна частина збігається, а уявні відрізняються на число, кратне 2π, буде областю однолистості функції $w = e^z$. Прикладом області однолистості є смуга

$$b < \mathrm{Im}z < b + 2\pi,\ b \in R,$$

яку функція $w = e^z$ конформно відображує на площину w з розрізом вздовж променя $argw = b$. При цьому вважаємо, що нижній край межі $\mathrm{Im}z = b$ відповідає верхньому краю розрізу, а верхній межі $\mathrm{Im}z = b + 2\pi$ – нижній край розрізу.

Приклад 4.28. Знайти конформне відображення смуги $2 < \mathrm{Re}z < 3$ на півплощину $\mathrm{Im}w > 0$ (рис. 25).

Розв'язання. Шукану функцію отримаємо, виконавши послідовно наступні перетворення (рис. 26):

1. $w_1 = z - 2$;
2. $w_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} w_1 = i w_1$;
3. $w_3 = \pi w_2$.
4. $w = e^{w_3} = e^{i\pi(z-2)}$.

Відповідь. $w = e^{i\pi(z-2)}$.

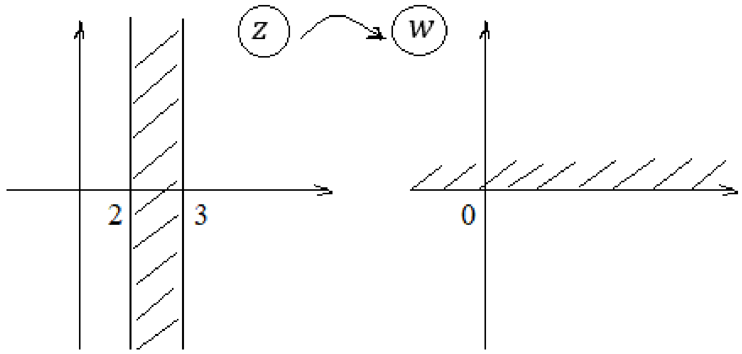


Рис. 25. Ілюстрація до прикладу 4.28

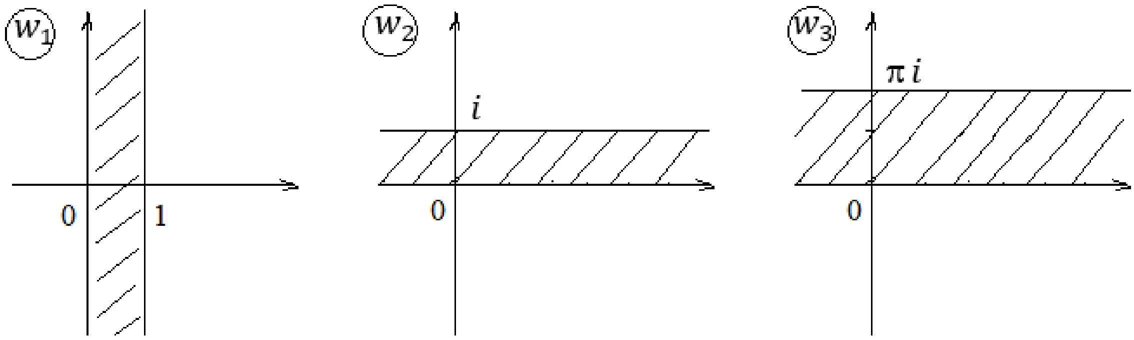


Рис. 26. Відображення для прикладу 4.28

Приклад 4.29. Відобразити на верхню півплощину смугу, обмежену прямими $y = x,\ y = x + h, h > 0$.

Розв'язання. Знаходимо ширину смуги $d = h/\sqrt{2}$. Шукане відображення отримаємо шляхом наступних послідовних відображень (рис. 27):

1. $w_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}}z = (1- i)z/\sqrt{2}$ – поворот на кут $i\,\frac{\pi}{4}$;
2. $w_2 = \frac{\pi}{d}w_1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{h}w_1$ – подібність з коефіцієнтом подібності $\frac{\pi\sqrt{2}}{h}$;
3. $w = e^{w_2} = e^{\frac{\pi(1-i)}{h}z}$.

Відповідь. $w = e^{\frac{\pi(1-i)}{h}z}$.

Приклад 4.30. Відобразити на верхню півплощину область, обмежену колами $|z| = 2$ і $|z- 3| = 1$.

Розв'язання. Шукане відображення – це суперпозиція наступних послідовних відображень: (рис. 28):

1. $w_1 = \frac{z+2}{z-2}$ – дробово-лінійне відображення, що переводить спільну точку $z = 2$ обох граничних кіл в точку $w = \infty$, а граничні кола

переходять в прямі $\mathrm{Re}w_1 = 0$ і $\mathrm{Re}w_2 = 3$; отже, задана область відобразилась на вертикальну смугу $0 < \mathrm{Re}w < 3$ шириною $d = 3$;

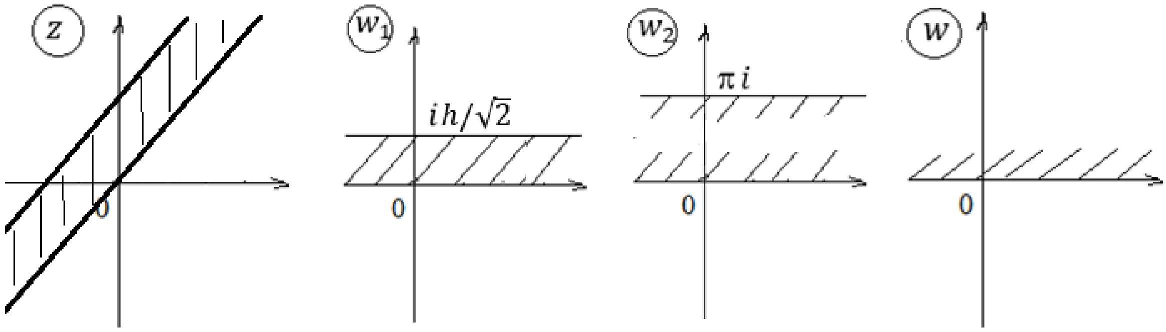


Рис. 27. Ілюстрація до прикладу 4.29

2. $w_2 = \frac{\pi}{3} e^{i\frac{\pi}{2}} w_1 = i\frac{\pi}{3} w_1$ – смуга повертається на кут $\frac{\pi}{2}$ і стає шириною π;

3. $w = e^{w_2} = e^{\frac{i\pi(z+2)}{3(z-2)}}$.

Відповідь. $w = e^{\frac{i\pi(z+2)}{3(z-2)}}$.

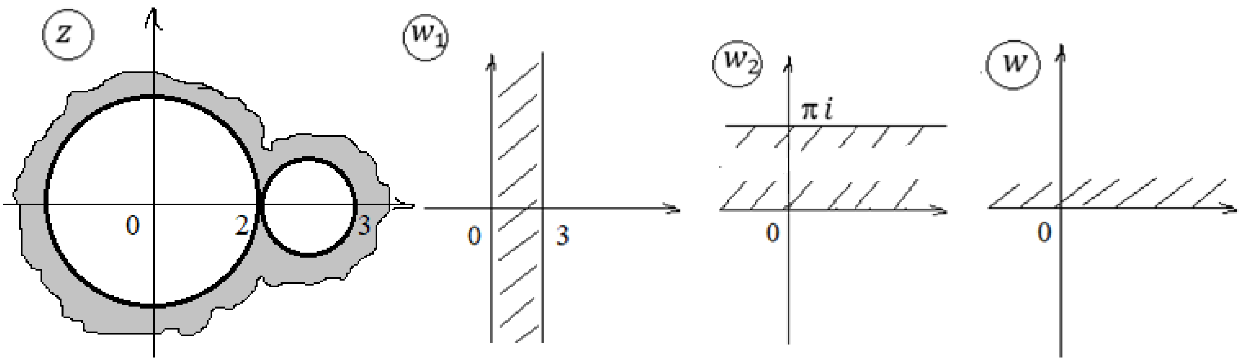


Рис. 28. Ілюстрація до прикладу 4.30

Вправи.

Знайти образи наступних областей G при відображеннях указаними функціями:

1. G: $\{-\pi < Imz < 0\}, w = e^z$.
2. G: $\{|Imz| < \pi\}, w = e^z$.
3. G: $\{\{|Imz| < \pi/2\}, w = e^z$.
4. G: $0 < Imz < 2\pi,\ Rez > 0\}, w = e^z$.
5. G: $\{0 < Imz < \pi/2,\ Rez > 0\}, w = e^{2z}$.
6. G: $\{0 < Rez < \pi,\ Imz > 0\}, w = e^{iz}$.

7. Знайти функцію, яка відображає горизонтальну смугу $\{0 \leq x < \infty, 0 \leq y \leq \pi\}$ на верхній півкруг $|z| < 1$.

8. Знайти функцію, яка відображає область $\pi/2 < argz < \pi$ в область $0 < argw < \pi/4$.

9. Відобразити на верхню півплощину область $\{x < 1, 0 < y < h\}$.

10. Відобразити кругову луночку, обмежену колами $|z| = 2$ і $|z-1| = 1$ на верхню півплощину.

Відповіді. **1**. $Imw < 0$. **2**. $w \notin (-\infty, 0]$. **3**. $Rew > 0$; **4**. $|w| > 1,\ \ w \notin (1, +\infty)$. **5**. $|w| > 1, \quad Imw > 0$. **6**. $|w| < 1, Imw > 0$ **7**. $w =-e^{-z}$. **8**. $w = \sqrt{z}e^{-i\pi/2}$; $\sqrt{1} = 1$. **9**. $w = \left(\frac{e^{\pi(z-1)/4}+1}{e^{\pi(z-1)/4}-1}\right)^2$. **10**. $e^{\frac{2\pi iz}{(z-2)}}$.

4.6. Стереографічна проєкція і її застосування в картографії

В проєктивній геометрії доцільно вважати, що на площині є нескінченно віддалені точки на кожній прямій, і геометричне місце їх утворює нескінченно віддалену пряму. В теорії функцій комплексної змінної доцільно вважати, що на площині існує лише одна нескінченно віддалена точка.

Геометрично таку площину розглядають як проєкцію сфери. А саме, візьмемо сферу радіуса ½, яка дотикається площини z на початку координат О. Нехай N точка, діаметрально протилежна початку О (рис. 29). Центральне проєктування з точки N, як центра, встановлює взаємно однозначну відповідність між точками площини (скінченними) і точками сфери (відмінними від N). Тобто, будь-якій точці z площини відповідає точка ξ сфери, яка знаходиться на перетині сфери з прямою Nz. Навпаки, будь-якій точці ξ_1 сфери відповідає точка z_1 площини, що перебуває на перетині площини з прямою $N\xi_1$. Вочевидь, коли точка z площини вздовж будь-якого шляху віддаляється у нескінченність, то відповідна їй на сфері точка ξ прямує до точки N і, навпаки, якщо $\xi \to N$, то $z \to \infty$. Тому природно вважати, що на площині є лише одна єдина нескінченно віддалена точка – образ точки N на сфері.

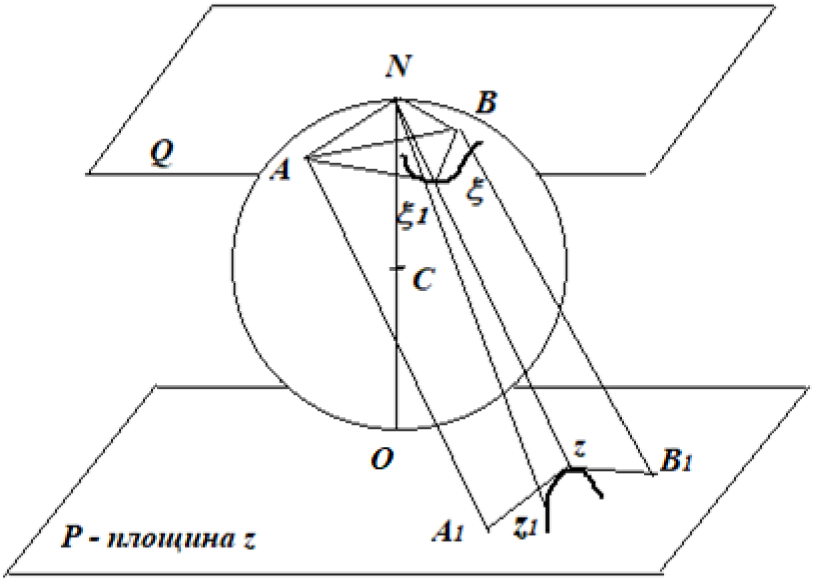


Рис. 29. Стереографічне проєктування

Викладене проєктування сфери на площину називається с т е р е о г р а ф і ч н и м. Площина, доповнена єдиною на ній нескінченно віддаленою точкою, має назву п о в н о ї або с ф е р и Р і м а н а. На повній площині, за яким би шляхом ми не віддалялись у нескінченність, завжди прийдемо в одну й ту саму точку $z \to \infty$, подібно тому, як на сфері точка ξ, образ точки z, при цьому завжди прийде в точку N.

Більше інформації про властивості стереографічної проєкції див., наприклад, в [15].

Застосування в картографії. Стереографічне проєктування широко застосовується в картографії для зображення поверхні Землі на карті. Його важлива властивість – це переведення нескінченно малої фігури на сфері на подібну до неї фігуру на карті, тобто конформно. Дійсно, візьмемо на сфері криву $\widetilde{\xi\xi_1}$ (рис. 29), і нехай вона з точки N проєктується на криву $\widetilde{zz_1}$ на площині. Вочевидь, січна $\overline{\xi\xi_1}$ проєктується на січну $\overline{zz_1}$, тому, переходячи до границі при $\xi_1 \to \xi$, заключаємо, що дотична ξA до кривої $\widetilde{\xi\xi_1}$ проєктується на дотичну zA_1 до кривої $\widetilde{zz_1}$. Аналогічні побудови виконаємо для другої кривої на сфері $\widetilde{\xi\xi_2}$ і доведемо, що кут між дотичними до кривих на сфері дорівнює куту між дотичними до їх проєкцій – кривим на площині. Для доведення проведемо через точку N площину Q, паралельну до площини Р, дотичні до кривих на сфері продовжимо до перетину з площиною Q в точках А та В і з'єднаємо ці точки з N. Вочевидь, дотичні до кривих на сфері є такими і до самої сфери. З іншого боку, оскільки площина Q перпендикулярна до радіуса сфери СN , то прямі АN і ВN також ортогональні до СN і тому є дотичними до сфери.

Отже, АN= А ξ, ВN= Вξ, як відрізки дотичних, проведених до сфери з однієї точки, відповідно з A та B. Тому $\Delta \mathrm{AB}N = \Delta \mathrm{AB}\xi$ і $\angle \mathrm{A}N\mathrm{B} = \angle \mathrm{A}\xi\mathrm{B}$. Оскільки дотична ξА проєктується з N на дотичну zA_1, ξА і zA_1 лежать в одній площині, що проходить через точку N. Аналогічно, в одній площині, що проходить через точку N, лежать дотичні ξВ і $z\mathrm{B}_1$. Тому $\angle \mathrm{A}N\mathrm{B} = \angle A_1 z\mathrm{B}_1$ як кути, утворені прямими, вздовж котрих площини Р і Q перетинаються площинами $NzAA_1$ і $Nz\mathrm{BB}_1$. З отриманих вище рівностей заключаємо, що $\angle \mathrm{A}\xi\mathrm{B} = \angle A_1 z\mathrm{B}_1$.

Лишається довести, що нескінченно малі дуги на сфері, які виходять з точки ξ в різних напрямках, при проєктуванні на площину однаково розтягуються. Нехтуючи кривизною нескінченно малих дуг $\widetilde{\xi\xi_1}$ і $\widetilde{zz_1}$, розглянемо трикутники $N\xi\xi_1$ і Nzz_1. Позначимо через h відстань точки ξ від площини Р. Нагадаємо, що $NO = 1$. Оскільки точка ξ_1 є нескінченно близькою до ξ, то її відстань від площини Р також, з точністю до нескінченно малої величини, дорівнює h. Тому

$$\frac{N\xi}{Nz} = \frac{1- h}{1}$$

і

$$\frac{N\xi_1}{Nz_1} \cong \frac{1- h}{1}.$$

Звідси заключаємо, що трикутники $N\xi\xi_1$ і Nzz_1 подібні, тому

$$\frac{|\widetilde{\xi\xi_1}|}{|\widetilde{zz_1}|} \cong 1- h.$$

Переходячи до границі при $\xi_1 \to \xi$, отримаємо точну рівність $\frac{d\sigma}{ds} = 1 - h$, де $d\sigma$ – диференціал дуги на сфері, ds – на площині. Вочевидь, відношення нескінченно малих дуг не залежить від того, в якому напрямку обрати дугу на сфері в точці ξ, а залежить лише від відстані точки ξ від площини Р. Відтак, нескінченно малі дуги, що взяті на сфері на висоті h, отримують один і той самий розтяг, котрий дорівнює $\frac{1}{1-h}$, тобто настільки більший, наскільки ближче взята дуга до полюсу N. Для дуг, близьких до полюсу O, h є малим, а розтягнення є близьким до 1.

Таким чином, при стереографічному проєктуванні нескінченно малі області, що є близькими до полюсу O, відображуються на карті у вигляді областей, майже тотожніх оригіналу, однак, по мірі віддалення від точки O і наближення до полюсу N подібність образу оригіналу зберігається, але коефіцієнт спотворення нескінченно зростає; в межах нижньої півкулі він коливається від 1 до 2. Підкреслимо, що подібність має місце при зображенні нескінченно малих областей. Скінченні області, особливо витягнуті в напрямку від O до N, отримають сильне спотворення форми, оскільки різні фігури по-різному спотворюються.

Обґрунтуємо викладений вище прийом доведення конформності відображення $w = f(z)$ в нескінченно віддаленій точці $z = \infty$. Будемо вважати, що $z = \frac{1}{z'}$, і доведемо конформність відображення $w = f(1/z')$ в точці $z' = 0$. Вочевидь, потрібно довести, що при перетворенні $z = \frac{1}{z'}$ кут між двома кривими в точці $z' = 0$ переходить в такий самий за величиною і напрямком повороту кута між образами цих кривих в точці $z = \infty$.

Нехай *OA* і *OB* – дотичні до кривих в точці $z' = 0$ (рис. 30).

Перетворення $z = \frac{1}{z'}$ розпадається на інверсію і дзеркальне відображення в осі x-ів. Розглянемо інверсію. Вона переводить $\overrightarrow{OA}$ в $\overrightarrow{\infty a}$ і $\overrightarrow{OB}$ в $\overrightarrow{\infty b}$. Розглянемо стереогафічну проєкцію площини на зовнішню сторону сфери.

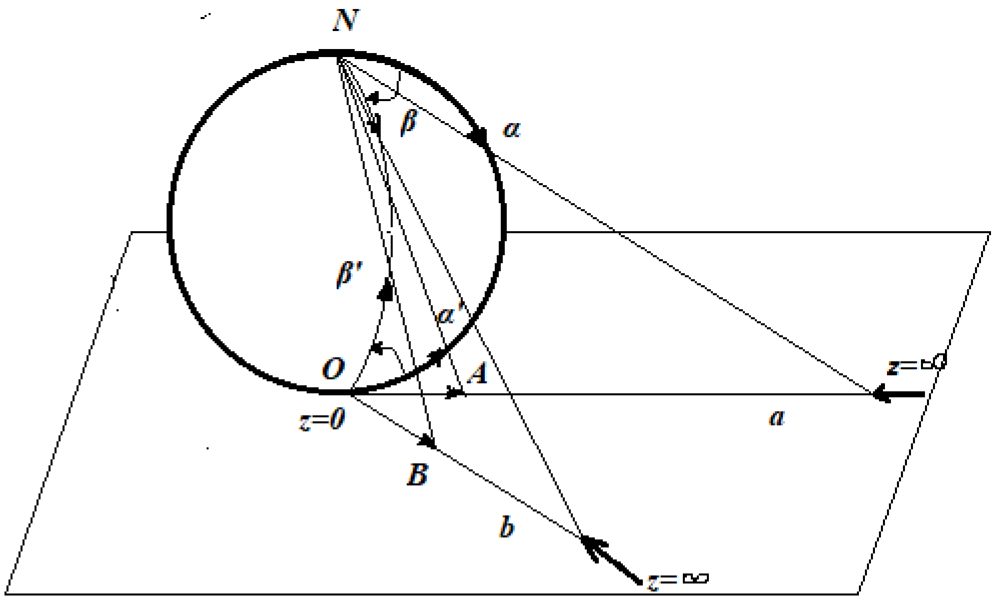


Рис. 30. Конформне відображення $w = f(z)$ в нескінченно віддаленій точці $z = \infty$

З рис. 30 видно, що $\angle AOB$ на площині дорівнює $\angle \alpha O \beta$ на сфері, і $\overrightarrow{a\infty b}$ на площині дорівнює куту $\angle \alpha N \beta$ на сфері. Якщо дивитися із зовнішньої сторони на сферу, то поворот від $\overrightarrow{O\alpha'}$ до $\overrightarrow{O\beta'}$ здійснюється проти годинникової стрілки, а від $\overrightarrow{O\alpha'}$ до $\overrightarrow{O\alpha'}$ – за нею. Отже, якщо після інверсії виконувати дзеркальне відображення в осі x-ів, то кут між кривими в точці $z' = 0$ дорівнюватиме куту між їх образами при перетворенні $z = \frac{1}{z'}$ в точці $z = \infty$ не лише за величиною, але й за напрямком обертання.

V. ІНТЕГРАЛ, РЯДИ ТЕЙЛОРА І ЛОРАНА, ЛИШКИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

5.1. Інтеграл від функції комплексної змінної

I. Означення інтеграла. Нехай Г – деяка орієнтована крива на площині комплексної змінної $z = x + iy$, яка сполучає точки a і b, а $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ – однозначна функція, яка визначена на кривій Г. Точками $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$, які беруться на Г довільно в порядку слідування, розіб'ємо криву Г на дуги $\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$ ($k = 1,2, \ldots, n$; $z_0 = a$, $z_n = b$). Позначимо $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} |\Delta z_k|$. На кожній дузі $\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$ ($k = 1,2, \ldots, n$) виберемо довільно точку ξ_k, яка може збігатися з одним із кінців z_{k-1} або z_k. Складемо суму

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta z_k,$$

яку назвемо і н т е г р а л ь н о ю для функції $f(z)$ по кривій Г.

Якщо при $\lambda \to 0$ послідовність інтегральних сум прямує до скінченної границі, яка не залежить ні від способу розбиття кривої Г, ні від вибору точок ξ_k, то цю границю називають і н т е г р а л о м від ф у н к ц і ї $f(z)$ по кривій Г і позначають символом $\int_\Gamma f(z)dz$

Відтак, за означенням

$$\int_\Gamma f(z)dz = \lim_{\lambda \to 0} \sigma_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta z_k. \qquad (5.1)$$

II. Умови існування інтеграла. Якщо Г – спрямна крива, а однозначна функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ неперервна на ній, то інтеграл від функції $f(z)$ по кривій Г існує і, крім того,

$$\begin{aligned} \int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma u(x, y)dx - v(x, y)dy + \\ + i \int_\Gamma v(x, y)dx + u(x, y)dy \end{aligned} \qquad (5.2)$$

III. Властивості інтеграла. Наведемо властивості визначеного інтеграла від функції $f(z)$ по кривій Г.

1. $\int_{\Gamma^+} f(z)dz = -\int_{\Gamma^-} f(z)dz$, де криві Γ^+, Γ^- відрізняються лише напрямком їх обходу*.

2. Якщо $f_k(z)$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ – неперервні на Г функції, а $c_k(k = 1,2,\ldots,n)$ – сталі, то

$$\int_{\Gamma} \sum_{k=1}^{n} c_k f_k(z)dz = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_{\Gamma} f_k(z)dz.$$

3. Нехай $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots + \Gamma_n$, тобто Г складається із таких кривих Γ_k, у яких кінець збігається з початком кривої Γ_{k+1} $(k = 1,2,\ldots,n-1)$. Тоді

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_k} f(z)dz.$$

4. Якщо $f(z)$ неперервна на спрямній кривій Г, то

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)dz\right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)|ds,$$

де $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$.

5. Якщо функції $f_k(z)$ $(k = 1,2,\ldots,)$ неперервні і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ рівномірно збігається на спрямній кривій Г, то його можна почленно інтегрувати. Тобто

$$\int_{\Gamma} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Gamma} f_k(z)dz.$$

* Надалі, якщо не сказане протилежне, криві обходяться в додатному напрямку, тобто проти руху годинникової стрілки.

IV. Обчислення інтеграла. Нехай $x = x(t),\ y = y(t)\ (\alpha \leq t \leq \beta)$ – параметричні рівняння гладкої кривої Г, початку і кінцеві якої відповідає значення параметра $t = \alpha$ і $t = \beta$. Тоді

$$\int_{\Gamma} f(z)dz =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} u(x(t), y(t))dx + iv(x(t), y(t))[x'(t) + iy'(t)]dt = \tag{5.3}$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt,$$

де $z(t) = x(t) + iy(t), z'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

Таким чином, для обчислення інтеграла від функції комплексної змінної потрібно в підінтегральному виразі замінити z на $x(t) + iy(t)$ як під знаком функції, так і під знаком диференціала, і обчислити визначений інтеграл від α до β.

V. Інтегральні теореми Коші.

1. Т е о р е м а К о ш і (для многозв'язної області). Якщо функція $f(z)$ аналітична в замкненій многозв'язній області G, то інтеграл від цієї функції по зовнішній межі Γ_0 дорівнює сумі інтегралів по всіх внутрішніх межах $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$, тобто

$$\int_{\Gamma_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_k} f(z)dz,$$

причому інтегрування по всіх кривих проводиться в одному і тому ж напрямку.

2. Т е о р е м а К о ш і (для однозв'язної області). Нехай функція $f(z)$ аналітична в замкненій області G і Г її межа. Тоді

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

VI. Невизначений інтеграл. Аналітична в області G функція F(z) називається п е р в і с н о ю для функції $f(z)$, якщо $\mathrm{F}'(\mathrm{z}) = f(z)$ для всіх $z \in$ G .

Якщо F(z) – первісна функції $f(z)$, то $\mathrm{F(z)} + \mathrm{C}$, де C – константа, також первісна. Множина всіх первісних для функції $f(z)$ в області G називається **н е в и з н а ч е н и м   і н т е г р а л о м** від функції $f(z)$ і позначається символом $\int f(z)dz$. Тому

$$\int f(z)dz = \mathrm{F(z)} + \mathrm{C},$$

де $\mathrm{F'(z)} = f(z)$, C – довільна стала.

Технічно обчислення невизначених інтегралів від аналітичних функцій в основному те ж, що і для функції дійсної змінної. Таблиця основних інтегралів в обох випадках однакова. Наприклад, мають місце формули:

1) $\int e^z dz = e^z + \mathrm{C}$;
2) $\int \cos z dz = \sin z + \mathrm{C}$;
3) $\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + \mathrm{C}, n \neq -1$, ціле;
4) $\int \frac{dz}{z} = \mathrm{Ln} z + \mathrm{C}$.

Під час користування таблицею інтегралів необхідно завжди вважати, що первісна є функцією аналітичною, а це, природно, накладає певні обмеження на області, в яких справедливі зазначені рівності.

Наприклад, формули 1, 2, 3 (при $n \geq 0$) будуть мати місце на всій комплексній площині z, а формула 3) (при $n < 0$) буде справедлива у будь-якій області, яка не містить точки $z = 0$, оскільки функція z^n ($n < 0$) в точці $z = 0$ не є диференційовною. Формула 4 справедлива в області, яка не містить ніякого променю, що виходить зі точки $z = 0$. За $\mathrm{Ln} z$ в цій формулі можна брати будь-яку вітку логарифма, бо вони відрізняються між собою на сталу.

Деякі формули інтегрального числення, які в дійсному аналізі зовсім різні, в комплексному можуть бути зведені. Наприклад,

$$\int \frac{dz}{z^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{Arctg}\frac{z}{a} + \mathrm{C} \text{ і } \int \frac{dz}{z^2-a^2} = \frac{1}{2a}\mathrm{Ln}\frac{z-a}{z+a} + \mathrm{C};$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+a^2}} = \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 + a^2}\right) + \mathrm{C} \text{ і } \int \frac{dz}{\sqrt{a^2-z^2}} == \mathrm{Arcsin}\frac{z}{a} + \mathrm{C}$$

зводяться один до одного заміною $z = it$.

VII. Формула Ньютона – Лейбніца. Якщо $f(z)$ аналітична в однозв'язній області G, то для будь-яких z_1 і z_2 із області G має місце формула Ньютона-Лейбніца

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \Phi(z_2) - \Phi(z_1),$$

де $\Phi(z)$ – певна первісна для функції $f(z)$.

В цьому випадку величина інтеграла зовсім не залежить від форми кривої, яка з'єднує точки z_1 і z_2.

VIII. Формула інтегрування частинами. Якщо функції $f(z)$ і $\varphi(z)$ – аналітичні в однозв'язній області G, а z_1 і z_2 – довільні точки із цієї області, то має місце формула інтегрування частинами:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\varphi'(z)dz = f(z)\varphi(z)\Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} \varphi(z)f'(z)dz.$$

XI. Заміна змінної під знаком інтеграла. Нехай $f(z)$ аналітична в області G, а Г – спрямна крива, в яку функція $w = f(z)$ відображає спрямну криву C, що лежить в області G. Тоді для будь-якої неперервної на Г функції $\varphi(w)$ має сенс формула

$$\int_{\Gamma} \varphi(w)dw = \int_{C} \varphi(f(z))f'(z)dz.$$

Приклад 5.1. Користуючись означенням інтеграла від функції комплексної змінної, обчислити

$$\int_{\Gamma} f(z)dz,$$

якщо:

1) $f(z) = z$, Г – будь-яка спрямна крива, яка сполучає точки a і b;

2) $f(z) = \frac{1}{z-a}$, Г – коло $|z-a| = R$.

Розв'язання.

1) Точками $z_0 = a, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n = b$ довільним способом розіб'ємо криву Г на дуги. Ці точки беруться в порядку слідування по Г від a до b. Оскільки $f(z) = z$ – функція неперервна на Г, то інтеграл $\int_{\Gamma} zdz$ існує і, отже, $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma_n$ не залежить від способу вибору точок ξ_k

на дугах $\widetilde{z_{k-1}z_k}$ $(k = 1,2,\ldots,n)$. Тому, взявши в формулі (5.1) один раз $\xi_k = z_{k-1}$, а другий – $\xi_k = z_k$, одержимо інтегральні суми:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} z_{k-1}(z_k - z_{k-1}), \qquad \bar{\sigma}_n = \sum_{k=1}^{n} z_k(z_k - z_{k-1}).$$

Враховуючи, що

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma_n = \int_\Gamma f(z)dz, \lim_{\lambda\to 0}\bar{\sigma}_n = \int_\Gamma f(z)dz,$$

і

$$\sigma_n + \bar{\sigma}_n = \sum_{k=1}^{n}(z_k^2 - z_{k-1}^2) = z_1^2 - z_0^2 + z_2^2 - z_1^2 + \ldots + z_n^2 - z_{n-1}^2 =$$
$$= z_n^2 - z_0^2 = b^2 - a^2,$$

одержимо

$$\int_\Gamma zdz = \frac{1}{2}\lim_{\lambda\to 0}(\sigma_n + \bar{\sigma}_n) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

Звідси випливає, що $\int_\Gamma zdz$ по будь-якій замкненій спрямній кривій Γ дорівнює 0.

2) Параметричне рівняння кола $|z - a| = R$ є

$$z = a + Re^{it}, 0 \le t \le 2\pi.$$

Точками

$$z_0 = a + R, z_1 = a + Re^{i\frac{2\pi}{n}}, z_2 = a + Re^{i\frac{2\cdot 2\pi}{n}}, \ldots,$$
$$z_n = a + Re^{i\frac{2(n-1)\cdot\pi}{n}}, \qquad z_n = z_0$$

розіб'ємо коло на n рівних дуг. При побудові інтегральної суми точки ξ_k на дугах $\widetilde{z_{k-1}z_k}$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ виберемо на серединах цих дуг, тобто

$$\xi_k = a + Re^{i\frac{(2k-1)\pi}{n}}, k = 1,2,\ldots,n.$$

Оскільки

$$f(\xi_k) = \frac{1}{\xi_k - a} = \frac{1}{R}e^{-i\frac{(2k-1)\pi}{n}},$$

то

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} e^{-i\frac{(2k-1)\pi}{n}}\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}} - e^{i\frac{2(k-1)\pi}{n}}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(e^{i\frac{\pi}{n}} - e^{-i\frac{\pi}{n}}\right) = 2in\frac{e^{i\frac{\pi}{n}} - e^{-i\frac{\pi}{n}}}{2i} = 2in\sin\frac{\pi}{n}.$$

Оскільки коло – спрямна крива, а функція $f(z) = 1/(z-a)$ є неперервною на ньому, то за теоремою існування $\int_\Gamma \frac{dz}{z-a}$ існує і, отже, $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma_n$ не залежить ні від способу розбиття кола, ні від способу вибору точок ξ_k. Тому

$$\int_{|z-a|=R}\frac{dz}{z-a} = \lim_{\lambda\to 0}\sigma_n = 2\pi i.$$

Відповідь. $2\pi i$.

Приклад 5.2. Довести рівність

$$\int_\Gamma \bar{z}dz = 2iS,$$

де S – площа області G, обмеженої простою замкненою кривою Γ.

Розв'язання. Оскільки

$$\int_\Gamma \bar{z}dz = \int_\Gamma (x-iy)(dx+idy)dz = \int_\Gamma xdx + ydy + i\int_\Gamma xdy - ydx,$$

то, застосовуючи до кожного із інтегралів в правій частині формулу Гріна

$$\int_\Gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_{(G)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

одержимо

$$\int_\Gamma \bar{z}dz = -i\iint_{(G)}(-1-1)dxdy = 2iS.$$

Відповідь. $2iS$.

Приклад 5.3. Обчислити інтеграл

$$\int_{|z+1|=1} |z||dz|.$$

Розв'язання. Параметричними рівняннями кола $|z+1|=1$ є

$$x=\cos t-1, y=\sin t, 0\le t\le 2\pi$$

або в комплексній формі

$$x=\cos t-1+i\sin t.$$

Тоді

$$|z|=\sqrt{(\cos t-1)^2+(\sin t)^2}=\sqrt{2(1-\cos t)}=2\sin\frac{t}{2},$$

$$|dz|=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=dt$$

і

$$\int_{|z+1|=1} |z||dz|=2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=-4\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8.$$

Відповідь. 8.

Приклад 5.4. Обчислити інтеграл

$$\int_{\Gamma} |z|\bar{z}dz,$$

де Г:

1) радіус-вектор точки $z=3-4i$;
2) півколо $|z|=1, -\frac{\pi}{2}\le arg z\le\frac{\pi}{2}$ з початком в точці $z=-i$.

Розв'язання. а) Перший спосіб. Рівняння прямої, яка проходить через точки O(0,0) і A(3, –4), запишемо в такому вигляді:

$$\frac{x}{3}=-\frac{y}{4}.$$

Прирівнявши до t праву і ліву частини цієї рівності, одержимо рівняння відрізка OA в параметричній формі:

$$x=3t, y=-4t, 0\le t\le 1.$$

Тоді

$$z=x+iy=3t-4it=(3-4i)t, \overline{z}=x-iy=3t+4it,$$

а тому згідно з формулою (5.3) одержимо

$$\int_{OA} |z|\bar{z}dz=5(3-4i)(3+4i)\int_0^1 t^2dt=\frac{125}{3}t^3\Big|_0^1=41\frac{2}{3}.$$

Другий спосіб. Параметричне рівняння відрізка можна одержати, узявши за параметр x та y. Візьмемо, наприклад, x. Тоді

$$z = x + iy = x - i\frac{4}{3}x = x(1 - i\frac{4}{3}), \bar{z} = x(1 + i\frac{4}{3}),$$

$$dz = (1 - i\frac{4}{3})dx, \qquad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{5}{3}x, 0 \leq x \leq 3,$$

$$\int_{OA} |z|\bar{z}dz = \frac{5}{3}(1 - i\frac{4}{3})(1 + i\frac{4}{3})\int_0^3 x^2 dx = \frac{125}{3}x^3\Big|_0^3 = 41\frac{2}{3}.$$

б) Оскільки параметричним рівнянням правого півкола $|z| = 1$ є

$$z = \cos t + i\sin t = e^{it}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

то

$$dz = ie^{it}dt, \bar{z} = \cos t - i\sin t = e^{-it}.$$

Тоді

$$\int_{\Gamma} |z|\bar{z}dz = i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{it}e^{-it}dt = i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = i\pi.$$

Відповідь. $i\pi$.

Приклад 5.5. Обчислити інтеграл

$$\int_{\Gamma} |z|zdz,$$

де Γ – відрізок, який з'єднує точки $z_1 = 0$ і $z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Розв'язання. Параметричним рівнянням відрізка, який з'єднує точки $z_1 = 0$ і $z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$, є

$$z = te^{i\frac{\pi}{4}}, 0 \leq t \leq 3.$$

Тоді

$$dz = e^{i\frac{\pi}{4}}dt, |z| = \left|te^{i\frac{\pi}{4}}\right| = t,$$

а

$$\int_{\Gamma} |z|zdz = e^{i\frac{\pi}{2}}\int_0^3 t^2 dt = i\frac{t^3}{3}\Big|_0^3 = 9i.$$

Відповідь. $9i$.

Приклад 5.6. Обчислити інтеграл

$$\int_{\Gamma} \bar{z}\mathrm{Im}z dz,$$

де Г – не замкнена ламана з вершинами в точках O(0,0), A(1, 3), B(4,3), C(4,0).

Розв'язання. Запишемо рівняння відрізка OA, що на прямій $y = 3x$, в параметричному вигляді $x = t, y = 3t$.

Тоді

$$z = x + iy = (1 + 3i)t, \bar{z} = x - iy = (1 - 3i)t,$$
$$\mathrm{Im}z = 3t, dz = (1 + 3i)dt,$$

а

$$\int_{OA} \bar{z}\mathrm{Im}z dz = 3(1 + 3i)(1 - 3i)\int_0^1 t^2 dt = 10t^3|_0^1 = 10.$$

Параметричні рівняння відрізка AB, що на прямій $y = 3$, такі: $x = t, y = 3, 1 \leq t \leq 4$.

Оскільки

$$z = x + iy = t + 3i, \bar{z} = t - 3i, \mathrm{Im}z = 3, dz = dt,$$

то

$$\int_{AB} \bar{z}\mathrm{Im}z dz = 3\int_1^4 (t - 3i)dt = 22{,}5 - 27i.$$

Параметричні рівняння відрізка BC, що на прямій $x = 4$ такі: $x = 4, y = t, 0 \leq t \leq 3$. Звідси

$$z = x + iy = 4 + it, \bar{z} = 4 - it, \mathrm{Im}z = t, dz = idt,$$

тому

$$\int_{BC} \bar{z}\mathrm{Im}z dz = i\int_0^3 (4 - it)t dt = -9 - 18i.$$

За третьою властивістю інтегралів одержимо

$$\int_{\Gamma} \bar{z}\mathrm{Im}z dz = \int_{OA} \bar{z}\mathrm{Im}z dz + \int_{AB} \bar{z}\mathrm{Im}z dz + \int_{BC} \bar{z}\mathrm{Im}z dz = 23{,}5 - 45i.$$

Відповідь. $23{,}5 - 45i$.

Приклад 5.7. Обчислити інтеграл

$$\int_{\Gamma} \operatorname{Re}(\cos z)\sin z dz,$$

де Г – відрізок, що сполучає точки A(0, 1) та B$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

Розв'язання. Враховуючи, що $z = x + iy$, $\cos iy = \operatorname{ch} y$, $\sin iy = i\operatorname{sh} y$, маємо:

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x \operatorname{ch} y + i\cos x \operatorname{sh} y,$$

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x \operatorname{ch} y - i\sin x \operatorname{sh} y.$$

Із останньої рівності видно, що

$$\operatorname{Re}(\cos z) = \cos x \operatorname{ch} y.$$

Перепишемо підінтегральну функцію $f(z) = \operatorname{Re}(\cos z)\sin z$ так:

$$f(z) = \cos x \operatorname{ch} y(\sin x \operatorname{ch} y + i\cos x \operatorname{sh} y) = \frac{1}{2}\sin 2x \cdot \operatorname{ch}^2 y + \frac{i}{2}\operatorname{sh} 2y \cdot \cos^2 x.$$

Звідси маємо

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2}\sin 2x \cdot \operatorname{ch}^2 y,$$
$$v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2y \cdot \cos^2 x.$$

Тепер за формулою (5.2) одержимо:

$$\int_{\Gamma} \operatorname{Re}(\cos z)\sin z dz = \frac{1}{2}\int_{\Gamma} \sin 2x \cdot \operatorname{ch}^2 y dx - \operatorname{sh} 2y \cdot \cos^2 x dy +$$
$$+ \frac{i}{2}\int_{\Gamma} \operatorname{sh} 2y \cdot \cos^2 x dx + \sin 2x \cdot \operatorname{ch}^2 y dy.$$

На відрізку AB $y = 1, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, dy = 0$, отже,

$$\int_{\Gamma} \operatorname{Re}(\cos z)\sin z dz = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{ch}^2 y \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx + \frac{i}{2}\operatorname{sh} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \operatorname{ch}^2 1 + i\frac{\pi \operatorname{sh} 2}{8}.$$

Відповідь. $\cdot\operatorname{ch}^2 1/2 + i\pi \operatorname{sh} 2/8$.

Приклад 5.8. Обчислити інтеграл

$$\int_{\Gamma} (z-a)^n dz,$$

де Г – коло $|z-a|^n = R, n$ – ціле число.

Розв'язання. Параметричне рівняння кола

$$z = a + Re^{it}, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Тоді

$$dz = iRe^{it}dt, \qquad (z-a)^n = R^n e^{int}.$$

Застосовуючи формулу 3), одержимо

$$\int_{\Gamma} (z-a)^n dz = iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt.$$

Розглянемо окремо два випадки: $n =-1$ і $n \neq -1$.
При $n =-1$ із останньої рівності маємо:

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z-a} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

У випадку $n \neq -1$

$$\int_{\Gamma} (z-a)^n dz = \frac{R^{n+1}}{n+1} e^{i(n+1)t}\Big|_0^{2\pi} = \frac{R^{n+1}}{n+1}\left(e^{i(n+1)2\pi} - 1\right) = 0,$$

оскільки

$$e^{i(n+1)2\pi} = \cos(n+1)2\pi + i\sin(n+1)2\pi = 1.$$

Таким чином,

$$\int_{\Gamma} (z-a)^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & n =-1, \\ 0, & n \neq -1. \end{cases}$$

Відповідь. $\begin{cases} 2\pi i, & n =-1, \\ 0, & n \neq -1. \end{cases}$

Приклад 5.9. Обчислити інтеграл

$$\int_{\Gamma} \bar{z} dz,$$

де Г – замкнена крива, яка складається із частини еліпса $x^2 + 4y^2 = 4$, розташованої в першому квадранті, та ламаної, що сполучає точки B(0,1), O(0,0), A(2,0).

Розв'язання. Параметричні рівняння еліпса $x^2 + 4y^2 = 4$ в першому квадранті будуть:

$$x = 2\cos t, y = \sin t, 0 \le t \le \pi/2,$$

або в комплексній формі $z = 2\cos t + i\sin t$.

На дузі еліпса АВ

$$\bar{z} = 2\cos t - i\sin t, dz = (-2\sin t + i\cos t)dt\ .$$

Тому, користуючись формулою (5.3), одержимо

$$\int_{AB} \bar{z}dz = \int_0^{\pi/2} (2\cos t - i\sin t)(-2\sin t + i\cos t)dt =$$

$$= -\frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2t dt + 2i\int_0^{\pi/2} dt = -\frac{3}{2} + \pi i.$$

На відрізку ВО буде: $z = it, \bar{z} = -it, dz = idt, 0 \le t \le 1$, а тому

$$\int_{BO} \bar{z}dz = -\int_0^1 tdt = -\frac{1}{2}.$$

Рівнянням відрізка ОА, що перебуває на прямій $y = 0$, є $z = x, 0 \le x \le 2$. Тоді $\bar{z} = x, dz = dx$ і

$$\int_{OA} \bar{z}dz = \int_0^2 xdx = 2.$$

За третьою властивістю інтеграла маємо

$$\int_{\Gamma} \bar{z}dz = \int_{AB} \bar{z}dz + \int_{BO} \bar{z}dz + \int_{OA} \bar{z}dz = -\frac{3}{2} + \pi i - \frac{1}{2} + 2 = \pi i.$$

Відповідь. πi.

Приклад 5.10. Обчислити інтеграл

$$\int_{\Gamma} \mathrm{Re} z dz,$$

де Г – замкнена крива, що складається з дуги синусоїди $y = \sin x$ та відрізка осі абсцис $[0,\pi]$.

Розв'язання. Позначимо через Γ_1 відрізок $[0,\pi]$, а через Γ_2 – дугу синусоїди від $(\pi,0)$ до $(0,0)$. Тоді

$$\int_{\Gamma} \mathrm{Re}z dz = \int_{\Gamma_1} \mathrm{Re}z dz + \int_{\Gamma_2} \mathrm{Re}z dz.$$

Параметричним рівнянням відрізка [0,π], що лежить на прямій $y = 0$, є $z = x, 0 \leq x \leq \pi$, отже $\mathrm{Re}z = x, dz = dx$ і

$$\int_{\Gamma_1} \mathrm{Re}z dz = \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

Параметричне рівняння дуги синусоїди Γ_2

$$z = x + iy = x + i sinx,\ 0 \leq x \leq \pi.$$

Тоді $\mathrm{Re}z = x, dz = (1 + i\cos x)dx$ і

$$\int_{\Gamma_2} \mathrm{Re}z dz = \int_{\pi}^{0} x(1 + i\cos x)dx = \int_{\pi}^{0} x dx + i \int_{\pi}^{0} x\cos x dx.$$

Оскільки $\int_{\pi}^{0} x dx = -\frac{\pi^2}{2}$, а

$$\int_{\pi}^{0} x\cos x dx = x\sin x|_{\pi}^{0} - \int_{\pi}^{0} \sin x dx = 2,$$

то

$$\int_{\Gamma_2} \mathrm{Re}z dz = -\frac{\pi^2}{2} + 2i.$$

Остаточно одержимо

$$\int_{\Gamma} \mathrm{Re}z dz = 2i.$$

Відповідь. $2i$.

Приклад 5.11. Обчислити інтеграл

$$\int_{\Gamma} (z - a)^n dz,$$

де Г – довільна замкнена проста спрямна крива, n – ціле число.

Розв'язання. Розглянемо спочатку випадок $n \geq 0$. Тоді підінтегральна функція $f(z) = (z-a)^n$ при будь-якому розташуванні точки a буде аналітичною на всій комплексній площині і за інтегральною теоремою Коші

$$\int_{\Gamma} (z-a)^n dz = 0.$$

Ця рівність має сенс і у випадку $n < 0$, якщо точка a лежить за областю, обмеженою кривою Г (точка a на Г лежати не може). Тоді опишемо коло С з центром в точці a і радіусом R таким чином, щоб коло повністю було всередині Г. Оскільки функція $f(z) = (z-a)^n$ аналітична в замкненій двозв'язній області Г і С, то за теоремою Коші для багатозв'язної області і з урахуванням розв'язання прикладу 5.8, одержимо

$$\int_{\Gamma} (z-a)^n dz = \int_{C} (z-a)^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = -1, \\ 0, & n \neq -1. \end{cases}$$

Відповідь. $\begin{cases} 2\pi i, & n = -1, \\ 0, & n \neq -1. \end{cases}$

Приклад 5.12. Чи має функція $f(z) = a\bar{z} + b$ первісну?

Розв'язання. За означенням первісної функція $F(z)$ мусить бути аналітичною і задовольняти умову $F'(z) = f(z)$. Позаяк $f(z) = a\bar{z} + b$ не є диференційовною ні в одній точці комплексної площини (не виконується умова Коші – Рімана) і тому не аналітична як похідна аналітичної функції, то $f(z)$ не може мати первісну ні в якій області.

Відповідь. Не має.

Приклад 5.13. Обчислити інтеграл

$$\int_{\Gamma} \sin z dz,$$

де Г – будь-яка спрямна крива, що з'єднує точки $\pi/2$ і a.

Розв'язання. Функція $cosz$ є однією з первісних для функції $sinz$, яка є аналітичною на всій комплексній площині, а тому за формулою Ньютона – Лейбніца одержимо

$$\int_{\Gamma} \sin z dz = \int_{\pi/2}^{a} \sin z dz =- \cos a.$$

Відповідь. $-\cos a$.

Приклад 5.14. Обчислити інтеграл

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{3}{2}z^2 + z\right) dz,$$

де Γ – незамкнена ламана з вершинами у точках A(2;2), B(–2;2), C(–1;1) і $D(1;1)$.

Розв'язання. Найпростіше обчислення таке: оскільки підінтегральна функція аналітична на всій комплексній площині, то за формулою Ньютона – Лейбніца одержимо

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{3}{2}z^2 + z\right) dz = \int_{2(1+i)}^{1+i} \left(\frac{3}{2}z^2 + z\right) dz = \frac{1}{2}(z^3 + z^2)\Big|_{2(1+i)}^{1+i} =$$

$$= \frac{1}{2}((1+i)^3 + (1+i)^2) - 8(1+i)^3 - 4(1+i)^2 = 7 - 10i.$$

Відповідь. $7 - 10i$.

Приклад 5.15. Обчислити інтеграл

$$\int_{0}^{2\pi i} e^z \cos z dz.$$

Розв'язання. Позаяк підінтегральна функція аналітична на всій комплексній площині, то, інтегруючи частинами і враховуючи, що $e^{2\pi i} = 1,\ \cos iz = \operatorname{ch} z, \sin iz = i\operatorname{sh} z$, одержимо

$$\int_{0}^{2\pi i} e^z \cos z dz = \int_{0}^{2\pi i} e^z (\sin z)' dz = e^z \sin z\Big|_0^{2\pi i} + \int_{0}^{2\pi i} e^z (\cos z)' dz =$$

$$= e^{2\pi i}\sin 2\pi i + e^z\cos z|_0^{2\pi i} – \int_0^{2\pi i} e^z\cos z dz =$$

$$= i\mathrm{sh}2\pi + \cos 2\pi i – 1 – \int_0^{2\pi i} e^z\cos z dz = 2\mathrm{sh}^2\pi +$$

$$+ i\mathrm{sh}2\pi – \int_0^{2\pi i} e^z\cos z dz.$$

Отже,

$$\int_0^{2\pi i} e^z\cos z dz = \mathrm{sh}^2\pi + \frac{i}{2}\mathrm{sh}2\pi.$$

Відповідь. $\mathrm{sh}^2\pi + \frac{i}{2}\mathrm{sh}2\pi$.

Приклад 5.16. Обчислити інтеграл

$$\int_\Gamma \frac{dz}{\sqrt{z}},$$

де Г – дуга кола $|z| = 2$, розташована в правій півплощині. Вибір вітки визначається умовою $\sqrt{i} = – \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$. Точка $z = – 2i$ – початок шляху інтегрування.

Розв'язання. П е р ш и й с п о с і б . Оскільки

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

де n – натуральне число, $\varphi = \arg z$, $\sqrt[n]{|z|}$ – арифметичний корінь, $k = 0,1,2,\ldots,n – 1$, то функція $\sqrt{z}$ має два різних значення:

Для $z = i$ $|z| = 1$, $\arg z = \pi/2$, а $\left(\sqrt{i}\right)_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$, $\left(\sqrt{i}\right)_1 = – \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.

Звідси випливає, що задану умову задовольняє значення

$$\sqrt{z} = \left(\sqrt{z}\right)_1 = – \sqrt{|z|}e^{\frac{i\varphi}{2}}.$$

Функція $\left(\sqrt{z}\right)_1$ аналітична, а тому за формулою Ньютона – Лейбніца маємо

$$\int_\Gamma \frac{dz}{\left(\sqrt{z}\right)_1} = \int_{-2i}^{2i} \frac{dz}{\left(\sqrt{z}\right)_1} = 2\left(\sqrt{z}\right)_1\Big|_{-2i}^{2i} = 2\left[\left(\sqrt{2i}\right)_1 - \left(\sqrt{-2i}\right)_1\right].$$

Але

$$\left(\sqrt{2i}\right)_1 = -(1+i), \qquad \left(\sqrt{-2i}\right)_1 = -(1-i),$$

а тому остаточно одержимо

$$\int_\Gamma \frac{dz}{\left(\sqrt{z}\right)_1} = -4\,i.$$

Д р у г и й с п о с і б. Рівняння правого півкола запишемо в параметричному вигляді у комплексній формі:

$$z = 2e^{i\varphi}, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

Згідно з умовою $\sqrt{i} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(i+1)$ серед двох різних значень функції $\sqrt{2e^{i\varphi}}$ необхідно взяти $\left(\sqrt{2e^{i\varphi}}\right)_1 = -\sqrt{2}e^{\frac{i\varphi}{2}}$, оскільки при $|z| = 1, \varphi = \pi/2$

$$\left(\sqrt{i}\right)_1 = -e^{\frac{i\varphi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(i+1).$$

Підставляючи під знак інтеграла

$$\sqrt{z} = \left(\sqrt{z}\right)_1 = -\sqrt{2}e^{\frac{i\varphi}{2}},\ dz = 2ie^{i\varphi}d\varphi,$$

одержимо

$$\int_\Gamma \frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{2i}{\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{i\varphi}{2}}d\varphi = -\frac{4}{\sqrt{2}}e^{\frac{i\varphi}{2}}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{\sqrt{2}}\left(e^{\frac{i\pi}{4}} - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right) = -4i.$$

Відповідь. $-4i$.

Приклад 5.17. Обчислити інтеграл

$$\int_{\Gamma} \frac{\sin(2\ln z)dz}{z},$$

де Γ – дуга кола $|z| = 1$, що сполучає точки $z_1 = 1$ і $z_2 = i$, а $\ln z = \ln|z| + i\arg z$.

Розв'язання. Перший спосіб. За формулою Ньютона – Лейбніца отримаємо

$$\int_{\Gamma} \frac{\sin(2\ln z)dz}{z} = \frac{1}{2}\int_1^i \sin(2\ln z)d(2\ln z) = -\frac{1}{2}\cos(2\ln z)\Big|_1^i =$$

$$= -\frac{1}{2}[\cos(2\ln i) - \cos(2\ln 1)].$$

Оскільки

$$\ln i = \ln|i| + i\arg i = \frac{i\pi}{2},\ \ln 1 = \ln|1| + i\arg 1 = 0,$$

то

$$\int_{\Gamma} \frac{\sin(2\ln z)dz}{z} = -\frac{1}{2}[\cos(i\pi) - 1] = -\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}.$$

Другий спосіб.

$$\int_{\Gamma} \frac{\sin(2\ln z)dz}{z} = 2\int_1^i \sin(\ln z)d(\sin\ln z) = \sin^2(\ln z)|_1^i =$$

$$= [\sin^2(\ln i) - \sin^2(\ln 1)] = -\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}.$$

Відповідь. $-\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}$.

Вправи.

1. Показати безпосереднім підсумовуванням, що для будь-якої спрямної кривої Γ, що з’єднує точки a і b, $\int_{\Gamma} dz = b - a$.

2. Обчислити інтеграл

$$\int_{\Gamma} \mathrm{Re}z dz,$$

якщо Г:

1) коло $x^2 + y^2 - 2y = 3$;

2) замкнена крива, сформована дугою параболи $y = - x^2 + 1$ та відрізком осі абсцис;

3) замкнена крива, утворена дугою параболи $y = x^2$ та частиною верхньої половини кола $x^2 + y^2 = 2$.

3. Обчислити інтеграл

$$\int_{\Gamma} e^{|z|^2} \mathrm{Im}z dz,$$

де Г – відрізок, що з’єднує точки О(0;0) та А(–1;1).

4. Обчислити інтеграл

$$\int_{\Gamma} \bar{z} \mathrm{Im} z^2 dz,$$

де Г – ламана з вершинами в точках А(0;1), В(2;0), С(3;0).

5. Обчислити інтеграли:

1) $\int_{\Gamma} \mathrm{sh}z \mathrm{Re} \ln z dz$ 2) $\int_{\Gamma} \ln z \mathrm{Re} \mathrm{sh} z dz$

де Г – відрізок, що з’єднує точки А(1;6) і В(1;4π).

6. Чи мають первісну функції $\bar{z}$, $zRez$?

7. Обчислити інтеграл

$$\int_{\Gamma} z^2 e^z dz,$$

де Г – ламана з вершинами в точках А(5;0), В(1;2), О(0;0).

8. Обчислити інтеграли:

1) $\int_{2\pi}^{0} e^z \mathrm{ch} z dz$; 2) $\int_{-\pi i}^{\pi i} e^z \mathrm{sh} z dz$; 3) $\int_{-\pi i}^{\pi i} z^2 \mathrm{sh} z dz$.

9. Обчислити інтеграл

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}},$$

де Г – дуга кола $|z| = 2$, розташована в нижній півплощині. Вибір вітки визначається умовою $\sqrt{-2} = - i\sqrt{2}$.

10. Обчислити інтеграли:

1) $\int_0^i e^{\sin z}\cos z dz,$ 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin z)\cos z dz.$

Відповіді: **2**. 1) $4\pi i$; 2) $\frac{4}{3}i$; 3) $\frac{3\pi-2}{6}i$. **3**. $\frac{e^2-1}{4}(-1+i)$. **4**. $\frac{5}{6}$. **5**. 1) $i\pi sh2$; 2) $i\pi sh2$. **6**. 1) ні; 2) ні. **7**. $2-17e^5$. *Вказівка*: за інтегральною теоремою Коші для однозв'язної області $\int_\Gamma z^2e^zdz+\int_{OA}z^2e^zdz=0$, звідки $\int_\Gamma z^2e^zdz=-\int_{OA}z^2e^zdz$ **8**. 1) $-\pi i$; 2) $-\pi i$; 3) 0. **9**. $2\sqrt{2}(-1+i)$. **10**. **1**) $e^{ish1}-1$; **2)** $\frac{3}{2}$.

5.2. Інтегральна формула Коші

Нехай Г – замкнена проста спрямна крива, що обмежує область G, функція $f(z)$ є аналітичною в середині і на межі області G.

Тоді для будь-якої точки $z_0\in$G справедлива інтегральна формула Коші:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz, \tag{5.4}$$

крім того, відомо, що для будь-якого натурального n

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz. \tag{5.5}$$

Ці формули виражають відповідно значення аналітичної функції та її похідної в середині області через значення функції на межі області.

За допомогою формул (5.4) і (5.5) можна обчислювати деякі інтеграли по замкнутим кривим.

Приклад 5.18. Обчислити інтеграл

$$\int_{|z|=2}\frac{z^2-\cos\pi z}{z-1}dz.$$

Розв'язання. Точка $z = 1$ розташована в середині кола $|z| = 2$, функція $f(z) = z^2 - \cos\pi z$ аналітична в крузі $|z| \le 2$, а тому $z_0 = 1$, $f(z) = z^2 - \cos\pi z$.

Застосовуючи інтегральну формулу Коші, одержимо

$$\int_{|z|=2} \frac{z^2 - \cos\pi z}{z - 1} dz = 2\pi i f(1) = 4\pi i.$$

Відповідь. $4\pi i$.

Приклад 5.19. Обчислити інтеграл

$$\int_{|z-2|=1} \frac{e^{i\pi z}}{z(z^2 - 6z + 8)} dz.$$

Розв'язання. Для обчислення цього інтеграла за допомогою інтегральної формули Коші перепишемо підінтегральну функцію так:

$$\frac{e^{i\pi z}}{z(z^2 - 6z + 8)} = \frac{\frac{e^{i\pi z}}{z(z-4)}}{(z-2)}.$$

А тому

$$f(z) = \frac{e^{i\pi z}}{z(z-4)}, z_0 = 2.$$

Функція $f(z)$ аналітична в середині кола $|z-2| = 1$ та на його межі, а $z_0 = 2$ розташована в середині цього кола, тому за формулою Коші

$$\int_{|z-2|=1} \frac{e^{i\pi z}}{z(z^2 - 6z + 8)} dz = 2\pi i f(2) = 2\pi i \left.\frac{e^{i\pi z}}{z(z-4)}\right|_{z=2} = -\frac{\pi i}{2}.$$

Відповідь. $-\frac{\pi i}{2}$.

Приклад 5.20. Обчислити інтеграл

$$\int_{\Gamma} \frac{\cos z}{z(z^2 + 4)} dz,$$

де

1) $\Gamma: |z + 2i| = 1$;
2) $\Gamma: |z| = 3$.

Розв'язання. 1) Перепишемо інтеграл так:

$$\int_{|z+2i|=1} \frac{\cos z}{z(z^2+4)}dz = \int_{|z+2i|=1} \frac{\frac{\cos z}{z(z-2i)}}{(z+2i)}dz.$$

Точка $z_0 = -2i$ розташована в середині кола $|z+2i| = 1$, а функція $f(z) = \frac{\cos z}{z(z-2i)}$ аналітична в крузі $|z+2i| \leq 1$. Застосовуючи інтегральну формулу Коші, одержимо

$$\int_{|z+2i|=1} \frac{\cos z}{z(z^2+4)}dz = 2\pi i f(-2i) = -\frac{2\pi i\cos(-2i)}{8} = -\frac{\pi i}{4}\text{ch}2.$$

2) В середині кола $|z| = 3$ знаменник підінтегральної функції дорівнює нулеві в трьох точках: $z = 0$, $z = 2i$, $z = -2i$. Це не дозволяє записати підінтегральну функцію у вигляді $\frac{f(z)}{z-z_0}$ так, аби $f(z)$ була аналітичною в крузі $|z| \leq 3$. Тому до даного інтеграла не можна безпосередньо застосувати формулу Коші і далі необхідно використати один із способів, наведених нижче.

Перший спосіб. Застосовуючи метод невизначених коефіцієнтів, розкладемо функцію $\frac{1}{z(z^2+4)}$ на суму елементарних дробів. Маємо

$$\frac{1}{z(z^2+4)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+2i} + \frac{C}{z-2i}.$$

Невідомі A, B, C визначаються із тотожності

$$1 = A(z+2i)(z-2i) + Bz(z-2i) + C(z+2i)z.$$

Підставляючи по черзі $z = 0$, $z = 2i$, $z = -2i$ відповідно матимемо:

$$z = 0: \ \ A = \frac{1}{4};$$

$$z = 2i: \ \ B = -\frac{1}{8};$$

$$z = -2i: \ \ C = -\frac{1}{8}.$$

Замінивши дріб під знаком інтеграла на суму елементарних, одержимо

$$\int_{|z|=3} \frac{\cos z}{z(z^2+4)}dz = \frac{1}{4}\int_{|z|=3} \frac{\cos z}{z}dz - \frac{1}{8}\int_{|z|=3} \frac{\cos z}{z+2i}dz - \frac{1}{8}\int_{|z|=3} \frac{\cos z}{z-2i}dz.$$

Застосовуючи до кожного інтеграла в правій частині інтегральну формулу Коші, отримаємо остаточно

$$\int_{|z|=3} \frac{\cos z}{z(z^2+4)} dz = \frac{\pi i}{2} - \frac{\pi i}{4}\cos(-2i) - \frac{\pi i}{4}\cos(2i) = \frac{\pi i}{2}(1-\mathrm{ch}2) =$$
$$= -i\pi \mathrm{sh}^2 1.$$

2) Другий спосіб. В крузі $|z| \le 3$ побудуємо три кола $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ з центрами відповідно в точках $z=0$, $z=2i$, $z=-2i$, аби вони не мали спільних точок ні між собою, ні з колом $|z|=3$. Тоді підінтегральна функція аналітична в замкненій області, обмеженій колами $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, |z|=3$, і за теоремою Коші для багатозв'язної області

$$\int_{|z|=3} \frac{\cos z}{z(z^2+4)} dz =$$
$$= \int_{\gamma_1} \frac{\cos z}{z(z^2+4)} dz + \int_{\gamma_2} \frac{\cos z}{z(z^2+4)} dz + \int_{\gamma_3} \frac{\cos z}{z(z^2+4)} dz.$$

Застосовуючи до кожного із інтегралів в правій частині інтегральну формулу Коші, одержимо

$$\int_{|z|=3} \frac{\cos z}{z(z^2+4)} dz$$
$$= \int_{\gamma_1} \frac{\frac{\cos z}{(z^2+4)}}{z} dz + \int_{\gamma_2} \frac{\frac{\cos z}{z(z+2i)}}{z-2i} dz + \int_{\gamma_3} \frac{\frac{\cos z}{z(z-2i)}}{z+2i} dz =$$
$$= 2\pi i \left.\frac{\cos z}{(z^2+4)}\right|_{z=0} + 2\pi i \left.\frac{\cos z}{z(z+2i)}\right|_{z=2i} + 2\pi i \left.\frac{\cos z}{z(z-2i)}\right|_{z=-2i} =$$
$$= \frac{\pi i}{2} - \frac{\pi i}{2}\cos 2i) = -i\pi \mathrm{sh}^2 1.$$

Відповідь. 1) $-\frac{\pi i}{4}\mathrm{ch}2$; 2) $-i\pi \mathrm{sh}^2 1$.

Приклад 5.21. Обчислити інтеграл

$$\int_{|z|=4} \frac{\cos z}{(z-\pi)^{25}} dz.$$

Розв'язання. Точка $z=\pi$ розташована в середині кола $|z|=4$, а функція $\cos z$ аналітична в замкненій області $|z|\leq 4$. Тому за формулою (5.2)

$$\int_{|z|=4}\frac{\cos z}{(z-\pi)^{25}}dz=\frac{2\pi i}{24!}(\cos z)^{24}\Big|_{z=\pi}.$$

Для натурального n

$$(\cos z)^{n}=\cos\left(z+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

а тому

$$(\cos z)^{(24)}=\cos z$$

і

$$\int_{|z|=4}\frac{\cos z}{(z-\pi)^{25}}dz=\frac{2\pi i}{24!}\cos z\Big|_{z=\pi}=-\frac{2\pi i}{24!}.$$

Відповідь. $-\frac{2\pi i}{24!}$.

Приклад 5.22. Обчислити інтеграл

$$\int_{|z-2i|=1}\frac{e^{\pi z}}{z(z-2i)^{2}}dz.$$

Розв'язання. Використаємо формулу (5.2), зобразивши підінтегральну функцію в такому вигляді:

$$\frac{e^{\pi z}}{z(z-2i)^{2}}=\frac{\frac{e^{\pi z}}{z}}{(z-2i)^{2}},$$

де функція

$$f(z)=\frac{e^{\pi z}}{z}$$

аналітична в крузі $|z-2i|\leq 1$, а точка $z_0=2i$ розташована в середині цього круга, одержимо

$$\int_{|z-2i|=1}\frac{e^{\pi z}z^{-1}}{(z-2i)^{2}}dz=2\pi i f'(2i).$$

Оскільки

$$f'(z)=(e^{\pi z}z^{-1})'=\pi e^{\pi z}z^{-1}-e^{\pi z}z^{-2}=z^{-2}e^{\pi z}(\pi z-1),$$

то

$$f'(2i) = \frac{1}{4}(1 - 2\pi i),$$

а

$$\int_{|z-2i|=1} \frac{e^{\pi z} z^{-1}}{(z-2i)^2} dz = \pi^2 + \frac{\pi i}{2}.$$

Відповідь. $\pi^2 + \frac{\pi i}{2}$.

Приклад 5.23. Обчислити інтеграл

$$\int_{|z|=3} \frac{\sin z}{z^2(z^2+1)} dz.$$

Розв'язання. В середині круга $|z| \leq 3$ знаменник підінтегральної функції перетворюється в нуль в точках $z = 0,\ z = i,\ z = -i$. Тому безпосередньо застосовувати формули (5.4) і (5.5) не можна. В цьому випадку інтеграл обчислюється двома способами.

Перший спосіб. З центрами в точках $z = 0, z = 2i, z = -2i$ проводимо кола $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, аби вони повністю належали кругу $|z| \leq 3$ і не мали спільних точок ні між собою, ні з колом $|z| = 3$. В області, обмеженій колами $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, $|z| = 3$, пінтегральна функція задовольняє умови інтегральної теореми Коші для багатозв'язної області. Тому

$$\int_{|z|=3} \frac{\sin z}{z^2(z^2+1)} dz =$$

$$= \int_{\gamma_1} \frac{\sin z}{z^2(z^2+1)} dz + \int_{\gamma_2} \frac{\sin z}{z^2(z^2+1)} dz + \int_{\gamma_3} \frac{\sin z}{z^2(z^2+1)} dz.$$

Позаяк функція $f(z) = \frac{\sin z}{(z^2+1)}$ аналітична на γ_1 і в середині цього кола, то за формулою (5.5) маємо

$$\int_{\gamma_1} \frac{\sin z}{z^2(z^2+1)} dz = 2\pi i f'(0).$$

Але

$$f'(z) = \left(\frac{\sin z}{(z^2+1)}\right)' = \frac{(z^2+1)\cos z - 2z\sin z}{(z^2+1)^2},$$

а $f'(0)$=1, тому

$$\int_{\gamma_1} \frac{\sin z}{z^2(z^2+1)}dz = 2\pi i.$$

Застосовуючи інтегральну формулу Коші, одержимо

$$\int_{\gamma_2} \frac{\sin z}{z^2(z^2+1)}dz = \int_{\gamma_2} \frac{\frac{\sin z}{z^2(z+i)}}{z-i}dz = 2\pi i \frac{\sin z}{z^2(z+i)}\bigg|_{z=i} = -\pi \sin i,$$

$$\int_{\gamma_3} \frac{\sin z}{z^2(z^2+1)}dz = \int_{\gamma_2} \frac{\frac{\sin z}{z^2(z-i)}}{z+i}dz = 2\pi i \frac{\sin z}{z^2(z-i)}\bigg|_{z=-i} = -\pi \sin i.$$

Таким чином,

$$\int_{|z|=3} \frac{\sin z}{z^2(z^2+1)}dz = 2\pi i(1-\mathrm{sh}1).$$

Другий спосіб. Дріб, що під знаком інтеграла, розкладемо на суму елементарних:

$$\frac{1}{z^2(z^2+1)} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{z+i} - \frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{z-i}.$$

Тоді

$$\int_{|z|=3} \frac{\sin z}{z^2(z^2+1)}dz =$$

$$= \int_{|z|=3} \frac{\sin z}{z^2}dz + \frac{1}{2i}\int_{|z|=3} \frac{\sin z}{z+i}dz - \frac{1}{2i}\int_{|z|=3} \frac{\sin z}{z-i}dz.$$

Застосовуючи в першому інтегралі правої частини останньої рівності формулу (5.5), а в двох інших формулу (5.4), маємо

$$\int_{|z|=3} \frac{\sin z}{z^2}dz = 2\pi i(\sin z)'|_{z=0} = 2\pi i,$$

$$\int_{|z|=3} \frac{\sin z}{z+i}dz = 2\pi i \sin z|_{z=-i} = -2\pi i \sin i,$$

$$\int_{|z|=3} \frac{\sin z}{z-i}dz = 2\pi i \sin z|_{z=i} = 2\pi i \sin i.$$

Остаточно одержимо

$$\int_{|z|=3} \frac{\sin z}{z^2(z^2+1)} dz = 2\pi i(1 - \text{sh}1).$$

Відповідь. $2\pi i(1 - \text{sh}1)$.

Приклад 5.24. Користуючись результатами обчислення інтеграла

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{n+1}} dz$$

(n – натуральне число), довести, що

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi} \cos(\sin\varphi - n\varphi) d\varphi = \frac{2\pi}{n!} \int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi} \sin(\sin\varphi - n\varphi) d\varphi = 0,$$

$$\int_0^{\pi} e^{\cos\varphi} \cos(\sin\varphi - n\varphi) d\varphi = \frac{\pi}{n!}.$$

Розв'язання. Функція $f(z) = e^z$ аналітична в замкненому крузі $|z| \leq 1$, а точка $z = 0$ розташована в середині кола $|z| = 1$, тому за формулою (5.5) маємо

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(0) = \frac{2\pi i}{n!} e^z \Big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{n!}.$$

Враховуючи, що на одиничному колі $z = e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi, dz = ie^{i\varphi} d\varphi$, отримаємо

$$\frac{2\pi i}{n!} = \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{n+1}} dz =$$

$$= i \int_0^{2\pi} \frac{e^{(\cos\varphi + i\sin\varphi)} e^{i\varphi}}{e^{i(n+1)\varphi}} d\varphi = i \int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi} e^{i(\sin\varphi - n\varphi)} d\varphi =$$

$$= i \int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi} [cos(sin\varphi - n\varphi) + isin(sin\varphi - n\varphi)] d\varphi =$$

$$= i \int_0^{2\pi} e^{cos\varphi} \cos(\sin\varphi - n\varphi) d\varphi - \int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi} \sin(\sin\varphi - n\varphi) d\varphi.$$

Тоді, прирівнюючи дійсні і уявні частини в лівій і правій частинах цієї рівності, знайдемо

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi}\sin(\sin\varphi - n\varphi)d\varphi = 0, \int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi}\cos(\sin\varphi - n\varphi)d\varphi = \frac{2\pi}{n!}.$$

Якщо розбити проміжок інтегрування $[0,2\pi]$ на два $[0,\pi]$ і $[\pi,2\pi]$, зробити заміну $\varphi = 2\pi - t$ в інтегралі за другим проміжком, то отримаємо

$$\frac{2\pi}{n!} = \int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi}\cos(\sin\varphi - n\varphi)d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} e^{\cos\varphi}\cos(\sin\varphi - n\varphi)d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} e^{\cos\varphi}\cos(\sin\varphi - n\varphi)d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} e^{\cos\varphi}\cos(\sin\varphi - n\varphi)d\varphi$$

$$+ \int_0^{\pi} e^{\cos\varphi}\cos(nt - \sin t - 2n\pi)dt =$$

$$= \int_0^{\pi} e^{\cos\varphi}\cos(\sin\varphi - n\varphi)d\varphi + \int_0^{\pi} e^{\cos\varphi}\cos(\sin\varphi - n\varphi)dt =$$

$$= 2\int_0^{\pi} e^{\cos\varphi}\cos(\sin\varphi - n\varphi)d\varphi$$

Звідси

$$\int_0^{\pi} e^{\cos\varphi}\cos(\sin\varphi - n\varphi)d\varphi = \frac{\pi}{n!}.$$

Вправи.

Обчислити інтеграли:

1. $\int_{|z|=1/2} \frac{\mathrm{sh} z}{z} dz.$

2. $\int_{|z|=1} \frac{e^{2iz}\mathrm{tg} z}{z-\pi/4} dz.$

3. $\int_{|z-3|=1} \frac{e^{z-1}}{z^2-4z+3} dz.$

4. $\int_{|z-1|=3} \frac{e^{i\pi z}}{z^2-3z+2} dz.$

5. $\int_{|z-i|=2} \frac{e^{\pi z}\sin z}{z^3} dz.$

6. $\int_{|z-4|=1} \frac{e^{iz}}{(z-\pi)^3} dz.$

7. $\int_{|z-2|=3} \frac{e^{z}}{z^4-16} dz.$

8. $\int_{|z+i|=1} \frac{dz}{(z^2+1)(z+i)^{10}}.$

9. $\int_{\Gamma} \frac{z^4+5z}{(z-i)^4} dz$, де Γ – коло $x^2 + y^2 - 4y = 0.$

10. $\int_{\Gamma} \frac{\cos z}{z^3(z^2+1)} dz$, де Γ– еліпс $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$.

Відповіді: **1**. $2\pi i$. **2**. -2π. **3**. $\pi e^2 i$. **4**. $4\pi i$. **5**. $2\pi^2 i$. **6**. πi. **7**. $\frac{\pi}{16}(e^2 - 2\sin 2)$. **8**. $\pi 2^{-10}$. **9**. $-\pi$ 8. **10**.$-\pi i$.

5.3. Ряд Тейлора

І. Розкладання функції в степеневий ряд. Якщо функція $f(z)$ аналітична в крузі $|z-a| < R$, то вона в ньому єдиним чином розкладається в степеневий ряд (ряд Тейлора)

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k, \tag{5.6}$$

де коефіцієнти c_k визначаються формулами

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad (0! = 1! = 1, \qquad f^{(0)} = f) \tag{5.7}$$

або

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=R} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz \ \ (r < R). \tag{5.8}$$

Якщо R є відстань від точки a до найближчої особливої точки функції $f(z)$, то a – радіус збіжності цього ряду.

ІІ. Операції над степеневими рядами.

1. Арифметичні операції. Нехай функції $f(z)$ і $\varphi(z)$ зображаються рядами в околах точки a відповідно $|z-a| < R_1$ і $|z-a| < R_2$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k, \varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-a)^k. \tag{5.9}$$

Тоді в околі $|z-a| < \rho$ справедливі такі операції додавання і множення:

$$\alpha f(z) + \beta\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)(z-a)^k, \tag{5.10}$$

$$f(z)\cdot\varphi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-a)^k, \qquad (5.11)$$

де

$$c_k=a_0b_k+a_1b_{k-1}+\ldots+a_kb_0,\ \rho=\min(R_1,R_2),$$

α, β – довільні комплексні числа.

2. Почленне диференціювання степеневих рядів. Степеневий ряд

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-a)^k$$

в крузі збіжності $|z-a|<R$ можна почленно диференціювати будь-яке число разів, причому продиференційовані ряди

$$f^{(n)}(z)=\sum_{k=n}^{\infty}k(k-1)\ldots(k-n+1)c_k(z-a)^{k-n}$$

для будь-якого натурального n збігаються в крузі $|z-a|<R$.

3. Почленне інтегрування степеневого ряду. Якщо степеневий ряд (5.6) збігається рівномірно на спрямній кривій Г, то

$$\int_\Gamma \sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-a)^k\,dz=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\int_\Gamma (z-a)^k dz.$$

III. Деякі прийоми розкладання функції в степеневий ряд.

1. Безпосереднє розкладання. В цьому випадку коефіцієнти розкладання аналітичної функції в степеневий ряд знаходять за формулами (5.7) або (5.8). Але цей прийом часто малоефективний, оскільки многократне диференціювання і розрахунок значень похідних в даній точці та обчислення інтегралів від складних функцій – громіздкий і копіткий процес. Тому частіше використовуються деякі штучні прийоми.

2. Використання відомих розкладів. При розкладанні в степеневий ряд деяких функцій можуть бути

використані відомі розклади елементарних функцій, а також операції над рядами.

Частіше всього застосовуються розклади в степеневі ряди таких функцій:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots \frac{z^k}{k!} + \ldots,\quad |z| < \infty \tag{5.12}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^{k+1} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots,\quad |z| < \infty \tag{5.13}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \ldots,\quad |z| < \infty \tag{5.14}$$

$$\mathrm{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots,\quad |z| < \infty \tag{5.15}$$

$$\mathrm{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \ldots,\quad |z| < \infty \tag{5.16}$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^k + \ldots,\quad |z| < 1 \tag{5.17}$$

$$\mathrm{Ln}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots + (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k} + \ldots,\quad |z| < 1 \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned}(1+z)^\alpha &= 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} z^k + \ldots,\quad |z| < 1\end{aligned} \tag{5.19}$$

В розкладі (5.18) $\mathrm{Ln}(1+z)$ – головна вітка функції $\ln(1+z)$. Оскільки вона є аналітичною для всіх z, не розташованих на промені (–∞; –1) дійсної осі, то відстань від точки $z = 0$ до точки $z = -1$ (особлива точка функції $\ln(1+z)$) дорівнює одиниці. Тому рівність (5.18) має місце для $|z| < 1$.

В розкладі (5.19) α – довільне комплексне число. Якщо α – натуральне число, то одержимо звичайну формулу бінома Ньютона. Якщо α < 0, то функція $f(z)$ має одну особливу точку $z = -1$, а тому у розкладі (5.19) є сенс лише для $|z| < 1$. Якщо α – не ціле число за означенням загальної степеневої функції, функція $f(z) = (1+z)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+z)}$ багатозначна. Якщо вибрати головну гілку логарифма, то розклад (5.19) справедливий для вітки $e^{\alpha \ln(1+z)}$ при будь-якому α (α – не ціле число) в області $|z| < 1$.

3. Р о з к л а д р а ц і о н а л ь н и х ф у н к ц і й н а с у м у п р о с т і ш и х. При розкладанні раціональних функцій в степеневий ряд часто буває корисним зобразити дану функцію у вигляді суми більш простих, що дозволяє (інколи) дуже ефективно знайти шуканий розклад.

Д і л е н н я с т е п е н е в и х р я д і в. Нехай функція $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$ ($\psi(z) \neq 0$) аналітична в крузі $|z-a| < R$ і для функцій $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ відомі їх степеневі ряди в околі точки a. Покажемо, як, знаючи коефіцієнти цих рядів, знайти коефіцієнти степеневого ряду для функції $f(z)$. Будемо вважати, що

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots,$$

$$\psi(z) = b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \ldots,$$

$$\varphi(z) = q_0 + q_1(z-a) + q_2(z-a)^2 + \ldots$$

Замінюючи в рівності $f(z) \cdot \psi(z) = \varphi(z)$ функції їх розкладами в степеневі ряди і враховуючи, що в крузі збіжності ці ряди можна множити, одержимо

$$c_0 b_0 + (c_0 b_1 + c_1 b_0)(z-a) + (c_0 b_2 + c_1 b_1 + c_2 b_0)(z-a)^2 + \ldots +$$
$$+ (c_0 b_n + c_1 b_{n-1} + \cdots + c_n b_0)(z-a)^n + \cdots =$$
$$= q_0 + q_1(z-a) + q_2(z-a)^2 + \cdots + q_n(z-a)^n + \ldots$$

Суми степеневих рядів в правій і лівій частинах цієї рівності в крузі $|z-a| < R$ співпадають. На основі єдиності розкладу аналітичної функції в степеневий ряд маємо: коефіцієнти обох рядів при однакових степенях $z-a$ дорівнюють одне одному. Тому мають місце рівняння:

$$c_0 b_0 = q_0;$$
$$c_0 b_1 + c_1 b_0 = q_1;$$
$$c_0 b_2 + c_1 b_1 + c_2 b_0 = q_2;$$
$$c_0 b_n + c_1 b_{n-1} + \cdots + c_n b_0 = q_n.$$

Із них послідовно знаходимо коефіцієнти $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$

4. Розглянутий спосіб ділення рядів називається м е т о д о м н е в и з н а ч е н и х к о е ф і ц і є н т і в. Коефіцієнти степеневого ряду функції $f(z)$ в околі точки a можна одержати діленням ряда функції $\varphi(z)$ на ряд функції $\psi(z)$ за тими ж правилами, як і ділення многочлена на многочлен, записаних за зростаючими степенями $z-a$.

5. П і д с т а н о в к а р я д у в р я д. Нехай функція $f(z) = \varphi(\gamma(z))$ і відомі розклади в степеневі ряди функцій $\varphi(w)$ і $\gamma(z)$:

$$\varphi(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (w-b)^k, |w-b| < R, \tag{5.20}$$

$$\gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z-a)^k, |z-a| < R_1, \gamma(a) = b. \tag{5.21}$$

Для розкладу функції $f(z) = \varphi(\gamma(z))$ в степеневий ряд в околі точки a треба підставити ряд (5.21) в ряд (5.20) і виконати необхідні піднесення до степеня, а потім додати коефіцієнти членів при однакових степенях $z-a$. Одержаний ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (\gamma(z)-b)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k.$$

буде збіжним в крузі $|z-a| < R$, де R вибране, аби при $|z-a| < R$ виконувалась умова $|w-b| = |\gamma(z)-b| < R$.

Приклад 5.25. Визначити радіус збіжності степеневого ряду функції

$$f(z) = \frac{z}{z^2-4z+3}$$

1) за степенями z;
2) за степенями $z-6$,

не виконуючи самого розкладання.

Розв'язання.

1) функція $f(z)$ має дві особливі точки: $z = 1$ та $z = 3$. Радіус збіжності розкладу в степеневий ряд функції $f(z)$ буде дорівнювати відстані від центра круга збіжності $z = 0$ до найближчої особливої точки $z = 1$. Отже, радіус дорівнює 1.

2) Оскільки $z = 6$ – центр круга збіжності степеневого ряду функції $f(z)$ за степенями $z-6$, а найближча особлива точка $z = 3$, то $R = 3$.

Відповідь. 1) 1; 2) 3.

В кожному із прикладів **5.26 – 5.29**, користуючись формулами (5.6, 5.7), треба розкласти дану функцію в ряд за степенями $z-a$, де a – задане число. Визначити круг збіжності кожного із рядів.

Приклад 5.26.

$$f(z) = e^z \cos z, a = 0.$$

Розв'язання. Знайдемо похідні функції та їх значення в точці $z = 0$:

$f(0) = 1,$

$f'(z) = e^z(\cos z - \sin z) = \sqrt{2}e^z\cos\left(z + \frac{\pi}{4}\right),$

$f'(0) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right),$

$f''(z) = (\sqrt{2})^2 e^z\cos\left(z + \frac{2\pi}{4}\right),\ f''(0) = (\sqrt{2})^2\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right);$

…

$f^{(k)}(z) = (\sqrt{2})^k e^z\cos\left(z + \frac{k\pi}{4}\right),\ f^{(k)}(0) = (\sqrt{2})^k\cos\left(\frac{k\pi}{4}\right).$

Підставляючи значення $f^{(k)}(0)$ в (5.7), одержуємо

$$e^z\cos z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^k\cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)}{k!}z^k.$$

Оскільки функція $f(z) = e^z\cos z$ аналітична на всій комплексній площині, то її степеневий ряд збігається на всій комплексній площині ($R = \infty$).

Відповідь. $$e^z\cos z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^k\cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)}{k!}z^k.$$

Приклад 5.27.

$$f(z) = \frac{1}{1+z}, a = i.$$

Розв'язання. Функція $\frac{1}{1+z}$ має єдину особливу точку $z = -1$. Відстань від центра $z = i$ круга збіжності до точки $z = -1$ дорівнює $|i + 1| = \sqrt{2}$. А тому круг збіжності цієї функції $|z - i| < \sqrt{2}$. Знайдемо коефіцієнти розкладу за формулою (5.7):

$$f(z) = \frac{1}{1+z}, \qquad c_0 = f(i) = \frac{1}{1+i};$$

$$f'(z) = -\frac{1}{(1+z)^2}, \quad c_1 = \frac{f'(i)}{1!} = -\frac{1}{(1+i)^2};$$

$$f''(z) = \frac{2}{(1+z)^3}, \quad c_2 = \frac{f''(i)}{2!} = \frac{1}{(1+i)^3};$$

$$f'''(z) = -\frac{3!}{(1+z)^4}, \qquad c_3 = \frac{f'''(i)}{3!} = -\frac{1}{(1+i)^4};$$

…

$$f^{(k)}(z)=(-1)^k\frac{k!}{(1+z)^{k+1}},\qquad c_k=\frac{f^{(k)}(i)}{k!}=(-1)^k\frac{1}{(1+i)^{k+1}}.$$

Таким чином,

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-i)^k}{(1+i)^{k+1}}.$$

Відповідь. $\displaystyle \frac{1}{1+z}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-i)^k}{(1+i)^{k+1}}.$

Приклад 5.28.

$$f(z)=\frac{\ln(z+1)}{\sqrt{z^2-4}},a=1.$$

Тут lnz – головне значення логарифма, а вітка радикала визначається умовою $\sqrt{1}=1.$ Знайти два перших члени розкладу.

Розв'язання. Визначимо спочатку радіус збіжності ряду функції $f(z)$ за степенями $z-1$. Для встановлювання особливих точок функції прирівнюємо нулеві підкореневий вираз і той, що під знаком логарифма. Знаходимо: точки $z=-2, z=2$ – алгебраїчні точки розгалуження, а також $z=-1$ – логарифмічну точку розгалуження. Центр круга збіжності – точка $z=1$. Найближча до нього особлива точка $z=2$, а тому радіус збіжності дорівнює 1, а область збіжності визначається нерівністю $|z-1|<1$. Знайдемо $f(1)$ і $f'(1)$:

$$f(1)=-\frac{\ln(2)}{\sqrt{3}}i;$$

$$f'(z)=\frac{z^2-4-z(z+1)\ln(z+1)}{(z^2-4)(z+1)\sqrt{z^2-4}};\ \ f'(1)=-\frac{3+\ln 4}{6\sqrt{3}}i.$$

Отже, шуканий розклад має вигляд

$$\frac{\ln(z+1)}{\sqrt{z^2-4}}=-\frac{\ln(2)}{\sqrt{3}}i-\frac{3+\ln 4}{6\sqrt{3}}i(z-1)+\ldots$$

Відповідь. $\displaystyle \frac{\ln(z+1)}{\sqrt{z^2-4}}=-\frac{\ln(2)}{\sqrt{3}}i-\frac{3+\ln 4}{6\sqrt{3}}i(z-1)+\ldots$

Приклад 5.29.

$$f(z)=\sqrt[3]{z+25},\ a=2.$$

Розв'язання. Запишемо функцію $f(z)$ в такому вигляді:

$$\sqrt[3]{z+25}=\sqrt[3]{(z-2)+27}=\sqrt[3]{27}\left(1+\frac{z-2}{27}\right)^{1/3}.$$

Оскільки $\sqrt[3]{27}=3$, то умові задачі задовольняє вітка $\sqrt[3]{z+25}=$ $=3\left(1+\frac{z-2}{27}\right)^{1/3}$, яка в області $|z-2|<27$ є однозначною функцією. Використовуючи формулу (5.19), одержимо при $|z-2|<27$

$$\sqrt[3]{z+25}=3\left[1+\frac{1/3}{1!}\cdot\frac{z-2}{27}+\frac{1/3(1/3-1)}{2!}\cdot\left(\frac{z-2}{27}\right)^2+\ldots\right]=$$

$$=3+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1/3-1)\ldots(1/3-k+1)}{k!\,27^k}\cdot(z-2)^k.$$

Відповідь. $\sqrt[3]{z+25}=3+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1/3-1)\ldots(1/3-k+1)}{k!\,27^k}\cdot(z-2)^k$

В прикладах **5.30 – 5.37**, використовуючи відомі степеневі ряди для деяких функцій та операції над цими рядами, в околі даної точки розкласти указану функцію в степеневий ряд і визначити круг його збіжності.

Приклад 5.30.

$$f(z)=z\mathrm{ch}^2z, a=0.$$

Розв'язання. Користуючись рівністю $\mathrm{ch}^2z=(1+\mathrm{ch}2z)/2$ і степеневим рядом (5.16) для функції chz, отримаємо

$$z\mathrm{ch}^2z=z\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2z)^{2k}}{(2k)!}\right)=z+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2)^{2k-1}}{(2k)!}(z)^{2k+1}.$$

Цей ряд збігається на всій комплексній площині, бо функція $f(z)=z\mathrm{ch}^2z$ не має особливих точок.

Відповідь. $z\mathrm{ch}^2z=z+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2)^{2k-1}}{(2k)!}(z)^{2k+1}$

Приклад 5.31.

$$f(z)=\sin^3z, a=0.$$

Розв'язання. П е р ш и й   с п о с і б . Оскільки

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},$$

то отримаємо

$$\sin^3 z = -\frac{1}{8i}\left(e^{3iz} - 3e^{iz} + 3e^{-iz} - e^{-3iz}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

де коефіцієнти c_n обчислюються за законом додавання рядів (5.10):

$$c_n = -\frac{(3i)^n - 3(i)^n + 3(-i)^n - (-3i)^n}{8 \cdot n!} i.$$

Якщо $n = 2k$, то $c_{2k} = 0$, а

$$c_{2k+1} = 2\frac{3(-1)^k + 3^{2k+1}(-1)^{k+1}}{8(2k+1)!} = (-1)^k \frac{3 - 3^{2k+1}}{4(2k+1)!}.$$

Таким чином,

$$\sin^3 z = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{3 - 3^{2k+1}}{4(2k+1)!} z^{2k+1}.$$

Другий спосіб. Із формули $\sin 3z = 3\sin z - 4\sin^3 z$ одержуємо, що $\sin^3 z = \frac{1}{4}(3\sin z - \sin 3z)$. Тому, враховуючи степеневий ряд для функції $\sin z$, має місце розклад

$$\sin^3 z = \frac{3}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(3z)^{2k+1}}{4(2k+1)!} =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{3 - 3^{2k+1}}{4(2k+1)!} z^{2k+1}.$$

Відповідь. $\sin^3 z = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{3 - 3^{2k+1}}{4(2k+1)!} z^{2k+1}.$

Приклад 5.32. $f(z) = \sin(z-1), a = 2.$

Розв'язання. Подамо функцію $f(z)$ таким чином:

$\sin(z-1) = \sin((z-2)+1) = \sin(z-2)\cos 1 + \cos(z-2)\sin 1.$

Далі, замінюючи в (5.13) і (5.14) z на $z-2$, одержимо

$$\sin(z-1) = \cos 1\left[(z-2) - \frac{(z-2)^3}{3!} + \frac{(z-2)^5}{5!} - \ldots\right] +$$

$$+\sin 1\left[1 - \frac{(z-2)^2}{2!} + \frac{(z-2)^4}{4!} - \ldots\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\left(1 + \frac{k\pi}{2}\right)}{k!}(z-2)^k.$$

Отриманий ряд збігається на всій комплексній площині, бо функція $\sin(z+1)$ аналітична всюди.

Відповідь. $$\sin(z-1)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\left(1+\frac{k\pi}{2}\right)}{k!}(z-2)^k.$$

Приклад 5.33. $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2-2z-1}, a=1.$

Розв'язання. Виконавши деякі перетворення з виразом для функції $f(z)$ та використавши формули (5.12), (5.17) і правило множення рядів (5.11), одержимо

$$f(z)=\frac{e^{z-1+1}}{(z-1)^2-2}=-\frac{e}{2}\cdot\frac{e^{z-1}}{1-\frac{(z-1)^2}{2}}=-\frac{e}{2}\left[1+\frac{(z-1)}{1!}+\frac{(z-1)^2}{2!}+\ldots\right]\times$$

$$\times\left[1+\frac{(z-1)^2}{2!}+\frac{(z-1)^4}{4!}+\ldots\right]=-\frac{e}{2}\left[1+\frac{(z-1)}{1!}+(z-1)^2+\ldots\right].$$

Круг збіжності отриманого ряду є спільною частиною кругів збіжності рядів, що множились. Перший із них збігається на всій комплексній площині, другий – в крузі $|z-1|<\sqrt{2}$, тому для знайденого ряду круг збіжності $|z-1|<\sqrt{2}$.

Відповідь. $$\frac{e^z}{z^2-2z-1}=-\frac{e}{2}\left[1+\frac{(z-1)}{1!}+(z-1)^2+\ldots\right]$$

Приклад 5.34. $f(z)=\dfrac{2}{(1+z)^3}, a=0.$

Розв'язання. Користуючись розкладом (5.17), одержимо

$$\frac{1}{1+z}=\frac{1}{1-(-z)}==1-z+z^2-\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k,$$

За теоремою про почленне диференціювання степеневого ряду маємо

$$-\frac{1}{(1+z)^2}=-1+2z-3z^2+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}(k+1)z^k$$

або

$$\frac{1}{(1+z)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)z^k. \qquad (5.22)$$

Диференціюючи почленно останню рівність, знаходимо

$$\frac{2}{(1+z)^3} = 2 - 6z + 12z^2 - \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+2)(k+1) z^k. \qquad (5.23)$$

Ряди (5.22) і (5.23) збіжні в крузі $|z| < 1$, бо почленне диференціювання не змінює круг збіжності.

Відповідь. $\frac{2}{(1+z)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+2)(k+1) z^k$

Приклад 5.35. .

$$f(z) = \frac{1}{(1-z^2)^3}, a = 0.$$

Розв'язання. Замінюючи в (5.23) z на $(-z^2)$, одержимо

$$f(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) z^{2k}.$$

Цей ряд збігається в крузі $|z| < 1$.

Відповідь. $\frac{1}{(1-z^2)^3} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) z^{2k}$.

Приклад 5.36.

$$f(z) = \text{arcsin}z, a = 0.$$

Тут arcsin$z$ – та вітка функції Arcsin$z$, для якої Arcsin$z = 0$ і

$$(\text{Arcsin}z)'|_{z=0} = \left.\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\right|_{z=0} = 1.$$

Розв'язання. Вважаючи в (5.19) $z = t^2$ і $\alpha = -\frac{1}{2}$, маємо

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!} t^2 + \frac{3}{2^2 \cdot 2!} t^4 + \dots \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2^k \cdot k!} t^{2k} + \dots$$

Інтегруючи цю рівність почленно від 0 до z і враховуючи, що $(\text{arcsin}z)' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$, одержимо

$$\text{arcsin}z = z + \frac{1}{2 \cdot 1!} \frac{z^3}{3} + \frac{3}{2^2 \cdot 2!} \frac{z^5}{5} + \dots \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{(2k+1) 2^k \cdot k!} z^{2k+1} + \dots$$

Оскільки ряд (5.19) збігається для $|z| < 1$, то і одержаний ряд збігається для $|z| < 1$.

Відповідь. $\arcsin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)}{(2k+1)2^k\cdot k!} z^{2k+1}$.

Приклад 5.37.

$$f(z) = \int_0^z te^{t^2}dt, a = 0.$$

Розв'язання. Розкладемо функцію $g(t) = te^{t^2}$ в степеневий ряд

$$te^{t^2} = t\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k+1}}{k!}.$$

Цей ряд збігається на всій комплексній площині. Проінтегрувавши його від 0 до z, одержимо

$$\int_0^z te^{t^2}dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+2}}{k!\,(2k+2)}.$$

Отриманий ряд збігається в області $|z| < \infty$.

Відповідь. $\int_0^z te^{t^2}dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+2}}{k!\,(2k+2)}$.

В прикладах **5.38 – 5.42**, розкладаючи раціональні функції на більш прості дроби, знайти степеневі ряди для заданих функцій за степенями $z-a$.

Приклад 5.38.

$$f(z) = \frac{-3z+11}{z^2-7z+12}, a = 0.$$

Розв'язання. Подамо функцію $f(z)$ у вигляді

$$f(z) = \frac{-3z+11}{z^2-7z+12} = \frac{-2}{z-3} - \frac{1}{z-4}.$$

Використовуючи (5.17) для кожного з дробів, маємо

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3(1-\frac{z}{3})} = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{3^{k+1}};$$

за умови $|z| < 3$ і

$$\frac{1}{z-4} = -\frac{1}{4(1-\frac{z}{4})} = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{4^{k+1}}.$$

За умови $|z| < 4$. Звідси одержуємо, що при $|z| < 3$

$$\frac{-3z+11}{z^2-7z+12} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{3^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{4^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\cdot 4^{k+1}+3^{k+1}}{12^{k+1}}z^k.$$

Відповідь. $\frac{-3z+11}{z^2-7z+12} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\cdot 4^{k+1}+3^{k+1}}{12^{k+1}}z^k, |z|<3$

Приклад 5.39.

$$f(z) = \frac{2z-6i}{z^2-6iz-5}, a = 2i.$$

Розв'язання. Розкладемо функцію $f(z)$ на суму простих дробів. Маємо

$$f(z) = \frac{2z-6i}{z^2-6iz-5} = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{z-5i}.$$

Далі виконуємо такі перетворення:

$$f(z) = \frac{2z-6i}{z^2-6iz-5} = \frac{1}{(z-2i)+2i-i} + \frac{1}{(z-2i)+2i-5i} =$$

$$= \frac{1}{(z-2i)+i} + \frac{1}{(z-2i)-3i} =$$

$$= \frac{1}{i\left(1+\frac{z-2i}{i}\right)} - \frac{1}{3i\left(1-\frac{z-2i}{3i}\right)}.$$

Застосовуючи (5.17) з заміною відповідно z на $-\frac{z-2i}{i}$ і на $\frac{z-2i}{3i}$, знаходимо

$$\frac{1}{1+\frac{z-2i}{i}} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-2i)^k}{i^k}$$

за умови $|z-2i|<1$ і

$$\frac{1}{1-\frac{z-2i}{3i}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-2i)^k}{(3i)^k}$$

за умови $|z-2i|<3$. Звідси одержуємо, що при $|z-2i|<1$

$$\frac{2z-6i}{z^2-6iz-5} = \frac{1}{i}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-2i)^k}{i^k} - \frac{1}{3i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-2i)^k}{(3i)^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{3(-3)^k-1}{(3i)^{k+1}}(z-2i)^k.$$

Відповідь. $$\frac{2z-6i}{z^2-6iz-5} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{3(-3)^k-1}{(3i)^{k+1}}(z-2i)^k, |z-2i| < 1.$$

Приклад 5.40.

$$f(z) = \frac{z}{(z^2-2)(z^2+3)}, a = 0.$$

Розв'язання. Функція $f(z)$ має особливі точки $z = \pm\sqrt{2}$ і $z = \pm\sqrt{3}\,i$. Відстань від центра збіжності точки $z = 0$ до найближчої особливої точки дорівнює $\sqrt{2}$. Тому степеневий ряд для функції $f(z)$ за степенями z буде збіжним в крузі $|z| < \sqrt{2}$. Знайдемо самий ряд. Для цього зобразимо функцію $f(z)$ у вигляді суми простіших дробів (в цьому випадку немає необхідності розкладати на найпростіші дроби):

$$\frac{z}{(z^2-2)(z^2+3)} = \frac{1}{5}\frac{z}{(z^2-2)} - \frac{1}{5}\frac{z}{(z^2+3)}.$$

Для кожного з дробів використаємо ряд (5.17) і отримаємо

$$\frac{1}{5}\frac{z}{(z^2-2)} = -\frac{1}{5\cdot 2}\frac{z}{1-\frac{z^2}{2}} = -\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{2^{k+1}}.$$

при $|z| < \sqrt{2}$ і

$$\frac{1}{5}\frac{z}{(z^2+3)} = \frac{1}{5\cdot 3}\frac{z}{1+\frac{z^2}{3}} = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{3^{k+1}}.$$

при $|z| < \sqrt{3}$. Тому при $|z| < \sqrt{2}$

$$\frac{z}{(z^2-2)(z^2+3)} = -\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{2^{k+1}} - \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{3^{k+1}} =$$

$$= -\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{k+1} + 3^{k+1}}{6^{k+1}}z^{2k+1}.$$

Відповідь. $$\frac{z}{(z^2-2)(z^2+3)} = -\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{k+1} + 3^{k+1}}{6^{k+1}}z^{2k+1}, |z| < \sqrt{2}$$

Приклад 5.41.

$$f(z) = \frac{1}{(1+z+z^2)(1+z^3)(1+z^6)}, a = 0.$$

Розв'язання. Оскільки $1-z^3 = (1-z)(1+z+z^2)$, то, помноживши чисельник і знаменник на $(1-z)$, запишемо дану функцію у вигляді

$$f(z) = \frac{(1-z)}{(1-z)(1+z+z^2)(1+z^3)(1+z^6)} = \frac{(1-z)}{(1-z^3)(1+z^3)(1+z^6)} =$$
$$= \frac{(1-z)}{(1-z^{12})}.$$

Замінивши в біноміальному ряді (5.17) z на z^{12}, одержимо

$$\frac{1}{(1+z+z^2)(1+z^3)(1+z^6)} = (1-z)\sum_{k=0}^{\infty} z^{12k} = \sum_{k=0}^{\infty}(z^{12k}-z^{12k+1}).$$

Функція $f(z)$ аналітична на всій комплексній площині, за винятком точок $z_k = cos\frac{\pi}{6}k + isin\frac{\pi}{6}k$, $(k = 0,1,\ldots,11)$. Тому отриманий ряд буде збігатися в крузі $|z| < 1$.

Відповідь. $\frac{1}{(1+z+z^2)(1+z^3)(1+z^6)} = \sum_{k=0}^{\infty}(z^{12k}-z^{12k+1}), |z| < 1.$

Приклад 5.42.

$$f(z) = \frac{1}{(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5)(1-z^6)}, a = 0.$$

Розв'язання. З метою спрощення вигляду заданої функції помножимо чисельник і знаменник на $(1-z)$. Враховуючи, що дана функція має вигляд $(1-z)(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5) = 1-z^6$, одержуємо

$$f(z) = \frac{(1-z)}{(1-z^6)^2}.$$

Далі, використовуючи ряд (5.22) з заміною z на $(-z^6)$, отримаємо

$$f(z) = (1-z)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)z^{6k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)(z^{6k}-z^{6k+1}).$$

Відстань від точки $z = 0$ до найближчої особливої точки функції дорівнює 1, а тому одержаний ряд збігається в крузі $|z| < 1$.

Відповідь. $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)(z^{6k}-z^{6k+1}), |z| < 1.$

Приклад 5.43. Користуючись правилом ділення степеневих рядів, знайти декілька членів розкладу функції $f(z) = \mathrm{th}z$ в степеневий ряд в околі $z = 0$.

Розв'язання. Перший спосіб. Оскільки для функції $\mathrm{th}z$ точки $z = i\pi(2k+1)/2$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ є особливими, то найближчими особливими точками до точки $z = 0$ є $z = \pm i\pi/2$. Тому шуканий ряд має круг збіжності $|z| < \pi/2$.

Позначимо його коефіцієнти через c_k $(k = 0,1,2,\ldots)$. Використавши рівність $\mathrm{ch}z{\cdot}\mathrm{th}z = \mathrm{sh}z$ і степеневі ряди для функцій $\mathrm{ch}z$ і $\mathrm{sh}z$, отримаємо

$$(c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots)\left(1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots\right)$$
$$= z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots$$

Позаяк $\mathrm{th}z$ – непарна функція, то в її степеневому ряді коефіцієнти $c_{2k} = 0$ $(k = 0,1,2,\ldots)$, а тому рівняння відносно інших коефіцієнтів в цьому випадку будуть такими:

$$c_0 = 1,$$
$$c_3 + \frac{1}{2!}c_1 = \frac{1}{3!},$$
$$c_5 + \frac{1}{2!}c_3 + \frac{1}{4!}c_1 = \frac{1}{5!},$$
$$c_7 + \frac{1}{2!}c_5 + \frac{1}{4!}c_3 + \frac{1}{6!}c_1 = \frac{1}{7!},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

і з них послідовно знаходимо

$$c_1 = 1, \qquad c_3 = -\frac{1}{3}, \qquad c_5 = \frac{2}{15}, \; c_7 = -\frac{17}{315}, \ldots$$

Тоді

$$\mathrm{th}z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{2}{15}z^5 - \frac{17}{315}z^7 + \ldots$$

Д р у г и й   с п о с і б . Одержимо степеневий ряд для функції $f(z)$ в околі точки $z = 0$ діленням ряду (5.15) на ряд (5.16). Розрахунок виконується за правилами ділення поліномів з членами, розташованими за зростанням степенів:

$$
\begin{array}{l|l}
\quad z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}+\ldots & 1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\cdots \\ \cline{2-2}
-\;\; z+\frac{z^3}{2!}+\frac{z^5}{4!}+\frac{z^7}{6!}+\ldots & z-\frac{z^3}{3}+\frac{2z^5}{15}-\frac{17z^7}{315}+\ldots \\ \cline{1-1}
\quad -\frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{30}-\frac{3z^7}{2520}-\ldots & \\
-\;\; -\frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{6}-\frac{z^7}{72}-\ldots & \\ \cline{1-1}
\quad \frac{2z^5}{15}+\frac{4z^7}{315}+\cdots & \\
-\;\; \frac{2z^5}{15}+\frac{z^7}{15}+\cdots & \\ \cline{1-1}
\quad -\frac{17z^7}{315}-\ldots & \\
\quad \ldots &
\end{array}
$$

Таким чином,

$$\text{th}z = z-\frac{z^3}{3}+\frac{2}{15}z^5-\frac{17}{315}z^7+\ldots$$

Розглянутими способами можна знайти будь-яке число членів шуканого ряду.

Відповідь. $\text{th}z = z-\frac{z^3}{3}+\frac{2}{15}z^5-\frac{17}{315}z^7+\ldots$

Приклад 5.44. Методом підстановки ряду в ряд знайти сім перших членів степеневого ряду функції $f(z)=\sqrt{\text{ch}z}, \sqrt{\text{ch}z} = 1$ при $z=0$ за степенями z.

Розв'язання. Аби можна було застосувати цей метод до даної функції, запишемо її так:

$$f(z) = (1-(1-\text{ch}z))^{1/2}.$$

Вважаючи, що

$$w=\gamma(z)=1-\text{ch}z=-\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}-\ldots\,(|w|<\infty),$$

$$\varphi(w) = (1-w)^{1/2} = 1-\frac{1}{2}w-\frac{1}{8}w^2-\frac{1}{16}w^3-\dots (|w|<1),$$

отримаємо

$$f(z)=\varphi\big(\gamma(z)\big)=1-\frac{1}{2}\left(-\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{24}-\frac{z^6}{720}-\dots\right)-\frac{1}{8}\left(-\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{24}-\dots\right)^2-$$

$$-\frac{1}{16}\left(-\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{24}-\dots\right)^3-\dots$$

Невиписані члени можна не розглядати, бо вони не є необхідними для знаходження перших семи членів шуканого ряду. Оскільки

$$\left(-\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{24}-\frac{z^6}{720}-\dots\right)^2=\frac{z^4}{4}+\frac{z^6}{24}+\cdots,$$

$$\left(-\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{24}-\frac{z^6}{720}-\dots\right)^3=-\frac{z^6}{8}-\dots,$$

то

$$f(z)=1+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}+\frac{z^6}{720}+\dots\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{z^4}{4}+\frac{z^6}{24}+\cdots\right)^2-$$

$$-\frac{1}{16}\left(-\frac{z^6}{8}-\dots\right)^3-\dots=1+\frac{1}{4}z^2-\frac{1}{96}z^4+\frac{19}{5760}z^6-\dots$$

Функція $f(z)=\sqrt{\mathrm{ch} z}$ в крузі $|z|<\frac{\pi}{2}$ є аналітичною, а тому відповідний степеневий ряд в ньому буде збіжним.

Відповідь. $f(z)=1+\frac{1}{4}z^2-\frac{1}{96}z^4+\frac{19}{5760}z^6-\dots$

Вправи.

В прикладах **1 – 4** визначити радіуси збіжності степеневих рядів для заданих функцій за степенями $z-a$, не виконуючи самого розкладання.

1. $\frac{2z+1}{z+2}, a=0.$ **3.** $\frac{1}{z^2-1}, a=3.$

2. $\frac{3}{z^2+z}, a=1/2.$ **4.** $\frac{1}{z^2-1}, a=i.$

В прикладах **5 – 10** розкласти задані функції в степеневі ряди за степенями $z-a$. Знайти для кожного з них круг збіжності.

5. $\frac{1}{z}, a=i.$ **6.** $\frac{1}{(z-b)(z-c)}, |b|<|c|, a=0.$

7. $e^z \sin z$, $a = 0$.

8. e^z, $a = 2$.

9. $\frac{1}{1+z^4}$, $a = 0$.

10. $\cos^2 z$, $a = 0$.

В прикладах **11** – **19** розкласти дані функції в степеневі ряди за степенями $z - a$, застосовуючи відомі розклади і почленне диференціювання рядів. Визначити в кожному випадку круг збіжності.

11. $\cos^3 z$, $a = 0$.

12. $\sqrt{z+1}$, $a = 3$ $(\sqrt{4} = -2)$.

13. $\ln z$, $a = 4$ $(\mathrm{Ln}\, i = -2\pi i)$.

14. $\frac{1}{z^2+b^2}$, $a = 0$.

15. $\frac{1}{(z^2-b^2)(z^2-c^2)}$, $|b| < |c|$, $a = 0$.

16. $z^3 \ln(1+z^2)$, $a = 0$.

17. $\frac{2z-1}{z^2-2z-2}$, $a = 1$.

18. $\frac{1}{(1+i)^3}$, $a = 0$.

19. $\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2}$, $a = 0$.

В прикладах **20 – 25** знайти три перших відмінних від нуля члени степеневих рядів для даних функцій за степенями $z - a$. Знайти круг збіжності для кожного ряду.

20. $\mathrm{tg} z$, $a = 0$.

21. $e^{\cos z}$, $a = 0$.

22. $\frac{z}{\mathrm{ch} z}$, $a = 0$.

23. $\frac{z^3}{\ln(1+z)}$, $a = 0$.

24. $e^{z \sin z}$, $a = 0$.

25. $e^{-z} \sin z$, $a = 0$.

Відповіді: **1**. $R = 2$. **2**. $R = 0.5$. **3**. $R = 2$. **4**. $R = \sqrt{2}$.

5. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z-i)^k}{i^{k+1}}$, $|z - i| < 1$. **6**. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^{k+1}-c^{k+1}}{b-c} \frac{z^k}{b^{k+1}c^{k+1}}$, $|z| < 6$.

7. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^{k+1} \sin\frac{k\pi}{4}}{k!} z^k$, $|z| < \infty$. **8**. $e^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-2)^k}{k!}$, $|z - 2| < \infty$.

9. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{4k}$, $|z| < 1$. **10**. $\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} z^{2k}$, $|z| < \infty$.

11. *Вказівка*. Використати формулу $\cos 3z = 4\cos^3 z - 3\cos z$ і степеневий ряд для функції $\cos z$. $\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{3^{2k}+3}{(2k)!} z^{2k},\ |z| < \infty.$

12. $-2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)2^{2k-1}}{k!4^k}(z-3)^k,\ |z-3| < 4.$

13. $\mathrm{Ln}z = \ln 4 - 2\pi i + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(z-4)^k}{k!4^k},\ |z-4| < 4.$

14. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k}}{b^{2k+2}},\ |z| < b.$

15. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(b^{2k+2}-c^{2k+2})z^{2k}}{(b^2-c^2)(bc)^{2k+2}},\ |z| < b.$

16. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1} \frac{z^{2k+3}}{k},\ |z| < 1.$

17. $\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k (k+2)(k+1)z^{2k},\ |z| < 1.$

18. $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{2^{k+1}} - 1\right)(z-1)^k,\ |z-1| < 1.$

19. *Вказівка*. Позаяк $\left(\frac{z}{1+z^2}\right)^{/} = \frac{1-z^2}{(1+z^2)^2}$, то треба знайти степеневий ряд для функції $\frac{z}{1+z^2}$, а потім його почленно продиференціювати. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)z^{2k},\ |z| < 1.$

20. $z + \frac{z^3}{3} + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \cdots, |z| < \frac{\pi}{2}$

21. $e\left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{1}{5}z^4 + \ldots\right), |z| < \infty.$

22. $z - \frac{z^3}{2} + \frac{5}{24}z^5 - \ldots, |z| < \frac{\pi}{2}$

23. $z^2 + \frac{z^3}{2} - \frac{1}{12}z^4 + \ldots, |z| < 1.$

24. $1 + z^2 + \frac{1}{3}z^4 + \ldots, |z| < \infty$

25. $1 - z + \frac{z^2}{3} - \ldots, |z| < \infty$

5.4. Нулі аналітичної функції

Будь-яка точка a, для якої $f(a) = 0$, називається нулем функції $f(z)$. Інакше кажучи, нулі функції $f(z)$ – це корені рівняння $f(z) = 0$.

Нехай функція $f(z) \neq 0$ аналітична в точці $a \neq \infty$. Точка a називається нулем порядку (або кратності) k функції $f(z)$, якщо її степеневий ряд за степенями $(z-a)$ має вигляд

$$f(z) = c_k(z-a)^k + c_{k+1}(z-a)^{k+1}+\ldots;\ c_k \neq 0. \tag{5.24}$$

Якщо $k = 1$, то точка a називається простим нулем. Із формули

$$c_m = \frac{f^{(m)}(a)}{m!}\ (m = 0,1,2,\ldots;\ f^{(0)} = f;\ 0! = 1)$$

випливає: якщо a є нулем порядку k функції $f(z)$, то

$$f(a) = f'(a) = f''(a) =\ldots= f^{(k-1)}(a) = 0;\ f^{(k)}(a) \neq 0, \tag{5.25}$$

тобто порядком нуля є порядок наймолодшої похідної $f^{(k)}(a)$, відмінної від нуля.

Аби точка a була нулем порядку k аналітичної функції, **необхідно і достатньо**, щоб цю функцію можна було в деякому околі цієї точки подати у вигляді

$$f(z) = (z-a)^k\varphi(z), \tag{5.26}$$

де $\varphi(z)$ – аналітична функція в точці a і $\varphi(a) \neq 0$.

Якщо точка a є нулем порядку k для функції $f(z)$, то для функції $g(z) = [f(z)]^p$ $(p \geq 1)$ ця точка є нулем порядку pk.

Функція $f(z)$ називається аналітичною в точці $z = \infty$, якщо в деякому околі цієї точки її функцію можна зобразити у вигляді суми такого ряду:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{z^k} \tag{5.27}$$

Нехай функція $f(z)$ аналітична в точці $z = \infty$. Точка $a = \infty$ називається нулем порядку k функції $f(z)$, якщо в зображенні (5.27)

$$c_0 = c_1 =\ldots= c_{k-1} =0,\ c_k \neq 0. \tag{5.28}$$

Аби точка $a = \infty$ була нулем порядку k $(k \geq 1)$ функції $f(z)$, **необхідно і достатньо**, щоб ця функція могла бути зображена у вигляді

$$f(z) = z^{-k}\,\psi(z), \qquad (5.29)$$

де $\psi(z)$ – аналітична функція в точці $a = \infty$, а $\psi(\infty) \neq 0$.

Формула вигляду $f(z) \sim g(z)$ $(z \to a)$ називається асимптотичною, при цьому

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{g(z)} = 1.$$

Із рівностей (5.26) і (5.29) відповідно випливають асимптотичні формули:

$$f(z) \sim c_k (z - a)^k,\ c_k \neq 0\ (z \to a); \qquad (5.30)$$

$$f(z) \sim \mathrm{A} \cdot z^{k-1}, \mathrm{A} \neq 0\ \ (z \to \infty), \qquad (5.31)$$

які є **необхідними і достатніми умовами**, аби аналітична в точці a (скінченній або нескінченній) функція $f(z)$ мала в ній нуль порядку k.

Формули (5.30) і (5.31) можна вважати означенням нуля відповідно в точках $z = a$ і $z = \infty$.

Приклад 5.45. Знайти нулі функції $f(z) = \mathrm{sh} z$ та визначити їх порядок.

Розв'язання. Прирівнявши $f(z)$ до нуля і вважаючи $z = \alpha + i\beta$, одержимо

$$\mathrm{sh} z = 0 \Leftrightarrow (e^{z} - e^{-z})/2 = 0 \ \Leftrightarrow e^{z} = e^{-z} \ \Leftrightarrow e^{2z} = 1 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ e^{2(\alpha + i\beta)} = 1 \ \ \Leftrightarrow \ e^{2\alpha} \cdot e^{2(i\beta)} = 1.$$

Із останньої рівності видно, що одиниця дорівнює комплексному числу, у якого модуль дорівнює $e^{2\alpha}$, а аргумент – 2β . У рівних комплексних чисел модулі дорівнюють одне одному, аргументи можуть відрізнятися тільки на $2k\pi$. Тому

$$\begin{cases} e^{2\alpha} = 1; \\ 2\beta = 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0; \\ \beta = k\pi \end{cases} \Leftrightarrow z = k\pi i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Отже, функція $f(z) = \mathrm{sh} z$ має нулі лише в точках

$$z = k\pi i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Оскільки

$$f'(k\pi i) = \mathrm{ch}(k\pi i) = (-1)^k \neq 0,$$

то точки $z = k\pi i$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ є нулі першого порядку функції $f(z) = \mathrm{sh} z$.

Відповідь. $z = k\pi i$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ – нулі першого порядку.

Приклад 5.46. Знайти нулі функції

$$f(z) = z^5 - 3z^4 + 4z^3 - 4z^2 + 3z - 1$$

та визначити їх порядок.

Розв'язання. За допомогою безпосередньої перевірки переконуємося, що точки $z = 1$, $z = i, z = -i$ – нулі функції $f(z)$. Неважко показати, що її можна записати у вигляді

$$f(z) = (z-1)^3(z+i)(z-i).$$

З цього випливає, що $z = 1$ – нуль кратності 3, а $z = i, z = -i$ – прості нулі. Дійсно, покажемо, що $z = 1$ – нуль третього порядку. Для цього запишемо $f(z)$ у вигляді

$$f(z) = (z-1)^3\varphi(z),$$

де $\varphi(z) = z^2 + 1$ – аналітична функція в точці $z = 1$ і $\varphi(1) \neq 0$. Звідси і з формули (5.26) випливає справедливясть твердження. Аналогічно доводиться, що $z = i, z = -i$ – прості нулі.

Відповідь. $z = 1$ – нуль кратності 3, а $z = i$, $z = -i$ – прості нулі.

Приклад 5.47. Знайти нулі функції $f(z) = (e^z - i)\mathrm{ch}z$ і визначити їх порядок.

Розв'язання. Щоб знайти нулі функції $f(z)$, розв'яжемо рівняння

$$(e^z - i)\mathrm{ch}z = 0.$$

Воно рівносильне сукупності рівнянь

$$(e^z - i) = 0, \ \mathrm{ch}z = 0.$$

Знайдемо їх розв'язки:

$$e^z - i = 0 \Leftrightarrow e^z = i \Leftrightarrow z = \mathrm{Ln}i \Leftrightarrow z = \left(\frac{\pi}{2} + 2l\pi\right)i, (l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots);$$

$$\mathrm{ch}z = 0 \Leftrightarrow \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^z = -e^{-z} \Leftrightarrow e^{2z} = -1 \Leftrightarrow 2z = \mathrm{Ln}(-1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)i, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Оскільки розв'язки першого рівняння одночасно задовольняють і друге рівняння при $n = 2l$, то функція $f(z) = (e^z - i)\mathrm{ch}z$ має нулі в точках $= \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)i, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Далі

$$f'\left(\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)i\right) == e^{\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)i}\mathrm{ch}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)i + \left(e^{\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)i} - i\right)\mathrm{sh}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)i. \quad (5.32)$$

Скориставшись формулами

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z, \cos iz = \mathrm{ch}z, \mathrm{sh}z = -i\sin(iz),$$

знаходимо

$$e^{\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)i} = \cos\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right) = i(-1)^n,$$

$$\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)i = \cos\left[-\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)\right] = 0,$$

$$\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)i =- i\sin\left[-\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)\right] = i(-1)^n.$$

Підставляючи значення знайдених величин в (5.32), отримаємо

$$f'\left(\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)i\right) = ((-1)^n i - i)\cdot(-1)^n i = \begin{cases} 0, n = 2k, \\ -2, n = 2k+1, \end{cases}$$

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Звідси і з (5.25) випливає, що точки $z = \left(\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi\right)i,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ є простими нулями функції $f(z)$, а точки $z = \left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ – нулі більш високого порядку.

Позаяк

$$f''(z) = (2e^z - i)chz + 2e^z shz,$$

то

$$f''\left(\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i\right) =- 2 \neq 0,$$

і, отже, точки $z = \left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ – нулі другого порядку для функції $f(z) = (e^z - i)chz$.

Відповідь. $z = (\pi/2 + (2k+1)\pi)i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ – прості нулі, а $z = (\pi/2 + 2k\pi)i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ – нулі другого порядку.

Приклад 5.48. Знайти порядок нуля $z = 0$ функції

$$f(z) = e^{z^2} - 1 - z^2.$$

Розв'язання. В розкладі

$$e^w = 1 + w + \frac{w^2}{2!} + \ldots$$

врахуємо, що w = z^2, а тому отримаємо

$$f(z) = 1 + z^2 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \ldots - 1 - z^2 = z^4\left(\frac{1}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \ldots\right) \sim z^4\ (z \to 0).$$

Це означає, що точка $z = 0$ – нуль четвертого порядку функції $f(z) = e^{z^2} - 1 - z^2$.

Відповідь. Четвертий порядок.

Приклад 5.49. Знайти нулі багатозначної функції

$$f(z) = z + \sqrt{2-z}\ .$$

Розв'язання. Оскільки багатозначна функція $\sqrt{w}$ має дві вітки $+\sqrt{w}$ і $-\sqrt{w}$, то $z + \sqrt{2-z}$ і $z-\sqrt{2-z}$ – вітки заданої функції $f(z)$. Перемноживши ці вирази і прирівнявши їх добуток нулеві, одержимо рівняння

$$z^2 + z - 2 = 0.$$

Його корені $z = 1$ і $z = -2$ є нулями віток: точка $z = 1$ – нуль вітки $z-\sqrt{2-z}$, а точка $z = -2$ – нуль вітки $z + \sqrt{2-z}$.

Відповідь. $z = 1$ і $z = -2$.

Приклад 5.50. Визначити порядок нуля функції

$$f(z) = \frac{1+z^2}{z^3(1+z^4)} \cos\frac{1}{z}$$

в точці $z = \infty$.

Розв'язання. Позаяк

$$f(z) \sim \frac{z^2}{z^7} \cos\frac{1}{z} \sim \frac{1}{z^5}\ \ (z = \infty),$$

то точка $z = \infty$ є нулем п’ятого порядку.

Відповідь. нуль п’ятого порядку.

Вправи.

Знайти нулі та визначити їх порядок у таких функцій:

1. $f(z) = \operatorname{sh}\pi z.$

2. $f(z) = \operatorname{ch}\pi z.$

3. $f(z) = (z^2 - 2iz)\operatorname{sh}\pi z.$

4. $f(z) = (z^2 - 3z + 2)\sin\frac{\pi}{z}.$

5. $f(z) = (z^2 + 1)(1 + \operatorname{ch}\pi z).$

6. $f(z) = (z^2 - \pi^2)\sin^2(\pi z).$

7. $f(z) = z^5 - 8z^4 + 24z^3 - 34z^2 + 23z - 6.$

8. $f(z) = z^5 + 2z^3 + z - z^4 - 4z^2 - 2.$

9. $f(z) = z - \sqrt{4z-3}.$

10. $f(z) = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos 4z)}.$

11. $f(z) = \frac{4+z^2}{(1+z^2)^3}.$

12. $f(z)=\frac{\left(z^2-4\right)^5}{(z^3+i)^4}$.

13. $f(z)=(\text{ch}z-1)\text{sh}z$.

14. $f(z)=\text{sh}^2z\cdot\sin^2z$.

В прикладах **15 – 22** визначити порядок нуля в точці $z=0$ для таких функцій:

15. $f(z)=e^{z^2}-\text{ch}z$.

16. $f(z)=ze^z-\sin z$.

17. $f(z)=z^2\ln(1+z^3)$.

18. $f(z)=z^2(e^z-\cos z)$.

19. $f(z)=1+z+z^2-\frac{1}{1+z}$.

20. $f(z)=1+\ln(1+z)-\frac{1}{1+z}$.

21. $f(z)=(\text{ch}z+\cos z)z$.

22. $f(z)=z\,\text{ch}z$.

Відповіді: **1**. $z=ki, k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ – нулі першого порядку.

2. $z=\frac{1}{2}(2k+i), k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ – нулі першого порядку.

3. $z=0, z=2i$ – нулі другого порядку; $z=ki, k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ – нулі першого порядку.

4. $z=1, z=2$ – нулі другого порядку; $z=k, k=0,-1,-2,\pm3,\pm4,\ldots$ – нулі першого порядку.

5. $z=\pm i$ – нулі третього порядку; $z=(2k+1)i, k=1,\pm2,\pm3,\ldots$ – нулі другого порядку.

6. $z=\pm\pi$ – нулі третього порядку; $z=k\pi, k=0,\pm2,\pm3,\ldots$ – нулі другого порядку.

7. $z=1$ – нуль третього порядку; $z=2, z=3$ – нулі першого порядку.

8. $z=\pm i$– нулі другого порядку; $z=2$ – нуль першого порядку.

9. $z=1, z=3$ – нулі першого порядку для однієї із віток.

10. Одна з віток має нулі першого порядку в точках $z=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$; друга нулів не має.

11. $z=\pm2i$ – нулі першого порядку; $z=\infty$ – нуль четвертого порядку.

12. $z=\pm2$ – нулі п’ятого порядку; $z=\infty$ – нуль другого порядку.

13. $z = 2k\pi i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ – нулі другого порядку; $z = (2k + 1)\pi i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ – нулі першого порядку.

14. $z = 0$ – нуль четвертого порядку; $z = k\pi i, z = k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ – нулі другого порядку.

15. Другого порядку.
16. Другого порядку.
17. П’ятого порядку.
18. Третього порядку.
19. Третього порядку.
20. Другого порядку.
21. Третього порядку.
22. Третього порядку.

5.5. Ряд Лорана

Якщо функція $f(z)$ аналітична в кільці

$$r < |z - a| < R \quad (0 \leq r < R \leq \infty),$$

то вона єдиним способом зображується в ньому збіжним рядом

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} (z - a)^{-k}, \qquad (5.33)$$

де

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - a)^{k+1}} dz, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (5.34)$$

Тут Г – довільне коло з центром в точці a, що лежить в середині даного кільця. Вираз (5.33) називається р я д о м Л о р а н а для функції $f(z)$. Він є збіжним у точці z, якщо в ній збігаються ряди

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k = c_0 + c_1 (z - a) + c_2 (z - a)^2 + \ldots \qquad (5.35)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} (z - a)^{-k} = \frac{c_{-1}}{(z - a)} + \frac{c_{-2}}{(z - a)^2} + \frac{c_{-3}}{(z - a)^3} + \ldots \qquad (5.36)$$

Областю збіжності ряду Лорана є кругове кільце $r < |z - a| < R$. Воно може вироджуватись в круг або в круг з викинутим центром: $0 < |z - a| < R$, або в зовнішність круга з викинутою точкою $z = \infty$: $r < |z - a| < \infty$, а також в усю площину з двома викинутими точками $z = 0$ і $z = \infty$: $0 < |z - a| < \infty$. У випадку виродження кільця в круг $|z - a| < R$ ряд Лорана перетворюється в ряд Тейлора.

Вираз (5.35) називається правильною частиною ряду Лорана і є звичайним степеневим рядом, який збігається в крузі $|z-a|<R$ до деякої аналітичної функції $f_1(z)$.

Вираз (5.36) називається головною частиною ряду Лорана. Якщо в (5.36) замінити $(z-a)^{-1}=t$, то одержимо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}t^k$, який збігається для $|t|<\frac{1}{r}$. Тоді ряд (5.36) збігається при $|z-a|>r$ до деякої функції $f_2(z)$.

Відтак, якщо функція $f(z)$ аналітична в кільці $r<|z-a|<R$, то, використовуючи ряд Лорана, її можна подати як суму двох функцій $f_1(z)+f_2(z)$, де $f_1(z)$ аналітична в крузі $|z-a|<R$, а $f_2(z)$ є такою самою в області $|z-a|>r$.

При розкладанні конкретної функції в ряд Лорана недоцільно користуватись формулами (5.34) через їх неефективність. Зазвичай розклад тут тим чи іншим способом зводиться до розкладання в ряд Тейлора. Для цього функцію $f(z)$, що є аналітичною в кільці $r<|z-a|<R$, зображують у вигляді суми або добутку двох функцій $f_1(z)$ і $f_2(z)$, із яких одна аналітична в крузі $|z-a|<R$, а друга в області $|z-a|>r$. Розкладаючи функцію $f_1(z)$ в ряд Тейлора за степенями $(z-a)$, а функцію $f_2(z)$ з від'ємними показниками, знайдемо ряд Лорана для функції $f(z)$, аналітичної в кільці $r<|z-a|<R$.

В прикладах 69 – 75 розкласти функції в ряд Лорана в заданих кільцях.

Приклад 5.51.

$$f(z)=\frac{1}{z-1}, \qquad \sqrt{2}<|z-i|<\infty.$$

Розв'язання. Перетворимо вираз для функції таким чином:

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{(z-i)-(1-i)}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1-i}{z-i}}.$$

Використовуючи формулу для суми членів нескінченної спадної геометричної прогресії, знаходимо

$$\frac{1}{z-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-i)^k}{(z-i)^{k+1}}, \sqrt{2}<|z-i|<\infty.$$

Відповідь. $$\frac{1}{z-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-i)^k}{(z-i)^{k+1}},\sqrt{2}<|z-i|<\infty.$$

Приклад 5.52.

$$f(z)=\frac{z^3}{(z-1)^4}, \qquad 0<|z-1|<\infty.$$

Розв'язання. Розкладемо задану функцію на суму найпростіших дробів:

$$\frac{z^3}{(z-1)^4}=\frac{A}{(z-1)^4}+\frac{B}{(z-1)^3}+\frac{C}{(z-1)^2}+\frac{D}{z-1}.$$

Знайдемо *A*, *B*, *C*, *D* з огляду на те, що

$$z^3=A+B(z-1)+C(z-1)^2+D(z-1)^3.$$

Врахувавши послідовно, що $z=0, z=1$, та прирівнявши коефіцієнти при z^3 та z^2, одержимо систему рівнянь, розв'язуючи яку, знаходимо: $A = 1$, $B = 3$, $C = 3$, $D = 1$.

Таким чином, шуканий розклад має вигляд:

$$\frac{z^3}{(z-1)^4}=\frac{1}{(z-1)^4}+\frac{3}{(z-1)^3}+\frac{3}{(z-1)^2}+\frac{1}{z-1}.$$

Відповідь. $$\frac{z^3}{(z-1)^4}=\frac{1}{(z-1)^4}+\frac{3}{(z-1)^3}+\frac{3}{(z-1)^2}+\frac{1}{z-1}.$$

Приклад 5.53.

$$f(z)=\frac{2z-1}{z^2-z-2},$$

а) $|z|<1$; б) $1<|z|<2$; в) $2<|z|<\infty$.

Розв'язання. Розкладемо задану функцію на суму найпростіших дробів:

$$\frac{2z-1}{z^2-z-2}=\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-2}. \tag{5.37}$$

а) оскільки в області $|z|<1$ задана функція аналітична, то шуканий розклад буде рядом Тейлора за степенями z. Використовуючи розкладання (5.17), знаходимо

$$\frac{1}{z+1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k \ ,|z|<1,$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{-2(1-\frac{z}{2})}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2^{k+1}},|z|<2, \tag{5.38}$$

і

$$\frac{2z-1}{z^2-z-2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2^{k+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\left((-1)^k-\frac{1}{2^{k+1}}\right)z^k\ ,|z|<1.$$

б) Розкладемо функцію $\frac{1}{z+1}$ в області $|z|>1$ в ряд за степенями z з від'ємними показниками:

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z(1+\frac{1}{z})}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{z^{k+1}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{z^k}. \tag{5.39}$$

Враховуючи розклади (5.38) і (5.39), з (5.37) одержимо

$$\frac{2z-1}{z^2-z-2}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2^{k+1}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{z^k}\ ,1<|z|<2\ .$$

в) Розклад (5.39) має місце для $|z|>1$. Отже, він справедливий і для $|z|>2$. Ряд (5.38) для цієї області буде розбіжним. Знайдемо розклад функції $\frac{1}{z-2}$ за степенями z з від'ємними показниками:

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z(1-\frac{2}{z})}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{z^{k+1}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}}{z^k}\ ,|z|>2\ .$$

Відтак,

$$\frac{2z-1}{z^2-z-2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{z^k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}}{z^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}+2^{k-1}}{z^k},|z|>2.$$

Приклад 5.54.

$$f(z)=\frac{i}{z^2-3iz-2},$$

а) $3<|z+3i|<4$; б) $0<|z-i|<1$; в) $0<|z-2i|<1$.

Розв'язання. Для одержання потрібних розкладів зобразимо задану функцію $f(z)$ у вигляді суми найпростіших дробів:

$$\frac{i}{z^2-3iz-2}=\frac{1}{z-2i}-\frac{1}{z-i} \tag{5.40}$$

а) функція $f(z)$ має дві особливі точки $z = 2i$ і $z = i$, які лежать на межах кільця $3 < |z + 3i| < 4$. Отже, в самому кільці функція аналітична і її можна розкласти в ряд Лорана.

Функція $\frac{1}{z-2i}$ аналітична в крузі $|z + 3i| < 4$. Її можна розкласти в ряд Тейлора. Маємо

$$\frac{1}{z-2i} = \frac{1}{z+2i-4i} = \frac{1}{-4i(1-\frac{z+2i}{4i})} =-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z+2i)^k}{(4i)^{k+1}}, |z+3i| < 4.$$

Дріб $\frac{1}{z-i}$ за кругом $|z + 2i| \le 3$ є аналітичною функцією і розкладається в ряд за степенями $z + 2i$ з від'ємними показниками:

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{(z+2i)(1-\frac{3i}{z+2i})} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(3i)^k}{(z+2i)^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(3i)^{k-1}}{(z+2i)^k}.$$

Таким чином, для $3 < |z + 3i| < 4$

$$\frac{i}{z^2-3iz-2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(3i)^{k-1}}{(z+2i)^k} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z+2i)^k}{(4i)^{k+1}}.$$

б) Позаяк перший доданок в (5.40) в області $|z-i| < 1$ є аналітичною функцією, то, розклавши його в степеневий ряд за степенями $z-i$, знайдемо

$$\frac{1}{z-2i} = \frac{1}{(z-i)-i} = \frac{1}{-i(1-\frac{z-i}{i})} =-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-i)^k}{i^{k+1}}.$$

Другий доданок в (5.40) уже є членом ряду Лорана. Тому для $0 < |z-i| < 1$ остаточно маємо

$$\frac{i}{z^2-3iz-2} =-\frac{1}{z-i} =-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-i)^k}{i^{k+1}}.$$

в) Оскільки для $|z-2i| < 1$,

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{(z-2i)+i} = \frac{1}{i(1+\frac{z-2i}{i})} =-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-2i)^k}{i^{k+1}}.$$

Приклад 5.55.

$$f(z) = \frac{36}{(z^2-9)^2},$$

а) $|z| < 3$; б) $0 < |z+3| < 6$; в) $2 < |z-1| < 4$.

Розв'язання. а) В області $|z| < 3$ функція $f(z)$ аналітична і її ряд Лорана є рядом Тейлора. Розкладемо $f(z)$ в ряд Тейлора.

При $|z| < 3$

$$\frac{1}{z^2-9} = \frac{1}{-9\left(1-\frac{z^2}{9}\right)} =- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{9^{k+1}}.$$

Диференціюючи цю рівність, знаходимо

$$\frac{z}{(z^2-9)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{z^{2k-1}}{9^{k+1}}.$$

Звідси

$$\frac{36}{(z^2-9)^2} = \frac{4}{9}\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\frac{z^{2k}}{9^k}.$$

б) Розкладемо задану функцію на суму найпростіших дробів:

$$\frac{36}{(z^2-9)^2} = \frac{1}{(z-3)^2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z+3} + \frac{1}{(z+3)^2} \qquad (5.41)$$

Функція $\frac{1}{z-3}$ аналітична в крузі $|z+3| < 6$. Знайдемо її розклад в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{(z+3)-6} = \frac{1}{-6\left(1-\frac{z+3}{6}\right)} =- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+3)^k}{6^{k+1}}.$$

Диференціюючи останній за z, одержимо

$$\frac{1}{(z-3)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\frac{(z+3)^k}{6^{k+2}}.$$

Оскільки два останніх доданки в (5.41) уже є членами ряду Лорана, то в області $0 < |z+3| < 6$

$$\frac{36}{(z^2-9)^2} = \frac{1}{(z+3)^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z+3} + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z+3)^k}{6^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\frac{(z+3)^k}{6^{k+1}} =$$

$$= \frac{1}{(z+3)^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z+3} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+3)\frac{(z+3)^k}{6^{k+2}}.$$

в) Функція $\frac{1}{z+3}$ аналітична в крузі $|z-1| < 4$ і розкладається в ряд Тейлора за степенями $(z-1)$ з від'ємними показниками:

$$\frac{1}{z+3}=\frac{1}{(z-1)+4}=\frac{1}{4\left(1+\frac{z-1}{4}\right)}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-1)^k}{4^{k+1}},|z-1|<4. \qquad (5.42)$$

Функція $\frac{1}{z-3}$ аналітична поза кругом $|z-1|\leq 2$ і розкладається в ряд за степенями $z-1$ з від'ємними показниками:

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{(z-1)-2}=\frac{1}{(z-1)\left(1-\frac{2}{z-1}\right)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{(z-1)^{k+1}}=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}}{(z-1)^k},|z-1|>2. \qquad (5.43)$$

Оскільки степеневі ряди в крузі збіжності можна почленно диференціювати, то з рівностей (5.42) і (5.43) отримаємо, продиференціювавши їх:

$$\frac{1}{(z+3)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)\frac{(z-1)^k}{4^{k+2}},\ |z-1|<4.$$

$$\frac{1}{(z-3)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{2^{k-1}}{(z-1)^{k+1}},|z-1|>2.$$

Таким чином, в кільці $2<|z-1|<4$ маємо

$$\frac{36}{(z^2-9)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{2^{k-1}}{(z-1)^{k+1}}-\frac{1}{3}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}}{(z-1)^k}+\frac{1}{3}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-1)^k}{4^{k+1}}$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)\frac{(z-1)^k}{4^{k+2}}=$$
$$=\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(3k-5)2^{k-1}}{(z-1)^k}+\frac{1}{48}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(3k+z)}{4^{k+1}}(z-1)^k.$$

Приклад 5.56.

$$f(z)=z^3\text{sh}z,\ \ 0<|z|<\infty.$$

Розв'язання. Розклад (5.15) має місце для будь-якого комплексного числа. Замінюючи в ньому z на $\frac{1}{z}$, одержимо:

$$z^3\text{sh}z = z^3\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{5!\,z^5} + \ldots\right) = \frac{1}{z} + z^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+3)!\,z^{2k}}.$$

Цей розклад справедливий для будь-якого $z \neq 0$, тобто для $0 < |z| < \infty$.

Приклад 5.57.

$$f(z) = \sin\frac{z+2}{z+1}, \qquad 0 < |z+1| < \infty.$$

Розв'язання. Виконавши відповідним чином перетворення виразу для функції і використавши ряди Тейлора для $sinz$ і $\cos z$, маємо:

$$\sin\frac{z+2}{z+1} = \sin\left(1 + \frac{1}{z+1}\right) = \sin\frac{1}{z+1}\cos 1 + \sin 1\cos\frac{1}{z+1} =$$

$$= \cos 1\left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{3!}\frac{1}{(z+1)^3} + \ldots\right) + \sin 1\left(1 - \frac{1}{2!}\frac{1}{(z+1)^2} + \ldots\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(1 + k\pi/2)}{k!\,(z+1)^k}.$$

Позаяк функція $\sin\frac{z+2}{z+1}$ аналітична на всій комплексній площині, включаючи точку $z = -1$, то отриманий розклад справедливий для $0 < |z+1| < \infty$.

Відповідь. $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(1 + k\pi/2)}{k!\,(z+1)^k}$

Приклад 5.58. З'ясувати, чи має багатозначна функція

$$f(z) = \sqrt{z(z+1)}$$

однозначні вітки, що допускають розкладання в ряд Лорана в таких областях: а) $0 < |z| < 1$, б) $1 < |z| < \infty$.

Розв'язання. а) Функція $\sqrt{z(z+1)}$ в кільці $0 < |z| < 1$ особливих точок на має, але в ньому можна вказати замкнену жорданову криву, наприклад $|z| = \frac{1}{z}$, в середині якої буде розташована точка розгалуження $z = 0$ функції $f(z)$. Обхід по цій кривій приведе до неперервної заміни однієї вітки багатозначної функції іншою. Тому жодна вітка заданої функції не є однозначною. Якщо це так, то вона не є аналітичною і, отже, в ряд Лорана розкласти її не можна.

б) в цьому випадку будь-яка замкнена жорданова крива Г, розташована в кільці $1 < |z| < \infty$, є такаю, що в області, обмеженій нею, існують або обидві точки розгалуження даної функції $z = 0$ і $z = -1$, або не має жодної з них. Тому обхід по такій кривій або двічі змінює знак радикала на протилежний, або радикал зовсім не змінює знак, тобто вихідна вітка залишається без змін і буде однозначною. Тому кожну вітку функції $\sqrt{z(z+1)}$ в кільці $1 < |z| < \infty$ можна розкласти в ряд Лорана. Використовуючи ряд Тейлора для функції $(1+z)^{\alpha}$, для $1 < |z| < \infty$ одержимо

$$\sqrt{z(z+1)} = \pm z(1+\frac{1}{z})^{\frac{1}{2}} = \pm z\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{z}+\frac{1}{8}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{16}\frac{1}{z^3}+\ldots\right) =$$

$$= \pm\left(z+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\frac{1}{z^1}+\frac{1}{16}\frac{1}{z^2}+\ldots\right).$$

Відповідь. $\sqrt{z(z+1)} = \pm\left(z+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\frac{1}{z^1}+\frac{1}{16}\frac{1}{z^2}+\ldots\right).$

Вправи.

Розкласти кожну з заданих функцій в ряд Лорана в указаних кільцях:

1. $f(z) = \frac{1}{z^2-25}$, $5 < |z| < \infty$.

2. $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}$, $2 < |z| < \infty$.

3. $f(z) = \frac{z^3}{(z-2)^3}$, $0 < |z-1| < \infty$.

4. $f(z) = \frac{z}{(z-a)^2}$, $0 < |z-a| < \infty$.

5. $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, а) $2 < |z| < \infty$; б) $1 < |z| < 2$.

6. $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$, а) $3 < |z| < \infty$; б) $1 < |z| < 3$.

7. $f(z) = \frac{z^2+2z+3}{(z^2-1)(z+2)}$, $1 < |z| < 2$.

8. $f(z) = \frac{z}{z^2-5z+6}$, $2 < |z| < 3$.

9. $f(z)=\frac{z}{z^2-6z+8}$, $2<|z|<4$.

10. $f(z)=z^2 cos\frac{\pi(z-1)}{z}, 0<|z|<\infty$.

11. $f(z)=\frac{1}{(z^2-4)(z^2-9)}$, а) $0<|z|<2$; б) $2<|z|<3$..

12. $f(z)=\frac{2z+3}{z^2+3z+2}$, а) $1<|z|<2$; б) $0<|z+1|<1$; в) $1<|z+2|<\infty$.

13. $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}, 0<|z|<\infty$.

14. $f(z)=z^5\text{ch}z, 0<|z|<\infty$.

Відповіді:

1. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^{2k-2}}{z^{2k}}$.

2. $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^{k-2}}{z^k}$.

3. $\frac{1}{(z-1)^3}+\frac{3}{(z-1)^2}+\frac{3}{(z-1)}+1$.

4. $\frac{a}{(z-a)^2}+\frac{1}{(z-a)^4}$.

5. а) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k-1}{z^{k+1}}$;

б) $-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z^k}{2^{k+1}}+\frac{1}{z^{k+1}}\right)$.

6. а) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^{k-1}-1}{2}\cdot\frac{1}{z^{k+1}}$;

б) $-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z^k}{3^{k+1}}+\frac{1}{z^{k+1}}\right)$.

7. $2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z^{k+1}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2^{k+1}}$.

8. $-\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z^{k+1}}{3^k}+\frac{2^k}{z^k}\right)$.

9. $-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z^k}{4^k}+\frac{2^{k+1}}{z^{k+1}}\right)$.

10. $\frac{\pi^2}{2}-z^2+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\pi^{2k+2}}{(2k+2)!}z^{2k+2}$.

11. а) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^{2k+2}-2^{2k+2}}{5}\cdot\frac{z^{2k}}{6^{2k+2}}$;

б) $-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^{2k}-2^{2k}}{5}\cdot\frac{1}{z^{2k}}$.

12. а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z^k}+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^k}{2^{k+1}}$;

б) $\frac{1}{z+1}+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z+1)^k$;

в) $\frac{2}{z+2}+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(z+2)^k}$.

13. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{z^{k-3}}$.

14. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\cdot\frac{1}{z^{2k+5}}$.

5.6. Ізольовані особливі точки

Точка α називається і з о л ь о в а н о ю   о с о б л и в о ю   т о ч к о ю однозначної функції $f(z)$, якщо існує такий її окіл $|z-\alpha|<R$, в якому $f(z)$ є аналітичною всюди, крім точки $z=\alpha$.

За теоремою Лорана функція $f(z)$, що є аналітичною в області $0<|z-a|<R$, розкладається в ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(z-a)^k. \qquad (5.44)$$

За основу класифікації ізольованих особливих точок однозначної функції $f(z)$ будемо вважати вигляд ряду Лорана цієї функції в околі вказаної точки.

Ізольована особлива точка однозначної аналітичної функції називається:

1) У с у в н о ю, якщо в розкладі (5.44) $c_k=0$ для $k=-1,-2,\ldots$;

2) П о л ю с о м порядку (або кратності) $m\geq 1$, якщо в розкладі (5.44) $c_{-m}\neq 0$ і $c_k=0$ для $k=-(m+1),-(m+2),\ldots$; при цьому полюс називається простим, якщо $m=1$, і кратним, якщо $m>1$;

3) Істотно особливою точкою, якщо в розкладі (5.44) серед коефіцієнтів c_k, $k =-1,-2,\dots$ є нескінченна кількість відмінних від нуля.

Мають місце теореми, що описують характер особливих точок.

Теорема 1. Для того щоб ізольована особлива точка α однозначної аналітичної функції $f(z)$ була усувною, необхідно і достатньо, щоб функція $f(z)$ в цій точці мала скінченну границю.

Теорема 2. Для того щоб ізольована особлива точка α однозначної аналітичної функції $f(z)$ була полюсом, необхідно і достатньо, щоб

$$\lim_{z\to\alpha} f(z) = \infty.$$

Теорема 3. Для того щоб ізольована особлива точка α однозначної аналітичної функції $f(z)$ була полюсом порядку m, необхідно і достатньо, щоб точка α була нулем порядку m для функції $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$.

Із теореми 3 випливає

Твердження 1. Нехай функції $f_1(z)$ і $f_2(z)$ аналітичні в точці α і мають в ній нулі порядку k та m відповідно. Тоді точка α для функції $\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ при $m > k$ – полюс $(m-k)$-го порядку і усувна особлива точка при $m \le k$.

Теорема 4. Для того щоб ізольована особлива точка α однозначної аналітичної функції $f(z)$ була істотно особливою, необхідно і достатньо, щоб у цій точці не існувало ні скінченної, ні нескінченної границі функції $f(z)$ $m > k$.

Теорема Сохоцького. Якщо α – істотно особлива точка функції $f(z)$, то для будь-якого комплексного числа A (скінченного чи нескінченного) існує послідовність точок z_k, що збігається до точки α і така, при якій виконується умова:

$$\lim_{k\to\infty} f(z_k) = A.$$

Теорема Пікара (велика). Якщо α – істотно особлива точка функції $f(z)$, то для кожного числа $A\neq\infty$, за виключенням, можливо, одного значення $A = A_0$, існує нескінченна послідовність різних коренів рівняння $f(z) = A$, що збігається до точки α.

Приклад 5.59. Знайти ізольовані особливі точки функції:

$$f(z)=\frac{1}{sh\dfrac{i}{z-1}}.$$

Розв'язання. Вона не буде аналітичною в точці $z=1$ і в точках, в яких функція $sh\frac{i}{z-1}$ дорівнює нулеві. Оскільки функція shw має нулі лише в точках $w_k=k\pi i$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$, то функція $sh\frac{i}{z-1}$ матиме нулі в таких точках z, для яких $\frac{i}{z-1}=k\pi i$, тобто в точках $z_k=1+\frac{i}{k\pi}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$. Для будь-якої точки z_k знайдеться таке число R_k>0, при якому в крузі з виколеним центром $(0<|z-z_k|<R_k)$ функція $f(z)$ буде аналітичною. Отже точки z_k – ізольовані особливі. Позаяк в будь-якому околі точки $z=1$ – особливі точки z_k, то точка $z=1$ не є ізольованою особливою точкою функції $f(z)$.

Відповідь. $z_k=1+\dfrac{i}{k\pi}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

Приклад 5.60. З'ясувати характер особливої точки $z=2$ функції

$$f(z)=\ z^2e^{\frac{1}{z-2}}.$$

Розв'язання. Спочатку розкладемо z^2 за степенями $z-2$:

$z^2=[(z-2)+2]^2=(z-2)^2+4(z-2)+4.$

Далі, використовуючи, що

$$e^w=1+\frac{w}{1!}+\frac{w^2}{2!}+\ldots,$$

та замінюючи w на $\frac{1}{z-2}$, одержуємо розклад функції $f(z)$ у ряд Лорана в околі точки $z=2$:

$$f(z)=[(z-2)^2+4(z-2)+4]\left[1+\frac{1}{z-2}+\frac{1}{2!\,(z-2)^2}+\frac{1}{3!\,(z-2)^3}+\cdots\right]=$$

$$=\frac{17}{2}+\frac{37}{6}\frac{1}{z-2}+\frac{65}{24}\frac{1}{(z-2)^2}+\ldots$$

Оскільки в цьому розкладі нескінченна кількість членів з від'ємними показниками степенів $z-2$, то точка $z=2$ є істотно особливою для функції $f(z)$.

Відповідь. Істотно особлива точка.

Приклад 5.61. Довести, що точка $z=0$ – істотно особлива для функції

$$f(z)=e^{\cos\frac{1}{z}}.$$

Розв'язання. Введемо в розгляд такі дві послідовності точок:

$$z_k = \frac{1}{2k\pi} \to 0, z_k' = \frac{2}{\pi + 2k\pi} \to 0.$$

Тоді

$$f(z_k) = e^{\cos 2k\pi} = e, f(z_k') = e^{\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)} = 1,$$

і, отже,

$$\lim_{k\to\infty} f(z_k) = e, \qquad \lim_{k\to\infty} f(z_k') = 1.$$

Позаяк для двох послідовностей $\{z_k\}$ і $\{z_k'\}$, що збігаються до 0, відповідні послідовності функцій $\{f(z_k)\}$ і $\{f(z_k')\}$ мають різні границі, то в точці $z = 0$ функція $f(z)$ не має границі (ні скінченної, ні нескінченної). Отже, $z = 0$ є істотно особливою точкою функції $f(z)$.

Зауваження. По суті, також показано, що $z = \infty$ – істотно особлива точка для функції $\cos z$.

Приклад 5.62. Знайти ізольовані особливі точки і визначити їх характер для функції

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{(z-1)z^5}.$$

Розв'язання. Функція $f(z)$ є часткою від ділення двох функцій $f_1(z) = 1 - \cos z$ та $f_2(z) = (z-1)z^5$, які є аналітичними на всій комплексній площині. Тому особливими точками функції $f(z)$ можуть бути лише ті, в яких $f_2(z) = 0$. Їх дві: $z = 1$ – простий нуль, $z = 0$ – нуль п'ятого порядку. $f_1(1) \neq 0$, а $z = 0$ – нуль другого порядку для функції $f_1(z)$, оскільки

$f_1(0) = 1 - \cos 0 = 0$; $f_1{}'(z) = \sin z|_{z=0} = 0$, $f_1{}''(z) = \cos z|_{z=0} = 1 \neq 0$.

Тому точка $z = 1$ – простий полюс функції $f(z)$, а точка $z = 0$ – полюс третього порядку.

Відповідь. $z = 1$ – простий полюс функції $f(z)$, $z = 0$ – полюс третього порядку.

Приклад 5.63. З'ясувати характер особливої точки $z = 0$ для функції

$$f(z) = \frac{(e^{z^2} - 1)^2}{z^2 \sin^2 z}.$$

Розв'язання. У випадку, коли $z \to 0$, маємо

$$e^{z^2}-1=1+\frac{z^2}{1!}+\frac{z^4}{2!}+\frac{z^6}{3!}+\ldots+(-1)=\frac{z^2}{1!}+\frac{z^4}{2!}+\frac{z^6}{3!}+\ldots\sim z^2,$$
$$(e^{z^2}-1)^2\sim z^4, \sin z\sim z,\ z^2\sin^2 z\ \sim z^4.$$

Звідси одержуємо $\lim_{z\to 0} f(z)=1$, отже, $z=0$ – усувна особлива точка.

Відповідь. Усувна особлива точка.

Приклад 5.64. Проілюструвати справедливість теореми Сохоцького на прикладі функції

$$f(z)=e^{\frac{1}{z-i}}.$$

Розв'язання. $f(z)$ має єдину особливу точку $z=i$. Ця точка істотно особлива, оскільки в ряді Лорана

$$e^{\frac{1}{z-i}}=1+\frac{1}{z-i}+\frac{1}{2!\,(z-i)^2}+\ldots,\qquad (0<|z-i|<\infty)$$

є нескінченна множина членів з від'ємними показниками степеня $z-i$.

Нехай A = ∞. Тоді для послідовності $z_\mathrm{n}=i+\frac{1}{\mathrm{n}}\to i$ $\lim_{\mathrm{n}\to\infty} f(z_\mathrm{n})=\infty$.

Нехай A = 0. Тоді для послідовності $z_\mathrm{n}=i-\frac{1}{\mathrm{n}}\to i$ $\lim_{\mathrm{n}\to\infty} f(z_\mathrm{n})=\lim_{\mathrm{n}\to\infty} e^{-\mathrm{n}}=0$.

Нехай A ≠ 0, A ≠ ∞. Будемо підбирати z_n, розв'язуючи рівняння

$$e^{\frac{1}{z-i}}=\mathrm{A}.$$

Маємо $\frac{1}{z-i}=\mathrm{Ln}A$, звідки

$$z=\ i+\frac{1}{LnA}=i+\frac{1}{\ln A+2\pi \mathrm{n}i}, \mathrm{n}=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

Нехай

$$z_\mathrm{n}=\ i+\frac{1}{\ln A+2\pi \mathrm{n}i}, \mathrm{n}=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

Тоді

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} z_\mathrm{n}=i,\ \ f(z_\mathrm{n})\ =\mathrm{A},\ \ \lim_{\mathrm{n}\to\infty} f(z_\mathrm{n})=\mathrm{A}.$$

Відтак, на прикладі функції $f(z)=e^{\frac{1}{z-i}}$ в точці $z=i$ продемонстровано виконання теореми Сохоцького.

Приклад 5.65. Чи є точка $z=1$ істотно особливою для суми ряду

$$\ldots+\frac{1}{(z-1)^\mathrm{n}}+\frac{1}{(z-1)^{\mathrm{n}-1}}+\ldots+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{3}+\frac{z-1}{3^2}+\ldots+\frac{(z-1)^\mathrm{n}}{3^{\mathrm{n}+1}}+\ldots?$$

Розв'язання. В даному розкладі є нескінченна множина членів з від'ємними показниками степенів $z-1$, але цього не досить, аби зробити висновок, що $z = 1$ – істотно особлива для суми цього ряду. Треба ще дослідити, чи буде сума ряду аналітичною функцією в деякому околі точки $z = 1$. Ряд є сумою двох рядів: $\sum_{n=1}^{\infty}(z-1)^{-n}$ і $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}$. Використовуючи формулу суми нескінченно спадної геометричної прогресії, знайдемо суми цих рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(z-1)^{-n} = \frac{\frac{1}{z-1}}{1-\frac{1}{z-1}} = \frac{1}{z-2} \qquad \text{для } |z-1| > 1,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{3^{n+1}} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{z-1}{3}} = \frac{1}{4-z} \qquad \text{для } |z-1| < 3.$$

Звідси випливає, що наш ряд буде збіжним у кільці $1 < |z-1| < 3$, яке не є колом точки $z = 1$, і його сума

$$\frac{1}{z-2} + \frac{1}{4-z} = -\frac{1}{z^2-6z+8}$$

має в усій комплексній площині тільки дві ізольовані особливі точки $z = 2$ і $z = 4$. Отже, $z = 1$ – точка аналітичності суми даного ряду і, звичайно, не може бути істотно особливою.

Відповідь. Ні.

Приклад 5.66. Знайти особливі точки і з'ясувати їх характер для функції

$$f(z) = \frac{z^2-2iz+3}{(z^2+1)^2(z^2+9)^2}.$$

Розв'язання. Точки $z = \pm 3i$, $z = \pm i$ – нулі другого порядку знаменника даної функції. Нулями (першого порядку) чисельника з цих точок є $z = 3i$ та $z = -i$. Тому точки $z = 3i$ та $z = -i$ – прості полюси, а $z = -3i$ та $z = i$ – полюси другого порядку.

Відповідь. $z = 3i$ та $z = -i$ – прості полюси; $z = -3i$ та $z = i$ – полюси другого порядку.

Приклад 5.67. Дослідити поведінку кожної з однозначних віток багатозначної функції

$$f(z) = \frac{z+1}{-2+z-2\sqrt{z-3}}$$

в точці $z=4$. З'ясувати: чи ця точка правильна, чи особлива для відповідної вітки. В останньому випадку вказати її характер.

Розв'язання. Задана функція має дві вітки

$$\frac{z+1}{-2+z+2\sqrt{z-3}} \text{ і } \frac{z+1}{-2+z-2\sqrt{z-3}}.$$

Для першої вітки точка $z=4$ є правильною, оскільки в ній чисельник та знаменник є аналітичними функціями, а знаменник відмінний від нуля.

Дослідимо характер точки $z=4$ для другої вітки. Вважаючи, що

$$\varphi(z)=-2+z-2\sqrt{z-3},$$

знаходимо $\varphi(4)=0$; $\varphi'(z)=1-\frac{1}{\sqrt{z-3}}$; $\varphi'(4)=0$; $\varphi''(4)\neq 0$.

Звідси маємо, що точка $z=4$ є нулем другого порядку для функції $\varphi(z)$. Ця точка не є нулем для чисельника $z+1$, і тому точка $z=4$ – полюс другого порядку для вітки $\frac{z+1}{-2+z-2\sqrt{z-3}}$.

Відповідь. $z=4$ є правильною для вітки $\frac{z+1}{-2+z+2\sqrt{z-3}}$ і полюсом другого порядку для вітки $\frac{z+1}{-2+z-2\sqrt{z-3}}$.

Вправи.

Знайти особливі точки функцій та вияснити їх характер:

1. $f(z)=\frac{z^2+3}{(z-1)(z-2)^2}$.

2. $f(z)=\frac{z+1}{\sin^2 z}$.

3. $f(z)=\frac{z^2-4iz-3}{(z^2+1)(z-3i)}$.

4. $f(z)=\frac{z^2-3iz-2}{(z^2+4)(z-i)^2}$

5. $f(z)=\frac{e^{z-1}-1}{(z-1)}$.

6. $f(z)=\frac{\sin z(1-\cos z)}{z^3}$.

7. $f(z)=\frac{z^2+1}{sh^2\pi z}$.

8. $f(z)=\frac{z(z^2-1)}{(1-\cos 2\pi z)}$.

9. $f(z)=\frac{\operatorname{ch} iz-1}{z^2(z^2+\pi^2)}$.

10. $f(z)=\frac{e^{iz}-1}{z^2\sin z}$.

11. $f(z)=\frac{1-\cos\pi z}{(z^2-1)^3(z-2)^2}$.

12. $f(z)=\frac{e^{z^2}-1}{z^5}$.

13. $f(z)=\frac{\sin z^2-z^2}{z^6}$.

14. $f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z-2}}$.

15. $f(z)=ze^{\frac{1}{z-i}}$.

16. $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z+2}}$.

17. $f(z)=e^{\sin\frac{1}{z-2i}}$.

18. $f(z)=\cos\frac{1}{z+i}$.

В прикладах **19, 20** дослідити поведінку кожної з однозначних віток заданої багатозначної функції в даних точках (визначити, чи є ця точка правильною для кожної з віток, чи особливою, вказати характер особливості):

19. $f(z) = \frac{z+i}{2+z-2\sqrt{2z}}, z = 2.$

20. $f(z) = \frac{z+2}{(i+\sqrt{z})\sin(i-\sqrt{z})}, z = -1.$

Відповіді: **1**. $z = 1$ – простий полюс, $z = 2$ – полюс другого порядку.

2. $z = k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ – полюси другого порядку.

3. $z = i, z = 3i$ – усувні особливі точки; $z = -i$ – простий полюс.

4. $z = 2i$ – усувна особлива точка; $z = -2i, z = i$ – прості полюси.

5. $z = i$ – усувна особлива точка.

6. $z = 0$ – усувна особлива точка.

7. $z = i, z = -i$ – прості полюси; $z = ki, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ – полюси другого порядку.

8. $z = 0, z = 1, z = -1$ – прості полюси; $z = k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ – полюси другого порядку.

9. $z = 0$ – усувна особлива точка; $z = \pm i\pi$ – прості полюси.

10. $z = 2k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ – усувні особливі точки; $z = (2k + 1)\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ – прості полюси; $z = 0$ – полюс другого порядку.

11. $z = 2$ – усувна особлива точка; $z = 1, z = -1$ – полюси третього порядку.

12. $z = 0$ – полюс третього порядку.

13. $z = 0$ – полюс другого порядку.

14. $z = 2 + \frac{1}{k\pi}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ – полюси другого порядку; $z = 2$ – гранична точка для полюсів.

15. $z = i$ – істотно особлива точка.

16. $z = -2$ – істотно особлива точка.

17. $z = 2i$ – істотно особлива точка.

18. $z = -i$ – істотно особлива точка.

19. Для однієї вітки – правильна точка, для другої – полюс другого порядку.

20. Для обох віток простий полюс.

5.7. Нескінченість як особлива точка аналітичної функції

Нагадаємо, що околом нескінченно віддаленої точки називається зовнішність будь-якого круга $|z| \leq R$ з центром на початку координат і з радіусом $R > 0$.

Нескінченно віддалена точка є ізольованою особливою для функції $f(z)$, якщо існує такий окіл нескінченно віддаленої точки, в якому функція $f(z)$ аналітична всюди, за винятком точки $z = \infty$.

Нехай $z = \infty$ – ізольована особлива точка функції $f(z)$. Перетворення $w = \frac{1}{z}$ відображає окіл точки $z = \infty$ в окілі точки $w = 0$. Тоді функція $\varphi(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$ аналітична в усіх точках околу нуля $|w| < \frac{1}{R}$ за виключенням самої точки $w = 0$. Таким чином, вивчення поведінки функції $f(z)$ в околі точки $z = \infty$ зводиться до дослідження поведінки функції $\varphi(w)$ в околі точки $w = 0$. Тому природно визначити тип особливої точки $z = \infty$ для функції $f(z)$ у відповідності з типом особливої точки $w = 0$ для функції $\varphi(w)$. Оскільки функція $\varphi(w)$ аналітична в області $0 < |w| < \frac{1}{R}$, то її можна розкласти в ряд Лорана в околі точки $w = 0$:

$$\varphi(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} w^{-k}.$$

Після заміни змінної $w = \frac{1}{z}$ одержимо лоранівський розклад функції $f(z)$ в околі точки $z = \infty$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{-k} z^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{-k}.$$

Кажуть, що $z = \infty$ є усувною особливою точкою, полюсом або істотно особливою точкою для функції $f(z)$, якщо $w = 0$ є відповідно усувною особливою точкою, полюсом або істотно особливою точкою для функції $\varphi(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$.

Якщо в розкладі (5.44) аналітичної функції в ряд Лорана в околі нескінченно віддаленої точки множина відмінних від нуля коефіцієнтів при степенях з додатними показниками степенів z порожня, скінченна, нескінченна, то точка $z=\infty$ є відповідно усувною особливою точкою, полюсом, істотно особливою точкою функції $f(z)$.

Ряди $\sum_{k=0}^{\infty} c_{-k} z^k$ та $\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{-k}$ в (5.44) називаються відповідно головною та правильною частинами лоранівського розкладу функції $f(z)$ в околі точки $z=\infty$.

Із означення усувної нескінченно віддаленої особливої точки, полюса порядку m та істотно особливої точки випливає можливість перенесення теорем, які характеризують поведінку аналітичної функції в околі ізольованої особливої точки на випадок нескінченно віддаленої точки. Наведемо деякі з них.

Теорема 5. Для того щоб ізольована особлива нескінченно віддалена точка аналітичної функції $f(z)$ була 1) усувною, 2) полюсом, 3) істотно особливою, необхідно і достатньо, щоб відповідно:

1) існувала скінченна границя $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$;
2) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$;
3) не існувало ні скінченної, ні нескінченної границі функції при $z\to\infty$.

Теорема 6. Для того щоб точка $z=\infty$ була полюсом функції $f(z)$, необхідно і достатньо, щоб вираз для неї можна було подати у вигляді

$$f(z)=z^m g(z),$$

де $g(z)$ – функція, що є аналітичною в точці $z=\infty$, $g(\infty)\neq 0, m\geq 1$ – ціле додатне число (m – порядок полюса $z=\infty$ функції).

Звідси випливає, що ізольована особлива точка $z=\infty$ є полюсом порядку m лише тоді, коли має місце асимптотична формула:

$$f(z)\sim B\cdot z^m, B\neq 0\ (z\to\infty).$$

Приклад 5.68. Чи є точка $z=\infty$ ізольованою особливою точкою для функції:

а) $f(z)=\dfrac{1}{\text{sh}\pi z}$; б) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2+\pi^2}$?

Розв'язання. а) Скінченними особливими точками функції $f(z)$ можуть бути лише нулі функції $\text{sh}\pi z$, тобто точки $z=ki$ $(k=0,\pm1,\pm2,\dots)$. Оскільки в будь-якому околі точки $z=\infty$ є нулі функції $sh\pi z$, то $z=\infty$ не є ізольованою особливою точкою.

б) Скінченними особливими точками для функції $f(z)$ є корені рівняння $z^2+\pi^2=0$, тобто точки $z=\pm\pi i$. Отже, область $|z|>\pi$ особливих скінченних точок не містить і є окіл нескінченно віддаленої точки. Тому $z=\infty$ – ізольована особлива точка даної функції.

Відповідь. а) Ні. б) Так.

В наведених нижче прикладах визначити характер особливої точки $z=\infty$.

Приклад 5.69.

$$f(z)=\frac{(z^2+3)^5}{z^{10}+12z+5}.$$

Розв'язання. Оскільки при $z\to\infty$ $(z^2+3)^5\sim z^{10}$, то $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=1$ і тому $z=\infty$ – усувна особлива точка даної функції.

Відповідь. Усувна особлива точка.

Приклад 5.70.

$$f(z)=\frac{z^6+2}{z^3+z+1}\cdot\sin\frac{1}{z}.$$

Розв'язання. При $z\to\infty$ маємо $z^6+2\sim z^6$, $z^3+z+1\sim z^3$, $\sin\frac{1}{z}\sim\frac{1}{z}$. Тому $f(z)\sim z^2$, а, отже, $z=\infty$ є полюсом другого порядку для даної функції.

Відповідь. Полюс другого порядку.

Приклад 5.71.

$$f(z)=e^{\frac{1}{z-2}}.$$

Розв'язання. Оскільки $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 1$, то за характеристичною властивістю $z = \infty$ – усувна особлива точка функції $f(z)$.

Відповідь. Усувна особлива точка.

5.8. Лишки

Нехай $z = a$ – ізольована особлива точка однозначної аналітичної функції $f(z)$. Тоді в будь-якому околі точки a: $0 < |z - a| < R$ функцію $f(z)$ можна розкласти в ряд Лорана, коефіцієнти якого знаходяться за формулою

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{k+1}}, \qquad (k = 0, \pm1, \pm2 \dots),$$

де Γ:$|z - a| = \rho,\ 0 < \rho < R$ – коло радіусом ρ з центром у точці a. Дуже важливу роль у розкладі функції $f(z)$ в ряду Лорана відіграє коефіцієнт

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)dz.$$

Л и ш к о м однозначної аналітичної функції $f(z)$ у скінченній ізольованій особливій точці a (позначається $res\ \ f(a)$) називається коефіцієнт c_{-1} в її ряді Лорана в околі точки a, тобто

$$res\ \ f(a) = c_{-1}.$$

З означення лишку випливає, що якщо a – точка аналітичності або усувна особлива для функції $f(z)$, то

$$res\, f(a) = 0.$$

Якщо точка a – полюс, то для знаходження лишку необов'язково розкладати функцію в ряд Лорана.

Якщо точка a – полюс n -го порядку, то лишок знаходиться за формулою

$$res\, f\,(a) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-a)^n f(z), \tag{5.45}$$

звідки при $n = 1$ маємо

$$res\, f\,(a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z). \tag{5.46}$$

Якщо ж функція $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, де функції $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ аналітичні в точці a і $\psi(a) = 0$, $\psi'(0) \neq 0$, а $\varphi(a) \neq 0$, тобто a – простий полюс функції $f(z)$, то

$$res\, f\,(a) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \tag{5.47}$$

Нехай функція $f(z)$ аналітична в деякому околі точки $z = \infty$, $|z| > R$, виключаючи саму точку $z = \infty$. Тоді функція $f(z)$ розкладається в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k.$$

Лишком функції $f(z)$ в нескінченно віддаленій точці $z = \infty$ (позначається $res\ \ f(\infty)$) називається коефіцієнт c_{-1} в її ряді Лорана в околі точки $z = \infty$, взятий з протилежним знаком, тобто

$$res\ \ f(\infty) = - c_{-1}.$$

Оскільки

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} f(z)dz,$$

де Γ^+ – коло $|z| = \rho, (\rho < R)$, що проходиться в додатному напрямку (проти годинникової стрілки), то за означенням лишка в точці $z = \infty$ знаходимо

$$res\ \ f(\infty) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^-} f(z)dz,$$

де Γ^- – коло $|z| = \rho, (\rho < R)$, що проходиться у від'ємному напрямку (за годинниковою стрілкою).

Лишок функції $f(z)$ в нескінченно віддаленій точці $z = \infty$ може бути відмінним від нуля і у випадку, коли ця точка є усувною. Так, наприклад, для функції $f(z) = -\frac{1}{z-2}$ $z = \infty$ – усувна особлива точка, але $res\ \ f(\infty) = - 1$, оскільки z для $z > 2$

$$f(z) = -\frac{1}{z\left(1 - \frac{2}{z}\right)} = -\frac{1}{z}\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} + \ldots\right) = -\frac{1}{z} + \cdots$$

Має місце така теорема.

Теорема. Сума усіх лишків однозначної аналітичної функції, що має в розширеній площині лише ізольовані особливі точки, дорівнює нулю.

Якщо $z=\infty$ – нуль k-го порядку функції $f(z)$, тобто в околі точки $z=\infty$ функція $f(z)$ має такий ряд Лорана:

$$\sum_{l=k}^{\infty} c_l z^{-l},$$

то при $z=\infty$ має місце асимптотична формула:

$$f(z) \sim \frac{\mathrm{A}}{z^k}, (\mathrm{A}=c_{-k} \neq 0).$$

Тоді

1) Якщо $k=1$, то

$$resf(\infty) =- A; \tag{5.48}$$

2) Якщо $k \geq 2$, то $resf(\infty)=0$.

Знайти лишки функцій в усіх особливих ізольованих точках розширеної комплексної площини (приклади 5.72 – 5.75).

Приклад 5.72.

$$f(z) = \frac{z-i}{(z+1)^2(z+i)}.$$

Розв'язання. Точки $z=-1, z=-i$ є нулями знаменника другого і першого порядку відповідно. Оскільки в цих точках чисельник нулеві не дорівнює, то $z=-i$ – простий полюс, а $z=-1$ – полюс другого порядку заданої функції $f(z)$.

Лишок в точці $z=-i$ знаходимо за фомулою (5.46):

$$res\, f\,(-i) = \lim_{z\to -i} \frac{(z+i)(z-i)}{(z+1)^2(z+i)} = \lim_{z\to -i} \frac{(z-i)}{(z+1)^2} = 1.$$

За формулою (5.45) маємо:

$$res\, f\,(-1) = \lim_{z\to -1} \frac{d}{dz} \frac{(z+1)^2(z-i)}{(z+1)^2(z+i)} = \lim_{z\to -1} \frac{d}{dz} \frac{(z-i)}{(z+i)} = \lim_{z\to -1} \frac{2i}{(z+i)^2} =-1.$$

Теорема про суму лишків дає

$$res\, f\,(-i) + res\, f\,(-1) + res\, f(\infty) = 0,$$

а тому $res\ \ f(\infty) = 0.$

Такий результат можна одержати, використавши безпосередньо вище наведену теорему. Позаяк при $z\to\infty$ $\ z-i \sim z$, $(z+1)^2(z+i) \sim z^3$, то $f(z) \sim z^{-2}$, а, отже, $res\, f(\infty) = 0.$

Приклад 5.73.

$$f(z) = \frac{z^2+z-2}{(z-1)^2(z+2)}.$$

Розв'язання. Функція $f(z)$ має на розширеній комплексній площині три особливі точки: $z = 1, z = -2, z = \infty.$ Оскільки

$$\lim_{z\to-2} \frac{z^2+z-2}{(z-1)^2(z+2)} = -\frac{1}{3},$$

то $z = -2$ – усувна особлива точка і $res\, f\,(-2) = 0.$

Точка $z = 1$ є нулем другого порядку знаменника і нулем першого порядку чисельника. Тому $z = 1$ – простий полюс функції $f(z)$. За формулою (5.46) знаходимо

$$res\, f\,(1) = \lim_{z\to1} \frac{(z^2+z-2)(z-1)}{(z-1)^2(z+2)} = 1.$$

Оскільки при $z\to\infty$ $\ f(z) \sim z^{-1}$, то $res\, f(\infty) = -1.$

Відповідь. $res\, f\,(-2) = 0, res\, f\,(1) = 1, res\, f(\infty) = -1.$

Приклад 5.74.

$$f(z) = \frac{\cos^2 \frac{1}{2z}}{1-z}.$$

Розв'язання. Функція $f(z)$ має особливості в точках $z = 0$, $z = 1, z = \infty.$ Позаяк при $z\to\infty$ $\ f(z) \sim -z^{-1}$, то $res\, f(\infty) = 1.$

Точка $z = 1$ є полюсом першого порядку. За формулою (5.46) знаходимо

$$res\, f\,(1) = \lim_{z\to 1}\frac{\cos^2\frac{1}{2z}(z-1)}{1-z} = -\cos^2\frac{1}{2}.$$

Оскільки функція $\cos z$ при $z\to\infty$ ні скінченної, ні нескінченної границі не має, то $z = 0$ – істотно особлива точка функції $f(z)$. За теоремою про суму лишків

$$res\, f\,(1) + res\, f\,(0) + res\, f(\infty) = 0,$$

а тому $res\, f(0) = -\sin^2\frac{1}{2}$.

Цей результат можна отримати, використавши розклад функції $f(z)$ в ряд Лорана в області $0 < |z| < \infty$:

$$f(z) = \frac{\cos^2\frac{1}{2z}}{1-z} = \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{1}{z}\right)\frac{1}{1-z} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(2-\frac{z^{-2}}{2!}+\frac{z^{-4}}{4!}-\dots\right)(1+z++z^2+\dots) =$$
$$=\dots+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\dots\right)\frac{1}{z}+\frac{1}{2}+\dots$$

Звідси знаходимо

$$res\, f\,(0) = \frac{1}{2}\left(-1+1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\dots\right) = \frac{\cos 1-1}{2} = -\sin^2\frac{1}{2}.$$

Відповідь. $res\, f\,(1) = -\cos^2\frac{1}{2}, res\, f\,(0) = -\sin^2\frac{1}{2}, res\, f(\infty) = 1.$

Приклад 5.75. $f(z) = e^{\frac{2}{z-i}}$.

Розв'язання. Функція $f(z)$ в розширеній комплексній площині має дві особливі точки: $z = i, z = \infty$. Оскільки функція e^w при $w\to\infty$ ні скінченної, ні нескінченної границі не має, а $\lim_{z\to\infty} e^{\frac{2}{z-i}} = 1$, то $z = i$ – істотно особлива точка, а $z = \infty$ – усувна особлива точка функції

$f(z)$. В цьому випадку знайти лишки відносно указаних точок можна, використавши лише розклад функції в ряд Лорана в околі точки $z = i$ $0 < |z - i| < \infty$:

$$e^{\frac{2}{z-i}} = 1 + \frac{2}{z-i} + \frac{4}{2!\,(z-i)^2} + \ldots$$

Тому $res\, f\,(i) = c_{-1} = 2.$

За теоремою про суму лишків

$$res\, f\,(i) + res\, f(\infty) = 0,$$

а тому $res\, f(\infty) = -2.$

Відповідь. $res\, f\,(i) = 2, res\, f(\infty) = -2.$

В прикладах **5.76 – 5.78** знайти лишки вказаних функцій в нескінченності.

Приклад 5.76.

$$f(z) = \frac{z^9 + 3}{z^{10} + 1}.$$

Розв'язання. Оскільки $\frac{z^9+3}{z^{10}+1} \sim z^{-1}$, то за формулою (5.48) $res\, f(\infty) = -1.$

В тих випадках, коли $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) \neq 0$, цей спосіб застосувати не можна. Тому в наступних прикладах наведені інші способи.

Відповідь. $res\, f(\infty) = -1.$

Приклад 5.77.

$$f(z) = \frac{z^{11} + z^9 + 3}{z^{10} + 1}.$$

Розв'язання. П е р ш и й с п о с і б . Використавши, що

$$\frac{1}{1-w} = 1 + w + w^2 + \ldots$$

для $|w| < 1$, і вважаючи, що $w = -\frac{1}{z^{10}}$, одержимо лоранівський розклад функції $f(z)$ в околі точки $z = \infty$:

$$f(z)=\frac{z^{11}+z^9+3}{z^{10}+1}=\frac{z^{11}+z^9+3}{z^{10}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^{10}}}=$$

$$=\frac{z^{11}+z^9+3}{z^{10}}\left(1-\frac{1}{z^{10}}+\frac{1}{z^{20}}-\ldots\right)=z+\frac{1}{z^9}+\frac{3}{z^{10}}+\ldots$$

Тому $res\, f(\infty)=-1$.

Другий спосіб. Лоранівський розклад функції $f(z)$ в околі точки $z=\infty$ можна отримати шляхом ділення чисельника на знаменник, що виконується за правилом ділення многочленів, розташованих за зростаючими степенями z:

$$\begin{array}{l|l}
-\;z^{11}+z^9+3 & z^{10}+1 \\
\quad z^{11}+z & \overline{z+\frac{1}{z}-\frac{1}{z^9}+\frac{3}{z^{10}}-\ldots} \\
\hline
\quad -\;z^9-z+3 & \\
\qquad z^9+\frac{1}{z} & \\
\hline
\qquad -\;-z+3-\frac{1}{z} & \\
\qquad\quad -z-\frac{1}{z^9} & \\
\hline
\qquad\quad -\;3-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^9} & \\
\qquad\qquad 3+\frac{3}{z^{10}} & \\
\hline
\qquad\qquad\quad \ldots &
\end{array}$$

Відповідь. $res\, f(\infty)=-1$.

Приклад 5.78.

$$f(z)\;=\frac{z^{19}}{(4z^4+1)^2(z^2+3)^5}.$$

Розв'язання. Перетворимо вираз для функції $f(z)$:

$$f(z)\;=\frac{z^{19}}{16z^{18}\left(1+\frac{1}{4z^4}\right)^2\left(1+\frac{3}{z^2}\right)^5}=\frac{z}{16}\left(1+\frac{1}{4z^4}\right)^{-2}\left(1+\frac{3}{z^2}\right)^{-5}.$$

Потім, вважаючи, що в розкладі

$$(1+w)^m=1+\frac{mw}{1!}+\frac{m(m-1)w^2}{2!}+\cdots+$$

$$+\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)w^n}{n!}+\cdots \quad (|w|<1)$$

$w=\frac{1}{4z^4}, m=-2$ ($w=-\frac{3}{z^2}, m=-5$), та використовуючи правило множення рядів, одержимо лоранівський розклад функції $f(z)$ в околі точки $z=\infty$:

$$f(z)=\frac{z}{16}\left(1-\frac{2}{1!}\frac{1}{4z^4}+\dots\right)\left(1-\frac{5}{1!}\frac{3}{z^2}+\dots\right)= \\ =\frac{z}{16}-\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{z}-\frac{1}{32}\cdot\frac{1}{z^3}+\dots \qquad (5.49)$$

Звідси

$$res\, f(\infty)=-c_{-1}=\frac{15}{16}.$$

Відповідь. $res\, f(\infty)=\frac{15}{16}$.

В прикладах **5.79 – 5.80** знайти лишки кожної з однозначних віток багатозначної функції відносно точки $z=\infty$.

Приклад 5.79. $f(z)=\sqrt{(z-a)(z-b)}$.

Розв'язання. Оскільки вітки заданої функції відрізняються лише знаком, то обидві розглядаємо одночасно. Перетворивши відповідним чином вираз для $f(z)$ та використавши розклад (5.49) з заміною $w=-\frac{a}{z}$ та $w=-\frac{b}{z}$, одержимо лоранівський розклад кожної вітки багатозначної функції $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ в області $|z|>R$ ($R=\max\{|a|,|b|\}$):

$$f(z)=\pm z\sqrt{\left(1-\frac{a}{z}\right)\left(1-\frac{b}{z}\right)}=\pm z\left(1-\frac{a}{z}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{b}{z}\right)^{\frac{1}{2}}= \\ =\pm z\left(1-\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{z}-\frac{a^2}{8}\cdot\frac{1}{z^2}-\dots\right)\left(1-\frac{b}{2}\cdot\frac{1}{z}-\frac{b^2}{8}\cdot\frac{1}{z^2}-\dots\right).$$

Тому лишок, в залежності від вибору вітки, буде дорівнювати $\pm(b-a)^2/8$.

Відповідь. $res\, f(\infty)=\pm(b-a)^2/8$.

Приклад 5.80.

$$f(z)=\mathrm{Ln}\frac{a-z}{b-z}.$$

Розв'язання. Використавши розклад

$$\ln(1+w) = w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \dots + (-1)^k \frac{w^k}{k} + \dots,$$

де $(|w| < 1), \ln(1+w)$ – головна вітка функції $\mathrm{Ln}(1+w)$), з заміною w на $-\frac{a}{z}$ та на $-\frac{b}{z}$, отримаємо лоранівський розклад для будь-якої вітки багатозначної функції $\mathrm{Ln}\frac{a-z}{b-z}$ (вибір визначається значенням цілого дійсного числа k) в області $|z| > R$ ($R = \max\{|a|, |b|\}$):

$$\ln\frac{a-z}{b-z} = \ln\frac{1-\frac{a}{z}}{1-\frac{b}{z}} = \ln\left(1-\frac{a}{z}\right) - \ln\left(1-\frac{b}{z}\right) =$$

$$= \ln\left(1-\frac{a}{z}\right) - \ln\left(1-\frac{b}{z}\right) + 2k\pi i =$$

$$= \left(-\frac{a}{z} - \frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{z^2} - \frac{a^3}{3}\cdot\frac{1}{z^3} - \dots\right) + \left(\frac{b}{z} + \frac{b^2}{2}\cdot\frac{1}{z^2} + \frac{b^3}{3}\cdot\frac{1}{z^3} + \dots\right) + 2k\pi i =$$

$$= \frac{b-a}{z} + \frac{b^2-a^2}{2z^2} + \dots + \frac{b^n-a^n}{nz^n} + \dots + 2k\pi i.$$

Тому лишок для будь-якої функції $\mathrm{Ln}\frac{z-a}{z-b}$ буде дорівнювати – $(b-a)$.

Відповідь. $res\, f(\infty) = -(b-a)$.

Приклад 5.81. Знайти лишок функції

$$f(z) = e^z \ln\frac{z-a}{z-b}$$

в точці $z = \infty$.

Розв'язання. Оскільки

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots,$$

а

$$\ln\frac{z-a}{z-b} = \frac{b-a}{z} + \frac{b^2-a^2}{z^2} + \frac{b^3-a^3}{z^3} + \dots,$$

то, перемноживши ліві і праві чистини цих рівностей, одержимо розклад в ряд Лорана заданої функції в області $|z| > R$ ($R = \max\{|a|, |b|\}$), тобто в околі точки $z = \infty$. Оскільки $res\, f(\infty) = c_{-1}$, то маємо

$$res\, f(\infty) = c_{-1} =-\left(\frac{b-a}{1!}+\frac{b^2-a^2}{2!}+\frac{b^3-a^3}{3!}+\ldots\right)=$$
$$=1+\frac{a}{1!}+\frac{a^2}{2!}+\ldots-\left(1+\frac{b}{1!}+\frac{b^2}{2!}+\ldots\right)=e^a-e^b.$$

Відповідь. $res\, f(\infty) = e^a - e^b$.

Вправи.

Знайти лишки даних функцій в усіх особливих точках розширеної комплексної площини:

1. $f(z) = \frac{z^2+2iz+3}{(z^2+1)(z+3i)^2}$

2. $f(z) = \frac{z^2+2}{z(z+i)}$.

3. $f(z) = \frac{z+1}{(z-1)^3(z-2)}$.

4. $f(z) = \frac{z^2+1}{z^3(z+1)}$.

5. $f(z) = z\sin\frac{1}{z-2}$

6. $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z-2}}}{(z-2)}$.

7. $f(z) = ze^{1/z^2}$.

8. $f(z) = \frac{\sin z - z}{z^4}$.

Знайти лишки в точці $z = \infty$ для таких функцій:

9. $f(z) = \frac{z^6+1}{(z^2+1)^4}$.

10. $f(z) = \frac{(z+1)\cos z}{z}$.

11. $f(z) = \frac{z^4(z^4+i)^4}{(z^3+1)^2(z^5+2)^3}$.

12. $f(z) = \frac{z^6+3z+1}{z^7(z^2+2)}$.

Відповіді.

1. $res\, f(i) = 0; res\, f(-i) =-i/2; res\, f(-3i) = i/2; res\, f(\infty) = 0.$

2. $res\, f(0) =-2i; res\, f(-i) = i; res\, f(\infty) = i.$

3. $res\, f(2) = 3; res\, f(-1) =-3; res\, f(\infty) = 0.$

4. $res\, f(0) = 2; res\, f(-1) =-2; res\, f(\infty) = 0.$

5. $res\, f(2) = 2; res\, f(\infty) =-2.$

6. $res\, f(2) = 1; res\, f(\infty) =-1.$

7. $res\, f(0) = 1; res\, f(\infty) =-1.$

8. $res\, f(0) =-1/6; res\, f(\infty) = 1/6.$

9. $res\, f(\infty) = 0.$ **10**. $res\, f(\infty) =-1.$ **11**. $res\, f(\infty) =-1.$ **12**. $res\, f(\infty) = 0.$

5.9. Застосування теорії лишків

5.9.1. Обчислення інтегралів по замкнутих кривих

Лишки знайшли численні застосування не лише при обчисленні інтегралів від функцій комплексної змінної, але і під час обчислення деяких визначених інтегралів від функцій дійсної змінної, причому часто вдається достатньо просто отримати відповідь у тих випадках, коли застосування методів математичного аналізу виявляється проблематичним, тобто призводить до значних ускладнень.

Використання теорії лишків базується на о с н о в н і й т е о р е м і п р о л и ш к и: нехай Γ – замкнута гладка крива, яка обмежує область G, а функція $f(z)$ аналітична в замкненій області $\bar{G}$, крім скінченного числа ізольованих особливих точок $z_k \in G$, $k = 1,\ 2 \dots n$. Тоді

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res\, f\,(z_k). \tag{5.50}$$

Якщо всередині контура інтегрування Γ перебуває значно більше ізольованих особливих точок підінтегральної функції, ніж за контуром, то об'єм обчислень значно скорочується, коли застосовується т е о р е м а п р о с у м у л и ш к і в: нехай функція $f(z)$ аналітична в розширеній комплексній площині за виключенням скінченного числа ізольованих особливих точок $z_k = \infty, z_1, z_2, \dots, z_n$. Тоді

$$\sum_{k=0}^{n} res\, f\,(z_k) = 0. \tag{5.51}$$

Приклад 5.81. Обчислити інтеграл

$$\int_{|z|\leq 2} \frac{1-e^z}{z^2-z} dz.$$

Розв'язання. Функція $f(z)$ в крузі $|z| \leq 2$ має ізольовані особливі точки $z = 0$ і $z = 1$. За основною теоремою про лишки

$$\int_{|z|\leq 2} \frac{1-e^z}{z^2-z} dz = 2\pi i\big(res\, f\,(0) + res\, f\,(1)\big).$$

Точка $z = 0$ є усувною особливою для функції $f(z)$, оскільки вона є простим нулем і чисельника, і знаменника функції $f(z)$. Тому $res\, f\,(0) = 0$. Точка $z = 1$ – простий полюс, а тому

$$res\, f\,(1) = \lim_{z\to 1} \frac{(1-e^z)(z-1)}{z(z-1)} = 1-e$$

і, отже,

$$\int_{|z|\le 2} \frac{1-e^z}{z^2-z}\,dz = 2\pi i(1-e).$$

Відповідь. $2\pi i(1-e)$.

Приклад 5.83. Обчислити інтеграл

$$\int_{|z|=3} \frac{z+i}{(z+1)^2(z-i)}\,dz.$$

Розв'язання. Перший спосіб. В середині контуру інтегрування підінтегральна функція $f(z)$ має дві особливі точки $z=i$ – простий полюс, $z=-1$ – полюс другого порядку. Використавши формули (5.45) і (5.47) із попереднього параграфа, відповідно знаходимо

$$res\, f\,(i) = \lim_{z\to i} \frac{(z+i)(z-i)}{(z+1)^2(z-i)} = \lim_{z\to i} \frac{(z+i)}{(z+1)^2} = 1,$$

$$res\, f\,(-1) = \lim_{z\to -1} \frac{d}{dz}\left\{\frac{(z+i)(z+1)^2}{(z+1)^2(z-i)}\right\} = \lim_{z\to -1} \frac{d}{dz}\left\{\frac{(z+i)}{(z-i)}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to -1} \frac{-2i}{(z-i)^2} = -1.$$

За формулою (5.50) маємо

$$\int_{|z|=3} \frac{z+i}{(z+1)^2(z-i)}\,dz = 2\pi i\big(res\, f\,(i) + res\, f\,(-1)\big) = 0.$$

Другий спосіб. Оскільки при $z\to\infty$, $z+i\sim z, (z+1)^2(z-i)\sim z^3$, то $f(z)\sim z^{-2}$ і, значить, $res\, f\,(\infty) = 0$. За теоремою про суму лишків

$$res\, f\,(i) + res\, f\,(-1) + res\, f\,(\infty) = 0.$$

Звідси

$$res\, f\,(i) + res\, f\,(-1) = -res\, f\,(\infty) = 0$$

Тоді
$$\int_{|z|=3} \frac{z+i}{(z+1)^2(z-i)}dz = 2\pi i\, res\, f\,(\infty) = 0.$$

Відповідь. 0.

Приклад 5.84. Обчислити інтеграл
$$\int_{|z-1|=1} \frac{z^{20}}{(z^{10}-1)^2(z-i)}dz.$$

Розв'язання. В крузі $|z-1|<1$ перебувають десять полюсів другого порядку підінтегральної функції, а за ним – простий полюс $z=i$ та усувна особлива точка $z=\infty$. За формулою (5.50)
$$\int_{|z-1|=1} \frac{z^{20}}{(z^{10}-1)^2(z-i)}dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{10} res\, f\,(z_k).$$
Використовуючи формулу (5.51), знаходимо
$$\sum_{k=1}^{10} res\, f\,(z_k) = -\left(res\, f\,(i) + res\, f\,(\infty)\right).$$
Підінтегральна функція $f(z) \sim z^{-1}$, а тому $res\, f\,(\infty) = -1$. Обчислимо лишок в точці $z=i$:
$$res\, f\,(i) = \lim_{z\to i} \frac{z^{20}}{(z^{10}-1)^2} = \frac{1}{4}.$$
Тоді
$$\int_{|z-1|=1} \frac{z^{20}}{(z^{10}-1)^2(z-i)}dz = 2\pi i\left(-1+\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{2}\pi i.$$

Відповідь. $-3\pi i/2$.

Приклад 5.85. Обчислити інтеграл
$$\int_{|z-2|=1} (1+z+z^2)e^{1/(z-2)}\,dz.$$

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(z)$ в середині контуру інтегрування має єдину особливу точку $z=2$, а саме, істотно особливу. За формулою (5.50)

$$\int_{|z-2|=1} (1+z+z^2)e^{1/(z-2)}\,dz = 2\pi i\, res\, f\,(2).$$

Для знаходження лишку в точці $z = 2$ знайдемо коефіцієнт c_{-1} при $(z-2)^{-1}$ при розкладанні даної функції в ряд Лорана в околі точки $z = 2$. З цією метою розкладемо в ряд Лорана функцію $\varphi(z) = 1 + z + z^2$ за степенями $(z-2)$. Оскільки

$$\varphi(2) = 7, \varphi'(2) = 5, \varphi''(2) = 2, \varphi'''(2) = 0,$$

то

$$\varphi(z) = 7 + 5(z-2) + (z-2)^2.$$

Тоді

$$(1+z+z^2)e^{1/(z-2)} = (7 + 5(z-2) + (z-2)^2)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z-2)^k k!} =$$

$$= (z-2)^2 + 6(z-2) + \frac{25}{2} + \frac{29}{3}\cdot\frac{1}{z-2} + \cdots$$

Отже, $res\, f\,(2) = \frac{29}{3}$, і

$$\int_{|z-2|=1} (1+z+z^2)e^{1/(z-2)}\,dz = \frac{58}{3}\pi i.$$

Відповідь. $58\pi i/3$.

5.9.2. Обчислення визначених інтегралів від тригонометричних функцій

За допомогою теорії лишків можна обчислювати інтеграли вигляду

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx,$$

де $R(u, v)$ – раціональна функція відносно аргументів u і v, причому $R(cos\, x, sin\, x)$ – неперервна на відрізку $[0; 2\pi]$. Інтеграл такого вигляду зводиться до інтеграла від функції комплексної змінної по колу $|z| = 1$. Для цього зробимо заміну змінної інтегрування $z = e^{ix}$, тоді

$$\begin{cases} \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2}(z + z^{-1}), \\ \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = \frac{1}{2i}(z - z^{-1}), \end{cases} \quad dx = \frac{dz}{iz}. \qquad (5.52)$$

При зміні x від 0 до 2π точка $z = e^{ix}$ опише коло $|z| = 1$ в додатному напрямку. Таким чином, інтеграл I зводиться до інтеграла по контуру $|z| = 1$ від функції комплексної змінної:

$$I = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} R\left[\frac{1}{2}(z + z^{-1}), \frac{1}{2i}(z - z^{-1})\right]\frac{dz}{z} = \int_{|z|=1} \Phi(z)dz,$$

де $\Phi(z) = \frac{1}{iz}R\left[\frac{1}{2}(z + z^{-1}), \frac{1}{2i}(z - z^{-1})\right]$ – раціональна функція. За основною теоремою про лишки отримуємо:

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res\, \Phi\,(z_k). \qquad (5.53)$$

Приклад 5.86. Обчислити інтеграл

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2 + \cos x)^2}.$$

Розв'язання. Після заміни змінної (5.52) отримаємо

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{\left(2 + \frac{z^2 + 1}{2z}\right)^2}\frac{dz}{iz} = \frac{4}{i}\int_{|z|=1} \frac{zdz}{(z^2 + 4z + 1)^2}.$$

Підінтегральна функція має дві особливі точки: $z_1 = -2 + \sqrt{3}$ та $z_2 = -2 - \sqrt{3}$ – полюси другого порядку, але в середині контуру інтегрування знаходиться лише точка $z_1 = -2 + \sqrt{3}$. Тоді за формулою (5.53)

$$I = 8\pi\, res\, f\left(-2 + \sqrt{3}\right).$$

Оскільки

$$res\ \ f\left(-2 + \sqrt{3}\right) = \lim_{z \to -2+\sqrt{3}} \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{\left(z + 2 + \sqrt{3}\right)^2}\right) =$$

$$= \lim_{z \to -2+\sqrt{3}} \frac{2 + \sqrt{3} - z}{\left(z + 2 + \sqrt{3}\right)^3} = \frac{\sqrt{3}}{18}.$$

то остаточно маємо $I = \frac{4}{9}\sqrt{3}$.

Відповідь. $\frac{4}{9}\sqrt{3}$.

Приклад 5.87. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{\sin^6 x+\cos^6 x}$.

Розв'язання. Позаяк

$$\sin^6 x+\cos^6 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x\right)=$$
$$=\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x-3\sin^2 x\cos^2 x=$$
$$=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-3\sin^2 x\cos^2 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x,$$

то після заміни $e^{ix}=z$ отримаємо

$$I=\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{1-3\sin^2 x\cos^2 x}=\int\limits_{|z|=1}\frac{1}{1-3\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^2\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2}\frac{dz}{iz}=$$
$$=\int_{|z|=1}\frac{1}{1-3\left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)^2\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^2}\frac{dz}{iz}=\int_{|z|=1}\frac{1}{1+3\frac{(z^4-1)^2}{16z^4}}\frac{dz}{iz}=$$
$$=\frac{16}{i}\int_{|z|=1}\frac{z^3dz}{3z^8+10z^4+3}.$$

Підінтегральна функція $\Phi(z)$ має полюси першого порядку тільки в тих точках, у яких $z^4=-\frac{1}{3}$ або $z^4=-3$. В крузі $|z|<1$ містяться лише чотири полюси:

$$z_k=\left(\sqrt[4]{-1/3}\right)_k,\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Обчислимо лишки в цих точках за формулою (5.47):

$$res\,\Phi\,(z_k)=\frac{z_k^3}{24z_k^7+40z_k^3}=\frac{1}{24z_k^4+40}=\frac{1}{32},k=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Тоді за формулою (5.53) отримаємо

$$I=\frac{16}{i}2\pi i\sum_{k=0}^{4}res\,\Phi\,(z_k)=4\pi.$$

Відповідь. 4π.

Приклад 5.88. Обчислити інтеграл

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x},\ a>b>0.$$

Розв'язання. Заміною (5.52) зведемо заданий інтеграл до інтеграла по колу $|z|=1$ від функції комплексної змінної. Тоді

$$I=\int_{|z|=1}\frac{1}{a^2\frac{(z^2-1)^2}{-4z^2}+b^2\frac{(z^2+1)^2}{4z^2}}\frac{dz}{iz}=$$

$$=-\frac{4}{i}\int_{|z|=1}\frac{zdz}{a^2(z^2-1)^2+b^2(z^2+1)^2}=$$

$$=-\frac{4}{i}\int_{|z|=1}\frac{zdz}{(a^2-b^2)z^4-2(a^2+b^2)z^2+a^2-b^2}.$$

Підінтегральна функція $\Phi(z)$ має полюси першого порядку тільки в точках, у яких $z^2=\frac{a+b}{a-b}$ або $z^2=\frac{a-b}{a+b}$. Оскільки за умовою $a>b$, то $\frac{a+b}{a-b}>1$ і $\frac{a-b}{a+b}<1$, тому в круг $|z|<1$ попадає лише дві точки: $z_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$. Скориставшись рівностями

$$(a^2-b^2)z_k^4-2(a^2+b^2)z_k^2=b^2-a^2, z_k^2=\frac{a-b}{a+b},$$

обчислимо лишки в цих полюсах за формулою (5.47):

$$res\,\Phi\,(z_k)=\frac{z_k}{4(a^2-b^2)z_k^3-4(a^2+b^2)z_k}=$$

$$=\frac{z_k^2}{4(a^2-b^2)z_k^4-4(a^2+b^2)z_k^2}=$$

$$=\frac{a-b}{(a+b)(2(a^2-b^2)z_k^4+4(a^2+b^2)z_k^2+2(a^2-b^2)z_k^4)}=$$

$$=\frac{a-b}{(a+b)\left[2(b^2-a^2)+2(a^2-b^2)\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\right]}=$$

$$=\frac{a-b}{2(a+b)(a^2-b^2)\left[\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2-1\right]}=$$

$$= -\frac{(a+b)^2}{2(a+b)^2 4ab} = -\frac{1}{8ab}.$$

Скориставшись формулою (5.53), одержимо

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = -\frac{4}{i} 2\pi i \sum_{k=1}^{2} \operatorname{res}\Phi(z_k) = -8\pi\left(-\frac{1}{4ab}\right) = \frac{2\pi}{ab}.$$

Відповідь. $2\pi/(ab)$.

Приклад 5.89. Обчислити інтеграл

$$I = \int_0^{\pi} \sin^{2n} x dx.$$

Розв'язання. Враховуючи періодичність (період π) функції $\sin^{2n} x$ і заміну (5.52), отримаємо

$$\int_0^{\pi} \sin^{2n} x dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^{2n} x dx = \frac{1}{2i}\int_{|z|=1} \left(\frac{1}{2i}\right)^{2n}\left(z - \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z} = \frac{(-1)^n}{2i \cdot 2^{2n}} \int_{|z|=1} \frac{\left(z^2-1\right)^{2n}}{z^{2n+1}} dz.$$

Функція $\Phi(z) = \frac{(z^2-1)^{2n}}{z^{2n+1}}$ в крузі $|z| < 1$ має єдину ізольовану особливу точку $z = 0$ – полюс $2n+1$ порядку. Для обчислення лишку функції $\Phi(z)$ в точці $z = 0$ розкладемо її за степенями z, скориставшись біномом Ньютона:

$$(u+v)^n = u^n + nu^{n-1}v + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} u^{n-k}v^k + \cdots + v^n,$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{z^{2n+1}}(z^2-1)^{2n} =$$

$$= \frac{1}{z^{2n+1}}\Bigg[(z^2)^{2n} - 2n(z^2)^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{2!}(z^2)^{2n-2} +$$

$$+ \cdots + (-1)^n \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{n!}(z^2)^n + \cdots\Bigg].$$

Звідси знаходимо, що

$$c_{-1} = (-1)^n \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{n!} = (-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Тому, враховуючи рівність $c_{-1} = res\ \ \Phi(0)$, за формулою (5.53) маємо

$$\int_0^{\pi} sin^{2n} x dx = \frac{(-1)^n}{2i \cdot 2^{2n}} 2\pi\, res\, \Phi\,(0) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\pi =$$

$$= \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2n)}{(2 \cdot 4 \cdots 2n)(2 \cdot 4 \cdots 2n)}\pi = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi\,.$$

Відповідь. $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi.$

Зауваження: Лишок $res\,\Phi(0)$ можна знайти і за формулою (5.45):

$$res\,\Phi(0)=\frac{1}{(2n)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}(z^2-1)^{2n}=$$

$$(-1)n\frac{2n(2n-1)\dots(n+1)}{n!}=(-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2},$$

оскільки $\frac{1}{(2n)!}\cdot\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}(z^2-1)^{2n}\Big|_{z=0}$ – коефіцієнт при z^{2n} в розкладі бінома $(z^2-1)^{2n}$. Використовуючи цю рівність, інтеграл $\int_{|z|=1}\Phi(z)dz$ можна обчислити і за інтегральною формулою Коші:

$$\int_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^{2n}}{z^{2n+1}}dz=\frac{2\pi i}{(2n)!}\cdot\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}(z^2-1)^{2n}\Bigg|_{z=0}=(-1)^n\frac{2(2n)!}{(n!)^2}\pi i.$$

Приклад 5.90. Обчислити інтеграл

$$I=\int_0^{2\pi}e^{\cos\varphi}\cos(n\varphi-\sin\varphi)\,d\varphi\,,\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Розв'язання. Застосувавши рівністю $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, запишемо шуканий інтеграл у такому вигляді:

$$I=\mathrm{Re}\int_0^{2\pi}e^{\cos\varphi}[\cos(\sin\varphi-n\varphi)+i\sin(\sin\varphi-n\varphi)]d\varphi$$

$$=\mathrm{Re}\int_0^{2\pi}e^{\cos\varphi}e^{i(\sin\varphi-n\varphi)}d\varphi=$$

$$=\mathrm{Re}\int_0^{2\pi}e^{\cos\varphi+i\sin\varphi}e^{-in\varphi}d\varphi=\left\{\begin{matrix}z=e^{i\varphi},\\ d\varphi=\dfrac{dz}{iz}\end{matrix}\right\}=\mathrm{Re}\,\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z^{n+1}}dz.$$

Точка $z=0$ – полюс $n+1$ порядку для функції $\Phi(z)=\frac{e^z}{z^{n+1}}$. Знайдемо лишок функції $\Phi(z)$ у точці $z=0$ за формулою (5.45):

$$res\,\Phi\,(0)=\frac{1}{n!}\lim_{z\to 0}\frac{d^n}{dz^n}(e)^z=\frac{1}{n!}.$$

Застосовуючи основну теорему про лишки, отримаємо

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi}\cos(\sin\varphi - n\varphi)\,d\varphi = \operatorname{Re}\,[2\pi\, res\,\Phi\,(0)] = \frac{2\pi}{n!}.$$

Звідси, крім того, випливає, що

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi}\sin(n\varphi - \sin\varphi)\,d\varphi = 0.$$

Відповідь. $2\pi/n!$.

Приклад 5.91. Обчислити інтеграл

$$I = \int_{-1}^{1}\frac{x^2dx}{(17+8x)\sqrt{1-x^2}}.$$

Розв'язання. Цей інтеграл не є інтегралом від тригонометричних функцій, але заміною $x = cos\,\varphi$, враховуючи парність отриманої підінтегральної функції, зводиться до нього:

$$I = \int_{-1}^{1}\frac{x^2dx}{(17+8x)\sqrt{1-x^2}} = \left\{\begin{array}{ll} x=\cos\varphi, & x=-1 \Rightarrow \varphi=\pi, \\ dx=-\sin\varphi d\varphi, & x=1\Rightarrow\varphi=0 \\ \sqrt{1-x^2}=\sin\varphi, & \end{array}\right\} = \int_0^{\pi}\frac{\cos^2\varphi d\varphi}{17+8\cos\varphi} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\varphi d\varphi}{17+8\cos\varphi}.$$

Після заміни змінної у цьому інтегралі одержимо

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\varphi d\varphi}{17+8\cos\varphi} = \left\{\begin{array}{l} z=e^{i\varphi}, \quad d\varphi=\dfrac{dz}{iz}, \\ \cos\varphi=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right) \end{array}\right\} = \frac{1}{8}\int_{|z|=1}\frac{\left(z^2+1\right)^2}{z^2\left[17+\dfrac{4\left(z^2+1\right)}{z}\right]}\cdot\frac{dz}{iz} =$$

$$= \frac{1}{8i}\int_{|z|=1}\frac{\left(z^2+1\right)^2dz}{z^2\left(4z^2+17z+4\right)}.$$

Особливими точками підінтегральної функції $\Phi(z)$ будуть: $z = 0$ – полюс другого порядку, $z = -\frac{1}{4}$, $z = -4$ – прості полюси. В круг $|z| < 1$ потрапляють лише точки $z = 0$ і $z = -\frac{1}{4}$. Тому за формулою (5.53) маємо

$$I = \frac{\pi}{4}\left[res\,\Phi\,(0) + res\,\Phi\left(-\frac{1}{4}\right)\right].$$

Обчислимо лишки в цих точках за формулами (5.45) та (5.46) відповідно:

$$res\,\Phi\,(0) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{(z^2+1)^2}{4z^2+17z+4}\right) =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{4z(z^2+1)(4z^2+17z+4) - (8z+17)(z^2+1)^2}{(4z^2+17z+4)^2} = -\frac{17}{16},$$

$$res\,\Phi\left(-\frac{1}{4}\right) = \lim_{z\to -\frac{1}{4}}\frac{(z^2+1)^2}{4z^2(z+4)} = \frac{17^2}{16\cdot 15}.$$

Відтак,

$$I = \frac{17\pi}{4\cdot 16}\left(\frac{17}{15} - 1\right) = \frac{17\pi}{480}.$$

Відповідь: $\frac{17\pi}{480}$.

5.9.3. Обчислення невласних інтегралів

Розглянемо невласні інтеграли, при обчисленні яких використовується така теорема.

Теорема 1. Нехай функція $f(z)$ аналітична у верхній півплощині, включаючи дійсну вісь, за винятком скінченного числа полюсів z_k, $Im\,z_k > 0$, $k = 1\,, 2\ \ldots n$ й $\lim\limits_{\substack{z\to\infty \\ Im\,z>0}} zf(z) = 0$. Тоді

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}\, f(z_k). \tag{5.54}$$

Приклад 5.92. Обчислити інтеграл

$$\int_0^\infty \frac{x^4+1}{x^6+1}dx.$$

Розв'язання. Оскільки підінтегральна функція парна, то

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4+1}{x^6+1}dx.$$

Функція $f(z) = \frac{z^4+1}{z^6+1}$ задовольняє всі умови теореми 1: має полюси першого порядку в точках $z_k = e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{6}}$, $k = 0,1,2,\ \ldots 5$, серед яких три: $z_0 = e^{\frac{i\pi}{6}}$, $z_1 = e^{\frac{i\pi}{2}}$, $z_2 = e^{\frac{5i\pi}{6}}$ лежать у верхній півплощині. Тоді за формулою (5.54) маємо

$$I = \pi i \sum_{k=0}^{2} res\, f\,(z_k) = \pi i \ \sum_{k=0}^{2} \frac{z_k^4 + 1}{6z_k^5} = -\frac{\pi i}{6} \sum_{k=0}^{2} \left(z_k^5 + z_k\right)$$

$$= -\frac{\pi i}{6} \sum_{k=0}^{2} \left(\frac{-1}{z_k} + z_k\right) =$$

$$= \frac{\pi i}{6} \sum_{k=0}^{2} \left(\frac{1}{z_k} - z_k\right) = \frac{\pi i}{6}\left(e^{-\frac{i\pi}{6}} - e^{\frac{i\pi}{6}} + e^{-\frac{i\pi}{2}} - e^{\frac{i\pi}{2}} + e^{-\frac{5i\pi}{6}} - e^{\frac{5i\pi}{6}}\right) = \frac{\pi i}{6}\Big(\cos\frac{\pi}{6} -$$

$$- i\sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{5\pi}{6} - i\sin\frac{5\pi}{6} - \cos\frac{5\pi}{6} -$$

$$i\sin\frac{5\pi}{6}\Big) == \frac{\pi}{3}\left(\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{5\pi}{6} + 1\right) = \frac{2}{3}\pi.$$

Відповідь: $2\pi/3$.

Приклад 5.93. Обчислити інтеграл

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^8 + 1}.$$

Розв'язання. Функція $f(z) = \frac{1}{z^8+1}$ задовольняє всі умови, при виконанні яких можна застосовувати теорему 1. Позаяк

$$\sqrt[8]{-1} = \cos\frac{\pi+2k\pi}{8} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{8} = e^{i\frac{\pi+2k}{8}}, k = 0,1,2,\ \ldots 7,$$

то серед восьми простих полюсів функції $f(z)$ тільки чотири лежать у верхній півплощині: $z_0 = e^{i\frac{\pi}{8}}, z_1 = e^{i\frac{3\pi}{8}}, z_2 = e^{i\frac{5\pi}{8}}, z_3 = e^{i\frac{7\pi}{8}}$.

Оскільки $\operatorname{res} f(z_k) = \frac{1}{8z_k^7} = -\frac{z_k}{8}$, то, враховуючи парність функції $\frac{1}{z^8+1}$, рівності

$$\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8} = -\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}, \cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8} = -\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8},$$

за формулою (5.54) отримаємо

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^8+1} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^8+1} = \pi i \sum_{k=0}^{3} res\, f\,(z_k)$$

$$= -\frac{\pi i}{8}\left(e^{i\frac{\pi}{8}} + e^{i\frac{3\pi}{8}} + e^{i\frac{5\pi}{8}} + e^{i\frac{7\pi}{8}}\right) =$$

$$= -\frac{\pi i}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8} - \cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right) =$$

$$= -\frac{\pi i}{8}\left(2i\sin\frac{\pi}{8} + 2i\sin\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$

Відповідь: $\sqrt{2}\pi/4$.

Приклад 5.94. Обчислити інтеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}, n \in \mathbb{N}.$$

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^{n+1}}$ задовольняє всі вимоги теореми 1 і має у верхній півплощині єдину особливу точки $z = i$ – полюс $n+1$ порядку. За формулою (5.45) маємо:

$$res\, f\,(i) = \frac{1}{n!}\lim_{z\to i}\frac{d^n}{dz^n}\left[\frac{(z-i)^{n+1}}{(z^2+1)^{n+1}}\right] = \frac{1}{n!}\cdot\frac{d^n}{dz^n}\left[\frac{1}{(z+i)^{n+1}}\right] =$$

$$= (-1)^n\frac{(n+1)(n+2)\dots 2n}{n!}\lim_{z\to i}(z+i)^{-2n-1} = -\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n+1}}i = -\frac{(2n-1)!!}{2(2n)!!}i.$$

Тоді

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = 2\,\pi i\cdot res\, f\,(i) = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi.$$

Відповідь. $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi$

Приклад 5.95. Обчислити інтеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2} \quad (a>0,\ b>0).$$

Розв'язання. Функція $f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)^2}$ у верхній півплощині має дві ізольовані особливі точки: $z = ai$ – простий полюс і $z = bi$ – полюс другого порядку. Знайдемо лишки в цих точках відповідно за формулами (5.45) і (5.46):

$$res\, f\,(ai) = \lim_{z\to ai}\frac{z-ai}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)^2} = \lim_{z\to ai}\frac{1}{(z+ai)(z^2+b^2)^2} =$$

$$= \frac{-i}{2a(b^2-a^2)^2},$$

$$res\, f\,(bi) = \lim_{z\to bi}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-bi)^2}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)^2}\right] =$$
$$= \lim_{z\to bi}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z^2+a^2)(z+bi)^2}\right) =$$
$$= \lim_{z\to bi}\frac{-2z(z+bi)^2-2(z+bi)(z^2+a^2)}{(z^2+a^2)^2(z+bi)^4} = \frac{3b^2-a^2}{4b^3(a^2-b^2)^2}i.$$

Тоді за формулою (5.54) отримаємо
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2} = 2\pi i[res\, f\,(ai) + res\, f\,(bi)] =$$
$$= -2\pi\left(\frac{3b^2-a^2}{4b^3(a^2-b^2)^2} - \frac{1}{2a(b^2-a^2)^2}\right) = 2\pi\frac{a^3-3ab^2+2b^3}{4ab^3(a^2-b^2)^2} =$$
$$= \frac{(a+2b)\pi}{2ab^3(a+b)^2},$$
бо
$$a^3-3ab^2+2b^3 = a(a^2-b^2)-2b^2(a-b) =$$
$$= (a-b)(a^2+ab-2b^2) =$$
$$= (a-b)[(a-b)(a+b)+b(a-b)] = (a-b)^2(a+2b).$$

Відповідь. $\dfrac{(a+2b)\pi}{2ab^3(a+b)^2}$.

Теорема 2. Нехай $\Phi(z) = f(z)e^{i\alpha z}$ $(\alpha > 0)$ і виконуються такі умови:

1) функція $f(z)$ – аналітична у верхній півплощині, включаючи дійсну вісь, за винятком скінченного числа полюсів z_k, $Im\, z_k > 0$ й $k = 1\,,2\,,\dots,n$;

2) $\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ Im\, z\geq 0}} f(z) = 0.$

Тоді $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x}f(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} res\,\Phi\,(z_k).$

Якщо функція $f(z)$ на дійсній осі набуває дійсних значень, то мають місце такі формули:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\alpha\, xdx = -2\pi\,\mathrm{Im}\sum_{k=1}^{n} res\,\Phi\,(z_k); \qquad (5.55)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\alpha\, xdx = 2\pi\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n} res\,\Phi\,(z_k). \qquad (5.56)$$

Приклад 5.96. Обчислити інтеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5\,x}{x^2 - 2x + 5}\,dx.$$

Розв'язання. Функція $f(z) = \frac{1}{z^2-2z+5}$ задовольняє всі вимоги теореми 2. У неї в верхній півплощині один простий полюс $z = 1 + 2i$. Оскільки $\Phi(z) = \frac{e^{i5z}}{z^2-2z+5}$, то, користуючись формулами (5.55) і (5.47), отримаємо

$$I = -2\pi\,\mathrm{Im} res\,\Phi\,(1 + 2i) = -2\pi\;\mathrm{Im}\left(\frac{e^{i5z}}{2z - 2}\right)_{z=1+2i}$$

$$= -2\pi\;\mathrm{Im}\frac{e^{-10+5i}}{4i} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\;\mathrm{Im}\;e^{-10}\,(-\sin 5 + i\cos 5) = \frac{\pi}{2}e^{-10}\cos 5.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{2}e^{-10}\cos 5.$

Приклад 5.97. Обчислити інтеграл

$$I = \int_{0}^{\infty} \frac{x^3 \sin\alpha\,x}{(1 + x^2)^2}\,dx.$$

Розв'язання. Враховуючи непарність функції $f(x) = \frac{x^3}{(1+x^2)^2}$, маємо

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin\alpha\,x}{(1 + x^2)^2}\,dx.$$

Оскільки $\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ Im\,z\geq 0}} f(z) = 0$ і $f(z)$ – аналітична у верхній півплощині, включаючи дійсну вісь, за винятком точки $z = i$, у якій вона має полюс другого порядку, то, застосовуючи формули (5.54) і (5.45), одержимо

$$I = \pi\,\mathrm{Re}\,\Phi\,(i) = \pi \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^3 e^{i\alpha z}(z - i)^2}{(1 + z^2)^2}\right) = \pi\;\mathrm{Re}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^3 e^{i\alpha z}}{(z + i)^2}\right) =$$

$$= \pi\;\mathrm{Re}\lim_{z\to i}\frac{\left(3z^2 e^{i\alpha z} + i\alpha z^3 e^{i\alpha z}\right)(z + i)^2 - 2(z + i)z^3 e^{i\alpha z}}{(z + i)^4} =$$

$$= \pi\;\mathrm{Re}\lim_{z\to i}\frac{z^2 e^{i\alpha z}[(3 + i\alpha z)(z + i) - 2z]}{(z + i)^3} =$$

$$= \pi\;\mathrm{Re}\lim_{z\to i}\frac{z^2 e^{i\alpha z}\left[i\alpha z^2 + (1-\alpha)z + 3i\right]}{(z+i)^3} = \frac{\pi}{4}e^{-\alpha}(2 - \alpha).$$

Відповідь. $\frac{\pi}{4}e^{-\alpha}(2 - \alpha).$

Приклад 5.98. Обчислити інтеграл

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\alpha\, x}{(x^2+1)(x^2+4)^2}\ dx.$$

Розв'язання. Для функції $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)^2}$ виконуються всі умови теореми 2. В точках $z=i$ й $z=2i$ вона має відповідно полюси першого і другого порядку. В цих точках за формулами (5.45) і (5.46) знайдемо лишки для функції

$$\Phi(z)=\frac{e^{i\alpha z}}{(z^2+1)(z^2+4)^2} res\,\Phi\,(i)=\lim_{z\to i}\frac{e^{i\alpha z}}{(z+i)(z^2+4)^2}=-\frac{e^{-\alpha}}{18}i,$$

$$res\,\Phi\,(2i)=\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{i\alpha z}}{(z^2+1)(z+2i)^2}\right)=$$

$$=\lim_{z\to 2i}\frac{i\alpha e^{i\alpha z}(z^2+1)(z+2i)^2-e^{i\alpha z}[2z(z+2i)^2+2(z+2i)(z^2+1)]}{(z^2+1)^2(z+2i)^4}=$$

$$=\lim_{z\to 2i}\frac{e^{i\alpha z}[i\alpha(z^2+1)(z+2i)-4z^2-4iz-2]}{(z^2+1)^2(z+2i)^3}=\frac{e^{-2\alpha}(6\alpha+11)}{288}i.$$

Далі, застосовуючи формулу (5.55), отримаємо

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\alpha\, x}{(x^2+1)(x^2+4)^2}\ dx=-2\pi\,\mathrm{Im}[res\,\Phi\,(i)+res\,\Phi\,(2i)]=$$

$$=\frac{\pi e^{-\alpha}}{144}[16-e^{-\alpha}(6\alpha+11)].$$

Відповідь. $\dfrac{\pi e^{-\alpha}}{144}[16-e^{-\alpha}(6\alpha+11)].$

Теорема 3. Нехай $\Phi(z)=f(z)e^{i\alpha z}$ $(\alpha>0)$, а функція $f(z)$ має такі властивості:

1) аналітична у верхній півплощині, крім скінченного числа полюсів z_k, $\mathrm{Im}\, z_k>0$, $k=1\,,2\,,\dots,n$;

2) аналітична у всіх точках дійсної осі, крім точок a_k, $k=1\,,2\,,\dots,m$, які є простими полюсами;

3) $\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ Im\, z\geq 0}} f(z)=0.$

Тоді

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{i\alpha x}dx=2\pi i\left(\sum_{k=1}^{n}res\,\Phi\,(z_k)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}res\,\Phi\,(a_k)\right),$$

де інтеграл розглядається в сенсі головного значення за Коші відносно точок a_k та ∞.

Якщо функція $f(z)$ на дійсній осі набуває дійсних значень, то мають місце такі формули:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\alpha x dx = -2\pi \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} res\,\Phi\,(z_k) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} res\,\Phi\,(a_k)\right) \quad (5.57)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\alpha x dx = 2\pi \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} res\,\Phi\,(z_k) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} res\,\Phi\,(a_k)\right) \quad (5.58)$$

Нагадаємо, якщо функція $f(x)$ не має особливих точок на дійсній осі, то невласний інтеграл з нескінченними межами визначається рівністю

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)dx,$$

де граничні переходи по a і b не залежать один від одного. У випадку, коли цієї границі не існує, розглядають границю того самого виразу в припущенні, що $-a = b \to \infty$. Якщо ця границя існує, то вона називається головним значенням невласного інтеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ за Коші та позначається символом

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} f(x)dx.$$

Якщо функція $f(x)$ має лише одну особливу точку c на відрізку $[a; b]$ і інтегровна в кожній його частині, що не містить точку c, то невласний інтеграл від a до b визначається рівністю

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to0+ \\ \delta\to0+}} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\delta}^{b} f(x)dx\right),$$

де граничні переходи по ε і δ незалежні.

У випадку, коли цієї границі не існує, розглядають границі в припущенні, що $\delta = \varepsilon \to 0+$. Якщо границя існує, то вона називається головним значенням інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ за Коші та позначається символом

$$\text{V.P.} \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right).$$

Приклад 5.99. Обчислити інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x\, dx}{(x^2+1)(x-2)}.$$

Розв'язання. Функція $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)(z-2)}$ має у верхній півплощині один полюс першого порядку $z=i$ й на дійсній осі особливу точку $z=2$ – полюс першого порядку. Оскільки функція $f(z)$ задовольняє всі умови теореми 3, то за формулою (5.57) отримаємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x\,dx}{(x^2+1)(x-2)}=2\pi\,\mathrm{Re}\left(res\,\Phi\,(i)+\frac{1}{2}res\,\Phi\,(2)\right)=$$

$$=2\pi\,\mathrm{Re}\left(\lim_{z\to i}\frac{e^{iz}}{(z+i)(z-2)}+\frac{1}{2}\lim_{z\to 2}\frac{e^{iz}}{z^2+1}\right)=$$

$$=2\pi\,\mathrm{Re}\left(\frac{e^{-1}}{2i(i-2)}+\frac{e^{2i}}{10}\right)=$$

$$=2\pi\,\mathrm{Re}\left(-\frac{e^{-1}}{2(1+2i)}+\frac{e^{2i}}{10}\right)=$$

$$=2\pi\,\mathrm{Re}\left(\frac{-e^{-1}+\cos 2+i(2e^{-1}+\sin 2)}{10}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{5}(\cos 2-e^{-1}).$$

Відповідь: $\frac{\pi}{5}(\cos 2-e^{-1})$.

Приклад 5.100. Обчислити інтеграл

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\beta\,x}{x(x^2+\alpha^2)^2}dx\,,\qquad(\beta>0,\alpha>0).$$

Розв'язання. Функція $f(z)=\frac{1}{z(z^2+\alpha^2)}$ у верхній півплощині має полюс другого порядку в точці $z=\alpha i$, а на дійсній осі – полюс першого порядку $z=0$. За формулами (5.45) і (5.46) відповідно знайдемо лишки в цих точках для функції $\Phi(z)=\frac{e^{i\beta z}}{z(z^2+\alpha^2)}$.

$$res\,\Phi\,(\alpha i)=\lim_{z\to\alpha i}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{i\beta z}}{z(z+\alpha i)^2}\right)=\lim_{z\to\alpha i}\frac{e^{i\beta z}(i\beta z(z+\alpha i)-3z-\alpha i)}{z^2(z+\alpha i)^3}$$

$$=\frac{-2\alpha(\alpha\beta+2)e^{-\alpha\beta}i}{8\alpha^5 i}=\frac{-e^{-\alpha\beta}(\alpha\beta+2)}{4\alpha^4}.$$

$$res\,\Phi\,(0)=\lim_{z\to 0}\frac{e^{i\beta z}}{(z^2+\alpha^2)^2}=\frac{1}{\alpha^4}.$$

Враховуючи парність підінтегральної функції і значення лишків $\operatorname{res}\Phi(\alpha i)$ та $\operatorname{res}\Phi(0)$, за формулою (5.58) знайдемо

$$\int_0^\infty \frac{\sin\beta x}{x(x^2+\alpha^2)^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x(x^2+\alpha^2)^2}dx =$$

$$= \pi\operatorname{Re}\left(res\,\Phi\,(\alpha i) + \frac{1}{2}res\,\Phi\,(0)\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2\alpha^4} - \frac{e^{-\alpha\beta}(\alpha\beta+2)}{4\alpha^4}\right) = \frac{2-e^{-\alpha\beta}(\alpha\beta+2)}{4a^4}.$$

Відповідь. $\dfrac{2-e^{-\alpha\beta}(\alpha\beta+2)}{4a^4}$.

Вправи.

За допомогою лишків обчислити інтеграли:

1. $\int_{|z|=1,5}\frac{dz}{z^2-1}$.

2. $\int_{|z-1|=0,5}\frac{dz}{(z-1)(z-2)^2}$.

3. $\int_{|z|=2}\frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$.

4. $\int_{|z-1|=0,25}\frac{(z^2+z-2)dz}{(z+2)(z-1)^2}$.

5. $\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\cos\varphi-2}$.

6. $\int_0^{2\pi}\frac{2+\cos\varphi}{2-\sin\varphi}d\varphi$.

7. $\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sin\varphi+\cos\varphi+2}$.

8. $\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(5+4\cos\varphi)^2}$

9. $\int_0^\infty\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$.

10. $\int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

11. $\int_{-\infty}^\infty\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

12. $\int_0^\infty\frac{dx}{x^5+1}$.

13. $\int_0^\infty\frac{x\sin x}{x^4+1}dx$.

14. $\int_0^\infty\frac{\cos^2 x}{x^2+1}dx$.

15. $\int_{-\infty}^\infty\frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}dx$.

16. $\int_0^\infty\frac{\cos 2x}{(x^2+1)(x^2+9)}dx$.

Відповіді.

1. 0.
2. $2\pi i$.
3. $-\frac{\pi i}{121}$.
4. $2\pi i$.
5. $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.
6. $\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$.
7. $\pi\sqrt{2}$.
8. $\frac{5\pi}{6}$.
9. $\frac{\pi}{6}$.
10. $\frac{\pi}{2}$.
11. $\pi\sqrt{2}$.
12. $\frac{\pi}{3}$.
13. $\frac{\pi}{2}e^{-1/\sqrt{2}}\sin\frac{1}{\sqrt{2}}$.
14. $\frac{\pi}{4}(1+e^{-2})$.
15. $\pi e^{-2}\cos 2$.
16. $\frac{\pi}{32}(e^{-2}-\frac{1}{3}e^{-6})$.

VI. УЯВНІ ЧИСЛА І ЗМІННИЙ СТРУМ

6.1. Поняття комплексної амплітуди

В кінці XIX ст. комплексні числа отримали нове важливе застосування, що пов'язане з розрахунком кола змінного струму. До того часу для обчислення кіл постійного струму вже були розроблені зручні та прості прийоми, які опиралися на закон Ома і правила (закони) Кірхгофа. Це дозволило за допомогою засобів елементарної алгебри розв'язувати різні електротехнічні задачі.

Змінний струм, з яким на той час мали справу, був синусоїдальним. Це означає, що сила струму I в кожному з окремих частин кола змінюється за синусоїдальним законом, тобто виражається в кожен момент часу t формулою вигляду:

$$I = I_m sin(\omega t + \varphi),$$

де I_m – незмінне додатне число (амплітуда струму), ω – циклічна частота, φ – початкова фаза.

ЕРС кола також змінюється за синусоїдальним законом, тобто вона задається формулою вигляду:

$$\varepsilon = \varepsilon_m sin(\omega t + \varphi_0),$$

де ε_m – незмінне додатне число (амплітуда струму), ω – циклічна частота, φ_0 – початкова фаза. Сформулюємо дві найпростіші задачі для кіл змінного струму.

З а д а ч а 1. До затискачів електричного кола (рис. 1) прикладена синусоїдальна ЕРС $\varepsilon = \varepsilon_m sin(\omega t + \varphi_0)$. Коло містить послідовно увімкнені опір R, індуктивність L і ємність C. Якою буде сила струму в момент часу t?

З а д а ч а 2. До тискачів електричного кола (рис. 2) прикладена синусоїдальна ЕРС $\varepsilon = \varepsilon_m sin(\omega t + \varphi_0)$. Коло складається з двох паралельних віток, причому в одній з них послідовно увімкнено опір R1 та індуктивність L, а в другій – ємність C і опір R2. Якою буде сила струму в момент часу t в тій чистині ланцюга, що не є розгалуженою? Якою буде сила струму в кожній з віток кола в даний момент часу t?

У 1893 році молодий американський електротехнік Ч.П. Штейнмец запропонував і детально розробив спосіб розв'язання задач щодо розрахунку кіл змінного (синусоїдального) струму. Його засновано на використанні комплексних чисел і називається він методом комплексних амплітуд або символічним методом.

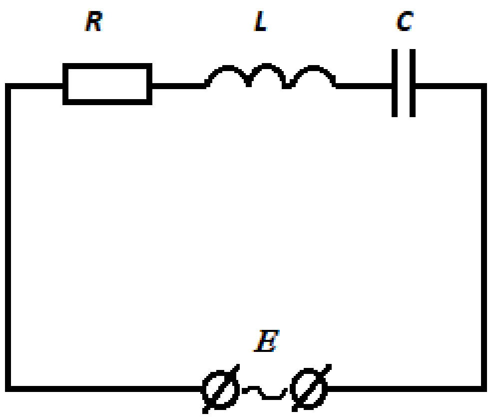


Рис. 1. Коло в задачі 1

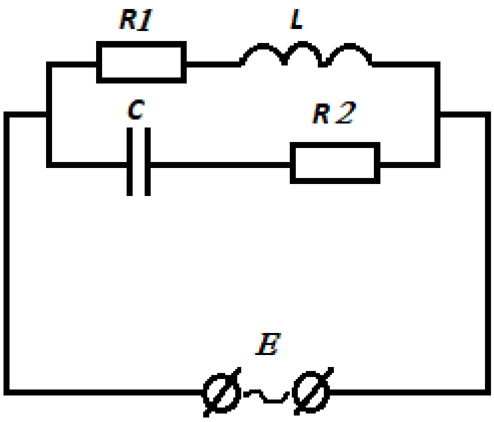


Рис. 2. Коло в задачі 2

Що таке комплексна амплітуда? Нехай сила струму I в колі змінюється за синусоїдальним законом, тобто задається формулою:

$$I = I_m sin(\omega t + \varphi), \tag{6.1}$$

де I_m – амплітуда струму, ω – частота, φ – початкова фаза.

За допомогою формули Ейлера величину I можна розглядати як уявну частину комплексної величини[1]

$$\dot{I} = I_m e^{i(\omega t+\varphi)}. \tag{6.2}$$

Отже,

$$I = Im\dot{I} = Im(I_m e^{i(\omega t+\varphi)}). \tag{6.3}$$

Величину $\dot{I}$ іноді називають комплексним струмом (комплекс струму).

Вочевидь,

$$\dot{I} = \dot{I}_m e^{i\omega t}, \tag{6.4}$$

де

$$\dot{I} = I_m e^{i\varphi}. \tag{6.5}$$

Величину $\dot{I}_m$ називають комплексною амплітудою струму.

[1] В літературі з електротехніки зазвичай позначають уявну одиницю літерою j (так, що $j^2 = -1$), зберігаючи літеру I для позначення сили струму. Отже, будемо використовувати $\dot{I}$ для уявної одиниці. Крапка над її заголовним варіантом цієї букви в електротехніці часто застосовується для величини, що приймає комплексні значення.

Якщо до електричного ланцюгу прикладена зовнішня ЕРС ε, що змінюється за синусоїдальним законом:

$$\varepsilon = \varepsilon_m sin(\omega t + \varphi_0), \tag{6.6}$$

то ε можна розглядати як уявну частину деякої комплексної величини

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon_m e^{i(\omega t+\varphi_0)}, \tag{6.7}$$

$\dot{\varepsilon}$ – комплекс ЕРС.

Величина

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon_m e^{i\varphi_0} \tag{6.8}$$

називається комплексною амплітудою ЕРС. Ясно, що

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_m e^{i\omega t}. \tag{6.9}$$

Корисно помітити, що у випадку, коли частота ω коливань струму є відомою, то задача знаходження сили струму I для довільного моменту часу t і завдання обчислення комплексної амплітуди $\dot{I}_m$ (за формулами (6.1) – (6.5) рівносильні; те саме можна сказати і про ЕРС (формули (6.6) – (6.9).

Приклад 6.1. В колі рухається змінний струм, величина якого (в амперах) I змінюється за синусоїдальним законом $I = 20sin(100t + \frac{\pi}{2})$. Якою є комплексна амплітуда цього струму? Яким є комплекс струму?

Розв'язання. З умови випливає, що амплітуда струму $I_m = 20$. Циклічна частота ω = $100с^{-1}$, початкова фаза $\varphi = \frac{\pi}{2}$ радіан. За формулами (6.5) або (6.4) знаходимо комплексну амплітуду $\dot{I}_m$ і комплекс струму: $\dot{I}_m$=$20e^{i\frac{\pi}{2}t}$=$20\, i$, $\dot{I} = 20i{\cdot}e^{i\cdot 100t}$.

Приклад 6.2. Комплексна амплітуда $\dot{\varepsilon}_m$ ЕРС джерела змінного струму дорівнює (–10+10 i), циклічна частота змінювання ЕРС ω = = $50с^{-1}$. Записати значення ЕРС в довільний момент часу t.

Розв'язання. Для запису комплексної амплітуди $\dot{\varepsilon}_m$ в показниковій формі знайдемо її модуль і аргумент:

$$|\dot{\varepsilon}_m| = \sqrt{(-10)^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}, \qquad arg\,\dot{\varepsilon}_m = \frac{3\pi}{4}.$$

Тому $\dot{\varepsilon}_m = 10\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$, амплітуда струму $I_m = 20$А, $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_m e^{i\omega t} =$ $= 10\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}{\cdot}e^{i\cdot 50t} = 10\sqrt{2}e^{i(50t+\frac{3\pi}{4})}$. Взявши від $\dot{\varepsilon}$ уявну частину, отримаємо: $\varepsilon = 10\sqrt{2}sin(50t + \frac{3\pi}{4})$.

6.2. Додавання синусоїдальних струмів

Нехай в деякому колі змінного струму є дві вітки, з'єднані паралельно. Припустимо, що по них проходять струми $I*(t)$ і $I**(t)$ однакової частоти ω. Тоді завдяки об'єднанню цих віток в одне коло по ньому буде проходити струм $I(t) = I*(t) + I**(t)$. Цей факт можна вважати встановленим експериментально. В подібній ситуації кажуть, що здійснено додавання струмів. Що саме відбувається під час складання струмів з їх комплексними амплітудами?

Нехай струми $I, I*, I**$ мають амплітуди відповідно $\dot{I}, \dot{I}*, \dot{I}**$. Тоді

$$I(t) = I*(t) + I**(t) = Im\dot{I}* + Im\dot{I}** = Im(\dot{I}*_m e^{i\omega t} + \dot{I}**_m e^{i\omega t})$$
$$== Im((\dot{I}*_m + \dot{I}**_m)e^{i\omega t}).$$

Звідси випливає, що I – періодична функція часу t з частотою ω і що

$$\dot{I}_m = \dot{I}*_m + \dot{I}**_m.$$

Відтак, хоча під час складання синусоїдальних струмів однієї частоти їх амплітуди, взагалі кажучи, не складаються, їх комплексні амплітуди додаються.

Приклад 6.3. Додати два струми з однаковою циклічною частотою $\omega = 50\text{с}^{-1}$, якщо відомо, що вони мають такі комплексні амплітуди (в амперах): $\dot{I}*_m = 15 + 20i$ і $\dot{I}**_m = 25 - 60i$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку комплексну амплітуду сумарного струму:

$$\dot{I}_m = \dot{I}*_m + \dot{I}**_m = 40 - 40i = 40\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Тому

$$\dot{I} = 40\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i50t} = 40\sqrt{2}e^{i(50t - \frac{\pi}{4})},$$

$$I = Im\dot{I} = 40\sqrt{2}sin(50t - \frac{\pi}{4}).$$

6.3. Комплексний опір

Нехай коло увімкнено до генератора з ЕРС, що змінюється за синусоїдальним законом з частотою ω. В ньому можуть трапитися активні опори, індуктивності (котушки), ємності (конденсатори). За Штейменцем поставимо у відповідність кожній котушці індуктивності L суто уявне число $R_L = i\omega L$, яке будемо називати комплексним опором котушки. Кожному конденсатору ємності C – суто уявне число $R_C =-\frac{1}{\omega C}\cdot i$ (комплексний опір) конденсатора. Крім того, якщо в колі є активний опір величини R, то поставимо йому у відповідність дійсне число R, яке назвемо комплексним опором активного опору.

Якщо коло складено з послідовно з'єднаних активних і реактивних опорів (резисторів, котушок, конденсаторів), то умовимося називати комплексним опором кола комплексне число Z, яке дорівнює сумі комплексних опорів складових елементів. Число Y, зворотне числу Z ($Y = 1/Z$), називають комплексною провідністю кола, величину $|Z|$ – повним опором кола:

$$|Z| = |R + R_L + R_C| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}. \qquad (6.10)$$

Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 6.4. До кола послідовно увімкнено реостат з опором R=20 Ом, конденсатор ємності C=0,000127 Ф і котушка індуктивності L=0,1275 Гн. Його під'єднано до генератора, який дає синусоїдальну ЕРС з частотою $f = 50$ Гц. Обчислити комплексний та повний опір кола.

Розв'язання. Маємо: $\omega = 2\pi f \approx 314$ с$^{-1}$. Комплексний опір Z обчислимо за формулою

$$Z = R + R_L + R_C,$$

де $R_L = i\omega L \approx 314 \cdot 0{,}1275i$; $R_C =-\frac{1}{\omega C}\cdot i \approx-\frac{1}{314\cdot 0{,}000127}i$.

Отже, $Z = 20 + i\left(314 \cdot 0{,}1275-\frac{1}{314\cdot 0{,}000127}\right) \approx (20 + 15i)$ Ом.

Повний опір знайдемо за формулою (6.10):

$$|Z| = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25 \text{ Ом}.$$

Нехай в колі змінного струму паралельно увімкнені два елементи, які мають комплексні опори відповідно Z_1 і Z_2. Комплексним опором такого кола умовимося називати число Z, що визначається із рівності $\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$. Звідси

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}. \qquad (6.11)$$

Якщо через Y, Y_1 і Y_2 позначити відповідно комплексну провідність всього кола, першого і другого елементів, то отримаємо: $Y = Y_1 + Y_2$.

Приклад 6.5. Коло складено з двох паралельних віток (рис. 2) і має наступні параметри: $R_1 = 19{,}7$ Ом, L=0,031 Гн; $R_2 = 44$ Ом, C=0,000096 Ф. Обчислити комплексні опори кожної вітки і повний опір всього кола, якщо по ньому проходить струм з частотою $f =$ 50 Гц.

Розв'язання. Маємо: $\omega = 2\pi f \approx 314 \text{ с}^{-1}$; $R_L = i\omega L \approx 9{,}8i$; $R_C = -\frac{i}{\omega C} \approx -33i$. Комплексний опір всього кола Z обчислюємо за формулою (6.11):

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(19{,}7 + 9{,}8i)(44 - 33i)}{63{,}7 - 23{,}2i} \approx 15{,}4 - 9{,}04i.$$

Визначимо повний опір всього кола:

$$|Z| = \sqrt{15{,}4^2 + 9{,}04^2} \approx 17{,}9 \text{ Ом}.$$

6.4. Закон Ома для кола із змінним струмом

Уявімо, що є коло, котре увімкнено до джерела відомої ЕРС ε, що змінюється за синусоїдальним законом. Виявляється, аби знайти силу струму в колі у довільний момент часу t, достатньо знати лише його комплексний опір Z.

Для випадку кола змінного струму Штейнмец підмітив факт, що є аналогічним закону Ома для кола постійного струму. Якщо коло, що є нерозгалуженим, в якому увімкнено лише послідовно активні і реактивні елементи, під'єднано до джерела синусоїдальної ЕРС з комплексною амплітудою, то

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{\varepsilon}_m}{Z}. \tag{6.12}$$

Формулу (6.12) можна отримати з наступних міркувань. Нехай електричне коло складено з активного опору R і індуктивності L, з'єднаних послідовно, і до контуру увімкнено зовнішню ЕРС ε, що змінюється за синусоїдальним законом. В колі встановиться деякий струм I, що змінюється за синусоїдальним законом. Виконується наступна залежність (як це зазначається в курсі фізики):

$$RI + L\frac{dI}{dt} = \varepsilon. \tag{6.13}$$

Задача полягає в тому, щоб за відомими константами R і L і дійсною функцією $\varepsilon = \varepsilon_m \sin(\omega t + \varphi)$ знайти невідому функцію I змінної t.

Замість того, аби шукати I, будемо спочатку визначати комплексний струм $\dot{I}$. Для цього розглянемо замість рівняння (6.13) наступне:

$$R\dot{I} + L\frac{d\dot{I}}{dt} = \dot{\varepsilon}, \tag{6.14}$$

де $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_m \cdot e^{i\omega t}$, $\dot{\varepsilon}_m = \varepsilon_m e^{i\varphi}$ ($\dot{\varepsilon}$ – комплексна ЕРС, а $\dot{I}$ – комплексний струм).

Якщо нам вдасться відшукати з рівняння (6.14) функцію $\dot{I} = \dot{I}(t)$, то далі легко знайдемо і $I(t)$, оскільки функція $I(t) = \mathrm{Im}(\dot{I}(t))$ буде, вочевидь, задовольняти рівняння (6.13).

Будемо шукати $\dot{I}(t)$ з виразу:

$\dot{I}(t) = \dot{I}_m e^{i\omega t}$,

де $\dot{I}_m$ – деяке невідоме комплексне число: $\dot{I}_m = I_m e^{i\psi}$ ($I_m > 0$).

Маємо:

$$\frac{d\dot{I}}{dt} = i\omega\dot{I}_m e^{i\omega t} = i\omega\dot{I}.$$

Рівняння (6.14) приймає вигляд:

$$R\dot{I}_m e^{i\omega t} + i\omega\dot{I}_m e^{i\omega t}L = \dot{\varepsilon}_m \cdot e^{i\omega t}$$

або

$$R\dot{I}_m + i\omega\dot{I}_m L = \dot{\varepsilon}_m.$$

Звідси випливає, що

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{\varepsilon}_m}{R + i\omega L}.$$

Оскільки $R + i\omega L = R + R_L = Z$, то $\dot{I}_m = \frac{\dot{\varepsilon}_m}{Z}$, що і треба було отримати.

Отже, обчислити силу струму для будь-якого моменту часу t можна за наступним алгоритмом:

1. За відомими параметрами $\varepsilon_m, \varphi_0, \omega$ синусоїдальної ЕРС ε ($\varepsilon = \varepsilon_m \sin(\omega t + \varphi_0)$) знаходимо комплексну амплітуду ЕРС $\dot{\varepsilon}_m$ за формулою $\dot{\varepsilon}_m = \varepsilon_m e^{i\varphi_0}$.

2. Визначаємо комплексний опір Z за формулою

$$Z = R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}.$$

Для спрощення подальших обчислень доцільно Z подавати в показниковій формі.

3. Застосовуючи формулу (6.12), обчислюємо комплексну амплітуду струму $\dot{I}_m$, далі за формулами (6.4) і (6.3) визначаємо силу струму I в колі в довільний момент часу t.

Приклад 6.6. В колі змінного струму під впливом синусоїдальної ЕРС $\varepsilon = 220e^{i\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)}$ В проходить струм $I = 22e^{i\left(\omega t + \frac{\pi}{5}\right)}$ А. Знайти його комплексний опір Z і повний опір кола.

Розв'язання. Попередньо знайдемо комплексну амплітуду $\dot{I}_m$ струму і комплексну амплітуру ЕРС ε_m. З умови випливає, що амплітуда струму $I_m = 22$ А, початкова фаза $\varphi_0 = \frac{\pi}{5}$, амплітуда ЕРС $\varepsilon_m = 220$, початкова фаза $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$. Тоді

$$\dot{I}_m = I_m e^{i\varphi_1} = 22e^{i\frac{\pi}{5}};\ \dot{\varepsilon}_m = 220e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

За формулою (6.12) знаходимо комплексний опір Z :

$$Z = \frac{\dot{\varepsilon}_m}{\dot{I}_m} = \frac{220e^{i\frac{\pi}{4}}}{22e^{i\frac{\pi}{5}}} = 10e^{i\frac{\pi}{20}}.$$

Повний опір $|Z| = \left|10e^{i\frac{\pi}{20}}\right| = 10$ Ом.

Приклад 6.7. Котушку, активний опір якої $R = 11$ Ом, а індуктивність L= 0,136 Гн, увімкнено до джерела, комплексна ЕРС котрого $\varepsilon_m = 220e^{i314t}$ В. Визначити комплексну провідність Y котушки та миттєве значення сили струму в ній.

Розв'язання. З виразу комплексної ЕРС ε встановлюємо частоту, початкову фазу і комплексну амплітуду ЕРС: $\omega = 314$ с$^{-1}$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{\varepsilon}_m = 220e^{i0} = 220$ В. Комплексний опір Z котушки знаходимо за формулою $Z = R + R_L$, де $R_L = i\omega L$. Маємо: $R_L = 42{,}6i$. $Z = 11 + 42{,}6i$.

Комплексна провідність котушки $Y = \frac{1}{Z} \approx 0{,}0057 - 0{,}022i$. В показниковій формі $Y = 0{,}0227e^{-i\frac{5\pi}{12}}$.

За формулою (6.12) обчислюємо комплексну амплітуду $\dot{I}_m$ струму:

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{\varepsilon}_m}{Z} = \dot{\varepsilon}_m Y = 220e^{i0} \cdot 0{,}0227e^{-i\frac{5\pi}{12}} \approx 5e^{-i\frac{5\pi}{12}}.$$

Тоді за формулами (6.4) та (6.3) отримаємо:

$$\dot{I} = 5e^{-i\frac{5\pi}{12}} \cdot e^{i314t} = 5e^{i\left(314t - \frac{5\pi}{12}\right)},$$

$$I = \mathrm{Im}\dot{I} = 5\sin\left(314t - \frac{5\pi}{12}\right) \text{ А.}$$

Вправи.

1. Запишіть вираз комплексної амплітуди струму (в показниковій і алгебраїчній формі), якщо I_m= 6 А, φ = 30°.

2. Комплексна амплітуда струму $\dot{I}_m = 15e^{-i\frac{\pi}{9}}$. Запишіть миттєве значення сили цього струму в момент часу *t*, якщо його частота дорівнює ω.

3. Котушка має активний опір *R* = 40 Ом і індуктивність *L* = 0,01 Гн. Визначте повний опір котушки, якщо по ній проходить змінний струм з частотою $f = 100$ Гц.

4. У коло послідовно увімкнено дві котушки, що мають опори $R_1 = 20$ Ом і $R_2 = 30$ Ом та індуктивності L_1 = 0,01 Гн і L_2 = 0,0218 Гн. Знайдіть його повний комплексний опір і комплексну провідність, якщо він під'єднаний до джерела синусоїдальної ЕРС з частотою $f = 50$ Гц.

5. У коло паралельно увімкнено реостат, який має опір *R* = 2 Ом, і котушка індуктивності *L* = 0,02 Гн. Коло під'єднано до джерела, що дає синусоїдальну ЕРС з частотою $f = 50$ Гц. Обчисліть його комплексний і повний опір.

6. Коло, що складається з послідовно увімкнених реостата з активним опором *R* = 25 Ом і конденсатора ємністю *C* = 0,000065 Ф, підключено до джерела, комплексна ЕРС якого ε = $220e^{i\cdot 314\mathrm{t}}$ В. Визначте комплексний опір *Z* кола і значення сили струму *I* у ньому в будь-який момент часу *t*.

Відповіді. **1**. $\dot{I}_m = 6e^{i\frac{\pi}{6}} = 3\sqrt{3} + 3i$. **2**. $I = 15\sin(\omega t - \frac{\pi}{9})$. **3**. $R \approx$ 40,5 Ом. **4**. $R \approx 51$ Ом. **5**. $Z = 1{,}79 + 0{,}57i$; $|Z| \approx 1{,}88$ Ом. **6**. $Z = 55e^{-i\frac{7\pi}{20}} \approx 25 - 49i$; $I = 4\sin\left(314t + \frac{7\pi}{20}\right)$.

VII. ЗАСТОСУВАННЯ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНИХ ФУНКЦІЙ В ЦИФРОВІЙ ОБРОБЦІ СИГНАЛІВ

4.7. Методи математичного опису сигналів дискретних систем на комплексній площині (в частотній області)

Найбільш загальним для аналогових сигналів є операторний метод їх опису на комплексній площині:

$$X_a(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt, \tag{7.1}$$

де $s = \sigma + i\omega$ – комплексний оператор Лапласа або комплексна частота.

Перетворення Лапласа на уявній осі $i\omega$ (осі частот) відповідає перетворенн. Фур'є аналогового сигналу, який визначає його спектр:

$$X_a(i\omega) = \int_0^\infty x(t)e^{-i\omega t}dt. \tag{7.2}$$

Для дискретних сигналів перетворення Лапласа отримуємо з (7.1) замінами: $t \to nT_д, \int \quad \to \sum \quad , dt \to 1$, тобто дискретизацією (7.1) за часом:

$$X(s) = \sum_{n=0}^\infty x(n)e^{-snT_д}. \tag{7.3}$$

Однак на відміну від аналогових сигналів і систем перетворення (7.1) не приводить до раціональних функцій під час математичного опису дискретних сигналів і систем на комплексній S-площині. Цій важливій умові відповідає Z-перетворення дискретних сигналів, яке визначається співвідношенням

$$\mathrm{Z}(x(n)) = X(z) = \sum_{n=0}^\infty x(n) \cdot z^{-n}. \tag{7.4}$$

Комплексна змінна Z пов'язана зі змінною S (оператором Лапласа): $z = e^{sT_д} = a + ib = e^{\sigma T_д} \cdot e^{i\omega T_д}$. Цей зв'язок ілюструється відображеннями точок комплексної S-площини на комплексну Z-площину (рис. 7.1). Їх особливістю є циклічність за змінною ω, обумовлена періодичністю комплексної експоненти $\cdot\, e^{i\omega T_д}$ з періодом $\omega_д$:

$$z = e^{\sigma T_д} \cdot e^{i(\omega + k\omega_д)\cdot T_д};\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Так, точки уявної осі $i \cdot \omega$ S-площини ($\sigma = 0$) циклічно переносяться на коло одиничного радіуса Z-площини; кожній смузі частот шириною $\omega_д$ при цьому відповідає один обхід вказаного кола.

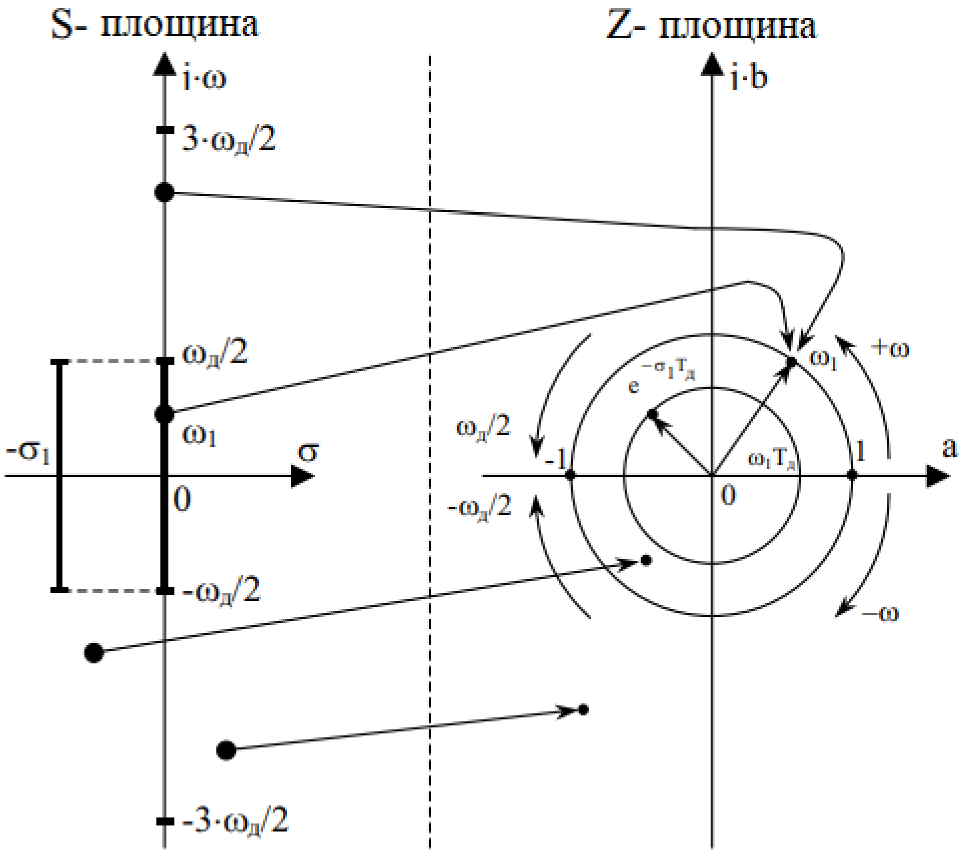


Рис. 7.1. Відображення точок комплексної S-площини на комплексній Z-площині

Однозначне відображення точок має місце в основній смузі частот $\pm\omega_д/2$. Ліва S-півплощина ($\sigma < 0$) згортається всередину кола одиничного радіуса Z-площини, а права S-півплощина ($\sigma > 0$) відображується за його межі.

Z-перетворення, що обчислюється на одиничному колі, приводить до перетворення Фур'є дискретного сигналу

$$X(i\cdot\omega) = T_д \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\cdot T_д)\cdot e^{-i\cdot\omega\cdot n\cdot T_д},$$

який визначає його спектр:

$$X(z)\big|_{z=e^{i\cdot\omega\cdot T_д}} = X(i\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\cdot e^{-i\cdot\omega\cdot n\cdot T_д}. \qquad (7.5)$$

Слід зазначити, що Z-перетворення, як і перетворення Лапласа, може бути одностороннім – для послідовностей $x(n) = 0$ при $n < 0$, так і двостороннім, якщо $x(n) \neq 0$ при $n < 0$; в цьому випадку границі сумування по n беруться від $-\infty$ до $+\infty$.

Властивості Z-перетворення:

лінійність: $\mathrm{Z}(a_1x_1(n) + a_2x_2(n)) = a_1\mathrm{Z}(x_1(n)) + a_2\mathrm{Z}(x_2(n))$;

затримки: $\mathrm{Z}(x(n-m)) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-m)\cdot z^{-(n-m)}\cdot z^{-m} = X(z)\cdot z^{-m}$;

згортки: $y(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x_1(n)\cdot x_2(n-m)$;

добутку: $y(n) = x_1(n) * x_2(n)$; $Y(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(\vartheta)\cdot X_2(\vartheta)\frac{d\vartheta}{\vartheta}$.

Отже, Z-перетворення затриманого на m відліків дискретного сигналу $x(n-m)$ дорівнює добутку Z-образу $X(z)$ незатриманого сигналу $x(n)$ на множник затримки z^{-m}. Цим пояснюється використання символу z^{-m} для позначення елемента затримки на структурних схемах систем ЦОС (рис. 7.2).

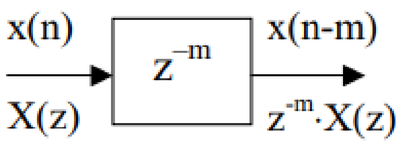


Рис. 7.2. Позначення елемента затримки на структурних схемах

Z-перетворення згортки двох послідовностей дорівнює добутку Z-перетворень цих послідовностей.

$$Y(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}x_1(m)\cdot x_2(n-m)\,z^{-(n-m)}z^{-m}=X_1(z)\cdot X_2(z).$$

Z-перетворення добутку двох послідовностей дорівнює комплексній згортці Z-образів цих послідовностей, де ϑ – змінна інтегрування, C – контур інтегрування, який охоплює усі особливі точки підінтегральної функції.

На основі цієї властивості Z-перетворення добутку двох послідовностей доводиться важлива для практики рівність Парсеваля, яка має той же зміст, що й для аналогових сигналів, і означає тотожність часової і частотної енергії сигналу:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|x(n\cdot T_{д})\right|^2=\frac{T_{д}}{\pi}\oint_0^{\omega_{д}/2}|X(i\cdot\omega)|^2d\omega.$$

Аналогічною властивістю володіє й перетворення Фур'є дискретного сигналу.

Зворотне Z-перетворення і перетворення Фур'є визначаються виразами:

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(i\cdot\lambda)e^{i\cdot\lambda\cdot n}\,d\lambda,$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C X(z)\cdot z^{n-1}dz=\sum_k res_k[X(z)\cdot z^{n-1}]\Bigg|_{z=z_{pk}}.$$

Тут позначено: $\lambda=\omega\cdot T_{д}$ – відносна частота, яка ще називається цифровою частотою; res – лишки підінтегральної функції $F(z)=X(z)\cdot z^{n-1}$ в особливих точках, що охоплюється контуром C, за яким ведеться інтегрування. Як зазначалося в попередніх розділах, для дробово-раціональних функцій $X(z)=P(z)/Q(z)$такими особливими точками є корені полінома $Q(z)$ – полюси z_{pk} функції $X(z)$.

Існують спеціальні таблиці зворотних Z-перетворень для широкого кола дискретних функцій. Відображення або подання нулів і полюсів на комплексній Z-площині використовується як геометрична інтерпретація Z-образів дискретних сигналів.

Детальніше про цифрову обробку сигналів можна дізнатися з [19, 20].

4.8. Квадратурні сигнали, їх практичні застосування

З використанням комплексних чисел будується теорія квадратурних (двовимірних) сигналів, які широко використовуються в усіх галузях науки і практики, оскільки комплексні синусоїди є розв'язками лінійних диференціальних рівнянь другого порядку, що застосовуються для опису різних явищ природи. Цікавими квадратурні сигнали є і тому, що вони наявні в аналізі Фур'є, в квадратурній обробці і реалізації сучасних систем зв'язку, системах цифрової обробки сигналів (ЦОС) таких, як:

- радіолокаційні,
- вимірювання різниці часу приходу сигналів в радіонавігації,
- когерентні вимірювальні,
- формування променю антени,
- односмугові модулятори.

Розглянемо комплексну величину, яка є функцією часу, а саме число, модуль якого дорівнює одиниці, а фазовий кут збільшується з часом. Це комплексне число репрезентується точкою $e^{i2\pi f_0 t}$, яку показано на рис. 7.3,а. Член $2\pi f_0$ – частота, що вимірюється в радіанах за секунду і відповідає частоті f_0 періодів в секунду, котра визначається в герцах. Із збільшенням часу t фазовий кут комплексного числа збільшується, і воно описує коло з центром на початку координат комплексної площини в напрямку проти ходу годинникової стрілки. На рис. 7.3, а це число подано жирної точкою, зафіксованою в деякий довільний момент часу. Якщо, скажімо, частота f_0 = 2 Гц, то точка буде обходити коло два рази за секунду. Комплексне число $e^{-j2\pi f_0 t}$ (біла точка) обертається за ходом годинникової стрілки, оскільки фазовий кут із зростанням часу стає все більше від'ємним.

Два комплексні вирази $e^{i2\pi f_0 t}$ і $e^{-i2\pi f_0 t}$ називаються *квадратурними сигналами*. Кожен з них має дійсну і уявну частини, і обидва вони є функціями часу. Ці вирази $e^{i2\pi f_0 t}$ і $e^{-i2\pi f_0 t}$ в літературі часто називають *комплексними експонентами*.

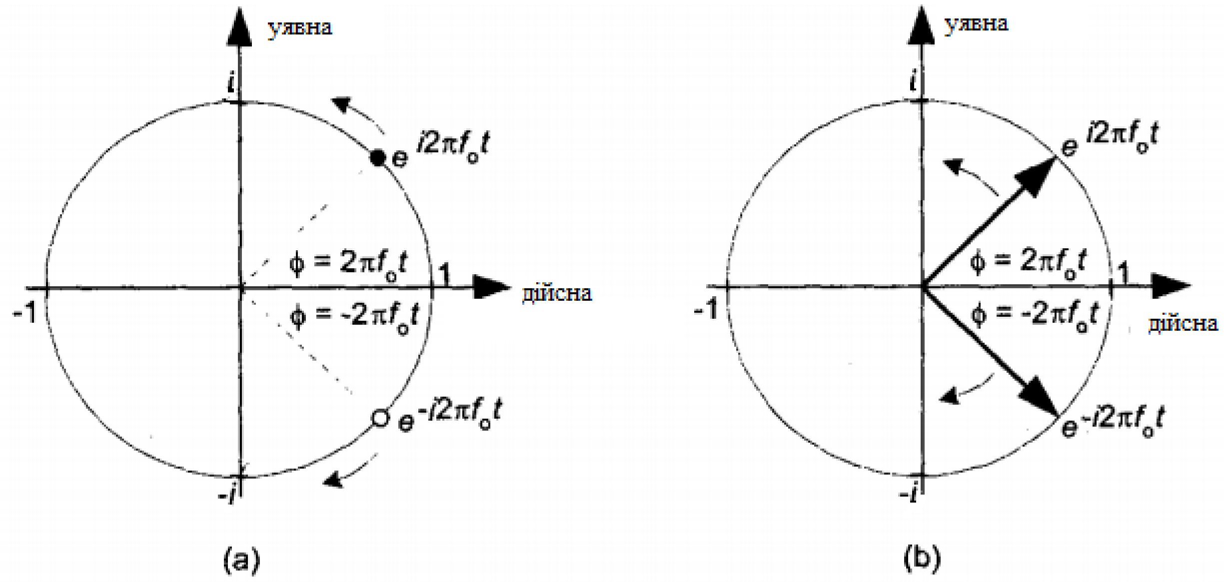


Рис. 7.3. Миттєве зображення двох комплексних чисел, показники степеня яких змінюються з часом: а) числа показані точками; b) числа зображені у вигляді фазорів

Квадратурні сигнали $e^{i2\pi f_0 t}$ і $e^{-i2\pi f_0 t}$ можна подати як кінці фазорів, що обертаються у протилежних напрямках, як це наведено на рис. 7.3.b.

Для повнішого розуміння поведінки простого квадратурного сигналу на рис. 7.4 зображена тривимірна траєкторія сигналу $e^{i2\pi f_0 t}$, яку він описує з часом. Видно, що $e^{i2\pi f_0 t}$ описує спіральну траєкторію, орієнтовану згідно з правилом гвинта, вісь якої співпадає з віссю часу. Дійсна і уявна частини $e^{i2\pi f_0 t}$ на рисунку зображені як синусна та косинусна проєкції.

Для розуміння фізичного змісту всього згаданого вище треба пам'ятати, що неперервний квадратурний сигнал $e^{i2\pi f_0 t} = \cos 2\pi f_0 t + i\sin 2\pi f_0 t$ – не тільки математична конструкція. Можна генерувати $e^{i2\pi f_0 t}$ в одній лабораторії і передавати його в іншу. Для цього достатньо двох генераторів синусоїдальних сигналів однакової частоти f_0 (однак слід певним чином синхронізувати ці два генератори, аби різниця фаз сигналів, що генеруються, складала 90°).

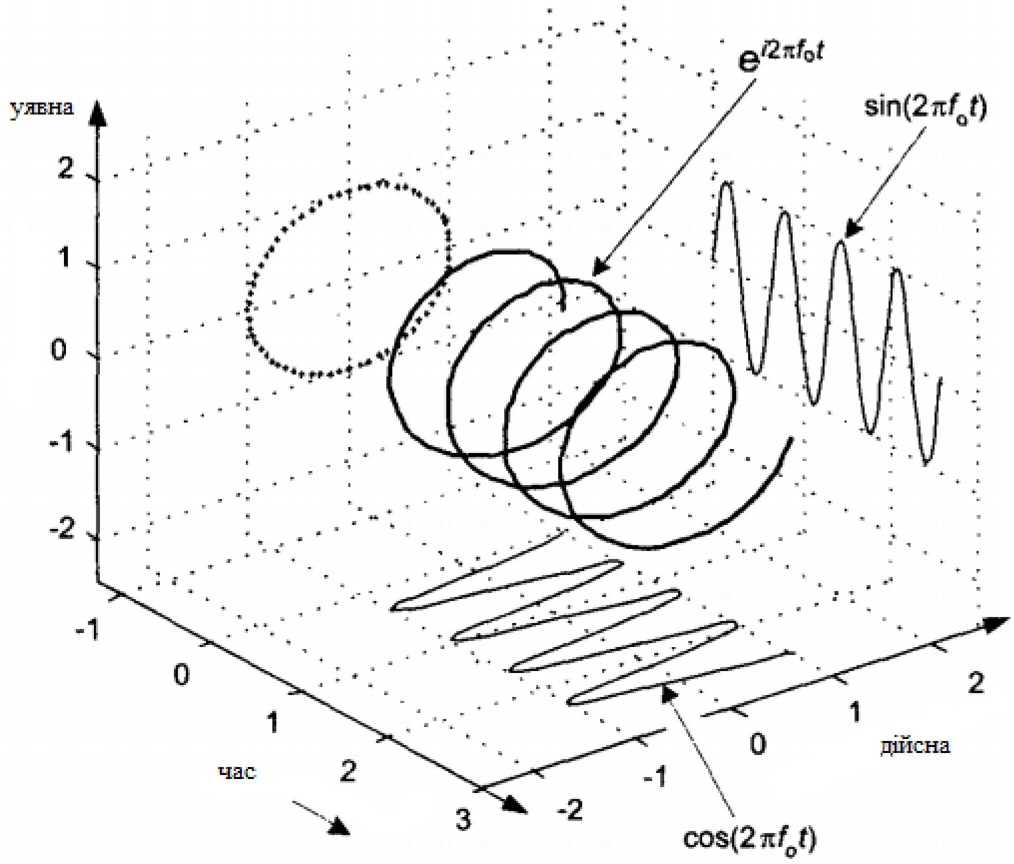


Рис. 7.4. Рух $e^{i2\pi f_0 t}$ з часом

Далі необхідно приєднати коаксіальні кабелі до вихідних роз'ємів генераторів і протягнути їх до місця призначення, помічаючи надписами cos і sin для косинусоїдального і синусоїдального сигналів відповідно (рис. 7.5).

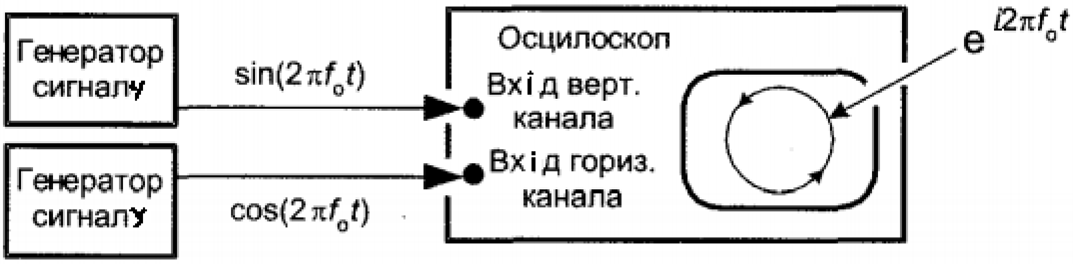


Рис. 7.5. Візуалізація квадратурного сигналу за допомогою осцилоскопа

Реалізація оператора i під час роботи з квадратурними сигналами складається у тому, як інтерпретуються два сигнали по відношенню одне до одного. Їх слід розглядати як ортогональні, таким чином, що дійсний сигнал $\cos 2\pi f_0 t$ подається як напрямок схід-захід, а дійсний сигнал $\sin 2\pi f_0 t$ є ортогональним йому напрямком північ-південь.

Отже, оператор i реалізується порядком підключення кабелів до осцилоскопа. Дійсний косинусоїдальний сигнал керує відхиленням променю за горизонталлю, а дійсний синусоїдальний сигнал керує відхиленням променя за вертикаллю. В результаті формується двовимірний квадратурний сигнал, значення якого подається як миттєве положення точки на екрані осцилоскопа.

Приклад, наведений на рис. 7.5, демонструє важливу характеристику квадратурних сигналів: у той час, як дійсні сигнали можуть передаватися по одному проводу, для передачі квадратурних сигналів завжди потрібні два.

Більше інформації про квадратурні сигнали, їх опис в частотній області, а також квадратурне змішування, комплексне знижувальне перетворення і квадратурну дискретизацію – процес оцифровки неперервного (аналогового) смугового сигналу з одночасним знижувальним перетворенням його спектра можна знайти в [20].

4.9. Дискретне перетворення Гільберта

Дискретне преретворення Гільберта (ПГ) – це процедура генерації комплексних сигналів з дійсних сигналів. Наведемо лише визначення ПГ і наведемо перелік галузей його застосування, оскільки детальне вивчення цього потужного математичного апарата не передбачене теоретичним матеріалом нашого посібника.

Як показано на рис. 7.6, перетворення Гільберта – це математична процедура, що виконується над дійсним сигналом $x_r(t)$ і дає новий дійсний сигнал $x_{ht}(t)$. При цьому $x_{ht}(t)$ є зміщеною за фазою на 90° версією сигналу $x_r(t)$. Змінні на рис. 7.6 визначені наступним чином:

$x_r(t)$ – дійсний неперервний вхідний сигнал в часовій області;

$h(t)$ – імпульсна характеристика перетворення Гільберта;

$x_{ht}(t)$ – ПГ $x_r(t)$ – також дійсний сигнал в часовій області;

X_r(ω) – перетворення Фур'є дійсного вхідного сигналу $x_r(t)$;

H(ω) – частотна характеристика (комплексна) перетворення Гільберта;

X_{ht}(ω) – перетворення Фур'є вихідного сигналу $x_{ht}(t)$;

ω – неперервна частота в радіанах в секунду;

T – неперервний час в секундах.

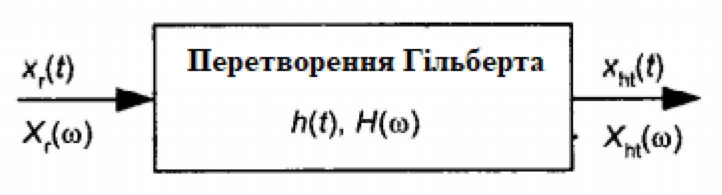


Рис. 7.6. Позначення, що використовується для встановлення неперервного перетворення Гільберта

Виявляється, що $x_{ht}(t) = h(t)*x_r(t)$, де символ * означає згортку. Крім того, можна визначити спектр $x_{ht}(t)$ як $X_{ht}(\omega) = \mathrm{H}(\omega)X_r(\omega)$.

Стисле пояснення того, чим відрізняється новий сигнал $x_{ht}(t)$ від вхідного $x_r(t)$, можна отримати, зв'язавши перетворення Фур'є цих сигналів $X_r(\omega)$ і $X_{ht}(\omega)$. Всі компоненти $x_{ht}(t)$ з додатними частотами дорівнюють компонентам $x_r(t)$ з додатними частотами, зміщеними по фазі на –90°. А всі компоненти $x_{ht}(t)$ з від'ємними частотами дорівнюють компонентам $x_r(t)$ з від'ємними частотами, зрушеними по фазі на +90°. Нагадаємо, що $X_{ht}(\omega) = \mathrm{H}(\omega)X_r(\omega)$, де $\mathrm{H}(\omega) =- i$ для додатних частот і $\mathrm{H}(\omega) = i$ для від'ємних частот. Відмінна від нуля уявна частина $\mathrm{H}(\omega)$ показана на рис. 7.7, a.

Для повноти опису комплексної H(ω) (рис. 7.7,b) вона подана такою, що плаває у тривимірному просторі. Товста лінія зображує комплексну $\mathrm{H}(\omega)$. В правій частині міститься вертикальна площина, на яку можна спроєктувати уявну частину $\mathrm{H}(\omega)$.

В нижній частині показана горизонтальна площина, на яку можна спроєктувати дійсну частину $\mathrm{H}(\omega)$. В термінах декартових координат ми говоримо, що H(ω) = 0 + i1 для від'ємних частот і H(ω) = 0 – i1 для додатних частот.

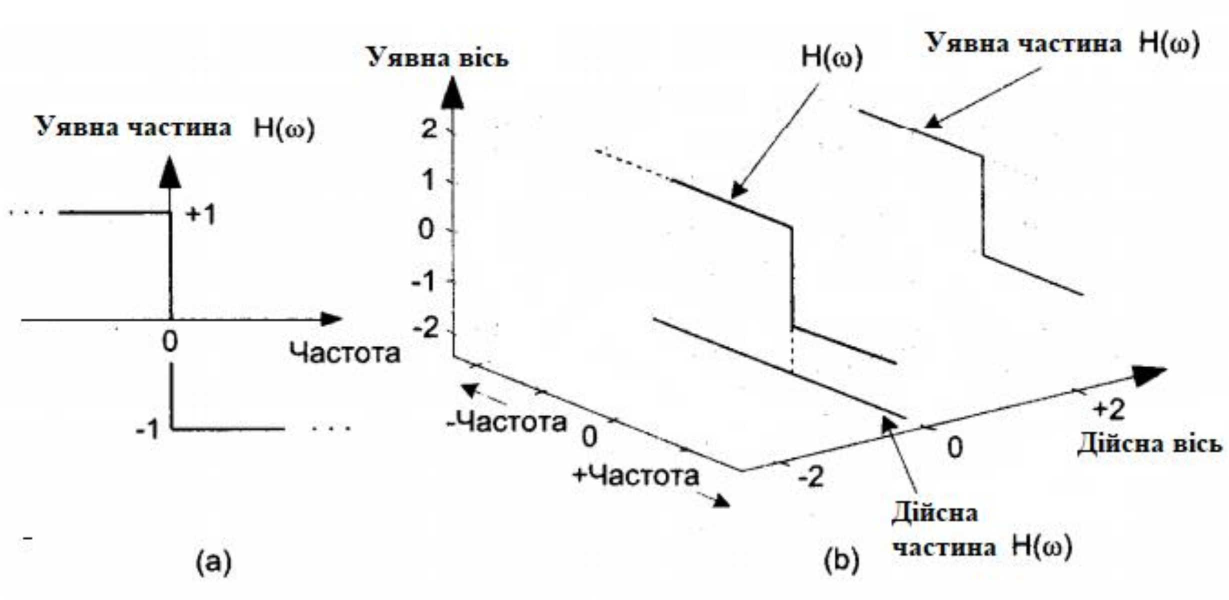


Рис. 7.7. Комплексна частотна характеристика H(ω)

На рис. 7.8,a наведене тривимірне подання дійсного косинусоїдального сигнала cosωt в часовій і частотній областях. Рис. 7.8,b показує, що ПГ cosωt дає сигнал sinωt.

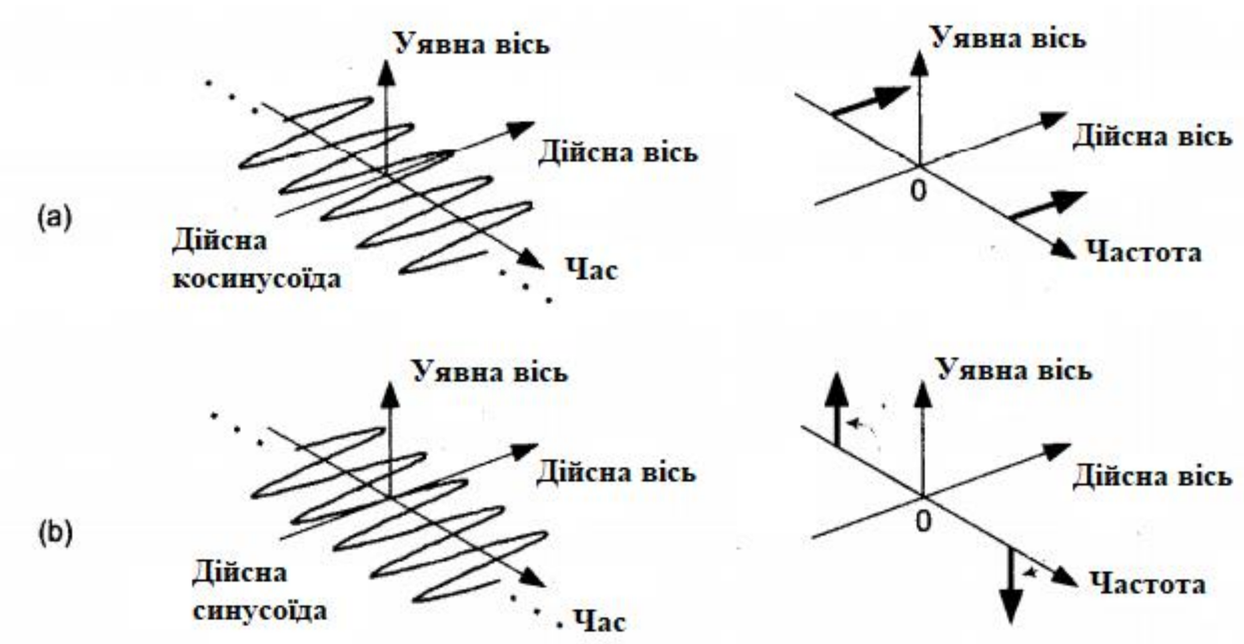


Рис. 7.8. Перетворення Гільберта: a) cosωt; bйого перетворення sinωt

Комплексний спектр в правій частині рис. 7.8,b демонструє, як ПГ повертає компонент косинусоїдального сигналу з додатною частотою на $-\ i$, а його компонент з від'ємною частотою – на $+\ i$. Можна впевнитися у тому, що за означенням операція множення на + i є звичайним поворотом спектрального компонента на + 90° проти годинникової стрілки навколо частотної осі. Довжина вектора спектрального компонента дорівнює половині амплітуди вхідного косинусоїдального сигналу. Ми передбачаємо, що синусоїди в правій частині рисунка існують для всіх значень часу, і це дозволяє зображати їх спектр у вигляді нескінченних вузьких імпульсів в частотній області.

Використання комплексних сигналів замість дійсних спрощує багато операцій обробки сигналів і підвищує їх ефективність. Перетворення Гільберта застосовується в таких галузях, як:

– Квадратурна модуляція і демодуляція (зв'язок);
– Автоматичне регулювання підсилення;
– Аналіз дво- та тривимірних комплексних сигналів;
– Побудова зображень в медицині, аналіз сейсмічних даних і океанічних хвиль;
– Оцінка миттєвої частоти;
– Обробка сигналів в радарах/сонарах і аналіз в часовій області з використанням вейвлетів;
– Вимірювання затримки прийому сигналів;
– Приймачі телебачення високої чіткості (HDTV);
– Акустичні системи, комнатна акустика і аналіз механічних вібрацій;
– Стиснення аудіосигналів та кольорових зображень;
– Аналіз нелінійних і нестаціонарних систем.

В усіх цих застосуваннях ПГ використовується або для генерації, або для вимірювання комплексних сигналів в часовій області, а саме тут проявляється сила перетворення Гільберта.

VIII. УЗАГАЛЬНЕННЯ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

Числа натуральні, цілі, раціональні, дійсні, комплексні... Що далі? Адже якщо комплексні виявилися такими корисними і знайшли так багато застосувань, то відкриття інших, більш загальних видів чисел теж є перспективною справою.

У цьому розділі ми розповімо про найбільш важливі з узагальнень комплексних чисел, а саме про кватерніони і гіперкомплексні системи.

8.1. Кватерніони

Як тільки У. Гамільтон (в 1833 р.) зрозумів, що комплексні – це лише впорядковані пари дійсних чисел, для яких певним чином введені арифметичні операції, він задумався над тим, як побудувати нову систему, де б числа являти собою впорядковані трійки дійсних. Яким чином найкраще ввести для них арифметичні дії? Подібно до того, як для комплексних чисел є зручним запис вигляду $a + bi$, де i – уявна одиниця, для нових чисел Гамільтон запропонував запис вигляду $a + bi + cj$, де i і j – дві різні уявні одиниці, котрі називаються триплетами (з латинської означає «трійка»). Без труднощів були введені поняття суми і різниці триплетів. Основним тут було слово п о к о м п о н е н т н о.

Але що назвати добутком двох триплетів? Гамільтон шукав для нової системи чисел таке правило множення, аби зберегти закономірності арифметики – ті самі, які добре відомі для раціональних, дійсних і навіть комплексних чисел. Звісно, хотілося, щоб для нових чисел збереглися асоціативний закон, не тільки для складання, а й для множення: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, дистрибутивний (розподільний) закон множення щодо складання $a(b + c) = ab + ac$ і комутативний закон як для додавання $a + b = b + a$, так і для множення $ab = ba$. На перше місце Гамільтон ставив таку властивість: «Якщо $a \neq 0$, то рівняння $ax = b$ мусить мати і до того ж єдиний розв’язок». Зокрема, якщо добуток двох чисел a і x дорівнює нулю ($ax = 0$), причому $a \neq 0$, то число x має виявитися нулем. Саме тут і виникла у Гамільтона проблема: який би спосіб множення триплетів він не підбирав, завжди виявлялися такі пари ненулевих триплетів, які в добутку давали нуль: $a \neq 0$, $x \neq 0$, але $ax = 0$. Гамільтон перебрав десятки варіантів множення триплетів, але підібрати спосіб, який не має вказаного недоліку, йому так і не вдалося (багато пізніше було доведено, що такого правила множення триплетів НЕ існує).

Вихід був знайдений, коли восени 1843 р. Гамільтон запропонував розглядати числову систему не з трьома, а з чотирма (!) одиницями (одна дійсна і три уявних):

$$a + bi + cj + dk, \tag{8.1}$$

де i, j, k – уявні одиниці. Задати такий вираз – це те саме, що задати четвірку дійсних чисел a, b, c, d, розташованих в зазначеному порядку.

Числа вигляду (8.1) він назвав к в а т е р н і о н а м и (від латинського слова quaterni, що означає «по чотири»). Тоді ж запропонував наступне правило множення уявних одиниць:

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = i \cdot j \cdot k =-1.$$

Суть свого відкриття Гамільтон виклав в 1844 р. в статті «Про кватерніони або про нову систему уявних в алгебрі». Після відкриття кватерніонів він зайнявся систематичним вивченням їх властивостей і застосувань.

У 1845 р. вчений відмовився від посади президента Ірландської академії наук, аби цілком присвятити себе вивченню кватерніонов. Протягом двох десятиліть математик публікує 109 наукових робіт, у тому числі дві фундаментальні монографії «Лекції про кватерніони» і «Елементи теорії кватерніонів».

Відкриття кватерніонів дуже сильно вплинуло на математиків минулого століття. Нарпиклад, А. Пуанкаре (1854 – 1912) писав: «Це була революція в арифметиці, подібна до тієї, яку зробив Лобачевський в геометрії».

Теорія кватерніонов захопила багатьох вчених. Тільки в XIX ст. було видано майже 600 наукових робіт, присвячених ним. Кватерніони успішно застосовувались до розв'язання різних задач з фізики, геометрії, теорії чисел. У деяких університетах їх викладання стало обов'язковим, з ними знайомили учнів у багатьох середніх школах. У 1895 р. була організована Міжнародна асоціація сприяння вивченню кватерніонів і споріднених систем.

Широке застосування нині знаходить векторне числення, яке виникло на базі обчислення кватерніонів. Вектори були введені Гамільтоном як кватерніони спеціального вигляду. Винахід слугував імпульсом для розробки низки важливих розділів сучасної математики, зокрема теорії матриць, багатовимірної геометрії та ін. Кватерніони і запропоновані пізніше подібні з ними числові системи успішно використовуються в теорії чисел, геометрії, механіці і теоретичній фізиці.

Саме в кватерніонах англійський фізик Дж. К. Максвелл (1831 – 1879) подав компактний запис своїх знаменитих рівнянь, які стали основою теорії електромагнетизму.

Обчислення кватерніонів є особливо зручним математичним апаратом для спеціальної теорії відносності. Арифметика і геометрія кватерніонів викладена, наприклад, в [14]. Тут наведемо лише найпростіші поняття про них і факти числення.

Розглянемо вираз вигляду:

$$q = q_0 + q_1 \cdot i + q_2 \cdot j + q_3 \cdot k, \qquad (8.2)$$

де q_0, q_1, q_2, q_3 – дійсні числа, а i, j, k – позначення, які називають у я в н и м и о д и н и ц я м и (відповідно перша, друга , третя). Знак «+» використовується у виразі лише для об'єднання в одне ціле впорядкованої четвірки дійсних чисел q_0, q_1, q_2, q_3. Вирази вигляду (8.2) будемо вважати числами і називати к в а т е р н і о н а м и, якщо задані правила, за якими вони дорівнюють один одному, їх можна складати, віднімати, множити і ділити так, як вказано нижче. Дійсні числа q_0, q_1, q_2, q_3 у цьому випадку називають к о м п о н е н т а м и кватерніона.

1. Два катерніони $q = q_0 + q_1 \cdot i + q_2 \cdot j + q_3 \cdot k$ і $q' = q'_0 + q'_1 \cdot i + q'_2 \cdot j + q'_3 \cdot k$ дорівнюють одне одному, якщо можна поставити знак рівності між їх відповідними компонентами.

2. $q + q' = (q_0 + q'_0) + (q_1 + q'_1) \cdot i + (q_2 + q'_2) \cdot j + (q_3 + q'_3) \cdot k,$

3. $q - q' = (q_0 - q'_0) + (q_1 - q'_1) \cdot i + (q_2 - q'_2) \cdot j + (q_3 - q'_3) \cdot k,$

4. Правило множення Гамільтона: два кватерніони можна помножити як звичайні многочлени; при цьому добутки виду $i \cdot j$, $j \cdot k$, $k \cdot j$ і т.п. визначаються згідно з табл. 1 (нагадаємо, що трійку i, j, k в векторній алгебрі вважають правою і правила множення цих уявних одиниць є аналогічними правилам векторного добутку одиничних декартових векторів).

Таблиця 1. Добуток уявних одиниць в кватерніонах

	Другий множник				
Перший множник		1	i	j	k
	1	1	i	j	k
	i	i	–1	k	$-j$
	j	j	$-k$	–1	i
	k	k	j	$-i$	–1

В системі чисел, введеної Гамільтоном (в алгебрі кватерніонів), зберігаються багато важливих властивостей звичайних комплексних чисел. Зокрема, в ній завжди виконується операція ділення на будь-який ненульовий кватерніон, має місце асоціативний і комутативний закони для додавання, асоціативний закон для множення, дистрибутивний закон відносно складання. Однак, в численні кватерніонів не виконується комутативний закон для множення.

5. Ділення кватерніонів – операція, обернена до їх добутку, тобто для того, щоб розділити кватерніон Q на другий q, треба знайти такий кватерніон X, який при множенні на q дає Q. Він обчислюється за формулою

$$X = \frac{Q\bar{q}}{|q|^2},$$

де $\bar{q} = q_0 - q_1 \cdot i - q_2 \cdot j - q_3 \cdot k$ – кватерніон, спряжений з q, а $|q|$ – модуль (абсолютна величина) кватерніону q, яка обчислюється за формулою:

$$|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}.$$

Вираз $\frac{\bar{q}}{|q|^2}$ називається о б е р н е н и м к в а т е р н і о н о м і позначається q^{-1}.

Існує багато математичних бібліотек, які реалізують кватерніони і операції з ними, однією з яких є GLM (OpenGL Math Library).

Спочатку кватерніони знайшли застосування в геометрії, механіці й теоретичній фізиці. Далі, після введення векторного числення, корисними виявилися кватерніони загального вигляду і їх різновиди. Так, в 60 – 70-х годах XX-го сторіччя радянськими і американськими механіками були розроблені методи розрахунку системи керування штучного супутника Землі, що спирались на числення кватерніонів. Низку наукових робіт присвячено застосуванню кватерніонів в теорії відносності. Можна очікувати, що вони будуть корисними ще в багатьох галузях.

8.2. Про гіперкомплексні числа

Крім кватерніонів, в середині минулого століття стали розглядати і інші «надкомплексні» числові системи, тобто множини виразів вигляду:

$$a = a_0 i_0 + a_1 \cdot i_1 + \cdots + a_n \cdot i_n, \tag{8.4}$$

де a_0, a_1, a_n – дійсні (або навіть комплексні) числа, $i_0 = 1$, а $i_1, \dots, i_n$ – уявні одиниці.

Правила порівняння, додавання і віднімання такі самі, як і для звичайних комплексних чисел (покомпонентне). Правило множення задається кожен раз таблицею множення уявних одиниць. Число $n + 1$ називається р а н г о м гіперкомплексної системи чисел (8.4).

У 1845 р. Артур Келі спробував побудувати нову систему чисел, схожу на кватерніони, але яка містить більше чотирьох одиниць. При цьому він (як і Гамільтон при побудові теорії кватерніонів) ставив на перше місце вимогу можливості ділення на будь-яке число, відмінне від нуля. Після декількох спроб вчений розробив систему чисел, яка включала вісім «одиниць» (з них сім уявних). Він назвав ці числа о к т а в а м и (від латинського octo – вісім). Нині вони відомі також як ч и с л а К е л і . Правило множення одиниць задається в численні Келі спеціально підібраною таблицею множення (табл. 2). У випадку октав для множення не виконується не лише комутативний, але і асоціативний закон. Зате завжди можна здійснити ділення на будь-яку октаву, крім нульової (тобто крім тієї, всі компоненти якої дорівнюють нулю). Аналогічно тому, як це робиться для комплексних чисел і кватерніонів, для кожної октави $a_0 + a_1 \cdot i_1 + \cdots + a_7 \cdot i_7$ визначаються поняття спряженої октави $\bar{a} = a_0 - \cdot\, i_1 - \dots - a_7 \cdot i_7$ та її модуля $|a| = a_0\sqrt{a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_7^2}$.

При цьому виконуються наступні рівності:

$$a\bar{a} = \bar{a}a = |a|^2\ ;\ |ab| = |a||b|.$$

Таблиця 2. Добуток одиниць для чисел Келі

	Другий множник								
Перший множник	-\ -	1	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7
	1	1	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7
	i_1	i_1	-1	i_3	$-i_2$	i_5	$-i_4$	$-i_7$	i_6
	i_2	i_2	$-i_3$	-1	i_1	i_6	i_7	$-i_4$	i_5
	i_3	i_3	i_2	$-i_1$	-1	i_7	$-i_6$	i_5	$-i_4$
	i_4	i_4	$-i_5$	$-i_6$	$-i_7$	-1	i_1	i_2	i_3
	i_5	i_5	i_4	$-i_7$	i_6	$-i_1$	-1	$-i_3$	i_2
	i_6	i_6	i_7	i_4	$-i_5$	$-i_2$	i_3	-1	$-i_1$
	i_7	i_7	$-i_6$	i_5	i_4	$-i_3$	$-i_2$	i_1	-1

Звичайні комплексні числа можна розглядати як гіперкомплексну систему рангу 2.

Ще одним узагальненням системи кватерніонів є алгебра Кліффорда, яка оперує так званими бікватеріонами Кліффорда або дуальними числами. Вони знайшли застосування в геометрії і в механіці твердого тіла.

IX. КРАСА КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ. ФРАКТАЛИ

9.1. Фрактали. Історичні відомості і класифікація

Математика – ефектна наука. Її краса різноманітна. Геометрія вивчає гарні форми дійсного світу. Насамперед, це різні симетрії: щодо прямої і точки на площині, поворотна, переносна, різні бордюри; центральна і дзеркальна в тривимірному просторі. Симетрія спостерігається і в алгебрі. Приклади тому – симетричні многочлени і їх застосування до розв'язання рівнянь, симетричні рівняння і їх системи та ін. Дивовижними є деякі багатогранні і тривимірні фігури: правильні багатокутники, правильні та напівправильні багатогранники, різні круглі тіла і їх поєднання.

Звісно, цікавими за формою є графіки багатьох функцій. Достатньо лише згадати симетрію графіків парних функцій щодо осі ординат, а непарних – відносно початку координат. А також – графіки періодичних функцій. Гарний вигляд графіки набувають і тому, що вони повністю характеризують властивості самих функцій. Все згадане визначає так звану наочну красу математики. Але головне, що особливо привабливе в ній – чітка логіка визначень понять, методів доказів, міркувань, умовиводів, чітка і струнка система побудови кожної з математичних дисциплін, їх взаємозв'язок.

Далі розглянемо фрактали (лат. fractus — подрібнений, дробовий, розбитий) – складні геометричні фігури, яким характерна властивість самоподібності. Особливу увагу приділимо використанню комплексних чисел і методів обчислень для побудови цих дивовижних структур.

Слово «фрактал» не є математичним терміном. У цього поняття немає строгого визначення. Зазвичай ф р а к т а л о м називають геометричну фігуру, яка задовольняє одній або декільком з наступних властивостей:

- володіє складною структурою при будь-якому збільшенні;
- є (приблизно) самоподібною;
- має дробову (гаусдорфову або фрактальну) розмірність, яка більша за топологічну;
- може бути побудована рекурсивними процедурами.

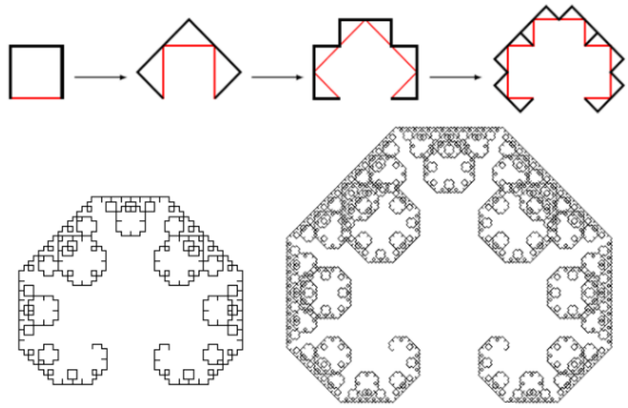
Ідеї фрактальної геометрії з’явилися ще у XIX ст. Першими вченими, хто дав початок вивченню цієї нової і невідомої науки, були

Георг Кантор і Джузеппе Пеано. Та на рубежі XIX і XX століть вивчення фракталів мало радше епізодичний, ніж систематичний характер, оскільки раніше математики в основному вивчали «хороші» об'єкти, які піддавалися дослідженню за допомогою загальних методів і теорій. Так, в 1872 році німецький математик Карл Веєрштрасс побудував приклад неперервної функції, яка ніде не є диференційовною. Однак його побудова була цілком абстрактною і важкою для сприйняття. В 1904 році швед Ґельге фон Кох придумав неперервну криву, котра ніде не має дотичної, і яку досить просто намалювати. Виявилося, що вона має властивості фрактала. Один з варіантів цієї кривої носить назву «сніжинка Коха» (рис. 9.1, б).

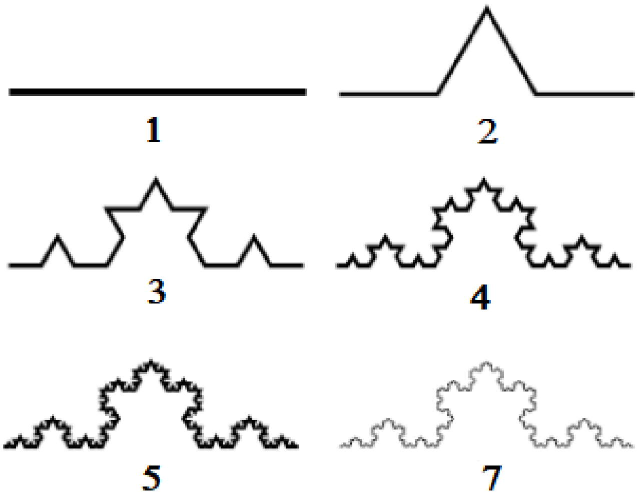
Ідеї самоподібності фігур підхопив француз Поль П'єр Леві, майбутній наставник Бенуа Мандельброта. У 1938 році вийшла його стаття «Плоскі та просторові криві і поверхні, що складаються з двох частин, подібних цілому», в якій описаний ще один фрактал – С-крива Леві (рис. 9.1, а).

Всі зазначені вище об'єкти можна умовно віднести до одного класу конструктивних (геометричних) фракталів. Вони будуються поетапно. Спочатку зображується основа. Потім деякі частини основи замінюються на фрагмент. На кожному наступному етапі частини вже побудованої фігури, аналогічні заміненим частинах основи, знову замінюються на фрагмент, взятий в потрібному масштабі. Кожного разу масштаб зменшується. Коли зміни стають візуально непомітними, вважають, що побудована фігура добре наближає фрактал і дає уявлення про його форму. Для отримання самого фрактала потрібно нескінченне число етапів. Змінюючи основу і фрагмент, можна отримати багато різних геометричних фракталів.

Геометричні фрактали, з одного боку, є предметом серйозного наукового вивчення, а з іншого, їх можна «побачити» – навіть людина, далека від математики, знайде в них щось для себе. Таке поєднання рідко трапляється в сучасній математиці, де всі об'єкти задаються за допомогою незрозумілих слів та символів. Виявляється, геометричні фрактали можна намалювати буквально на аркуші паперу в клітинку. Але одразу обмовимося, що всі одержувані зображення (в тому числі і наведені на рис. 9.1) є лише кінцевими наближеннями нескінченних за своєю суттю фракталів. За допомогою комп'ютера можна заощадити час і папір, а також збільшити точність малювання.



а) С-крива Леві: основа – буква П, перші три, восьмий та одинадцятий кроки побудови



б) Сніжинка Коха: основа – відрізок, перші три, восьмий та одинадцятий кроки побудови

Рис. 9.1. Геометричні фрактали

Інший клас – динамічні (алгебраїчні) фрактали, до яких відноситься і множина Мандельброта (рис. 9.2, а). Перші дослідження в цьому напрямку відносяться до початку XX століття і пов'язані з іменами французьких математиків Гастона Жулія і П'єра Фату. У 1918 році була опублікована праця Жулія майже на двісті сторінок, присвячена ітераціям комплексних раціональних функцій, де описані множини Жулія (рис.9.2, б) – ціле сімейство фракталів, близько пов'язаних з множиною Мандельброта. Ця наукова робота отримала приз Французької академії, однак в ній не містилося жодної ілюстрації, аби оцінити красу відкритих об'єктів. Незважаючи на те, що видання прославило Жулія серед математиків того часу, працю досить швидко забули.

Знову увагу до досліджень Жулія і Фату звернули лише через півстоліття з появою комп'ютерів: саме вони дозволили зробити видимими багатство і красу світу фракталів. Адже Фату ніколи не міг подивитися на те, що зараз відомо як зображення множини Мандельброта, позаяк необхідну кількість обчислень неможливо здійснити вручну. Першим, хто використав для цього комп'ютер, був **Бенуа Р. Мандельброт**[2] (**Benoit Mandelbrot**), математик з

[2] ***Бенуа Мандельброт*** – французький математик, засновник фрактальної геометрії, лауреат премії Вольфа з фізики (1993). Народився у Варшаві 1924 року у родині литовських євреїв. Але вже 1936 року вона емігрувала у Францію, в Париж, де

Дослідницького центру ім. Томаса Вотсона при IBM (International Business Machines), якого називають "батьком" сучасної фрактальної геометрії, адже він запропонував термін "фрактал" для опису об'єктів, структура яких повторюється при переході до дрібніших масштабів.

а) Множина Мандельброта б) Множина Жулія

Рис. 9.2. Алгебраїчні фрактали

Працюючи в IBM математичним аналітиком, він вивчав шуми в електронних схемах, котрі не можна було описати за допомогою статистики. Поступово зіставивши факти, вчений дійшов до відкриття нового напряму в математиці – фрактальної геометрії.

Бенуа потрапив під вплив свого дядька Шолема Мандельброта, паризького вченого, члена гурту математиків, відомого під загальним псевдонімом «Ніколя Бурбакі». Після початку війни Мандельброти втекли на вільний від окупації південь Франції, у містечко Тюль. Саме там Бенуа пішов до школи, але згодом втратив інтерес до навчання. Тому у 16-річному віці він ледве знав абетку і таблицю множення до 5. Проте через деякий час у хлопця відкрився незвичайний математичний дар, котрий дозволив йому одразу після війни стати студентом престижного вишу Політехнічна школа. Виявилося, що у Бенуа прекрасна просторова уява. Навіть алгебраїчні задачі він розв'язував геометричним шляхом. Оригінальність рішень і дозволила Бенуа скласти вступні випробування. Закінчивши Політехнічну школу, Мандельброт вивчав аеронавтику в Каліфорнійському університеті. Спочатку він був "чистим математиком". Отримав докторський ступінь у Сорбоні.

Мандельброт 1958 року переїхав у США, де розпочав роботу в науково-дослідницькому центрі IBM у Йорктауні, оскільки в той час компанія займалася цікавими для молодого вченого галузями математики. Працюючи в IBM, він пішов далеко від суто прикладних проблем: працював в галузях лінгвістики, теорії ігор, економіки і аеронавтики, географії, фізіології, астрономії, фізики. Йому подобалося переходити з однієї теми на іншу, вивчати різні напрями наукової діяльності.

Помер 14 жовтня 2010 року в Кембриджі (Массачусетс, США).

Визначення структури, яке дав сам Мандельброт, є таким: «Фракталом називається структура, що складається з частин, котрі в якомусь сенсі подібні цілому».

1982 року вийшла книга Мандельброта «Фрактальна геометрія природи», в якій автор зібрав і систематизував практично всю наявну на той момент інформацію про фрактали і в легкій і доступній манері виклав її. Основний акцент він зробив не на складні формули і математичні конструкції, а на геометричну інтуїцію читачів. Завдяки ілюстраціям, отриманим за допомогою комп'ютера, і історичним байкам, якими автор вміло розбавив наукову складову монографії, видання стало бестселером, а фрактали – відомими широкому колу читачів. Їх успіх серед нематематиків багато в чому обумовлений тим, що за допомогою вельми простих конструкцій і формул, які здатний зрозуміти і старшокласник, виходять дивовижні за складністю і красою зображення. Коли персональні комп'ютери стали досить потужними, то з'явився навіть цілий напрям в мистецтві – фрактальний живопис. Причому займатися ним міг практично будь-який власник комп'ютера. Зараз в інтернеті можна легко знайти безліч сайтів, присвячених цій темі.

9.2. Побудова алгебраїчних фракталів. Ітерації комплексних функцій

Це найбільший клас фракталів. Свою назву вони отримали через те, що їх будують на основі алгебраїчних формул. Фрактали цього типу виникають під час дослідження нелінійних динамічних систем (звідси і інша назва – динамічні фрактали). Поведінку такої системи можна описати комплексною нелінійною функцією (багаточленом) $f(z)$.

Методів побудови алгебраїчних фракталів декілька. Одним з них є багаторазове обчислення функції $z_{\mathrm{n}+1} = f(z_{\mathrm{n}})$, де z – комплексне число, а f – деяка функція. Розрахунок продовжується до виконання певної умови. Коли вона виконується, на екрані з'являється точка. Ще один метод побудови алгебраїчних фракталів – перетворення координат точок за певним правилом.

Візьмемо яку-небудь початкову точку z_0 на комплексній площині і розглянемо нескінченну послідовність чисел на ній, кожне наступне з яких отримується з попереднього: z_0, $z_1 = f(z_0)$, $z_2 = f(z_1)$, …,

$z_{n+1} = f(z_n)$. Залежно від початкової точки z_0 така послідовність може вести себе по-різному:

- прямувати до нескінченності при $n \to \infty$;
- збігатися до якоїсь кінцевої точки;
- циклічно приймати низку фіксованих значень;
- можливі й більш складні варіанти.

Відтак, будь-яка точка комплексної площини має свій характер поведінки під час ітерацій функції $f(z)$, і вся площина ділиться на частини. При цьому точки, які лежать на границях цих частин, характеризуються такою властивістю: скільки завгодно мале зміщення може вплинути на різку зміну характеру їх поведінки (точки біфуркації). Отже, виявляється, що множина точок, які мають один конкретний тип поведінки, а також множина біфуркаційних точок часто мають фрактальні властивості. Це і є множина Жулія для функції $f(z)$. Взагалі, вона є динамічним репелєром (відштовхуючою множиною).

Для функцій, аналітичних на комплексній площині (для яких похідна $f'(z) = \lim\limits_{\omega \to 0}(f(z+\omega) - f(z))/\omega$ існує як комплексне число, де $z, \omega \in \mathrm{C}$), можна застосовувати потужні методи теорії функцій комплексної змінної для отримання набагато більш детальної інформації про структуру таких відштовхуючих множин. Основи теорії множин Жулія можна знайти, наприклад, в [17, 18].

Множина Мандельброта будується іншим чином. Розглянемо функцію $f_{\mathrm{C}}(z) = z^2 + \mathrm{C}$, де C – комплексне число. Побудуємо послідовність точок $z_{n+1} = f_{\mathrm{C}}(z_n)$, починаючи з $z_0 = 0$. Залежно від параметру С, вона може розходитися до нескінченності або залишатися обмеженою. При цьому всі значення С, для яких ця послідовність є обмеженою, і формують множину Мандельброта. Детально множина була вивчена самим Мандельбротом та іншими математиками, які відкрили немало її цікавих властивостей.

Видно, що визначення множин Жулія та Мандельброта схожі. Насправді, вони тісно пов'язані між собою, адже множина Мандельброта – це всі значення комплексного параметра C, за яких множина Жулія для функції $f_{\mathrm{C}}(z)$ є зв'язною (її не буде розбито на дві частини, що не перетинаються, з деякими додатковими умовами).

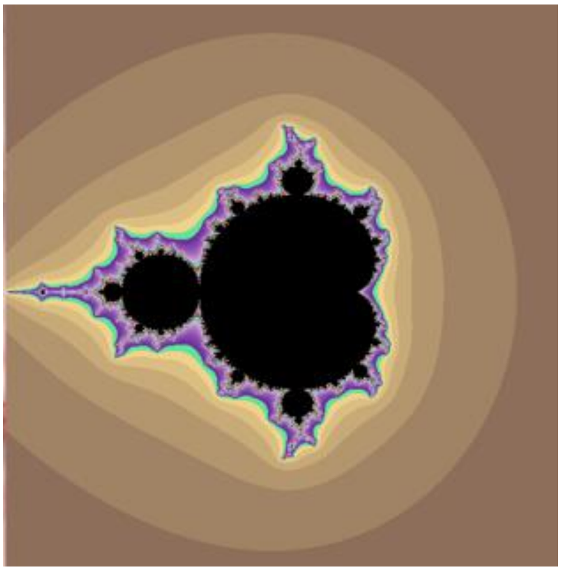
Для побудови графічного зображення множини Мандельброта можна використовувати так званий алгоритм **escape-time**. Суть його така. Доведено, що вся множина цілком розташована на площині всередині кола |z|=2. Тому якщо для точки C послідовність точок, отриманих за допомогою ітераційного процесу $z_{\mathrm{n+1}} = f_{\mathrm{C}}(z_{\mathrm{n}})$ з функцією $f_{\mathrm{C}}(z) = z^2 + C$ і початковим значенням z_0 = 0 після деякого великого їх числа N (скажімо, 100) не вийшла за межі вказаного кола, то будемо вважати, що точка C належить множині і фарбується в чорний колір. Відповідно, якщо на якомусь етапі, меншому за N, елемент послідовності за модулем став більшим за 2, то точка C множині не належить і залишається білою. У такий спосіб можна отримати чорно-біле зображення множини. Аби зробити його кольоровим, можна, наприклад, кожну точку не з множини фарбувати в колір, що відповідає номеру ітерації, на якому її послідовність вийшла за межі кола.

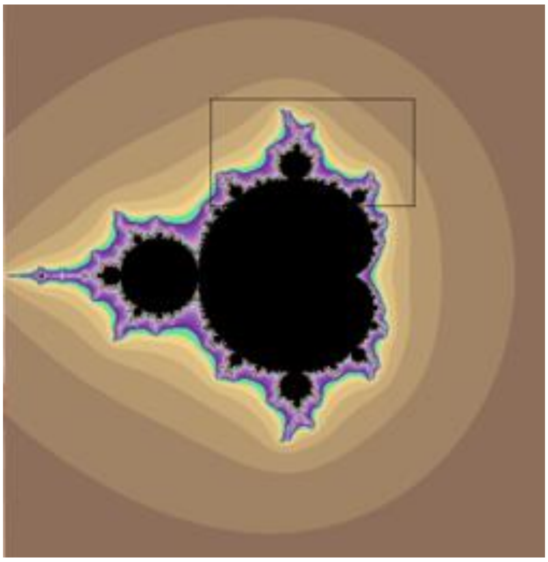
Так, на рис. 9.3,а подано кольорове зображення множини Мандельброта, яке отримане за наступним правилом розфарбування: нехай $C = p + qi$, (p, q)∈ $\{|p| \leq 2, |q| \leq 2\}$. Якщо для пари (p, q) за N = 80 ітерацій точка $z = x + yi$ не виходить за межі кругу радіуса 10, то точка (p, q) зображується чорним кольором. Якщо для пари (p, q) поточна точка (x, y) виходить за границю круга вказаного радіуса за число ітерацій $k < N$, то точка (p, q) фарбується кольором формату

Color.FromArgb(k*20%170+80, k*20%200+50, k*10%190+60)

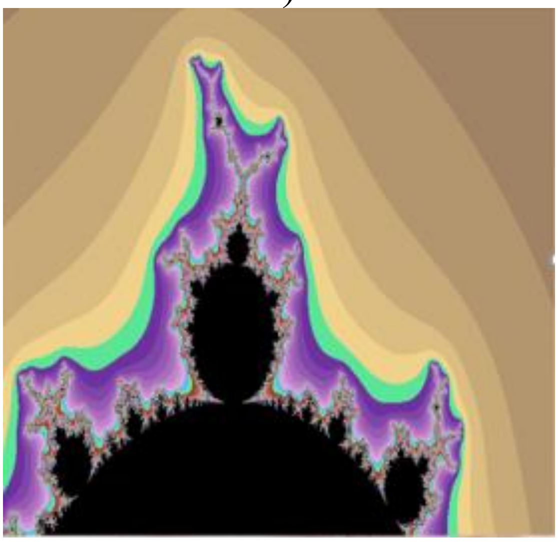
(мова програмування C#).

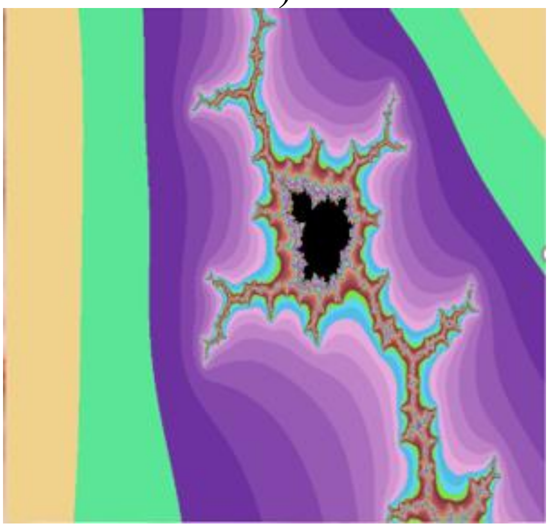
На рис. 9.3,в наведені результати збільшення масштабу виділеної на рис. 9.3,б частини множини Мандельброта, де можна простежити самоподібність цієї множини. Рис. 9.3, г демонструє також укрупнення певної частини зображення на попередньому рисунку. На рис. 9.4 подано кольорові зображення множини Жулія, отримані за певним алгоритмом розфарбування.





а)   б)





в)   г)

Рис. 9.3. Множина Мандельброта

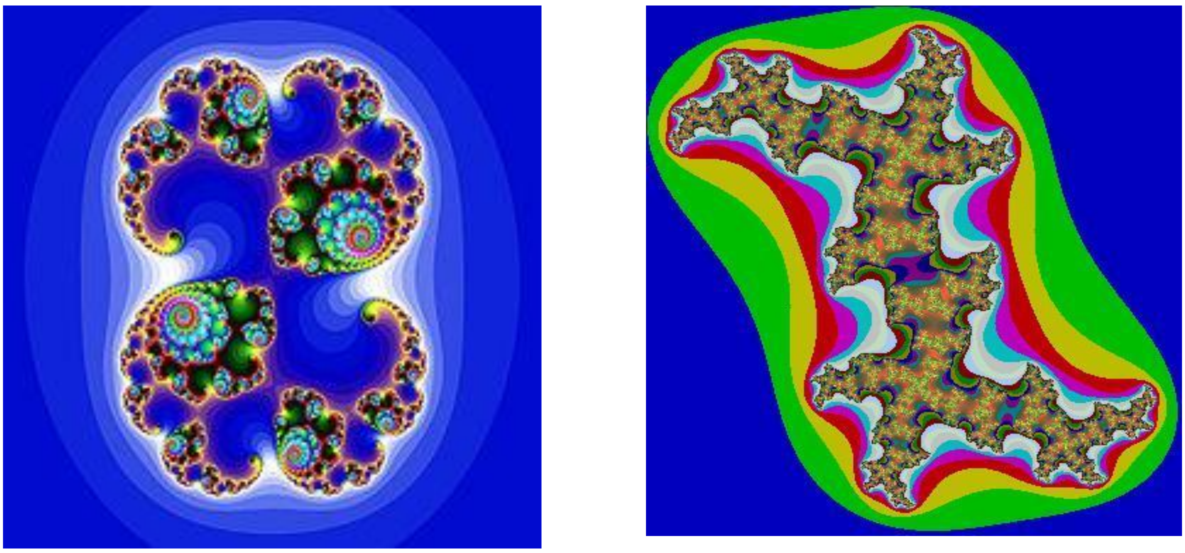


Рис. 9.4. Кольорові множини Жулія

9.3. Фрактали Ньютона

Розглянемо нелінійне рівняння:

$$f(z) = 0. \tag{9.1}$$

Поцікавимося не тільки дійсними, але й комплексними його коренями. Застосовуючи алгоритм Ньютона розв'язання нелінійних рівнянь, отримаємо послідовність точок комплексної площини:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}, n = 0,1,2,\dots \tag{9.2}$$

Якщо вдало вибрати початкове наближення z_0, то за допомогою цієї формули можна швидко знайти збіжну послідовність $\{z_n\}$.

Як приклад розглянемо випадок $f(z) = z^k - a$, $k \geq 1$ – ціле число. Тоді формула (9.2) прийме вигляд:

$$z_{n+1} = \frac{(k-1)z_n^k + a}{kz_n^{k-1}}, n = 0,1,2,\dots \tag{9.3}$$

Вибираючи будь-яке початкове наближення, знайдемо корінь k-го степеня з числа a. Як відомо, рівняння має k коренів:

$$z_j = \sqrt[k]{a}(cos(2j\pi/k) + isin(2j\pi/k)), j = 0,1,\dots,k-1,$$

які містяться на колі радіуса $\sqrt[k]{a}$ і мають відставання один від одного на кут $2\pi/k$.

Слід зважати, що корені рівняння $z^k - a = 0$ є стійкими нерухомими точками відображення (9.3). Основна проблема в застосуванні метода Ньютона повязана з вибором початкового наближення. Вона буде вирішена, якщо вказати області тяжіння нерухомих точок відображення (9.3). Для цього спробуємо побудувати границю, що розділяє області тяжіння різних коренів. Виявляється, що вона має фрактальну структуру. Оцінюючи «ширину» фрактальної зони, тим самим визначимо області тяжіння різних нерухомих точок відображення (9.3). Продемонструємо це на прикладі $k = 3, a = 1$. Відображення (9.3) приймає вигляд:

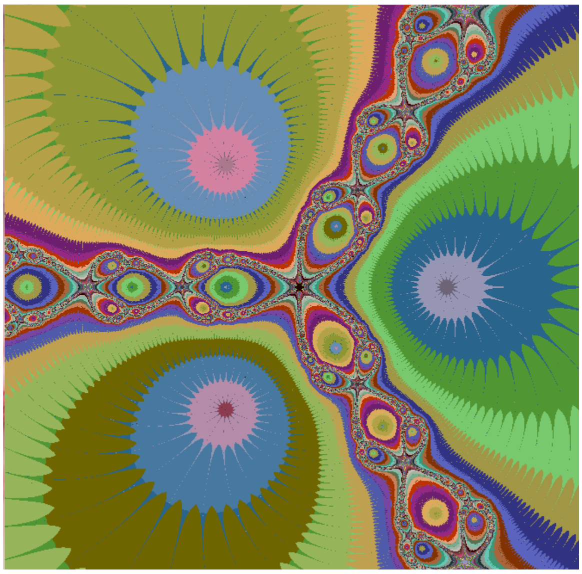
$$z_{n+1} = \frac{2z_n^3+1}{3z_n^2}, n = 0,1,2,\dots \tag{9.4}$$

Нехай $z = x + yi$. Розділимо дійсну і уявну частини, прийдемо до двовимірного дійсного відображення:

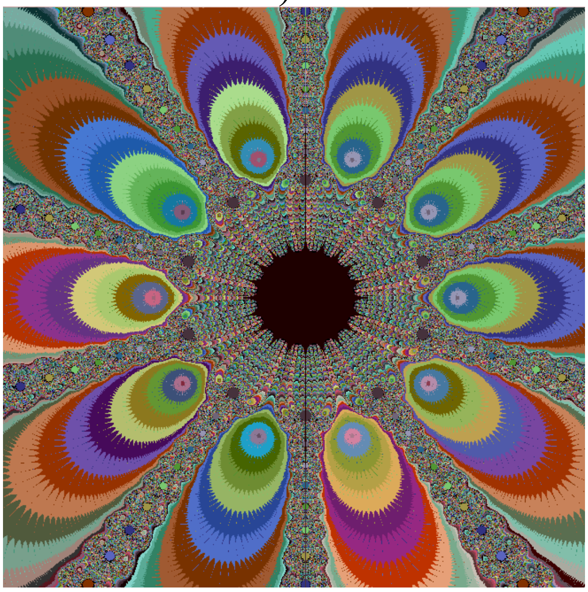
$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{x_n^2 - y_n^2}{3(x_n^2 + y_n^2)}; \; y_{n+1} = \frac{2}{3}y_n \left(1 - \frac{x_n}{(x_n^2 + y_n^2)^2}\right).$$

Кольорові фрактали Ньютона зображені на рис. 9.5. Якщо дозволити параметру k приймати від'ємні цілі значення, то можна отрамати не менш дивовижні фрактали, що можна простежити на рис. 9.6.

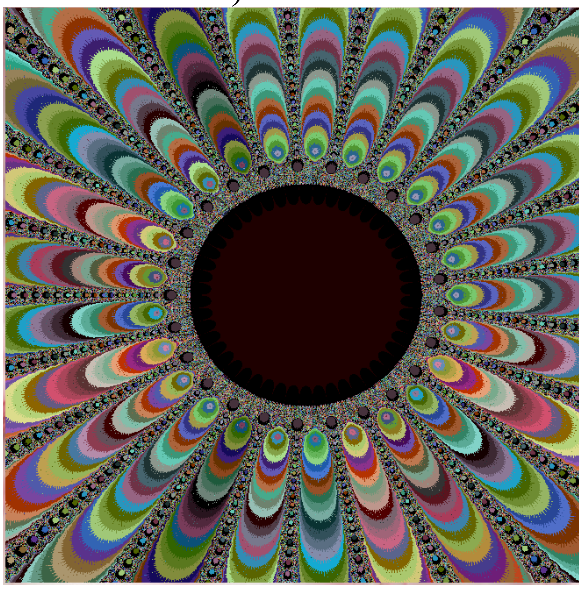
а) $k = 7$



б) $k = 3$



в) $k = 10$

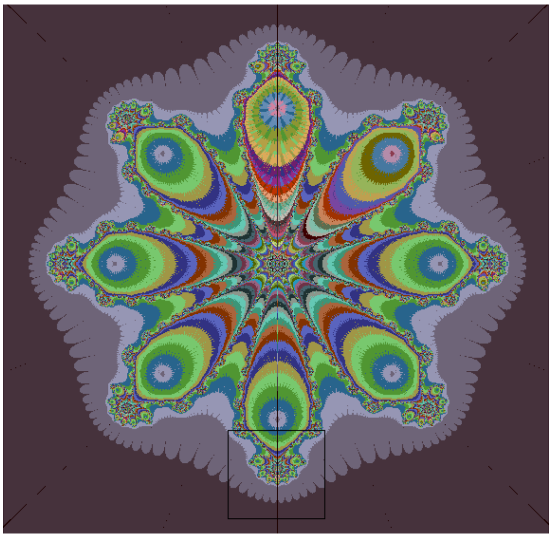


г) $k = 25$

Рис. 9.5. Області тяжіння коренів рівняння $z^k - 1 = 0, k > 1$

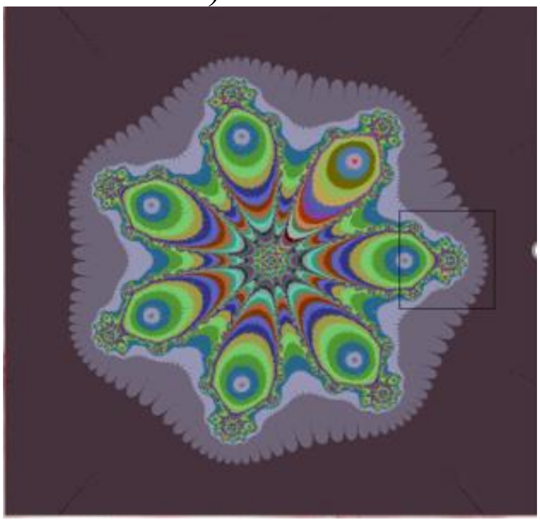
Для демонстрації казкової краси, яку можна отримати за допомогою ітерацій комплексних функцій, на рис. 9.7 – 9.9 наведені зображення інших фрактальних множин.

Елементи гіперкомплексної динаміки, відображення Жулія в гіперпросторі з використанням кватерніонів наведені, зокрема, в [18].

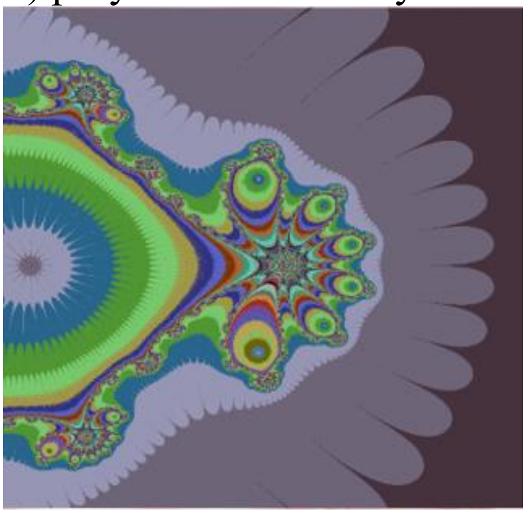


а) $k = -8$

б) результат масштабування



в) $k = -7$



г) результат масштабування

Рис. 9.6. Області тяжіння коренів рівняння $z^k - 1 = 0$, $k < 0$

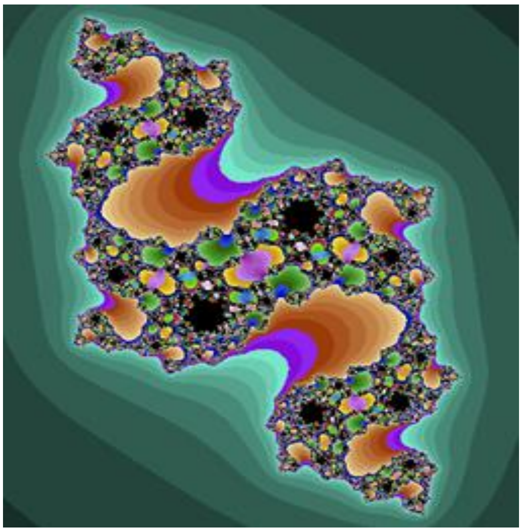


Рис. 9.7. Модифікована множина Жулія

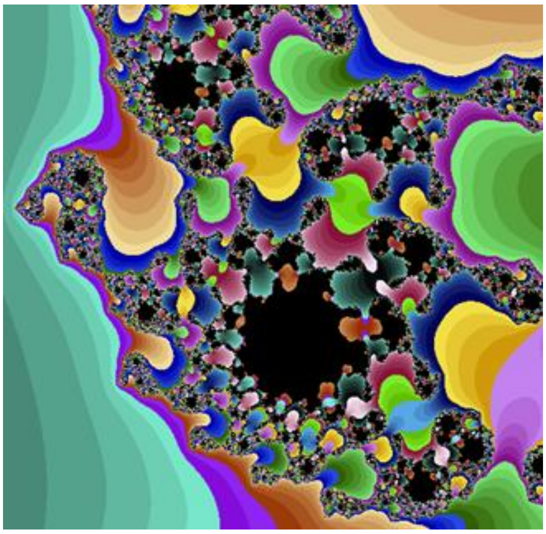
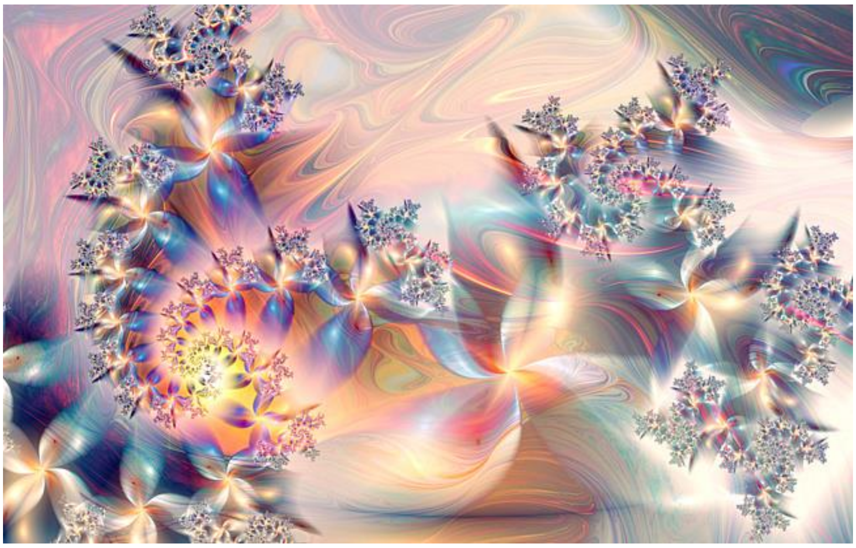


Рис. 9.8. Масштабована частина модифікованої множини Жулія



а)

б)

Рис. 9.9. Кольорові зображення фракталів

9.4. Фрактали в природі, науці і техніці

Що спільного у дерева, берега моря, хмари або кровоносних судин у нас в руці? Вони мають властивість самоподібності. Від вітки, як і від стовбура дерева, відходять відростки поменше, від них – ще менші, і т. д. Тобто вітка подібна всьому дереву. Схожим чином влаштована і кровоносна система: від артерій відходять артеріоли, а від них – дрібні капіляри, по яких кисень надходить в органи і тканини. Подивимося на космічні знімки морського узбережжя: ми побачимо затоки і півострови. Якщо те саме зробити з висоти пташиного польоту, нам буде видно бухти і миси. Тепер уявіть, що ви стоїте на пляжі і дивитесь собі під ноги: завжди знайдуться камінчики, які далі видаються в воду, ніж інші. Тобто берегова лінія при збільшенні масштабу залишається схожою на саму себе, тобто має фрактальну властивість.

З береговою лінією, а точніше, зі спробою виміряти її довжину, пов'язана одна цікава історія, котра стала основою наукової статті Мандельброта, а також описана в його книзі «Фрактальна геометрія природи». Йдеться про експеримент, який поставив Льюїс Річардсон (Lewis Fry Richardson) – вельми талановитий і ексцентричний математик, фізик і метеоролог. Одним з напрямків його досліджень була спроба знайти математичний опис причин і ймовірності виникнення збройного конфлікту між двома країнами. У числі параметрів, які він враховував, була протяжність їх спільного кордону. Коли він збирав дані для чисельних експериментів, то виявив, що в різних джерелах дані про кордон між Іспанією та Португалією сильно відрізняються. Це наштовхнуло його на наступне відкриття: довжина кордонів країни залежить від лінійки, якою ми їх вимірюємо. Чим меншим є масштаб, тим довшою виходить межа. Це відбувається через те, що при збільшенні масштабу стає можливим враховувати все нові і нові вигини берега, які раніше ігнорувалися через грубості вимірювань. І якщо при кожному збільшенні масштабу будуть відкриватися раніше не враховані лінії, то вийде, що довжина кордонів нескінченна! Насправді цього не відбувається – у точності наших вимірювань є кінцева межа. Цей парадокс називається ефектом Річардсона (Richardson effect).

Нині теорія фракталів знаходить широке застосування в різних царинах людської діяльності. Крім фрактального живопису, вони використовуються в теорії інформації для стиснення графічних даних (тут здебільшого використовується властивість самоподібності фракталів – адже щоб запам'ятати невеликий фрагмент малюнка і перетворення, за допомогою яких можна отримати інші частини, потрібно набагато менше пам'яті, ніж для зберігання всього файлу). Додаючи в формули, що задають фрактал, випадкові обурення, можна отримати стохастичні фрактали, котрі якомога правдоподібно передають деякі реальні об'єкти – елементи рельєфу, поверхню водойм, деякі рослини, що з успіхом застосовується у фізиці, географії та комп'ютерної графіки для досягнення більшої схожості модельованих предметів із справжніми. У радіоелектроніці в останнє десятиліття почали випускати антени, що мають фрактальну форму. Займаючи мало місця, вони забезпечують цілком якісне приймання сигналу. А економісти використовують фрактали для опису кривих коливання курсів валют (ця властивість була відкрита Мандельбротом майже 40 років тому).

В фізиці фрактали природним чином виникають при моделюванні нелінійних процесів, таких, як турбулентна течія рідини, складні процеси дифузії-адсорбції, вогнища, хмари і тощо. Фрактали використовуються при моделюванні пористих матеріалів, наприклад, в нафтохімії. В біології вони застосовуються для моделювання популяцій і опису систем внутрішніх органів (кровоносні судини). Також завдяки ним описується кривизна поверхонь. Нерівна поверхня характеризуються комбінацією з двох різних фракталів.

Використання фрактальної геометрії при проєктуванні антенних пристроїв було вперше застосовано американським інженером Натаном Коеном, котрий тоді жив в центрі Бостона, де була заборонена установка зовнішніх антен на будівлях. Натан вирізав з алюмінієвої фольги фігуру в формі кривої Коха и наклеїв її на аркуш паперу, а потім приєднав до приймача. Коен заснував власну компанію і налагодив їх серійний випуск.

Сьогодні фрактальна геометрія перетворюється в упорядковану науку, дослідження наслідків самоподібності приносить чимало сюрпризів і допомагає краще розібратися в принципах устрою природних конструкцій. Фрактальна теорія вивчає не просто об'єкти, як вони є, а те, чому вони такі. Нове народжується на границі множини, саме ця зона є фрактальною. Потрапляючи на неї, об'єкт поводиться хаотично. Саме в цьому стані відбувається народження нового: об'єкту, форми, стилю, знання і т. і.

В наш час фрактали і мультифрактали стрімко вторгаються в галузі фізики, біології, медицини, соціології, економіки. Методи обробки зображень і розпізнавання образів, які використовують нові поняття, дають змогу дослідникам застосовувати цей математичний апарат для кількісного опису величезної кількості природних об’єктів і структур.

Мова фрактальної геометрії корисна, наприклад, під час вивчення поглинання та розсіювання випромінювання в пористих середовищах, для характеристики сильно розвиненої турбулентності, в процесі моделювання властивостей поверхонь твердих тіл, для опису діелектричного пробою й блискавки, під час аналізу процесів утомного зношення матеріалів, при дослідженні різних стадій зростання речовини за рахунок дифузії й подальшої агрегації, в квантовій механіці при описі геометричних структур хвильових функцій в точці переходу Андерсона метал – діелектрик. Цікаво те, що схожі геометричні форми трапляються в абсолютно різних царинах науки: в астрофізиці, при описі процесів кластеризації галактик Всесвіту, в картографії під час вивчення форм берегових ліній та розгалуженої мережі річкових русел, і, приміром, в біології при аналізі складу кровоносної системи або розгляданні складних поверхонь кліткових мембран.

У зв'язку із загальною комп'ютеризацією фрактали стають доступними для прямих спостерігачів. Вони виявляються неймовірно привабливими для архітекторів і містобудівників, насамперед, з естетичної точки зору, а також – з філософської та психологічної. Фрактальна теорія впливає на уми авторів, орієнтує творчий процес. Фрактали об'єднують в собі масу образів: кольорові тони, мелодійні сполучення, лінії.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кириллова Д.А. Изучение прикладных методов теории функций комплексного переменного как средство формирования математической компетентности будущих инжнеров // Современные исследования социальных проблем (электронный научный журнал). – 2016. – № 8 (64). – С. 16-35.

2. Половинкин Е.С. Теория функций комплексного переменного [Электронный ресурс]: Учебник / Е.С.Половинкин. – Электрон. дан. – М.: ИНФРАМ, 2015. – 254 с. – Режим доступа: http://www.znanium.com/bookread.php?book=487040. - Загл. с экрана.

3. Волковыский Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. Изд. 4. [Электронный ресурс] / Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. – Электрон. дан. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 312 с.

4. Краснов М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. [Текст].: учеб. пособие. / М.Л. Краснов, А.И.Киселев, Г.И. Макаренко.2-е изд. перераб. и доп.– М.: Наука, 1981.– 302 с.

5. Маркушевич А.И. Введение в теорию аналитических функций. [Текст].: учеб. пособие для студ. физ.-мат. фак. пед. инст. / А.И. Маркушевич, Л.А. Маркушевич. – М.: Просвещение, 1977.- 320 с.

6. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. [Текст]. : учеб. пособие /А.И. Маркушевич – М.: Наука, 1978.- 388 с.

7. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного [Электронный ресурс]: пособ. для высш. школы / И.И. Привалов. – Электрон. дан. – М. : Лань, 2009. – 432 с. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/view/book/322/. Загл. с экрана.

8. Свешников А.Г. Теория функций комплексной переменной / А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. – Издательство "Физматлит", 2010. Текст электронный // ЭБС Лань - URL: https://e.lanbook.com/book/48167

9. Зверович Э. И. (2008). Вещественный и комплексный анализ. В 6 ч. Ч. 6. Теория аналитических функций комплексного переменного. Belarus, Europe: Вышэйшая школа.

10. Сторчай В.Ф. Об интегралах на олимпиадах / В.Ф. Сторчай // Математика и ее приложения. – СПб.: ГУМРФ им. Адм. С.О. Макарова, 2013. – № 4. – С. 138-150.

11. Сторчай В.Ф. Вычисление некоторых определенных и несобственных интегралов с помощью вычетов / В.Ф. Сторчай //Математика и ее приложения. – СПб.: ГУМРФ им. Адм. С.О. Макарова, 2015. – № 5. – С. 20–30.

12. Сторчай В.Ф. Практикум з теорії функції комплексної змінної / В.Ф. Сторчай. – Д.: ДДУ, 1995. – 104 с.

13. Ляшко И.И. Математический анализ в примерах и задачах, ч.1// И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, Г.П. Головач. – К.: Изд-во «Высшая школа», 1974. – 680 с.

14. Балк М.Б. Реальные применения мнимых чисел. – К.: Рад. шк., 1988. – 255 с.

15. Грищенко О. Ю. Теорія функцій комплексної змінної / О. Ю. Грищенко, С. І. Ляшко. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2009. – 495 с.

16. Функції комплексної змінної: Практикум з компл. аналізу для студ. 3 курсу фіз.-мат. ф-ту/ Уклад.: В.В.Дрозд. – К.: НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського», 2017. – 88 с.

17. Божокин С.В. Фракталы и мультифракталы / С.В. Божокин, Д.А. Паршин. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 128 с.

18. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов / С.В. Морозов. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 160 с.

19. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов: Второе издание. Пер. с англ. – М.: ООО «Бином-Пресс», 2006. – 656 с.

20. Якимов Е.В. Цифровая обработка сигналов: учебное пособие / Е.В. Якимов, Г.В. Вавилова, И.А. Клубович. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2008. – 307 с.

21. Л.В. Павлова. Теорія аналітичних функцій. Збірник вправ / Л.В. Павлова, О.І. Редькіна. – К.: Вища школа, 1980. – 216 с.

Навчальне видання

Сторчай Володимир Федорович
Коряшкіна Лариса Сергіївна

ПРАКТИКУМ З ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Навчальний посібник

Редактор Є.М. Ільченко

Підп. до друку 13.12.2021. Формат 30х42/4.
Папір офсет. Ризографія. Ум. друк. арк. 15,3.
Обл.-вид. арк. 17,3 Тираж 100 пр. Зам. №2101

Підготовлено до друку
в Національному технічному університеті
«Дніпровська політехніка»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842.
49005, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса,19.