І.М. П І С Т У Н О В

ЕКОНОМІЧНА КІБЕРНЕТИКА

2014

Міністерство освіти і науки України
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

І.М. Пістунов

ЕКОНОМІЧНА КІБЕРНЕТИКА
Навчальний посібник

Видання друге, виправлене й доповнене

Дніпропетровськ
НГУ
2014

УДК 330.46(075.8)
ББК 65в6я73
П34

Рекомендовано вченою радою як навчальний посібник для студентів спеціальності 6.030502 «Економічна кібернетика» (Протокол № 6, від 01.07.2014).

Рецензенти:
Б.І. Мороз, д-р техн. наук, проф., начальник кафедри інформаційних систем і технологій (Академія митної служби України).
Н.К. Васильєва, д-р екон. наук, проф., завідувач кафедри інформаційних систем і технологій (Дніпропетровський державний аграрний університет).

Пістунов І.М.
П34 Економічна кібернетика [Електронний ресурс]: навч. посіб. / І.М. Пістунов ; Нац. гірн. ун-т. – Електрон. текст. дані. – Видання друге, виправлене й доповнене. – Д. : НГУ, 2014. – 215 с. – Режим доступу: http://pistunovi.narod.ru/E_K.pdf (дата звернення: 01.07.2014). – Назва з екрану.

У посібнику розглянуто теоретичні й практичні аспекти аналізу, синтезу, моделювання, пошуку та прийняття оптимальних рішень для економічних систем засобами економічної кібернетики.

Наведено приклади застосування теоретичних розробок, висвітлено методи виконання розрахунків із застосуванням комп’ютерних додатків, таких як електронні таблиці й математичні процесори. Подані в посібнику контрольні питання, індивідуальні завдання та завдання для курсової роботи дозволяють глибше опанувати навчальний матеріал і забезпечують упевнене використання кібернетичних методів у реальній економіці.

Матеріал книги базується на літературних джерелах вітчизняних та зарубіжних авторів та на багаторічному досвіді викладання дисципліни «Економічна кібернетика» в Національному гірничому університеті.

Адресовано студентам вищих навчальних закладів спеціальності «Економічна кібернетика».

УДК 330.46(075.8)
ББК 65в6я73

ЗМІСТ

ВСТУП

Слово «економіка» (гр. *οικοпоμια*) запровадив у вжитку давньогрецький мислитель Аристотель (384 – 322 до н.е.). Це слово походить від грецьких слів οικος – будинок і nоμος – закон. Буквально це слово означає правила господарювання господарська діяльність (виробництво розподіл, обмін і споживання товарів, а також наука, що вивчає закономірності її розвитку.

Економічна дійсність є об'єктом економічних наук, які підрозділяється на наукові і прикладні. Наукову економіку також називають економічною теорією наукою про те, як люди і суспільство вибирають спосіб використання ресурсів, що мають багатоцільове значення. Прикладна економіка вивчає можливості додатку законів, теорій, пропозицій, розроблених економічною теорією безпосередньо для функціонування окремих елементів економічних систем. Для пізнання економічної дійсності застосовуються не тільки економічні дисципліни, але і міждисциплінарні дослідження, наприклад прикладна статистика і теорія ухвалення рішень. Як самостійна наука економіка виділяється в XVIII столітті з виходом в світ книги Адама Сміта «Дослідження про природу і причину багатства народів» у 1776 року.

Кібернетика (від грець. *Κυβερνήτik* – мистецтво управління, *Κυβερνήτηαо* – правлю кермом, управляю, *Κυβερνήτης* – керманич) наука про загальні закономірності процесів управління і передачі інформації в машинах, живих організмах і суспільстві. Слово «кібернетика» як назва науки про управління і інформацію в науковий ужиток ввів американський вчений Норберт Вінер (1894-1964) – один із творців першої у світі електронно-обчислювальної машини. Кібернетика – це наука про закони управління в усіх сферах людської діяльності.

Економічна кібернетика ж, як один з наукових напрямів кібернетики, – займається додатком ідей і методів кібернетики до економічних систем. У розширеному сенсі під словами економічна кібернетика розуміють область науки, що виникла на стику математики і кібернетики з економікою, включаючи математичне програмування, дослідження операцій, економіко-математичні моделі, економетрику і математичну економіку. Економічна кібернетика розглядає економіку, а також її структурні і функціональні частини як складні системи, в яких протікають процеси регулювання і управління, що реалізовуються рухом і перетворенням інформації. Методи економічної кібернетики дають можливість стандартизувати і уніфікувати цю інформацію, раціоналізувати отримання, передачу і обробку економічної інформації, обґрунтувати структуру і склад технічних засобів її обробки.

Економічна кібернетика розвивається за такими основними напрямами, які щонайтісніше ув'язуються один з одним.

Теорія економічних систем і моделей розробляє: методологію системного аналізу економіки і її моделювання, віддзеркалення структури і функціонування економічних систем в моделях; питання класифікації і побудови комплексів економіко-математичних моделей; проблеми економічного регулювання, співвідношення і взаємного узгодження різних стимулів і дій у функціонуванні економічних систем; питання поведінки людей і колективів. При дослідженні цих проблем До. э. перш за все спирається на політичну економію і загальну теорію систем, а також на соціологію і теорію регулювання, узагальнює результати розробки економіко-математичних методів і моделей.

Теорія економічної інформації розглядає економіку як інформаційну систему. Вона вивчає: потоки інформації, які циркулюють в народному господарстві як комунікації між його елементами і підсистемами, характеристики інформаційних каналів і переданих ним повідомлень; економічні вимірювання і взагалі знакові системи в економіці, тобто мови економічного управління, включаючи розробку комплексів господарських показників, правил їх розрахунку (ці питання виділяються в економічну семіотику); процеси ухвалення рішень і обробки даних в інформаційних системах народного господарства на всіх його рівнях і питання якнайкращої організації цих процесів.

Навчальний посібник містить наступні розділи, які є темами, визначеними в ГСВО МОН України:

1. Предмет, методи і понятійний апарат економічної кібернетики
2. Моделювання соціально-економічних систем як основний метод економічної кібернетики
3. Аналіз як категорія пізнання та його застосування в дослідженнях соціально-економічних систем
4. Методологія і методи синтезу моделей соціально-економічних систем і структур управління ними
5. Теорія оптимальних систем та її застосування в оптимізації процесів управління в економіці
6. Завдання для курсової роботи

Кожен з цих розділів закінчується контрольними запитання, знаходячи відповідь на які, студент зможе поглибити свої знання з теми, що вивчається.

Розділи з другого по п’ятий містять індивідуальні завдання, які студент має виконати в процесі вивчення предмету. Всі розрахунки потрібно проводити на комп’ютері.

Завдання треба здавати в електронному вигляді на будь яких носіях у конвертах, які потрібно підписувати таким чином. Допускається здавати всі завдання на одному носії.

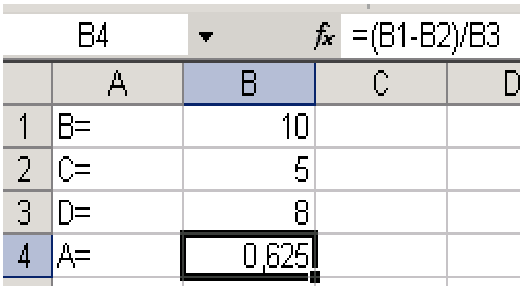
Економічна кібернетика Індивідуальне завдання № 1 Варіант задач №0, варіант числових даних № 17 Виконав: студент групи ЕЕ-00-1 Петренко Семен

Задачу спочатку треба розв’язати в загальному вигляді з представлення формули рішення, в яку потім підставлені конкретні числові дані для свого варіанта. В деяких завданнях числові значення потрібно визначити за простою формулою. Наприклад, якщо в таблиці навпроти позначення $\boldsymbol{C}$ стоїть число 17, а числове значення в умові задачі подано як $\mathbf{0{,}01}\cdot\boldsymbol{C}$, то це означає, що потрібно брати число $0{,}01\cdot 17 = 0{,}17$.

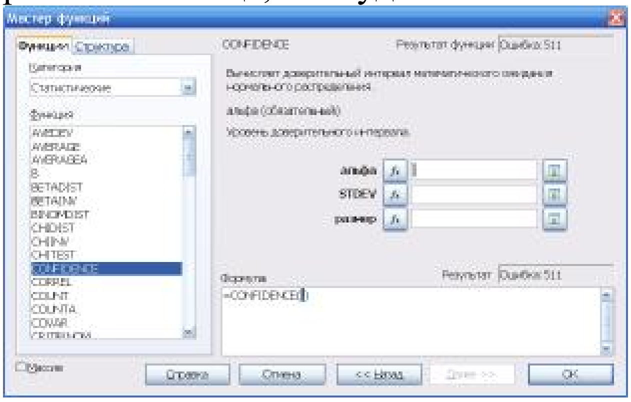
Кожну тему супроводжують приклади вирішення із застосування таких прикладних пакетів як Open Office Calc, Microsoft Office Excel, Macsima та

MathCad. При цьому припускається, що студенти вже знайомі з порядком використання як електронних таблиць так і математичних процесорів.

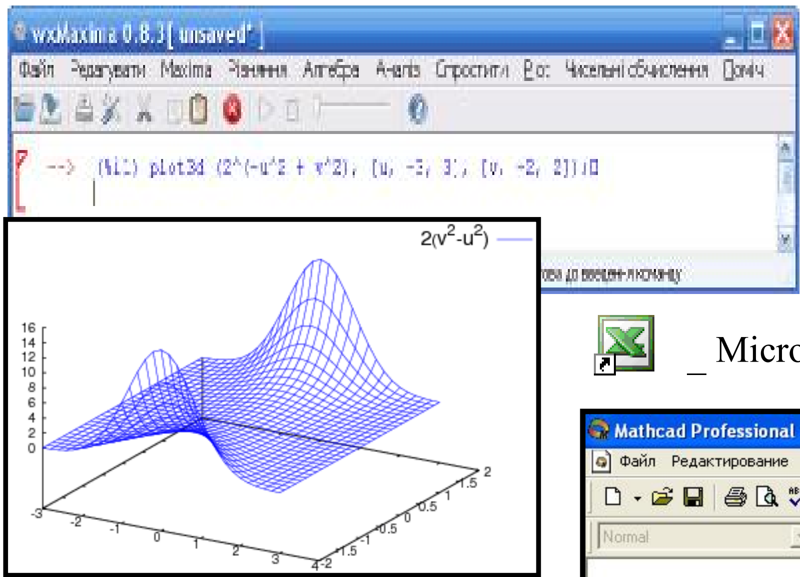
Наприклад, якщо потрібно провести розрахунки за формулою $A = \dfrac{B - C}{D}$, для наступних числових значень параметрів $B = 10$, $C = 5$, $D = 8$, то в підрозділі буде наведено малюнок, в якому видно фрагмент вікна електронної таблиці, де колонку А займають тестові визначення невідомих у формулі, колонку В – їх числові значення. Вікно f_x містить саму формулу розрахунку, де вказано адреси клітинок, які містять числові дані.

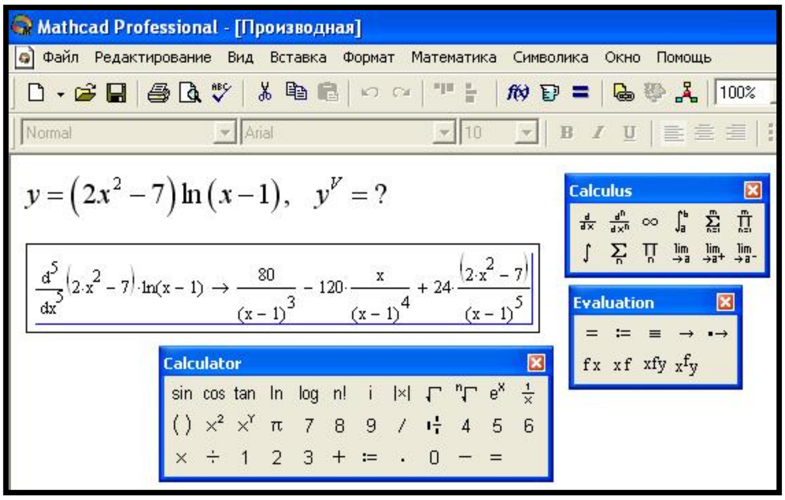


Якщо будуть застосовані функції електронних таблиць, то буде показано їх вікно з уведеними туди параметрами.



При використанні у прикладі математичних процесорів буде показано їх вікно з прикладом вирішення тих моделей, які розглядалися у прикладі, як побудова об'ємних графіків в Macsima або знайдення похідної, як в MathCad. Для скорочення пояснень в тексті посібника застосовано відповідні емблеми _ *Maxima* або _ *Mathcad*, _ Open Office Calc, _ Microsoft Office Excel.





Метою навчального посібника є засвоєння знань з основ фундаментальних досліджень систем і процесів управління в економіці. Завданням – вивчення концептуальних понять, їх теоретичних засад; набуття практичних навичок аналізу, синтезу та оптимізації систем і процесів управління в економіці

1. ПРЕДМЕТ, МЕТОДИ І ПОНЯТІЙНИЙ АПАРАТ ЕКОНОМІЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ

В розділі наведено понятійний апарат економічної кібернетики, опанування якого дозволить розуміти і вивчати подальші розділи посібника.

Предметом економічної кібернетики є закони, принципи та інформаційні процеси управління соціально-економічними системами. Вивчення цих законів та методів, дозволяє сучасним економістам знаходити найкращі з усіх можливих рішення, передбачати економічні явища та процеси, керувати соціально-економічними об'єктами.

Загальний порядок застосування прийомів і методів економічної кібернетики полягає ві наступному:

1. Визначення найбільш проблемної ділянки об'єкту чи явища.
2. Проведення типізації обраного об'єкту чи явища: система чи об'єкт.
3. Визначення переліку незалежних (вхідних) та залежних (вихідних) факторів.
4. Проведення статистичного дослідження за зміної в часі цих факторів.
5. Виконання аналізу отриманих результатів з метою вибраковки недостовірних даних та визначення майбутніх видів моделей.
6. Визначення типів економіко-математичних моделей та розрахунок їх коефіцієнтів. Розрахунок адекватності та прогнозуючих властивостей отриманих моделей.
7. Знайдення оптимальних (найкращих) значень вхідних факторів, які б забезпечили досягнення екстремальних (найбільших або найменших) значень вихідних факторів.

1.1. Методи економічної кібернетики

У розширеному сенсі під словами *економічна кібернетика* розуміють область науки, що виникла на стику математиків і кібернетики з економікою, включаючи математичне програмування, дослідження операцій економіко-математичні моделі, економетрику і математичну економіку. Економічна кібернетика розглядає економіку, а також її структурні і функціональні частини як складні системи, в яких протікають процеси регулювання і управління, що реалізовуються рухом і перетворенням інформації.

Математичне програмування – це математична дисципліна, що вивчає теорію і методи вирішення завдань про знаходження екстремумів функцій на множині скінченномірного векторного простору, визначуваній лінійними і нелінійними обмеженнями (рівністю і нерівностями).

Формально, завдання математичного програмування формулюється так:

Знайти $\operatorname{argmin}_{x\in X} f(x)$.

В залежності від природи множини X завдання математичного програмування класифікуються як:

▪ завдання дискретного програмування (або комбінаторної оптимізації) якщо X звичайне або рахункове;

▪ завдання цілочисельного програмування якщо X – підмножина множини цілих чисел;

▪ завданням нелінійного програмування якщо обмеження або цільова функція містять нелінійні функції і X є підмножиною скінченномірного векторного простору.

▪ Якщо ж всі обмеження і цільова функція містять лише лінійні функції, то це завдання лінійного програмування.

Дослідження операцій – це дисципліна, що займається розробкою і застосуванням методів знаходження оптимальних рішень на основі математичного моделювання, статистичного моделювання і різних евристичних підходів в різних областях людської діяльності. Іноді використовується позначення **математичні методи дослідження операцій**.

Дослідження операцій починається тоді, коли для обґрунтування рішень застосовується тій або інший математичний апарат. Операція – це всякий захід (система дій), об'єднаний єдиним задумом і направлене до досягнення якоїсь мети. Завжди є керованим заходом, тобто, від залежить від людини, яким способом вибрати параметри, що характеризують її організацію (у широкому сенсі, включаючи набір технічних засобів, вживаних в операції). Рішення (вдалі, невдалі, розумні, безрозсудні) – всякий певний набір залежних від людини параметрів. Оптимальні - рішення, по тихий або інших ознаках переважно перед іншими. Мета *дослідження операцій* – попереднє кількісне обґрунтування оптимальних рішень. Саме ухвалення рішення виходить за рамки дослідження операцій і відноситься до компетенції відповідальної особи. Елементи *рішення* – параметри, сукупність яких утворює рішення: числа, вектори, функції, фізичні ознаки і так далі Якщо елементами рішення можна розпоряджатися в певних межах, то задані умови (обмеження) фіксовані відразу і порушені бути не можуть (вантажопідйомність, розміри, вага). До таких категорій відносяться засоби (матеріальні, технічні, людські), якими людина має право розпоряджатися і інші обмеження, що накладаються на рішення. Їх сукупність формує множину *можливих рішень.*

Приклад: складається план перевезень вантажів з пунктів відправлення A_1, A_2 ..., A_m в пункти призначення B_1, B_2 ..., B_n. Елементі рішення - числа x_{ij}, що показують, яка кількість вантажу буде відправлена з i-го пункту відправлення A_i в j-й призначення B_j. Рішення - сукупність чисел x_{11}, x_{12} ..., x_{m1}, x_{m2} ..., x_{mn}.

Економетрика наука, що вивчає кількісні і якісні економічні взаємозв'язки за допомогою математичних і статистичних методів і моделей. Теоретична економетрика розглядає статистичні властивості оцінок і випробувань тоді як прикладна економетрика займається застосуванням економетричних методів для оцінки економічних теорій. Економетрика дає інструментарій для економічних вимірювань, а також методологію оцінки параметрів моделей мікро- і макроекономіки. Крім того, економетрика активно використовується для прогнозування економічних процесів як в масштабах економіки в цілому, так і на рівні окремих підприємств. При цьому економетрика є частиною економічної теорії, разом з макро- і мікроекономікою.

Головними елементами економічної кібернетики є:

1. Системній аналіз.
2. Складні системи ієрархічні системи ієрархія моделей.
3. Управління в ієрархічних системах.
4. Узгодження цілей в ієрархічних системах. Графи цілей.
5. Інформація і ентропія.
6. Оптимізація потоків інформації у завданнях управління
7. Контроль і управління в організаційних системах
8. Завдання класифікації.
9. Комплексна оцінка системи і оцінки підсистем. Інтегральні оцінки.
10. Кібернетичні моделі соціальних і економічних систем

1.2. Об’єкт. Його параметри і фактори

Об’єктом прийнято називати деяке явище, підприємство, механізм, технологічний процес, які є предметом вивчення дослідника.

Частіше, об’єкт зображується як прямокутник до якого проведені стрілки, деякі з яких входять у прямокутник, а деякі виходять. Ці стрілки позначають ті явища, які можна спостерігати і вимірювати за межами об’єкта. Ці явища називаються факторами. Розрізняють вхідні (позначаються стрілками до прямокутника) і вихідні (від прямокутника) фактори або входи та виходи. На рис. 1.1 показано приклад зображення об’єкта та вхідних (X_i) і вихідних ($У_i$) факторів. Вхідні фактори розділяються на фактори управління – такі фактори, значеннями яких може керувати дослідних за власним розсудом; збурення – фактори, значеннями яких керувати не можна, але їх можна виміряти; перешкоди – фактори, значеннями яких не тільки не можна керувати, але і величину перешкод частіше виміряти теж неможливо. Для того, щоб розділити ці вхідні фактори за змістом, інколи вживають окремі позначення для кожної з цих груп, наприклад, $\overline{U}, \vec{Y}, \vec{Z}$ відповідно. Тоді вихідні фактори позначаються як $\vec{X}$.

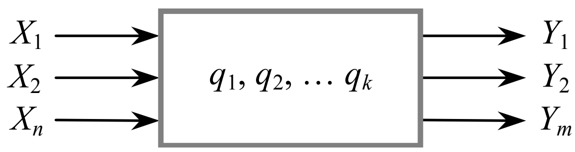


Рис. 1.1. Графічна схема об’єкта

Кожен об’єкт має власну структуру, яка, після взаємодії зі вхідними факторами, перетворює їх на вихідні фактори за певними правилами. Ці правила можуть бути виражені як вербально (словами) так і так допомогою системи рівнянь. Внутрішня структу3ра об’єкта характеризується параметрами, які представляють собою як правила перетворення вхідних факторів так і чисельні значення. На рис.1.1 вони позначаються як q_i, але існують і інші позначення такі як a_i, h_i тощо. Довільний реальний об’єкт має незліченну кількість властивостей (характеристик), і за кожною з них його можна віднести до тієї чи іншої системи як її елемент. Якщо, скажімо, розглядати університет як окрему систему, то з погляду його ректора, проректора з фінансово-господарських питань, головного бухгалтера, начальника служби охорони він складатиметься з різних підсистем та елементів, наділених неоднаковими функціональними властивостями.

Іншим прикладом може бути такий об'єкт як прибуток після сплати податків. Факторами управління для нього будуть – дохід та витрати, факторами збурення – ставки податків, а фактори перешкод у цьому випадку можна вважати економічну кон'юнктуру, яка наперед невизначеним чином впливає на витрати та доходи. Вихідним же фактором розглянутого об'єкту є сума чистого прибутку.

Введемо ще одне поняття – *внутрішній стан об'єкту.* З його допомогою кількісно характеризуються його істотні властивості. Так, з внутрішнім станом об'єкту – цеху, можуть бути співставлені наявні потужності, трудові ресурси, запаси предметів праці і т. д. Отже, внутрішній стан елементу відображає те, що цікавлять нас потенційні характеристики реального об'єкту - кількість речовини, енергії, інформації, його пропускну спроможність і ін. Зіставимо з ним n – вимірний вектор g (з безперервними або дискретними компонентами) так, що попарно помітним станам відповідають відповідні значення цього вектора. Його компоненти інколи $(g_1, g_2, \ldots, g_k)$ називають координатами стану або точками елементу, що відображає в n - вимірному просторі станів. Вектори і множина допустимих значень їх компонентів характеризують можливі стани елементів і інтенсивності їх входів і виходів.

Кількісні характеристики властивостей реального об'єкту в загальному випадку залежать від зовнішніх дій, і їх зміни обумовлюють зміни його стану. Так, виробнича потужність цеху змінюється з інтенсивністю, визначуваною інтенсивністю капітальних вкладень, що направляються на її приріст. Інтенсивність зміни стану оперативного накопичувача ЕОМ визначається інтенсивністю надходження в нього інформації.

З погляду математики будь-який об'єкт описує рух точки у так званому фазовому просторі, або просторі станів. Найважливіша характеристика цього простору – його розмірність, тобто кількість величин, які необхідно задати для визначення стану системи. При цьому не так вже й істотно, що це за величини – вони можуть характеризувати кількість різних представників фауни на певній території, або являти собою змінні, що описують сонячну активність чи кардіограму, або подавати частку виборців, які підтримують президента, і т. ін.

Якщо за координатні осі взяти параметри системи, то значення цих параметрів будуть фазовими координатами, а утворений ними вектор z — станом системи.

Кожному стану системи відповідає певна точка фазового простору – *зображувальна точка*, а кожному процесу зміни стану (руху) системи відповідає певна *траєкторія*. Сім'ю цих траєкторій називають *фазовим портретом системи*. Здебільшого фазовий портрет являє собою сім'ю неперетинних кривих (рис. 1.2)

Фазова траєкторія, характеризуючи переміщення зображувальної точки, відбиває водночас поводження об'єкту під впливом деяких факторів. Отже, за допомогою фазової траєкторії можна графічно подавати його поводження.

Розглянемо систему звичайний диференційних рівнянь n–го порядку $\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{F}(x,\boldsymbol{Y})$. Нехай функція $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\Phi}(x)$ є рішенням системи, на проміжку $[a, b]$.

Множина точок $\mathbf{\Phi}(x), x\in [a,b]$ – це крива у просторі $\mathbf{R_Y}^n$. Цю криву называють *фазовою траєкторією системи* (або просто *траєкторією*, або *фазовою кривою*), а простір $\mathbf{R_Y}^n$, в якому розташовані фазові траєкторії, называють *фазовим простором системи*.

Інтегральна крива системи визначається рівнянням $\boldsymbol{Y} = \mathbf{\Phi}(x), x\in [a,b]$, і зображується в $(n+1)$-вимірному просторіе $\mathbf{R}_{\mathbf{Y},x}{}^{n+1}$.

Фазова траєкторія – це проекція інтегральної кривої на простір $\mathbf{R_Y}^n$.

На зображена інтегральна крива у просторі $\mathbf{R}_{\mathbf{Y},x}{}^{2+1}$ і фазова траєкторія у просторі $\mathbf{R_Y}^2$:

Для прикладу розглянемо задачу Коши для системи диференційних рівнянь 2–го порядку, записану в нормальній и в векторній формі

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 + 4y_2, \\ y_2' = -3y_1 - 3y_2, \end{cases} \begin{cases} y_1(0) = 1, \\ y_2(0) = 1. \end{cases} \quad \boldsymbol{Y}' = \begin{pmatrix} 3y_1 + 4y_2 \\ -3y_1 - 3y_2 \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{Y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (1.1)$$

Рішення цієї задачі можна також записати в аналітичній та у векторній формі:

$$\begin{cases} y_1(x) = \sqrt{3}\sin\sqrt{3}x + \cos\sqrt{3}x, \\ y_2(x) = -\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x. \end{cases} \quad \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\sin\sqrt{3}x + \cos\sqrt{3}x \\ -\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x \end{pmatrix} \qquad (1.2)$$

На рис 1.2 наведено зображення відповідно інтегральної кривої, розташованої у просторі $\mathbf{R}_{\mathbf{Y},x}{}^{2+1}$, та фазової траєкторії, у просторі $\mathbf{R_Y}^2$:

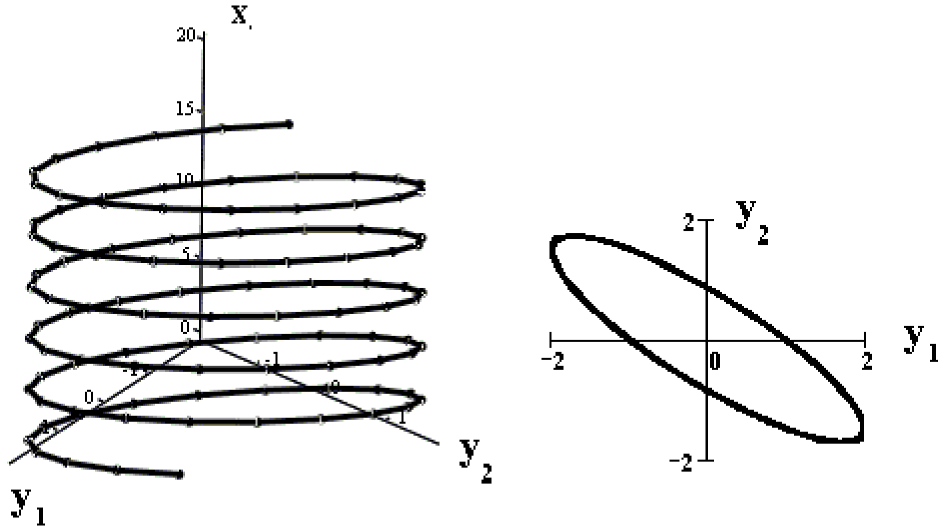


Рис. 1.2. Фазовий портрет (траєкторія) об'єкта у двовимірному просторі

1.3. Система

Системою є сукупність об'єктів і процесів, званих компонентами або елементами, взаємозв'язаних і таких, що взаємодіють між собою, які утворюють єдине ціле, таке, що володіє властивостями, не властивими складовим його компонентам, узятим окремо.

Функціонування елементів системи як єдиного цілого забезпечується *зв'язками* між її елементами. У технічній системі вони формуються при її проектуванні, в біологічній вони виникають природним чином в процесі зародження і розвитку організму., У економічних системах зв'язки можуть організовуватися в плановому порядку або складатися стихійно під впливом ринкового механізму. Склад елементів і спосіб їх об'єднання визначають структуру системи.

Кажучи про систему, зазвичай мають на увазі сукупність елементів (об'єктів), яка реалізовує між ними певні відносини, що цікавлять нас, з фіксованими властивостями. Економічною системою є, наприклад, підприємство як сукупність цехів, біологічною – система кровообігу, що включає серце і кровоносні судини, технічною – електронно-обчислювальна машина, що складається з комплексу пристроїв для обробки інформації.

Ці приклади ілюструють інтуїтивні уявлення про систему як об'єкт, об'єднуючий множину матеріальних елементів, які функціонують як єдине ціле.

Будь-який об'єкт, прийнятий як відправний, може бути представлений як елемент (або підсистема) деякої системи вищого рангу і як система по відношенню до деякої сукупності підсистем нижчого рангу. Рухаючись вгору по ступенях цієї ієрархії, ми прийдемо до «універсальної» системи – Всесвіту, рух вниз приведе нас до її первинного елементу – елементарної частинки. Тому при аналізі і проектуванні конкретної системи виникає проблема визначення тієї «ділянки» ієрархії, яка входить в її компетенцію, і вибору елементу, що приймається як «первинний».

Взаємодії реальних об'єктів, що охоплюються конкретною системою, і її взаємодії із зовнішнім середовищем такі ж різноманітні, як властивості об'єкту і середовища. Система має вхідні та вихідні фактори, має і свої параметри, але ці останні вже визначаються параметрами об'єктів, які складають систему. Систему також можна описати словесно, математично і графічно.

При аналізі і проектуванні системи беруть до уваги лише ті зв'язки, які істотно впливають на її функціонування; останніми нехтують, а у разі потреби систему захищають від їх «паразитного» впливу, що розглядається як обурення (перешкоди). Вживаючи поняття вхідних факторів (входів) елементу мають на увазі, що вони відображають найбільш істотні зв'язки (матеріально-речові і інформаційні) між об'єктами. Таким чином, поняття «система» є абстракцією не тільки відносно властивостей охоплюваних нею реальних об'єктів, але і відносно зв'язків між ними.

При описі системи для кожного з її елементів треба брати відповідні йому рівняння зв'язку між його входами і виходами з тією обмовкою, що функціональні змінні перейменовуються відповідно до прийнятих в системі. Об'єднані таким чином рівняння складуть систему рівнянь, які дають математичний опис системи.

На рис. 1.3 представлена спрощена схема підприємства як об'єкту управління. Аналіз таких об'єктів заснований на комплексному його розгляді як єдиного цілого, такого, що складається з взаємозв'язаних елементів, а також на з'ясуванні впливу цих елементів на функціонування всієї системи.

Частина системи, яка сприймає дію навколишнього середовища, називається входом системи, частина, яка впливає на навколишнє середовище і інші системи, називається виходом.

На вхід системи поступає три типи дій:

– вхідні керовані змінні $\vec{U} = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ є вектором управлінь. У виробничо-економічних системах це. як правило, цілеспрямовано змінні ресурси (трудові. енергетичні, матеріальні);

– вхідні некеровані (але контрольовані) змінні $\vec{Y} = \{y_1, y_2, ..., y_r\}$ під якими у виробничій економіці розуміють, як правило, якість змінних цілеспрямовано ресурсів (якість сировини, кваліфікація фахівців, види енергетичних ресурсів і ін.). Їх називають збурення;

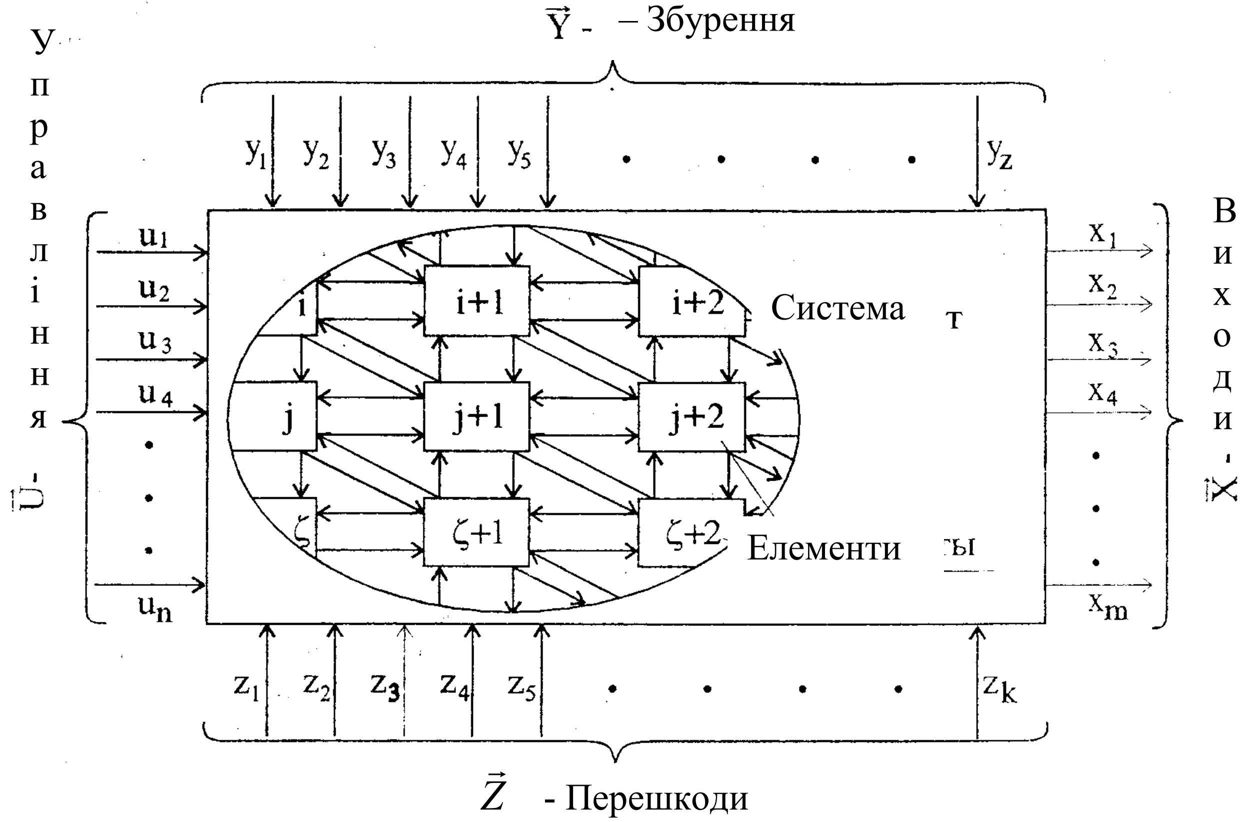


Рис. 1.3. Спрощена схема підприємства як об'єкту управління.

– неконтрольовані чинники $\vec{Z} = \{z_1, z_2, ..., z_k\}$ є вектором перешкод. По суті, це вектор, про який менеджерові відомо дуже мало або взагалі нічого не відомо. Тоді цей вектор взагалі не враховується. Якщо деякі статистичні характеристики компонентів вектора відомі, то їх слід враховувати при розробці моделі системи. Про наявність збурень, що діють на систему можна здогадатися тоді, коли при незмінних факторах керування та перешкод, вихідні фактори починають змінюватися.

Будь-яка економічна, виробничо-економічна система призначена для перетворення векторів вхідних дій $\vec{Y}, \vec{U}, \vec{Z}$ у вектор вихідний змінної $\vec{X} = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$. У цьому і полягає суть виробничих процесів, що перетворюють матеріальні, енергетичні і трудові ресурси в продукт, що оцінюється економічними показниками (наприклад, собівартістю).

На рис. 1.3 вихідні змінні $x_1, x_2, ..., x_m$ характеризують результати роботи досліджуваної системи, а вектор $\vec{X}$ носить назву вектора стану.

Промислове виробництво, представлене у вигляді структури на рис. 1.2 можна розглядати як керований об'єкт. Процес виробництва тієї або іншої продукції завжди порушуватиметься унаслідок зміни вектора обурень $\vec{Y}$ об'єкту, що діє на вході. На практиці обуреннями є все ті випадкові дії на об'єкт, які відхиляють параметри виробничого процесу від заданих рівнів. На сучасних виробництвах можна виділити певні групи збурень:

y_1 – технологічні, такі, що характеризують відхилення параметрів процесів і засобів праці; y_2 – психофізичні і медичні, пов'язані із захворюванням працівників і коливаннями їх індивідуальної продуктивності праці залежно від зовнішніх умов; y_3 – соціальні, пов'язані з порушенням трудової дисципліни; y_4 – кліматичні; y_5 – організаційні і інформаційні, пов'язані з недосконалістю організації виробництва, планування, обробки і відображення інформації і ін. Таким чином, можна записати, що $\vec{Y} = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$.

Необхідно відзначити, що перераховані вище збурення діють на об'єкт із зовнішнього середовища, тому можуть бути охарактеризовані як первинні збурення (чинники, що збурюють). Треба також сказати, що дія первинних збурень породжує вторинні збурення, точка додатку яких вже не співпадає з первинними обуреннями із-за наявності внутрішніх зв'язків між елементами, що входять в об'єкт.

Організована (керована) виробнича система(об'єкт) повинна функціонувати таким чином: при зміні компонент $y_1,..., y_r$ вектора збурень $\vec{Y}$ компоненти $u_1,...,u_n$ вектора управлінь $\vec{U}$ змінюються так, щоб компоненти $x_1, x_2,..., x_m$ вектора стану $\vec{X}$ відповідали плановим значенням. Такий об'єкт називається керованим.

Важливою властивістю складних систем є **емерджентність** – тобто наявність таких специфічних властивостей системи, які не випливають з властивостей, притаманних її елементам, а виникають у процесі їхньої взаємодії як наслідок відповідних кооперативних ефектів. Саме емерджентні властивості економічних систем є найменш доступними для спостереження та вимірювання, що вельми утруднює дослідження таких систем та управління ними. Загальні закономірності появи нових властивостей, породжуваних об'єднанням економічних об'єктів, явищ та процесів, можна виявити та кількісно описати, лише проаналізувавши значний обсяг інформації. Емерджентність легко зрозуміти на прикладах статистичної рівноваги: деякі ознаки можуть бути характерними для всієї статистичної сукупності явищ, не будучи характерцілого по окремих об'єктах і для виведення його властивостей на основі розглянутих властивостей складових його частин.

1.4. Класифікація систем

Частинами, складовими різного роду складні утворення, тобто системи, можуть бути не тільки якісь фізичні предмети, але і деякі уявні, ідеальні об'єкти. Тому всі системи можна підрозділити на **фізичні** (або емпіричні) і **абстрак-**

тні (або концептуальні). Фізичні складаються з реально існуючих (природних або штучних) об'єктів: машин, виробів, устаткування, працівників і так далі Абстрактні – з об'єктів, що існують лише в думці людини: поняття, ідеї, гіпотези, плани і тому подібне Наприклад, абстрактними системами будуть сукупність принципів, складових підстава якого-небудь учення, сукупність вживаних в дослідженнях методів, створюючих певну методологію, і так далі Є також і системи змішаного типу. Так, уявляючи собі особу якої-небудь людини як систему, ми розглядаємо сукупність його фізичних даних і індивідуально виражених психологічних властивостей (характер, темперамент, здібності н інші), що є абстрактними поняттями.

Як друга ознака класифікації систем можна прийняти їх походження. Системи, які виникають в природних процесах, називають природними: Галактика, сонячна система, клімат, гірські системи і тому подібне Якщо людина змінила систему шляхом перетворення складових її об'єктів, властивостей і взаємозв'язків, тоді вони називаються системами, зробленими людиною (штучними): транспорт, телефон, телеграф, конвеєр, ракетна система. **Природні** і **штучні** системи можуть бути фізичними або абстрактними.

Системи можна розділити на види також за ознакою структури їх побудови і значущості тієї ролі, яку грають і них окремі складові частини порівняно з роллю інших частин тієї ж системи. У деяких системах одному з складових їх об'єктів або однією з частин може належати домінуюча роль. Значення цього підрозділу системи набагато перевершує значення інших частин. Такий компонент системи виступатиме як центральний, такий, що визначає функціонування системи. Інші частини системи підкоряються дії центрального підрозділу. Такі системи називаються **централізованими.** Серед природних фізичних систем прикладом централізованої системи служить атом, в якому електрони обертаються навколо того, що займає центральне положення в системі ядра, а також сонячна система. Із зроблених людиною систем централізованою назвемо систему виробництва, в якому всі цехи працюють ради забезпечення безперебійної роботи одного з цехів, наприклад складального конвеєра на машинобудівному заводі. У інших системах всі складові їх об'єкти приблизно однаково значущі. Структурно вони розташовуються не навколо деякого центрального об'єкту, як супутники, а взаємозв'язані послідовно або паралельно і мають приблизно однакове значення для функціонування системи. Такі системи називаються децентрализованными. Система транспорту в масштабі країни, що включає що раціонально поєднуються всі його види (железнодорожный, автомобільний, повітря, річковий, морський), може розглядатися як **децентрализована** система. Нецентралізованою (у технічному аспекті) є також система електростанцій, що працюють на єдине енергетичне кільце.

Системи можна класифікувати також по ступеню визначеності їх дії (функціонування). Якщо складові систему об'єкти (частини) і зв'язки між ними функціонують чином, що точно передбачається, систему називають **детермінованою** (визначеною). Будь-яке подальший стан такої системи можна точно передбачити, знаючи попередній стан і програму переходу системи в наступний стан. Системи, в яких складові їх об'єкти (частини) і зв'язки між ними функціонують так, що не можна точно затверджувати про послідовність їх станів, детально передбачати їх поведінку, називають **стохастичними**, тобто випадковими, імовірнісними або такими, що нерегулярно функціонують. У таких системах майбутні стани, тобто поведінка їх, описується (передбачається) за допомогою методів теорії вірогідності і математичної статистики. Саме такі системи частіше зустрічаються у виробничій практиці, в економіці. Їх важче досліджувати і описувати. Ними, в першу чергу, і займається економічна кібернетика.

Системи існують в певному навколишньому їх середовищі, обумовлюються нею і можуть і більшою або в меншій мірі обмінюватися з нею речовиною, енергією, інформацією. У зв'язку з цим вони діляться на **відкриті *і* закриті**. Ті, які з певною регулярністю і позаднім чином обмінюються з навколишнім середовищем речовиною, енергією або інформацією, називаються відкритими (незамкнутими) по якомусь з цих ознак (відкриті для енергії, відкриті для інформації, для речовини). Якщо такий обмін з навколишнім середовищем не спостерігається або ж він незначний і їм нехтують, системи будуть закритими (замкнутими).

Системи можуть по-різному реагувати на дію зовнішнього середовища: одні залишаються пасивні по відношенню до неї, інші пристосовуються до її дій, до зовнішніх змін. Залежно від цього їх ділять ще на дві групи: пасивні до змін зовнішнього середовища називають **неадаптивними**, а реагуючі па ці зміни, здатні пристосовуватися до них, називають **адаптивними**.

Системи, що складаються з людей, називають **соціальними** системами. Природно, в такі системи входять і різні об'єкти, з яких складаються фізичні неживі системи – машини, будівлі, споруди. Проте найбільш важлива, така, що визначає роль в них належить організаційній структурі і поведінці людей. Як приклад приведемо такі системи: виробничий колектив, громадські організації, технічні, спортивні і інші суспільства.

Системами, що складаються з одних тільки машин і механізмів і що діють автоматично, без участі людей, є **машинні** системи. Виділення їх майже завжди до певної міри умовно, оскільки вони не здатні виробляти свій власний початковий стан і підтримувати своє функціонування. При більш загальному розгляді ці системи виступають зазвичай як частини більші, що включають і людей.

Для сучасного виробництва і для інших областей наший життю характерна наявність совокупностей машин, що виконують певні складні функції за участю людини, причому основне навантаження лягає не на його м'язи, а на психічні процеси сприйняття, запам'ятовування, мислення. Такі системи виділяють в самостійну групу **людино-машинних** систем. Сюди ж відносяться і людино-машинні системи, що управляють, в яких в процесі взаємодії людини і обчислювальних машин виробляються рішення – сигнали, що управляють.

Системи, що існують тривалий час в порівнянні з обмеженим періодом діяльності людей в них, називають **постійними**. Наприклад, підприємство можна розглядати як постійну систему при розробці планів його розвитку на перспективу. Системи, які створюються на заданий період премени, а потім ліквідовуються, називаються **тимчасовими**. Група, створена для розробки деякого науково-дослідного проекту, а потім розформована, є тимчасовою системою.

Якщо властивості і функції системи протягом тривалого часу істотно не змінюються або змінюються у формі циклів, що повторюються, її називають

стабільною. Система з властивостями, що змінюються, і функціями і без циклів, що строго повторюються, в цих змінах називається **нестабільною**.

Залежно від кількості об'єктів, включених в системи, їх підрозділяють на **великі** і **малі.**

Прості системи мають просту структуру і виконують якісь нескладні функції. **Складні** системи складаються з великої кількості взаємозв'язаних і взаємодіючих між собою частин (мають складну структуру) і виконують якусь достатньо складну функцію. Приналежність тієї або іншої конкретної системи до класу простих або складних є відносною. Іноді мета і завдання досліджень дозволяють абстрагуватися і розглядати складну систему як просту. Причому результати від цього не страждають, а проводити дослідження легко.

Отже, окрім описаних вже в подразд. 2.2 ділень систем на види їх можна класифікувати на статичних і динамічні. Ті системи, в яких показники, характеризующпс стан елементів, постійні в часі (параметри), а зв'язки між елементами жорсткі, називаються статичними. Тс же системи, в яких показники, що характеризують стан елементів, змінні в часі, а зв'язки між елементами – динамічні, називаються динамічними.

Ті системи, в яких показники, що характеризують стан елементів, постійні в часі (параметри), а зв'язки між елементами жорсткі, називаються **статичними**. Тс же системи, в яких показники, що характеризують стан елементів, змінні в часі, а зв'язки між елементами – динамічні, називаються **динамічними**.

У загальному випадку в будь-якій складній системі всі кількісні показники (і ті, що характеризують стан елементів, і ті, що визначають стан їх входів і виходів) змінюються в часі, тобто набір їх є $A = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots, a_N)$ якась функція від часу t: $A = f(t) = [a_1(t), a_2(t), a_3(t), \ldots, a_n(t), \ldots, a_N(t)]$. (1.1)

Якщо показниками набору виступають величини, що характеризують стан елементів системи, і відомий конкретний вираз функції $f(t)$, то можна вивчити зміни, що відбуваються в системі зі збігом часу. Таким чином, функція (1.1) як би відображає рух системи в часі, через що її називають траєкторією або лінією поведінки системи. Значення цієї функції при $t = 0$ визначає стан системи на початку даного періоду, а при якомусь значенні стану $t = t_i$ її стан через t одиниць часу.

Деякі з показників a_i у відрізку часу, впродовж якого досліджується система, можуть не змінюватися або змінюватися настільки мало, що при прийнятій точності розрахунків цими змінами нехтують. Такі показники називаються **параметрами**. Показники, які змінюються в часі істотно і ці зміни враховуються в дослідженнях, називають **змінними**. Показники, що характеризують зв'язки між елементами системи, завдяки яким здійснюється їх узгоджене функціонування, тобто показники стану входів і виходів елементів, також можуть змінюватися з часом або ж залишатися незмінними. Зв'язки, що не змінюються, називаються **жорсткими**, **постійними** або **статичними**. Для набору показників a_i, що характеризують жорсткі зв'язки, функція, що визначає лінію поведінки системи, постійна: $A = f(t) = [a_1(t), a_2(t), a_3(t), \ldots, a_n(t), \ldots, a_N(t)] = \mathrm{const}$,
(1.2)

а її перша похідна дорівнює нулю:

$$A' = f'(t) = [a_1'(t), a_2'(t), a_3'(t), \ldots, a_n'(t), \ldots, a_N(t)] = 0. \qquad (1.3)$$

Зв'язки, що змінюються з часом, між елементами називаються **гнучкими**, змінними або **динамічними**. Для таких зв'язків функція траєкторії руху системи в часі не є постійною, а її похідна не рівна нулю.

1.5. Соціально-економічна система

Соціально-економічна система це цілісна сукупність взаємозв'язаних і взаємодіючих соціальних і економічних інститутів (суб'єктів) і відносин з приводу розподілу і споживання матеріальних і нематеріальних ресурсів, виробництва, розподілу, обміну і споживання товарів і послуг.

Соціально-економічну систему, як, втім, і всяку іншу, характеризують системні якості. У їх ряду можна відзначити особливі економічні відносини, які зв'язують єдністю походження всі останні, з якого потім розвиваються все більш складні відносини. Воно є найпростішим для даних умов способом розподілу ресурсів і підтримки пропорцій.

Соціально-економічна система неминуче локалізована в економічному часі і просторі, а також по відношенню до її альтернативних варіантів. Вона має певні історичні, географічні, етнічні, духовні, політичні і економічні межі. Це у свою чергу означає, що вона може утілюватися в конкретних державно-політичних утвореннях або у формі інших, менших по масштабу, суспільно-господарських організацій. У міру посилення ефекту глобалізації як соціально-економічна система правомірно розглядати все людство. Цим обумовлюється історичність дослідження: будь-яка система, що вивчається, з одного боку, неминуче історично обумовлена, а, з іншою, історично обумовлені всі категорії і закони цієї системи.

Не всі риси даної системи виникають одночасно, а спочатку розвиваються прості соціальні і економічні форми, а на їх основі все більш і більш складні.

Складність економічної системи полягає передусім у тому, що зміна структури, зв’язків та поводження довільного економічного суб’єкта впливає на решту економічних суб’єктів і спричиняє зміну системи в цілому. Водночас будь-яка зміна в системі на макрорівні позначається на структурі, зв’язках та поводженні економічних суб’єктів.

Ще однією ознакою складності економічної системи є наявність великої кількості як прямих, так і зворотних зв’язків (матеріальних, інформаційних) між її елементами та підсистемами.

Основні властивості, притаманні соціально-економічним системам, які необхідно враховувати під час їх дослідження:

1.Цілісність, яка означає, що зміна будь-якого компоненту системи впливає на її інші компоненти і приводить до зміни системи в цілому. Таке явище можна, наприклад, прослідкувати у разі діалектичної взаємодії продуктивних сил і виробничих відносин, коли при зміні засобів виробництва міняються відповідно виробничі відносини і система в цілому. Тобто, ми в даному випадку маємо справу з взаємозалежністю компонентів економічної системи.

2. Ієрархічність. Це означає, що кожна система може бути розглянута як елемент вищого порядку. Наприклад, економіка України, як перехідна, може бути розглянута як один з елементів системи-світу.

3. Інтегративность (емерджентність), яка припускає, що система в цілому володіє властивостями, відсутніми у її елементів (наприклад, розподіл праці, який можливий тільки за наявності деякої кількості виробників). Вірно і зворотне, тобто, елементи можуть володіти властивостями, які не властиві системі в цілому.

4. Динамічність економічних процесів, що полягає у зміні параметрів та структури економічних систем під впливом зовнішніх і внутрішніх факторів.

5. Стохастичний характер економічних явищ, з огляду на який для їх опису застосовуються статистичні методи дослідження, а це означає, що поводження економічних систем не піддається точному детальному опису та прогнозуванню.

6. Закономірності економічних процесів можна виявити тільки на підставі достатньої кількості спостережень.

7. Здатність до самоорганізації, тобто здатність без регулюючого впливу покращувати свої показники.

8. Її підсистеми не мають чітких меж: один і той самий елемент (економічний суб'єкт) може одночасно брати участь у різних процесах функціонування економіки, може бути елементом багатьох її підсистем.

9. Економічні процеси не можна ізолювати від зовнішнього середовища та спостерігати їх у «чистому» вигляді.

При аналізі і розробці кібернетичних соціально-економічних систем потрібно одразу визначити певну класифікацію підсистем, аналіз структури і зв'язків яких дозволить точніше їх описати і створити.

Для прикладу табл. 1.1 представлена ієрархія і деталізація управління виробництвом, розбита на підсистеми.

Таблиця 1.1

Зразковий перелік об'єктів управління і типових завдань економіко-організаційного управління підприємством

Індекс підсистеми	Підсистема	Супутні процеси об'єктів управління і функціональних завдань
A	Основні фонди	1. Придбання, надходження, зведення. 2. Стан нових, відновлених, готівки. 3. Наявність. 4. Розподіл і внутрішні переміщення. 5. Використання і завантаження. 6. Вибуття. 7. Знос, амортизація і плата за фонди. 8. Поточний ремонт. 9. Капітальний ремонт
B	Оборотні фонди	1. Надходження, придбання, освіта. 2. Якість тих, що поступили, готівки відновлених. 3. Наявність. 4. Розподіл і внутрішні переміщення. 5. Використання. 6. Вибуття. 7. Відновлення
C	Трудові ресурси	1. Надходження. 2. Атестація тих, що поступили, навчилися і є в наявності. 3. Розподіл, внутрішні переміщення, використання трудових ресурсів.

Індекс підси-стеми	Підсистема	Супутні процеси об'єктів управління і функціональних завдань
		4. Використання робочого часу. 5. Використання фонду зарплати. 6. Вибуття. 7.Навчання і підвищення кваліфікації
I	Інтеллекту-альниє ре-сурси	Виконання сторонніми організаціями для виробничого підприємст-ва: 1) наукові досліджень: 2) спеціального математичного забезпе-чення; 3) конструкторських розробок; 4) технологічних розробок; 5) нормативних даних
EI	Відванта-ження і реалізація продукції	1. Маркетинг. 2. Продукція, що підлягає відвантаженню. 3. Відвантаження і постачання готовій продукції. 4. Реалізація продукції. 5. Відвантаження і реалізація неліквідів (надлишків основних і обо-ротних фондів)
E2	Фінансова діяльність	Наявність і використання: 1) держбюджетні асигнування; 2) платежі до держбюджету; 3) кредити банку; 4) розрахунки за кредты банка; 5) надходження грошей на рахунок підприємства в банці; 6) витрати з рахунку підприємства в банці; 7) розрахунок за відвантажену про-дукцію; 8) розрахунок за надані послуги; 9) розрахунок за отриману продукцію; 10) розрахунок за отримані послуги; 11) надходження грошей в касу; 12) витрата грошей з каси і повернення в банк
Dl	Виробнича діяльність по випуску продукції	1. Запуск-випуск товарної продукції (основною і допоміжною). 2. Якість продукції, сортність. 3. Випуск продукції для своїх підрозділів
D2	Виробнича діяльність обслугову-ючого типу	1. Виконання сервісних послуг своїм підрозділам. 2. Поточна конс-трукторська підготовка виробництва. 3. Поточна технологічна під-готовка виробництва. 4. Розрахунково-обчислювальні роботи. 5. Оперативне коректування норм і нормативів. 6. Функціонування інформаційно-довідкової служби. 7. Господарське обслуговування
D3	Виробнича діяльність по виконан-ню інших операцій	1. Будівництво. 2. Послуги стороннім організаціям. 3. Конструкторські розробки 4. Технологічні розробки для випуску нової продукції. 5. Розробка нових форм. 6. Науково-дослідні роботи. 7. Спеціальне математичне забезпечення.
P	Розвиток виробництва	1. Впровадження нової техніки 2. Впровадження нових матеріалів. 3. Оргтехмеропріятія. 4. Зростання продуктивності купа і НОТ. 5. Формування і розподіл: 1) повернення і собівартість: 2) балансо-вий прибуток і рентабельність; 3) інтегральні показники діяльності підприємства; 4) фонди економічного стимулювання; 5) фінансовий план і його використання.

Таблиця 1.2

Компоненти тіла об'єктів систем життєзабезпечення А, В, С

Перший ярус тіла об'єкту управління	Компоненти другого ярусу тіла об'єкту управління								
А - основні фонди	Будівлі	Споруди	Машини і уста-устатку-	Передаточні засоби	Транспортні засоби	Інструменти	Виробничий інвентар	Господарський інвен-	Інші основні фонди
В - оборотні фонди	Сировина, основні матеріали, напівфабрикати	Допоміжні матеріали	Паливо, електроенергія	Тара і упаковка	Запасні частини	Незавершене виробництво	Малоцінні предмети і ті, що щвидко зношуються		
С - трудові ресурси	Кадри	Зарплата основна	Зарплата додаткова	Календарний час	-	-	-	-	-

1.6. Зворотній зв’язок

Якщо до об’єкта або системи (A) додано інший об’єкт або систему (B) таким чином, що вихідні фактори з A поступають до вхідних факторів B, а вихідні фактори B поступають на входи A – це називається зворотнім зв’язком об’єкта чи системи A. На рис 1.4 представулено спрощену схему зворотного зв’зку, коли об’єсти A і B мають тільки по одному входу та виходу, але в загальному випадку кількість входів та виходів A і B може бути великим і зворотній зв’язок може здійснюватися з декількома входами і виходами.

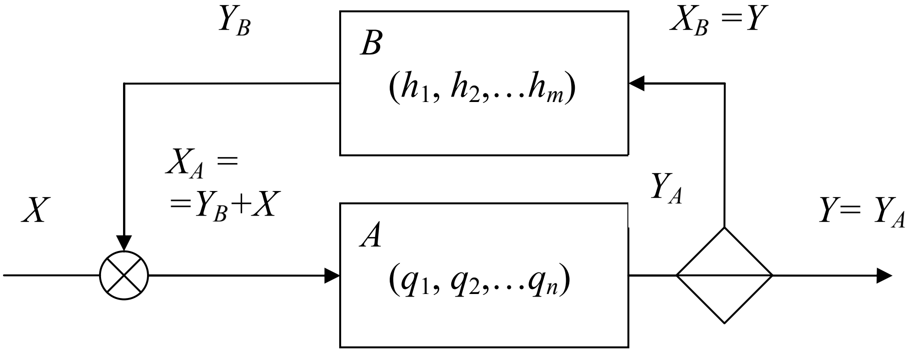


Рис. 1.4. Принципова схема зворотного зв’язку
(q_i , h_j – параметри об’єктів A та B)

Якщо об’єкт A описується таким зв’язком поміж входом і виходом як $Y_A = f(X_A, q_1, q_2, \ldots q_n)$, а об’єкт B – $Y_B = g(X_B, h_1, h_2, \ldots h_m)$, де f, g – якісь відомі функції, що зв’язують входи та виходи об’єктів і залежать від параметрів та входів об’єктів. Тоді у загальному випадку така система буде описуватися залежністю

$$Y = f(X_A + g(Y, h_1, h_2, \ldots h_m), q_1, q_2, \ldots q_n), \quad (1.4)$$

Для прикладу, нехай

$$Y_A = 5\frac{dX_A}{dt} + 3X_A - 10, \qquad Y_B = -8X_B + 4.$$

Тоді система буде описуватися виразом

$$Y = 5\frac{d\left[X + (-8Y + 4)\right]}{dt} + 3\left[X + (-8Y + 4)\right] - 10,$$

який після перетворення прийме вигляд

$$40\frac{dY}{dt} + 25Y = 5\frac{dX}{dt} + 3X + 2. \tag{1.5}$$

Вирішення нелінійного диференційного рівняння можна виконати за допомогою математичного процесора у графічному вигляді, отримавши фазову траєкторію як на рис.1.2.

Зворотній зв'язок розділяють на **позитивний** (коли зі збільшенням $Y_A - Y_B$ теж збільшується) і **негативний** (коли навпаки, зі збільшенням $Y_A - Y_B$ зменшується).

Механізм негативного зворотного *зв'язку* забезпечує відновлення та підтримання рівноваги (порядку) в системі. Цей механізм існує в системах різних типів: природних, технічних, біологічних, економічних тощо. Принцип регулювання за допомогою зворотних зв'язків є одним із ключових у кібернетиці. Якщо значення параметрів регулювання відхиляються на виході від заданих, що свідчить про порушення рівноваги в системі або про неоптимальний режим її функціонування, то завдяки механізму зворотного зв'язку відбувається таке коригування входів системи, щоб рівновага в ній відновилась.

У складніших системах, зокрема біологічних, соціально-економічних, за допомогою механізму негативних зворотних зв'язків підтримується стан *динамічної рівноваги*. Так, у біології відоме явище *гомеостазису* – підтримання стійкої рівноваги між життєво важливими функціями організму, що еволюціонує. У загальнішому сенсі йдеться про підтримання програми функціонування системи.

Наприклад, «невидима рука», що в ринковій економіці збалансовує попит і пропозицію, встановлюючи рівноважні ціни, і є механізмом гомеостазису. Щодо ринкової рівноваги, то вона означає встановлення спонтанного порядку, оскільки немає управляючого органу, який дістає інформацію про відхилення від рівноваги між попитом і пропозицією та коригує ціни, повертаючи систему до рівноважного стану. Спонтанна рівновага встановлюється на ринку внаслідок взаємодії продавців і споживачів. Кожний із них діє свідомо, маючи власні цілі, але в результаті їхніх спільних дій виникає єдиний для всіх порядок, що полягає у встановленні рівноважних цін та обсягів продукції.

Негативні зворотні зв'язки, компенсуючи відхилення, не завжди повертають систему до вихідних параметрів рівноваги (зокрема, до вихідних значень рівноважних цін та обсягів продукції). Це й означає, що йдеться про динамічну рівновагу.

Згідно з принципом позитивних зворотних зв'язків деякі зміни в системі не пригнічуються, а нагромаджуються та підсилюються, що може призводити до кумулятивних ефектів – переходу системи до нерівноважного стану. Далі система або руйнується, або принципово перебудовується зі зміною структури, функцій тощо.

1.7. Інформація

Інформація – абстрактне поняття, що має різні значення залежно від контексту. Походить від латинського слова «*informatio*», яке має декілька значень:

- роз'яснення; виклад фактів, подій; витлумачення;
- представлення, поняття;
- ознайомлення, просвіта.

Загальне поняття інформації подано у філософії, де під нею розуміють відображення реального світу.

Інформація – це нові відомості, які прийняті, зрозумілі і оцінені її користувачем як корисні. Іншими словами, **інформація** – це нові знання, які отримує споживач (суб'єкт) у результаті сприйняття і переробки певних відомостей.

Теóрія інформáції – це розділ математики, який досліджує процеси зберігання, перетворення і передачі інформації. Теорія інформації тісно пов'язана з такими розділами математики як теорія ймовірностей і математична статистика. Вона пов'язана з інформаційною ентропією, комунікаційними системами, криптографією, корекцією помилок і іншими важливими областями. В основі теорії інформації лежить обчислення кількості інформації у випадковій величині відносно іншої випадкової величини.

Приклад. Фахівець, що виїжджає у відрядження на два підприємства і охочий потрапити на виробничі наради, які проводяться там щонеділі, запитав у представників цих підприємств, що знаходилися в цей час в його установі, в які дні скликаються наради. Представник першого підприємства відповів: «У нас наради проводяться по п'ятницях», інший повідомив: «А у нас по п'ятницях ніяких нарад не скликають. П'ятниця у нас – передсвятковий день, вільний від всяких нарад». Скільки інформації передав фахівцеві кожен з представників в своєму повідомленні, хоча перший з них сказав 6 слів, а другий – 18, тобто в три рази більше?

Представимо день наради як систему здатну, (при п'ятиденному робочому тижні) знаходитися в кінцевому числі дискретних станів (n - 5). Система X може прийняти один з п'яти можливих станів: x_1 – понеділок, x_2 – вівторок, x_3 – середа, x_4 – четвер x_5 –пятница. Вважаючи кожен із станів рівноімовірним, ступінь невизначеності системи H можна прийняти рівною кількості можливих невідомих нам станів n системи, тобто 5 одиниць для першого і другого підприємств. Вважатимемо, що кількість інформації у вислові кожного з представників дорівнює тій величині, на яку зменшилася невизначеність системи в результаті отриманого повідомлення про неї. Після повідомлення представника першого підприємства система, що цікавить фахівця, стала повністю визначеною: невідомих днів проведення наради немає (n = 0) і ступінь невизначеності її став рівний H_1 = 0. Після повідомлення представника другого підприємства невизначеність другої системи зменшилася всього лише на одну одиницю (фахівець тепер точно знає, що система не може потрапити в стан x_5, тобто п'ятниця немає вдень нарад), по чотири стани залишилися, невизначені і, отже, невизначеність системи $H_2 = 4$. Розрахуємо кількість інформації, переданої в повідомленні кожного з представників, як різницю між невизначеністю систем, що цікавлять фахівця, до отримання ним повідомленні H і невизначеністю після повідомлення: $I = H - H'$; у повідомленні представника першого підприємства $_{I1} = 5 - 0 = 5$, у повідомленні представника другого підприємства $I_2 = 5 - 4 = 1$. Отже, в повідомленні представника першого підприємства, що складається з шести слів, інформації, вимірюваної числом можливих невизначених станів системи, що цікавить нас, міститься в п'ять разів більше, ніж в повідомленні другого, що складається з вісімнадцяти слів.

Для вимірювання кількості інформації найбільш придатна логарифмічна функція. Позначивши число можливих невідомих нам станів системи до отримання повідомлення через n, а після получення – через n', невизначеність H стану системи X до повідомлення $H(X)$ і після – $H'(X)$, знаходимо як $H(X) = \log n$; $H'(X) = \log n'$. Кількість інформації, отриманої при цьому, можна розрахувати як різницю невизначеності стану системи до повідомлення про неї і після нього, тобто як величину

$$I = H(X) - H'(X) = \log n - \log n' = \log \frac{n}{n'} \tag{1.3}$$

При повному з'ясуванні стану системи, $(n' = 1)$, в якому знаходиться система, кількість інформації в повідомленні буде рівна логарифму числа можливих станів системи до повідомлення:

$$I = \log n - \log n' = \log n - \log 1 = \log n - 0 = \log n.$$

Як міра невизначеності системи в теорії інформації беруть не число можливих станів системи n, як в розглянутому раніше прикладі, і не логарифм його $\log n$, а суму добутку вірогідності p_i настання кожного i-го з n станів на логарифми цієї вірогідності $\log p_i$, узяту із зворотним знаком:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i. \tag{1.4}$$

Цю величину називають ентропією системи. Максимальне значення при однаковій кількості станів n вона приймає в тих системах, у яких стани рівноімовірні; величина її в цьому випадку рівна логарифму числа станів:

$$H(X) = -n \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = -1 (\log 1 - \log n) = \log n.$$

При семантичному підході до дослідження економічної інформації вивчаються її зміст і способи знакового уявлення. Економічна інформація у такому разі повністю ототожнюється з економічними даними. Важливою характеристикою інформації є також її цінність, корисність для споживача. Часто на практиці різні приймачі отримують одні і ті ж потрібні ним відомості, які зменшують невизначеність їх знань про стан деякої системи, що цікавить його, але інтерес і ступінь корисності інформації для кожного з одержувачів неоднакові.

Крім того, цінність інформації характеризується її актуальністю, надійністю, достовірністю отримуваних відомостей. Такий аналіз можна проводити кількісно, якщо вказані якості вдається виразити у вигляді конкретних чисел. Застосовні також і інші методи визначення корисності економічної інформації. Таким чином, дослідження економічної інформації з погляду її корисності є найбільш конкретними і узагальнюють в якійсь мірі кількісний і смисловий аспекти її розгляду.

Отже, інформація є складним явищем, що характеризується принаймні з трьох різних сторін: кількісною, змістовною (або смисловий) і прагматичною. Тому останнім часом отримує розвиток ідея з'єднання різносторонніх оцінок інформації в одному показнику, що представляється у вигляді

$$I_{ij}(t) = [x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t),\ x_4(t)], \tag{1.5}$$

де– x_1, x_2, x_3, x_4 координати вектора у момент часу t, причому x_1 – координата, що характеризує кількість інформації в повідомленні; x_2 – характеристика якості інформації; x_3 – показник змістовності інформації; x_4– характеристика корисності інформації.

1.8. Основні закони та принципи кібернетики

При організації і виконанні управлінської роботи із застосуванням кібернетики необхідно враховувати і використовувати виведені в ній наукові закони, закономірності і принципи.

Закон необхідної різноманітності.

Для його розуміння цього закону уявимо собі систему, яка знаходиться в багатьох різних станах або, іншими словами, володіє певною різноманітністю. Окремі стани цієї системи небажані, шкідливі для неї. Пристрій системи, що управляє, покликаний перешкоджати попаданню її в такі стани. Він може зробити це, прийнявши деякий свій стан, що перешкоджає попаданню керованої системи в небажаний стан. Розгляд такої системи приводить до наступних виводів: щоб скоротити кількість можливих попадань системи в небажані стани (тобто зменшити її різноманітність), необхідно збільшити кількість станів керуючого пристрою (його різноманітність), якими воно перешкоджає цьому. Щоб пристрій, що управляє, міг ефективно управляти системою, різноманітність станів його, якими він перешкоджає попаданню керованої системи в небажаний стан, повинна бути не меншою, ніж різноманітність можливостей системи потрапити у вказаний стан.

Отже тільки різноманітність в одній підсистемі може зменшити різноманітність, що створюється в інший. ільки різноманітність може знищити різноманітність.

Економічні системи (підприємства, об'єднання і т. п.). достатньо різноманітні по станах вироблюваної продукції, яка може виступати як валова, готова, товарна, реалізована, чиста (нормативна, умовна). Звідси трудності і підборі вимірника, коюрый був би у всіх випадках задовільним. Для ефективного управління випуском продукції, що має значну різноманітність своїх станів, потрібний необхідну різноманітність і керівників нею вимірників. Як один з основних директивних узагальнювальних показників промислового виробництва введений показник чистої (нормативною) продукції. Але не усуваються і показники валової продукції (як один з основних вимірників, що характеризують об'єм промислового виробництва), а також готовій, товарній, реалізованій продукції. Складною системою представляється поняття рентабельності підприємства. Велика різноманітність різних його аспектів вимагає необхідної різноманітності показників, що оцінюють рентабельність і керівників нею. Отже, окрім показника рентабельності, що обчислюється як відношення прибули від реалізації продукції до повної собівартості її, в даний час розраховують рентабельність як відношення балансового прибутку до суми основних виробничих фондів і нормованих оборотних коштів. Для всесторонньої оцінки рентабельності виявляють також відношення прибули до загальної трудомісткості (відпрацьованим трудочасам), до суми заробітної плати і так далі Її рахують не тільки в сумарному вигляді по підприємству або цеху, але і по групах виробів в динаміці.

Принцип вибору рішень на підставі відбору і перетворення інформації.

Управління – це можливість вибору з багатьох альтернативних цілей якийсь одній, з багатьох засобів до досягнення її – якихось визначених, з багатьох шляхів до досягнення мети – найбільш відповідного. Мається на увазі вибір не випадковий, а розумний, доцільний. Там, де немає можливості вибору, немає і управління. Пристрій, що управляє, у такому разі діє як якийсь проміжний елемент в каналі зв'язку, передаючи виконуючій частині системи єдиний, вибраний у вищестоящому органі управління варіант рішення. У виконанні функції управління він не бере участі. Отже, для ефективного здійснення функції управління пристрою, що управляє, необхідна наявність альтернативних варіантів рішення і можливості вибору найбільш відповідного з якоїсь точки зору. Для цього кожен варіант рішення повинен характеризуватися деякими даними, порівнюючи і аналізуючи які, підсистема, що управляє, оцінює кожен з можливих варіантів і вибирає якнайкращий. Міркуючи таким чином, можна сформулювати постулат згідно якому будь-яка система, виконує відповідний відбір (на ступінь вище випадкового), користуючись отриманою інформацією. Це і є суть принципу вибору рішень на підставі відбору і перетворення інформації.

Сформульований принцип відображає фундаментальні кібернетичні положення про те, що управлінням є вибір рішення з багатьох альтернативних варіантів шляхом обробки необхідної і достатньої кількості інформації. На практиці він означає, що в процесі планування органи, що управляють, повинні розглядати декілька варіантів плану і вибирати якнайкращий. Це особливо чітко виявляється в процесі оптимального планування за допомогою економіко-математичних методів, коли в якійсь формі (у таблиці, на графіках, номограмах) цілеспрямовано перебираються багато можливих варіантів рішень і по прийнятому критерію знаходиться оптимальний.

Для економічних процесів взагалі характерна наявність протилежних тенденцій, оскільки на будь-якому з них відбивається протилежний вплив безлічі чинників: зростання капітальних вкладень, збільшуючи собівартість продукції, приводить в той же час до економії на поточних витратах; підвищення надійності продукції зазвичай викликає дорожчання її, але це вигідно споживачеві; непомірна економія витрат на зміст устаткування може привести до передчасного його зносу п до тих, що знизали з цим великим збиткам. З цього виникає необхідність зіставлення багатьох варіантів економічних рішень. У сучасному виробництві, для якого характерне збільшення кількості впливаючих чинників, ускладнення взаємозв'язків, підвищення економії від правильно вибраного рішення і зростання збитків від допущених помилок, значення принципу вибору рішень на підставі відбору і перетворення інформації різко зростає.

Принцип обов'язковості зворотного зв'язку.

При розгляді попереднього принципу про управління мовилося як про деякий разовий акт дії. Проте управління не обмежується одноразовим імпульсом, а є процесом, що протікає в часі. Первинна дія може не дати бажаних результатів, і його доведеться уточнювати, підсилювати або ослабляти. У керованому підрозділі можуть змінитися умови і стати не такими як ті, на які був розрахований імпульс, що управляє. Крім того, за першою проблемою з'явиться друга, третя і так далі Для вирішення кожною з них буде потрібно знання не тільки навколишніх умов, стани середовища, але і інформація про фактичне положення керованого підрозділу. Потреба в надходженні такої інформації відчуватиметься постійно, оскільки управління здійснюється як стійкий процес.

Отже, для ефективного управління в складних динамічних системах обов'язковий канал зв'язку, по якому поступає в орган управління інформація про фактичні стани функціонування керованої підсистеми і відповідно до якої орган, що управляє, виробляє, уточнює, порівнює або змінює ті, що виробляються їм дії, що управляють, – рішення. Це і є вироблений в кібернетиці принцип обов'язковості зворотного зв'язку.

В керівництві виробництвом цей принцип практично завжди прагнули дотримувати задовго до того, як в кібернетиці були виведені розглянуті поняття і доведений сам принцип. Дотримання його виявляється в існуванні в економіці таких вимог: показності звітних даних; обхвату звітними даними показників плану; методичної єдності планових і облікових показників; узгодженості звіту і плану по періодах часу. Стисло ці вимоги формулюються в плануванні як принцип єдності плану і обліку.

Принцип зовнішнього доповнення.

Аналіз процесів управління в системах виявив суперечності між необхідністю функціонування їх як відособлених, самоуправляемых по замкнутому контуру зв'язку об'єктів і неможливістю досягти цього із-за різного роду обурюючих впливів на систему з боку зовнішнього середовища, оскільки для стійкого і ефективного функціонування складної динамічної системи необхідне, щоб управління здійснювалося в ній по заздалегідь розробленому плану (тобто за певною програмою) з використанням зворотного зв'язку. Система, отже, повинна функціонувати автономно, відособлено від інших об'єктів. Проте дослідження учених в області математики, привели до виводу про те, що замкнута система не здатна різними шляхами, відправляючись від всіляких початкових умов, досягати певної мети. Вона не може тривалий час стійко і ефективно функціонувати із-за зовнішніх впливів, обурень зовнішнього середовища.

Вирішення вказаної суперечності знайдене англійським ученим Біром Ст., який сформулював так званий принцип зовнішнього доповнення. Він запропонував, не розриваючи ланцюг управління, включити в неї деякий додатковий елемент – «чорний ящик», покликаний задовольняти потреби управління в обліку впливу зовнішнього середовища. «Чорний ящик» в цій схемі управління повинен у випадковому порядку (на підставі законів розподілу вірогідності, за допомогою випадкових чисел або навіть інтуїтивно) знаходити рішення для тих випадків, коли у вирішеннях пристрою, що управляє, є недоліки з причини неврахованих зовнішніх збурень.

Стосовно управління в промисловому виробництві принцип зовнішнього доповнення формулюють так: у будь-якій системі план повинен враховувати можливість дії зовнішніх систем і чинників, не передбачених планом. Практично це означає, що навіть при найдосконалішій системі планування і добре організованому управлінні завжди залишаться якісь ділянки роботи, не охоплені планом і не регламентвані директивними показниками.

1.9. Індивідуальні завдання № 1. Засвоєння поняття про інформацію та зворотній зв'язок

Завдання: для системи, зображеної на рис. 1.4, розрахувати її математичний опис, якщо дані описи об'єктів *A* та *B*. Визначити кількість інформації в системі, якщо відомі ймовірності всіх п'яти станів вхідного фактора *X*.

Порядок виконання: для визначення свого варіанту студент використовує останню цифру номеру залікової книжки *Nз* та номер за списком навчальної групи *Nг*. Варіант функції *A* обирається з табл. 1.3 за *Nз*, а варіант функції *B* – для студентів, чий номер за списком групи *Nг* є непартним – за числом *Nз*, якщо парний – за числом (9 – *Nз.*) Ймовірність станів обирається з табл. 1.4 за *Nг.*

Методичні вказівки: 1) за (1.4) знаходиться математичний опис системи, що складається з двох об'єктів; Для цього одне рівняння підставляється в інше і приводяться подібні. Аналітичний вираз знаходити за допомогою;

2) за знайденим аналітичним рівнянням побудувати фазову траєкторію системи для діапазону зміни X [-50; +50] за допомогою ;

3) за (1.9) знайти ентропію системи.

Порядок використання для вирішення диференційних рівнянь:

Функція **odesolve** вирішує диференціальні рівняння, записані в загальноприйнятому в математичній літературі вигляді:

■ $a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = B(x)$.

■ задачу Коші $y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_{0,1},\ y''(x_0)=y_{0,2},\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{0,n-1}$.

■ просту граничну задачу $y^{(k)}(a)=y_{a,k}$, $y^{(m)}(b)=y_{b,k}$, $0 \le k \le n-1; \quad 0 \le m \le n-1$.

Щоб підготувати для обчислення диференціальних рівнянь необхідно після запуску програми клацнути по пункту меню View (Вигляд), в меню, що відкрилося, навести мишу на рядок **Toolbar** (Панель інструментів) і помітити рядки **Graph** (Графік), **Boolean** (Булеве), **Calculus** (Калькуляція) і **Calculator** (Калькулятор).

Щоб знайти рішення диференціального рівняння за допомогою вбудованої функції **odesolve** потрібно:

– записати ключове слово **Given**, потім ввести рівняння і початкові або граничні умови. При введенні рівняння і умов задачі використовується знак символьної рівності **<Ctrl>+<=>** або знак **<=>** у панелі **Boolean** (Булеве). У записі виразу для функції можна використовувати знаки (імена) елементарних функцій, вводячи їх за допомогою клавіатури або за допомогою панелі **Calculator** (Калькулятор). Вставити у вираз букву грецького алфавіту можна за допомогою панелі **Greek (**Грецька**)**. Для запису похідних можна використовувати як оператори диференціювання з панелі Calculus (Калькуляція), так і знак похідної (клавіша Ë `, яка знаходиться над клавішею Tab), наприклад, другу похідну можна вводити у вигляді $\frac{d^2}{dx^2}y(x)$ або у вигляді *y''(x)* . При цьому необхідно обов'язково записувати в дужках аргумент шуканої функції;

– задати ім'я для розшукуваного вирішення ***y*** і знак привласнення **:=** (для введення знаку привласнення потрібно натиснути на клавіатурі комбінацію клавіш **<Shift>** + **<:>** або клацнути по кнопці < **:=** > панелі **Evaluation** (Обчислення));

– задати функцію **odesolve** із списку в пункті **Function (**Функція**)** меню **Insert (**Вставка**)**. Функція **odesolve** вирішує поставлену задачу методом Рунге–Кутти з фіксованим кроком.

Для вирішення задачі методом Рунге–Кутти з автоматичним вибором кроку потрібно клацнути в робочому документі на ім'я функції правою кнопкою миші і помітити в спливаючому меню пункт **Adaptive**.

Звернення до функції має вигляд

y:=odesolve(x,b,step) або ***y:=odesolve(x,b*)**,*

де ***y*** – ім'я функції, що містить значення знайденого рішення, *x* – змінна інтеграції, *b* – кінець проміжку інтеграції, *step* – крок, який використовується при інтеграції рівняння методом Рунге–Кутти.

***Зауваження*:** Якщо при введенні виразу була допущена помилка, виділіть неправильний символ кутовою рамкою (клацніть справа внизу біля символу), видаліть виділений символ за допомогою клавіші **Backspace** і введіть у поміченій позиції виправлення.

Для отримання графічного рішення потрібно:

– клацнути по відповідній кнопці в панелі **Graph (**Графік). У робочому документі відкриється вікно побудови графіків;

– ввести в поміченій позиції біля осі абсцис ім'я аргументу *x*, а в позиції біля осі ординат – ім'я функції з аргументом в круглих дужках *y(x)*. У позиціях зліва і праворуч від аргументу і функції ввести діапазон значень, які повинні приймати аргумент і функція;

– клацнути по робочому документу поза вікном графіків.

Для зміни параметрів зображення потрібно двічі клацнути по полю графіка. Ці параметри можна міняти не закриваючи вікно настройки, а тільки клацаючи по кнопці **Apply** (Застосувати), щоб подивитися результат настройки. Переміщення покажчика миші по полю графіка з натиснутою лівою кнопкою дозволяє повертати графік і розглядати його з усіх боків. Мишу з скролінгом дозволяє збільшувати і зменшувати масштаб графіка.

Значення рішення в будь–якій точці проміжку інтеграції можна використовувати в подальших обчисленнях, достатньо ввести в потрібному місці ім'я функції ***y***, вказавши в дужках значення аргументу і натиснувши звичайний знак рівності <=> на клавіатурі.

Для прикладу знайдемо часткове рішення лінійного неоднорідного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами в точці $y(2)$. $y''-3y'-4y=4x$, початкові умови: $y(1)=3;\ y'(2)=0$. Спочатку пригадаємо як в середовищі MathCAD 2001 Professional будуються графіки функцій. Використовуючи панель **Graph** (Графік), побудуємо графік функції) рис. 1.5), який описує часткове рішення задачі і знайдемо значення функції в точці $y(2)$.

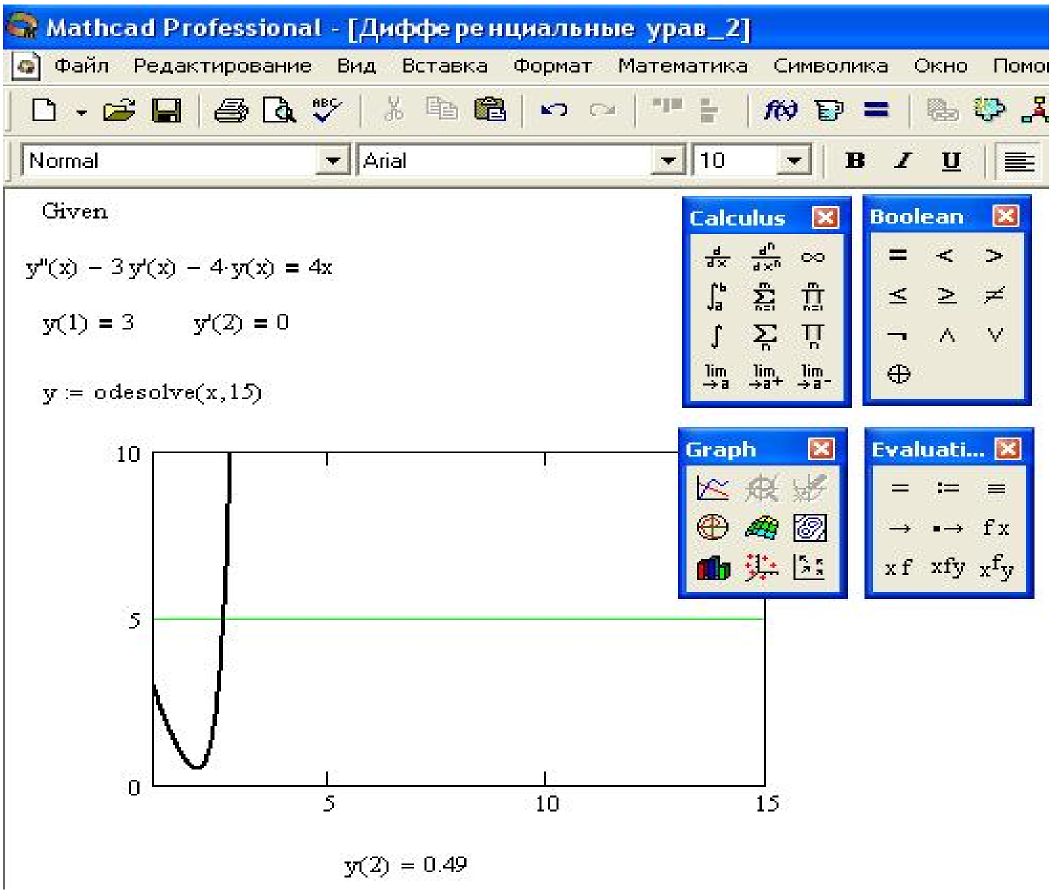


Рис. 1.5. Рішення диференціального рівняння $y''-3y'-4y=4x$ за допомогою вбудованої функції **odesolve**

Таблиця 1.3

Варіанти математичного опису об'єктів *A* та *B*

Номер варіанту	Об'єкти	
	A	*B*
0	$4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx.$	$y = 5x^{-2} + 6.$
1	$6xdx - 6ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx.$	$y = -4\sqrt{8 + x^2} - 27.$
2	$\sqrt{3 + y^2}\,dx - ydy = x^2ydy.$	$y = \mathrm{e}^{2x} - 40.$
3	$6xdx - 6ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx.$	$y = -\sqrt{4 + x^2} + 20.$
4	$y\left(4 + \mathrm{e}^x\right)dy - \mathrm{e}^x\,dx = 0.$	$y = -x^3 + 2x.$
5	$\left(\mathrm{e}^x + 8\right)dy - y\mathrm{e}^x\,dx = 0.$	$y = \sqrt{1 + x^2}.$
6	$6xdx - ydy = yx^2dy - 3xy^2dx.$	$y = 2x^2 - 3x.$
7	$\sqrt{5 + y^2}\,dx + 4\left(x^2y + y\right)dy = 0.$	$y = x^2 - x.$
8	$3\left(x^2y + y\right)dy + \sqrt{2 + y^2}\,dx = 0.$	$y = -x^2 - 3x.$
9	$x\sqrt{1 + y^2} + y\dfrac{dy}{dx}\sqrt{1 + x^2} = 0.$	$y = -3x^2 + 5x.$

Таблиця 1.4.

Варіанти значень ймовірностей станів на вході системи

Варіант		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Імовірність станів	1	0,23	0,32	0,05	0,07	0,03	0,34	0,18	0,14	0,37	0,35	0,22	0,29	0,03	0,28	0,07
	2	0,24	0,08	0,34	0,34	0,11	0,06	0,27	0,08	0,04	0,15	0,07	0,22	0,05	0,13	0,08
	3	0,26	0,07	0,17	0,09	0,15	0,15	0,07	0,28	0,02	0,2	0,09	0,33	0,04	0,07	0,25
	4	0,2	0,27	0,22	0,26	0,1	0,3	0,36	0,02	0,16	0,17	0,35	0,31	0,13	0,22	0,17
	5	0,07	0,26	0,22	0,24	0,61	0,15	0,12	0,48	0,41	0,13	0,27	-0,15	0,75	0,3	0,43
Варіант		**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
Імовірність станів	1	0,27	0,08	0,1	0,32	0,22	0,24	0,28	0,31	0,26	0,37	0,04	0,31	0,2	0,35	0,26
	2	0,17	0,14	0,04	0,07	0,14	0,1	0,11	0,28	0,19	0,11	0,21	0,01	0,11	0,14	0,22
	3	0,07	0,34	0,13	0,22	0,29	0,06	0,27	0,04	0,21	0,2	0,22	0,36	0,33	0,06	0,14
	4	0,06	0,17	0,32	0,2	0,04	0,34	0,24	0,22	0,14	0,29	0,26	0,01	0,29	0,26	0,34
	5	0,43	0,27	0,41	0,19	0,31	0,26	0,1	0,15	0,2	0,03	0,27	0,31	0,07	0,19	0,04

Контрольні запитання

1. Охарактеризуйте предмет та методи кібернетики.
2. Дайте визначення основних методів економічної кібернетики.
3. Чим економетрика відрізняється від економічної кібернетики?
4. Які головні елементи економічної кібернетики?
5. Що таке об’єкт?
6. Подайте поняття факторів та парамтерів об’єкта.
7. Що таке фазовий портрет (траєкторія) об’єкта?
8. Поясніть умовність поділу на системи і об’єкти.
9. Визначте відміну управляінн, збурення, перешкод та виходів, як факторів системи.
10. Наведіть класифікацію та властивості систем.
11. У чому полягає динамічний опис систем?
12. Як ви розумієте термін «соціально-економічна система»?
13. Чим характеризуються соціально-економічні системи?
14. У чому полягають емерджентні властивості економіки?
15. Дайте опис соціально-економічних систем різних типів (підприємство, фінансово-кредитні установи, галузі економіки, органи державного управління, економіки в цілому) як кібернетичних систем.
16. Дайтке\е поняття зворотного зв’язку.
17. Наведіть приклади негативних та позитивних зворотних зв’язків в економіці.
18. Визначте різні підходи то терміну «інформація».
19. Чим ентропія відрізняється від інформації?
20. Подайте сучасне поняття визначення інформації.
21. У чому сутність закону необхідної різноманітності?
22. Подайте положення рринципу вибору рішень на підставі відбору і перетворення інформації.
23. Як принцип обов'язковості зворотного зв'язку позначається в соціально-економічних системах?.
24. Що таке принцип зовнішнього доповнення?

Засвоївши матеріали розділу студенти опанують поняття методів економічної кібернетики, об’єкту і його властивостей, фазового портрету, системи та їх класифікації, емерджентності, зворотного зв’язку, соціально-економічної системи, ін.формації та основих законів кібернетики.

2. МОДЕЛЮВАННЯ СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ, ЯК ОСНОВНИЙ МЕТОД ЕКОНОМІЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ

В розділі наведено основні дані про модель та моделювання. Показано важливість моделювання соціально-економічних систем для економічної кібернетики.

2.1. Модель

Модель – речова, знакова або уявна (мислена) система, що відтворює, імітує, відображає принципи внутрішньої організації або функціонування, певні властивості, ознаки та/або/і характеристики об'єкта дослідження (оригіналу). Розрізняють фізичні, математичні та ін. моделі. Слово «модель» походить від латинського modulus, що означає міра, такт, ритм, величина. Воно пов'язане також із словом modus – копія, зразок.

Смислове навантаження терміна "модель" багатопланове:

а) зразок, взірцевий примірник чогось;
б) тип, марка конструкції;
в) те, що є матеріалом, натурою для відтворення;
г) зразок, з якого знімається форма для відливання в іншому матеріалі;
д) комп'ютерна модель,
е) розрахункова модель,
ж) теоретична модель (процесу, конструкції тощо).

Наприклад, модель – опис об'єкта (предмета, явища або процесу) на якій-небудь формалізованій мові, складений з метою вивчення його властивостей. Такий опис особливий корисний у випадках, коли дослідження самого об'єкта ускладнене або фізично неможливе.

Найчастіше в ролі моделі виступає інший матеріальний або уявний об'єкт, що замінює в процесі дослідження об'єкт-оригінал. Процес побудови моделі називається моделюванням. Таким чином, модель виступає як своєрідний інструмент для пізнання, який дослідник ставить між собою і об'єктом, і за допомогою якого вивчає об'єкт, що його цікавить.

Макетна модель – це реально існуюча модель, що відтворює модельовану систему у деякому масштабі

Математична модель – система математичних співвідношень, які описують досліджуваний процес або явище.

При одержанні математичної моделі використовують загальні закони природознавства, спеціальні закони конкретних наук, результати пасивних та активних експериментів, імітаційне моделювання за допомогою ЕОМ. Математична модель дозволяє передбачити хід процесу, розрахувати цільову функцію (вихідні параметри процесу), керувати процесом, проектувати системи з бажаними характеристиками.

Для створення математичних моделей можна використовувати будь які математичні засоби – мову диференційних або інтегральних рівнянь, теорії множин, абстрактної алгебри, математичну логіку, теорії ймовірностей та інші. Процес створення математичної моделі називається математичним моделюванням. Це найзагальніший та найчастіше використаний в науці, зокрема, в кібернетиці, метод досліджень.

Якщо відношення задаються аналітично, то їх можна розв'язати в замкнутому вигляді (явно) відносно шуканих змінних як функції від параметрів моделі, або в частково замкнутому вигляді (неявно), коли шукані змінні залежать від одного або багатьох параметрів моделі. До моделей цього класу належать диференційні, інтегральні, різницеві рівняння, ймовірнісні моделі, моделі математичного програмування та інші.

Якщо не можна здобути точний розв'язок математичної моделі, використовуються чисельні (обчислювальні) методи або інші види моделювання.

У залежності від того, якими є параметри системи та зовнішні збурення математичні моделі можуть бути детермінованими та стохастичними. Останні мають особливо важливе значення при дослідженні і проектуванні великих систем зі складними зв'язками і властивостями, які важко врахувати. Математичний опис неперервного процесу (напр., диференційними рівняннями) являє собою неперервну математичну модель

Якщо ж математична модель описує стан системи тільки для дискретних значень незалежної змінної і нехтує характером процесів, які протікають у проміжках між ними, то така модель є дискретною (тут важливим є вибір кроку дискретності, від якого залежить точність опису реального об'єкта його математична модель). Якщо параметри об'єкта, для якого розробляють Математичної моделі, можна вважати незалежними від часу, то така система описується стаціонарною моделлю, характерна особливість якої – постійні коефіцієнти. У протилежному випадку математична модель є нестаціонарною.

Дискретна модель – математична чи імітаційна модель, змінні якої приймають тільки дискретні значення, тобто змінюються від одного значення до іншого і не приймають проміжних значень (наприклад, модель, що прогнозує рівні запасів організації, ґрунтуючись на відвантаженнях, які змінюються, і платежах). Протилежність: неперервна модель.

Алгебраїчна система (*алгебраїчна структура*) – в математиці це не порожня множина з заданим на ній набором операцій та відношень, що задовольняють деякій системі аксіом.

Основним завданням абстрактної алгебри є вивчення властивостей аксіоматично заданих алгебраїчних систем.

Формально: об'єкт $< A;\ \Omega_F;\ \Omega_R >$, де:

- A — не порожня множина,
- Ω_F — множина алгебраїчних операцій визначених на A,

- Ω_R — множина відношень визначених на A.

Множина A називається **носієм** алгебраїчної системи. Множини Ω_F, Ω_R називається **сигнатурою** алгебраїчної системи.

Якщо алгебраїчна система не містить операцій, вона називається моделлю, якщо не містить відношень, то – алгеброю.

Якщо не розглядають ніяких аксіом, яким мають задовольняти операції, то алгебраїчна система називається універсальною алгеброю заданої сигнатури Ω_F.

Концептуальна модель має такі ознаки:

1. Формулювання змістовного і внутрішнього представлення, що поєднує концепцію користувача і розробника моделі. Вона включає в явному виді логіку, алгоритми, припущення й обмеження.

2. Абстрактна модель, яка виявляє причинно-наслідкові зв'язки, властиві досліджуваному об'єкту в межах, визначених цілями дослідження. По суті, це формальний опис об'єкта моделювання, який відображає концепцію (погляд) дослідника на проблему.

Аналітична модель – один з класів математичного моделювання.

Перевагою аналітичної моделі є те, що розв'язки можна аналізувати математичними методами. Недоліком аналітичних моделей є спрощення реальних ситуацій з метою отримання аналітичних розв'язків.

В економіці - модель, що складається з системи розв'язних рівнянь, наприклад, система розв'язних рівнянь, що представляють закони попиту та пропозиції на світовому ринку.

2.2. Математичне моделювання

Математичне моделювання – метод дослідження процесів або явищ шляхом створення їхніх математичних моделей, дослідження цих моделей.

В основу методу покладено ідентичність форми рівнянь і однозначність співвідношень між змінними в рівняннях оригіналу і моделі, тобто, їх аналогії. Математичні моделі досліджуються, як правило, із допомогою аналогових обчислювальних машин, цифрових обчислювальних машин, комп'ютерів.

На початку 60-их років ХХ сторіччя було розроблено один із методів математичного моделювання – квазіаналогове моделювання. Цей метод полягає в дослідженні не досліджуваного явища, а явища або процесу іншої фізичної природи, яке описується співвідношеннями, еквівалентними відносно отримуваних результатів.

Розрізняють *геометричне. (наочне) моделювання,* здійснюване на макетах або об'ємних моделях. Вони передають в наочній формі просторові властивості об'єкту, його зовнішній вигляд, співвідношення і взаємозв’язок його частин. Такі, наприклад, модель, відтворююча форми літака, і макет мікрорайону.

Методами *фізичного моделювання* вивчають фізико-хімічні, технологічні, економічні процеси, що відбуваються в оригіналі. Раніше ці процеси вивчалися за допомогою аналогових пристроїв, придатних для моделювання різноманітних динамічних і статичних процесів. Але поява персональних комп’ютерів з сучасним математичним забезпеченням має величезні можливостями для моделювання поведінки складних систем (технічних, біологічних і економічних). Як правило, фізичне моделювання здійснюється на базі логіко-математичної моделі процесу, що вивчається, що грає роль проміжної ланки між об'єктом і його фізичною моделлю.

Фундаментальне значення у всіх областях науки і техніки має інформаційне моделювання. Як моделі тут використовуються схеми і графіки, креслення, а також символи, що формуються в слова, формули і рівняння. Ці матеріальні утворення можуть служити моделями лише у тому випадку, коли визначені допустимі для них операції перетворення і правила їх виконання. Найважливішу роль грає інформаційне моделювання, здійснюване засобами математичного і логічного апарату. Його називають логіко-математичним моделюванням. Використовувані при цьому символи (букви і цифри) і їх послідовності (формули, рівняння і нерівності) описують властивості оригіналу, що вивчаються, і є його логіко-математичною (або математичною) моделлю.

На рис. 2.1 наведено класифікацію прийомів та методів моделювання.

Аналіз економічних явищ, планування розвитку народного господарства, розробка ефективних методів управління, фізичне моделювання процесів в економічних системах і, нарешті, автоматизація планово-економічних розрахунків засновані на їх математичному або, як його зазвичай називають, економіко-математичному моделюванні. Точність і обґрунтованість аналізу і управління залежать від об'єктивності і точності віддзеркалення в моделях реальних економічних процесів, зв'язків між параметрами економічної системи, обмежень, що накладаються на неї зовнішніми умовами, достовірністю використовуваної інформації.

На рис. 2.2 представлено класифікацію методів моделювання соціально-економічних процесів і явищ.

Пояснимо наведені вище схеми для глибшого розуміння напрямків застосування методів моделювання при моделюванні соціально-економічних явищ.

Моделі лінійного програмування (параметричного, непараметричного, детерміністичного, стохастичного, цілочислового, не цілочислового) – вирішення завдань оперативно-календарного планування, технічної підготовки виробництва (складання карт, розкрою листових і смугових матеріалів, знаходження оптимальної шихти, виробничої суміші і т. п.), транспортних завдань і деяких завдань техніко-економічного планування (визначення оптимальної виробничої програми і т. і.);

- нелінійного програмування – ухвалення рішень в області техніко-економічного планування, оперативно-календарного планування, по питаннях загальної господарської політики підприємства, фінансування і кредитування;
- динамічного програмування – вибір політики заміни устаткування, оптимальний розподіл амортизаційних відрахувань на заміну устаткування і відновлення його, визначення оптимальних умов розширеного відтворення;
- блокового програмування – вирішення завдань великого розміру шляхом розбиття їх па ряд моделей з меншим числом змінних н обмежень;

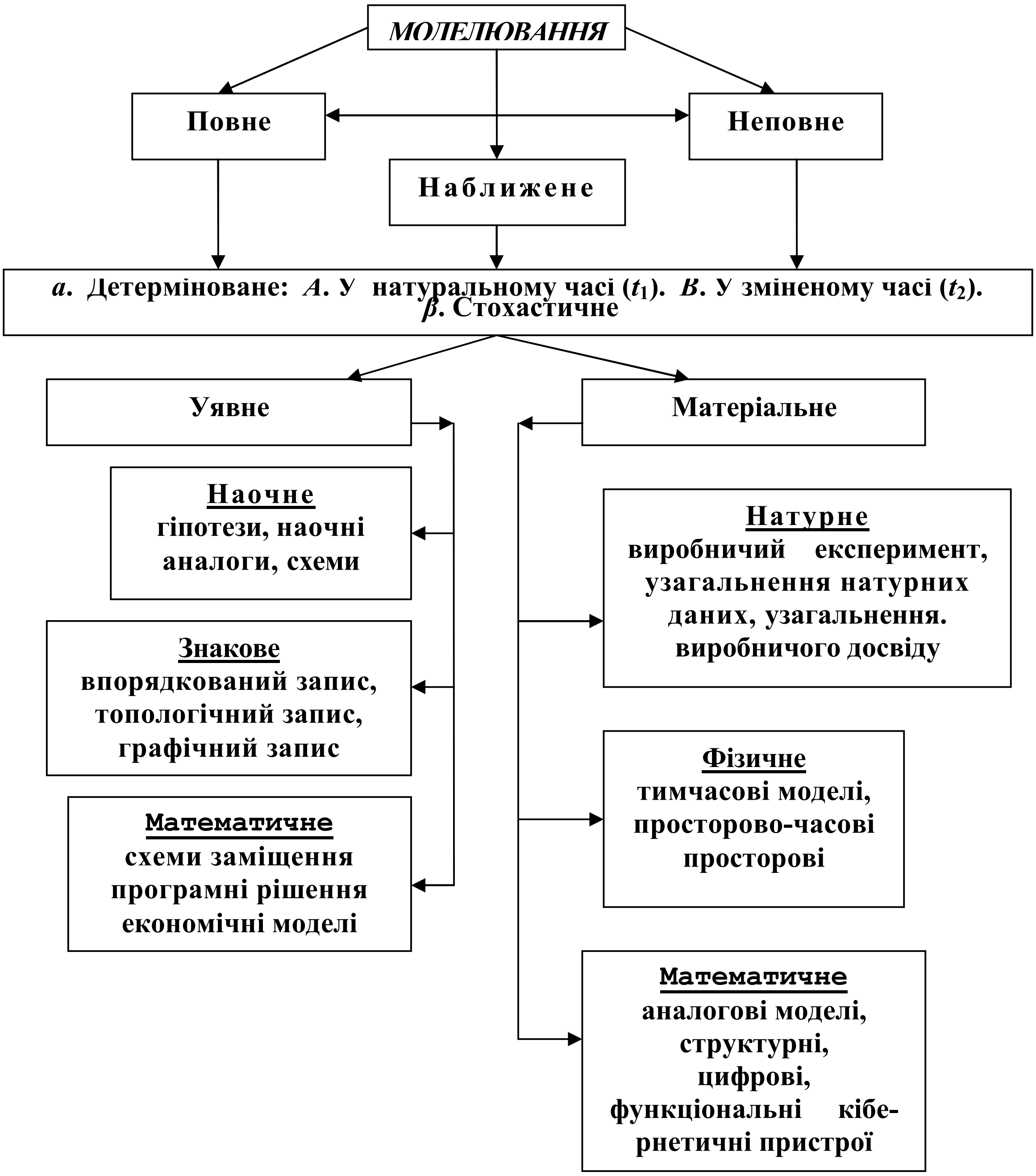


Рис. 2.1. Класифікація методів та прийомів моделювання

- балансових методів аналізу – вирішення проблем пропорційного розвитку виробництва на різних рівнях, складання техпромфінплану підприємства в матричній формі;
- мережевого планування – управління здійсненням крупних індивідуальних і рідше серійних розробок: є формою виразу ухваленого рішення (з вказівкою цілей, завдань, термінів виконання, виконавців, резервів), інструментом оперативного керівництва виконанням рішення і контролю за ходом виконання;
- транспортних завдань на мережі – розробка оптимальних схем прикріплення постачальників до споживачів;
- теорії аналізу кореляцій і регресії і теорії дисперсійного аналізу —

вивчення статистичних взаємозв'язків в економічних процесах встановлення різних нормативів – трудових, вартісних, по витраті матеріалів і інших;

- теорії масового обслуговування – встановлення оптимальних співвідношень між розмірами основного і допоміжного виробництв і окремими частинами усередині кожного з них, якщо процеси в них мають елементи нерегулярності і можуть бути представлені як масове обслуговування;

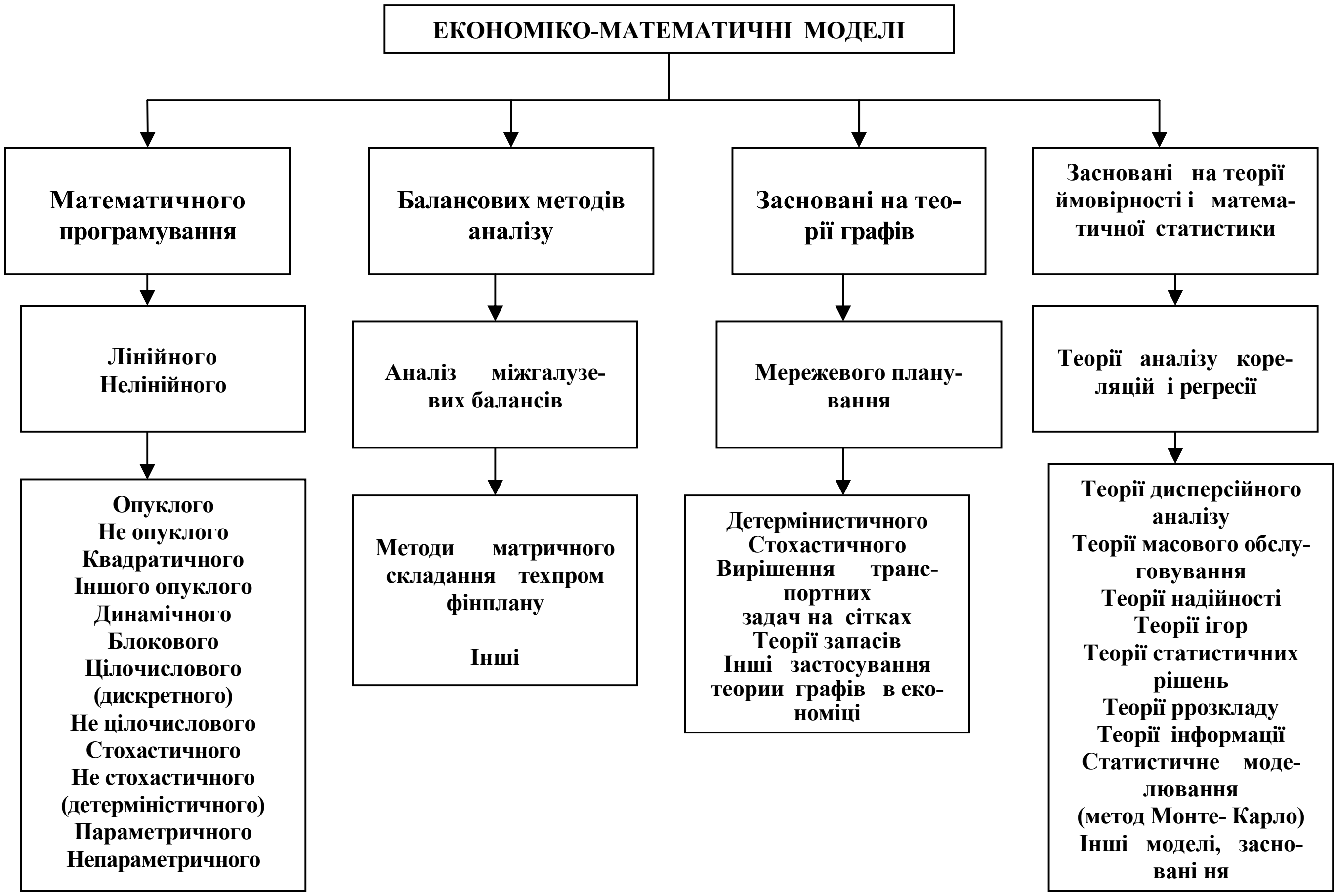


Рис. 2.2. Структура методів моделювання

- теорії надійності – вирішення проблем надійності і довговічності устаткування, підвищення якості продукції і роботи;
- теорії запасів – встановлення оптимальних розмірів оборотних фондів на підприємстві, вирішення деяких завдань оперативно-календарного планування в серійному і масовому виробництві, визначення оптимальних заділів;
- теорії ігор і теорії статистичних рішень – управління процесами взаємовідношення підприємства з ринком, страхування від стихійних лих, створення сезонних запасів сировини і матеріалів;
- теорії інформації – вдосконалення інформаційних потоків в управлінні, вирішення інших завдань, не інформаційних, але схожих за типом даних процесів;
- теорії розкладів – визначення раціональної послідовності запуску деталей у виробництво, встановлення оптимальної тривалості виробничого циклу виробів;
- статистичного моделювання – вирішення завдань теорій масового

обслуговування, ігор, статистичних рішень, надійності, інформації, запасів, для яких немає власного математичного апарату.

- наочні і знакові – при оптимізації управлінських вирішень всіх видів, як і взагалі у всій економічній роботі, тому виділити переважну область їх застосування важко. Такі, як натуральні, фізичні, застосовуються при оптимізації управлінських рішень ще рідко, епізодично, що також утрудняє можливість виділення якихось конкретних областей переважного їх застосування.

2.3. Елементи теорії множин

Теорія множин – розділ математики, в якому вивчаються загальні властивості множин. Теорія множин лежить в основі більшості математичних дисциплін; вона зробила глибокий вплив на розуміння предмету самої математики.

Сучасна теорія множин будується на системі аксіом тверджень, що приймаються без доказу, з яких виводяться всі теореми і затвердження теорії множин.

Система аксіом Цермела Френкеля (ZF) є стандартною системою аксіом для теорії множин. Ця і подібні нею системи аксіом цікаві тому, що будь-яка математична теорія може бути «перекладена» мовою теорії множин таким чином, що теореми цієї теорії стануть теоремами про множини, доказовими з аксіом ZF.

До цієї системи аксіом часто додають аксіому вибору, і називають **системою Цермела- Френкеля з аксіомою вибору** (ZFC).

Ця система аксіом записана на мові логіки першого порядку, і містить нескінченну кількість аксіом. Існують та інші, кінцеві системи. Наприклад, система NBG (von Neumann Bernays Godel) разом з множинами розглядає так звані класи об'єктів. NBG рівносильна ZF в тому сенсі, що будь-яка теорема про множини (тобто що не згадує про класи), доказова в одній системі, також доказова і в іншій.

Подама декілька понять, які дозволять краще засвоїти матеріал.

Конті нуум (від латів. *continuum* — безперервне) має декілька значень в математиці і філософії.

У теорії множин континуум може позначати два схожі поняття:

- кардинал або клас множин, рівнопотужних множинаі дійсних чисел.
- множина рівнопотужна множинаі дійсних чисел. Наприклад, сукупність всіх точок відрізання на прямій або множина всіх ірраціональних чисел. Говорять: «континуум», «множина потужності континуум» або «континуальное множина».

Підмножина — поняття частини в теорії множин. Множина *B* є підмножиною множини A (позначається $B \subseteq A$) у випадку, якщо кожен елемент множини *B* є також і елементом множини *A*. Наприклад, множина всіх парних чисел є підмножиною множини всіх цілих чисел.

Якщо *A* є підмножиною *B*, то B називається надмножиною *A*.

Порожня множина, поняття теорії множин; порожня множина не містить жодного елементу; позначається _ ($\varnothing$). Порожня множина є підмножиною будь-якої множини. Потужність порожньої множини рівна нулю.

Поняття порожньої множини (подібно до поняття «нуль») виникає з потреби, щоб результат всякої операції над множинами був також множиною.

Рахункова множина – множина, елементи якої можливо занумерувати натуральними числами. Формальніше: множина X є рахунковою, якщо існує $X \to \mathbb{N}$ бієція $X \to \mathbb{N}$, де $\mathbb{N}$ позначає множину всіх натуральних чисел. Іншими словами, рахункова множина — це множина, равнопотужна множині натуральних чисел.

Рахункова множина є «найменшою» нескінченною множиною, т. е. у будь-якій нескінченній множині знайдеться рахункова підмножина.

Властивості

1. Будь-яка підмножина рахункової множини кінцева або рахункова;
2. Об'єднання кінцевого або рахункового числа рахункової множини є рахунковим;
3. Прямий добуток кінцевого числа рахункової множини є рахунковим;
4. Множина всіх кінцевих підмножин рахункової иножигни є рахунковою;
5. Множина всіх підмножин рахункової множини континуальна і, зокрема, не є рахунковою.

Незліченна множина — така, що не є рахунковою. Таким чином, будь-яка множина є або кінцевою, або рахунковою, або незліченною.

Множина раціональних чисел і множина алгебраічних чисел рахункові, проте множина натуральних чисел континуальна, а отже, незліченна.

2.3.1. Операції над множинами

Над множинами, як і над багатьма іншими математичними об'єктами, можна здійснювати різні операції. В результаті операцій з початкових множин виходять нові. Для кращого розуміння сенсу цих операцій використовуються діаграми Ейлера – Венна, на яких представлені результати операцій над геометричними фігурами як множиною точок.

Порівняння множин

Множина *A* **міститься** в множині В (множина В включає множину А*)*, якщо кожен елемент А є елемент В*:*

$$A \subset B :\Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B.$$

В цьому випадку *A* називається **підмножиною** *B*, *B* — **надмножиною** А. Якщо $A \subset B$ і $A \neq B$, то *A* називається **власною підмножиною** *B*. Відмітимо, що $\forall M \quad M \subset M$. За визначенням $\forall M \quad \varnothing \subset M$.

Дві множини називаються **рівними**, якщо вони є підмножинами один одного: $A = B :\Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

Основні операції над множинами:

- **Об'єднання множин** —, побудова множини, що містить в собі всі елементи декількох початкових множин.

  Застарілі терміни для цього поняття: **сума** і **з'єднання множин**.

  Об'єднання двох множин *A* і *B* позначають

  $$A \cup B := \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

  (також застаріле $A + B$)

  Наприклад якщо {1,2,3}*U*{2,3,4}={1,2,3,4}.

  Об'єднання сукупності позначають $\bigcup_{x \in X} M_x$

Строго кажучи, об'єднанням двох множин називається множина, що складається зі всіх елементів, які належать хоч би одному з них, тобто

$$\alpha \in A \cup B \iff \alpha \in A \vee \alpha \in B$$

Об'єднанням сукупності множин називається множина, що складається зі всіх елементів, які належать хоч би одному з множин даної сукупності, тобто

$$\alpha \in \bigcup_{x \in X} M_x \iff \exists x \in X : \alpha \in X$$

- **Перетин:**

  $A \cap B := \{x | x \in A \wedge x \in B\}$ Перетин(множення) $A \cap B$ є множина всіх елементів, що належать одночасно як *A*, так і *B*. Наприклад якщо {1,2,3}$\cap${2,3,4}={2,3}. Множини, що не мають загальних елементів, називаються такими, що не перетинаються.

- **Різниця:**

  $A \setminus B := \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$ Різниця *A**B* (або *A* - *B*) є множина, що складаються зі всіх елементів *A*, що не входять у *B*. Наприклад якщо {1,2,3}2,3,4}={1}.

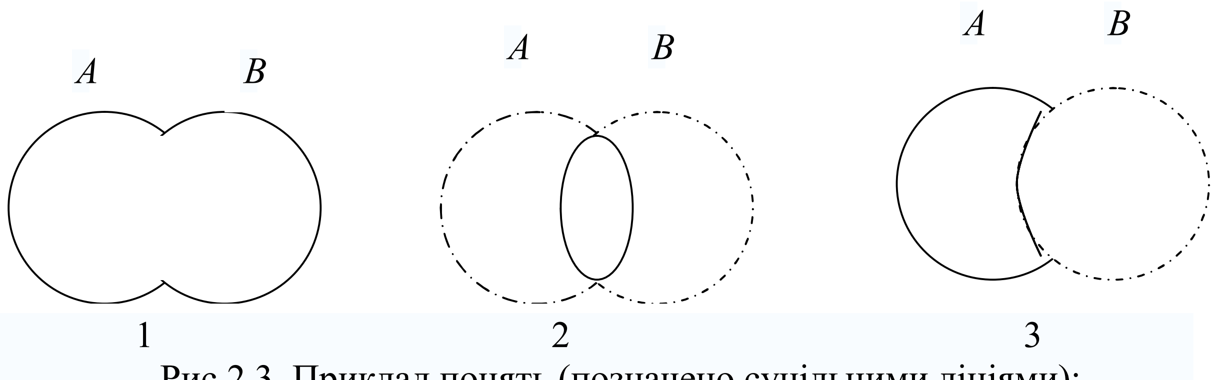


Рис.2.3. Приклад понять (позначено суцільними лініями):
об'єднання (1), перетин (2) та різниця (3) множин *A* та *B*

- **Симетрична різниця:**

  $A \triangle B \equiv A \dot{-} B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{x | (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B$

  Диз'юнктивна сума (симетрична різниця) A+B є множина всіх елементів, що належать або *A*, або *B*, але не обом разом. Наприклад, якщо {1,2,3}+{2,3,4}={1,4}.

- доповнення: $\overline{A} := \{x | x \notin A\}$

Операція доповнення має на увазі деякий універсум (множина U, яка містить A): $\overline{A} = U \setminus A$

- Декартове або пряме множення: $A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$

2.3.2. Аксіоми ZFC

1. *Аксіома об'ємності*. Дві множини a і b рівні тоді і тільки тоді, коли вони мають одні і ті ж елементи.

$$\forall a \forall b (a = b \leftrightarrow \forall c (c \in a \leftrightarrow c \in b))$$

2. *Аксіома порожньої множини*. Існує множина e без єдиного елементу. Ця множина зазвичай позначається $\{\}$ або $\emptyset$.

$$\exists e \forall a (a \notin e)$$

3. *Аксіома пари.* Для будь-яких множин *a і b* існує множина c така, що a і b є його єдиними елементами. Множина c позначається $\{a,b\}$ і називається невврегульованою парою a і b. Якщо $a = b$, то c складається з одного елементу.

$$\forall a \forall b \exists c \forall d (d \in c \leftrightarrow (d = a \vee d = b))$$

4. *Аксіома об'єднання*. Для будь-якого сімейства a множин існує множина, звана об'єднанням множини $b = \cup a$, що складається з тих і лише тих елементів, які містяться в елементах множини a.

$$\forall a \exists b \forall c (c \in b \leftrightarrow \exists d (d \in a \wedge c \in d))$$

5. *Аксіома нескінченності*. Аксіоми з 1 по 4 надають обмежені можливості для формування нових множин. Так, по теоремі Кантора в множині є елемент, що не належить a, тому, наприклад, не існує «множини всіх множин» (парадокс Рассела). Далі введемо визначення: множина називається індуктивною, якщо воно а) містить порожню множину і б) містить послідовник (тобто елемент)$a \cup \{a\} a \cup \{a\}$ кожного свого елементу. Аксіома нескінченності стверджує, що індуктивні множини існують.

$$\exists \omega (\emptyset \in \omega \wedge \forall x (x \in \omega \rightarrow x \cup \{x\} \in \omega))$$

6. *Схема виділення*. Будь-якій множині a і властивості φ відповідає множина b, елементами якого є ті і лише ті елементи a, які володіють властивістю φ. Схема виділення містить рахункову кількість аксіом, оскільки кожна формула логіки першого порядку породжує аксіому.

$$\forall a \exists b \forall c (c \in b \leftrightarrow (c \in a \wedge \varphi(c)))$$

7. *Аксіома множини підмножин*. Для будь-якої множини a існує множина b, що складається з тих і лише тих елементів, які є підмножинами множини a. Множина підмножин множини a позначається $\mathcal{P}(a)$.

$$\forall a \exists b \forall c (c \in b \leftrightarrow \forall d (d \in c \rightarrow d \in a))$$

Якщо ввести відношення підмножини, то цю формулу можна спростити.

$$\forall a \exists b \forall c (c \in b \leftrightarrow c \subseteq a)$$

8. *Схема підстановки*. Хай $\varphi(x,y)$ – така формула, що при будь-якому x_0 з множини X існує, і притому єдиний, об'єкт y_0 такий, що вираз істинний. Тоді об'єкти c, для кожного з яких існує d з X такий, що істинно, утворюють множи-

ну. Схема підстановки містить рахункову кількість аксіом, оскільки кожна відповідна формула породжує аксіому.

$$\forall x \exists!\, y(\varphi(x,y)) \to \forall a \exists b \forall c(c \in b \leftrightarrow (\exists d(d \in a \wedge \varphi(d,c))))$$

9. *Аксіома підстановки*. Кожна непорожня множина *s* містить елемент *a* такий, що $s \cap a = \emptyset$.

$$\forall s(s \neq \emptyset \to \exists a(a \in s \wedge a \cap s = \emptyset))$$

10. *Аксіома вибору*. Для будь-якого сімейства попарно непересічних непорожніх множин існує множина *c* така, що, яка б не була множина *x* даного сімейства, множина складається з одного елементу.

Несуперечність приведеної аксіоматики досі не встановлена.

2.3.3. Потужність множини

Потужність множини – це узагальнення поняття кількості (числа елементів множини), яка має сенс для всіх множин, включаючи нескінченні.

Існують великі, є менші нескінченні множини, серед них рахункова множина є найменшою.

Визначення

Дві множини називаються **рівнопотужними**, якщо між ними існує біекція. Існування біекції між множинами є відношення еквівалентності, а **потужність** множини — це відповідний йому клас еквівалентності.

Приклад

Множина парних цілих чисел має таку ж потужність, що і множина цілих чисел $\mathbb{Z}$. Визначимо так: $f(x) = \dfrac{x}{2}$. *f* — біекція, тому $|\mathbb{E}| = |\mathbb{Z}|$

Властивості

- Дві **кінцеві множини** множина рівно потужні тоді і тільки тоді, коли вони складаються з однакового числа елементів. Тобто для кінцевої множини поняття потужності співпадає зі звичним поняттям кількості.
- Для нескінченних множин потужність множини може співпадати з потужністю його власної підмножини, наприклад $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.
- Теорема Кантора гарантує існування потужнішої множини для будь-якого даного: *Множина всіх підмножин множини A потужніша A, або* $|\, 2A \,| > |\, A \,|$.
- За допомогою канторова квадрата можна також довести наступне корисне твердження: *Декартове множення нескінченної множини* A *з самим собою рівнопотужне* A.

Слідуючи Канторові, потужність множини називається **кардинальним числом** і позначається потужність такої множини *A* через | *A* | (сам Кантор використовував позначення $\overline{\overline{A}}$). Іноді зустрічається позначення $\#A$.

Потужність множини натуральних чисел позначається символом $\aleph_0$ («алеф-нуль»). Множина називається **нескінченною**, якщо її потужність $\geq \aleph_0$, таким чином, рахункові множини — це «найменші» з нескінченних множин. Наступні кардинальні числа в порядку зростання позначаються $\aleph_1, \aleph_2, \ldots$.

Про множини, рівнопотужні множині всіх дійсних чисел, говорять, що вони мають потужність континууму, і потужність таких множин позначається символом *с*. Континуум-гіпотеза стверджує, що $c = \aleph_1$.

Для потужностей, як і у разі кінцевих множин, є поняття: рівність, більше, менше. Тобто для будь-якої множини *A* і *B* можливе тільки одне з трьох:

1. $|A| = |B|$ або *A* і *B* рівнопотужні;
2. $|A| > |B|$ або *A* **потужніше** *B*, тоюто. *A* містить підмножину, рівнопотужну *B*, але *A* і *B* не рівнопотужні;
3. $|A| < |B|$ або *B* потуєніше *A*, в цьому випадку *B* містить підмножину, рівнопотужну *A*, але *A* і *B* не рівнопотужні.

Ситуація, в якій *A* і *B* не рівнопотужні і ні в одному з них немає частини, рівнопотужної іншому, неможлива. Інакше це означало б існування незрівняних між собою потужностей (що в принципі можливо, якщо не приймати аксіому вибору).

2.3.4. Булеан

Хай *A* – множина. Множина всіх підмножин множини *A* називається **булеаном** (або **ступенем множини** *A*, або множиною **частин** *A*) і позначається $\mathcal{P}(A)$ або 2^A. Ясно, що $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$ и $A \in \mathcal{P}(A)$.

Справедливе наступне твердження: Число підмножин кінцевої множини, що складається з *n* елементів рівне 2^n.

Доказ проведемо методом математичної індукції.

База. Якщо $n = 0$, тобто множина порожня, то у нього тільки одна підмножина – воно само, і число, що цікавить нас, рівне $2^0 = 1$.

Індукційний крок. Хай твердження справедливе для деякого *n* і хай *M* – множина з кардинальным числом $n + 1$. Зафіксувавши деякий елемент $a_0 \in M$, розділимо підмножини множини *M* на два типи:

1. що містять a_0
2. що не містять a_0, тобто множини, що є підмножинами $M - \{a_0\}$.

Підмножин типу 2 по припущенню індукції 2^n. Але підмножин типу 1 рівно стільки ж, оскільки підмножина типу 1 виходить з деякої і притому єдиної підмножини типу 2 додаванням елементу a_0 і, отже, з кожної підмножини типу 2 виходить цим способом одне і лише одна підмножина типу 1.

Тому число всіх підмножин множини *M* дорівнює $2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

2.3.5. Бієкція

Функцвя $f : X \to Y$ називається **бієкцією** (і позначається $f : X \leftrightarrow Y$), якщо вона:

1. Переводить різні елементи множини *X* в різні елементи множини *Y* (ін’єктивність).

2. Будь-який елемент з має свій прообраз (сюр’єктивність). Іншими словами $\forall y \in Y \exists x \in X : \ f(x) = y$.

Бієкцію також називають **взаємно однозначним відображенням**. Множини, для яких існує бієкція, називаються **рівнопотужними**.

Приклади

- $id : X \to X$ – функція, що зберігає всі елементи множини *X*, биєктивна на цій множині.
- $f(x) = x, \ f(x) = x^3$ – бієктивні функції з $\mathbb{R}$ в себе. Взагалі, будь-який моном однієї степені змінної степені є бієкцією.
- $f(x) = e^x$ – бієктивна функція в $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$. Але якщо її розглядати як функцію в $\mathbb{R}$, то вона вже не буде бієктивною (у негативних чисел не буде прообразів).
- $f(x) = \sin x$ не є бієктивною функцією, якщо вважати її визначеною на всьому $\mathbb{R}$.

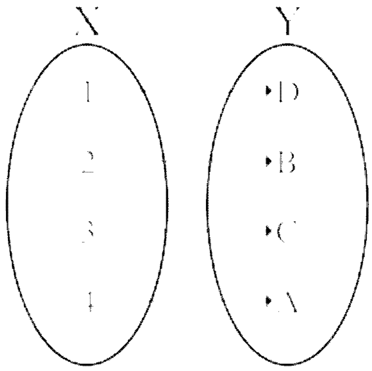


Рис. 2.4
Бієктивна функція

Властивості

- Функція є бієктивною тоді і тільки тоді, коли існує $f^{-1} : Y \to X$ зворотня функція $f^{-1} : Y \to X$, така, що і $\forall y \in Y \ f(f^{-1}(y)) = y$.
- Якщо функції *f* і *g* бієктивні, то і композиція функцій бієктивна, в цьому випадку $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. Коротко: композиція бієкцій є бієкцією. Зворотне, взагалі кажучи, невірно: якщо бієктивна, то ми можемо затверджувати лише, що *f* ін’єктивна, а *g* сюр’єктивна.

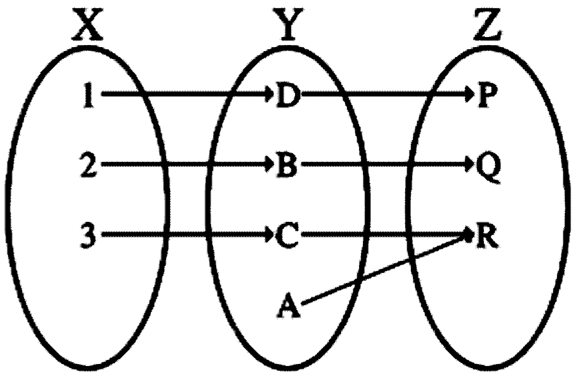


Рис. 2.5. Композиція ін’єкції і сюр’єкції, що дає бієкцію.

2.4. Приклади кібернетичних моделей соціально-економічних систем

Всі описані нижче моделі було створено із застосуванням методів математичного моделювання, тому при їх викладенні в деяких випадках буде показано і хід знайдення цих моделей.

2.4.1. Модель нарахування відсотків

Розглянемо звичайну фінансову операцію: надання у борг суми S_0 при умові, що через період часу *T* буде повернена сума S_T. Визначимо величину *r* відносного зростання формулою $$r = \frac{S_T - S_0}{S_0}. \qquad (2.1)$$

Тоді $S_T = S_0\,(1 + r)$.

При розрахунку по довгострокових кредитах, що охоплюють декілька повних років, використовується схема складних відсотків. $S_n = S_0\,(1 + r)^n$.

У фінансових розрахунках застосовуються схеми, де нарахування складних відсотків проводиться кілька разів в році. При цьому обумовлюється річна ставка r і кількість нарахувань за рік k. Як правило, нарахування проводяться через рівні проміжки часу, тобто довжина кожного проміжку T_k складає $\frac{1}{k}$ частина року. Тоді для терміну в T років (тут T *не* обов'язково є цілим числом) сума S_T розраховується за формулою $$S_T = S_0\left(1 + \frac{r}{k}\right)^m \qquad (2.2)$$

Тут $m = \left[\frac{T}{T_k}\right]$ — ціла частина числа $\frac{T}{T_k}$, яка співпадає з самим числом, якщо, наприклад, T - ціле число.

Хай річна ставка рівна r і проводиться n нарахувань в рік через рівні проміжки часу. Тоді за рік сума S_0 нарощується до величини, визначуваної формулою $$S_1 = S_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n \qquad (2.3)$$

У теоретичному аналізі і в практиці фінансової діяльності часто зустрічається поняття відсоток, що “безперервно нараховується ”. Щоб перейти до відсотка, що безперервно нараховується, потрібно у формулах (2.1) і (2.2) необмежено збільшувати відповідно, числа k і n (тобто спрямувати k і n до нескінченності) і обчислити, до якої границі прагнутимуть функції S_T і S_1. Застосуємо цю процедуру до формули (2.3)

$$S_1^* = \lim_{n\to\infty} S_1 = S_0 \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = S_0 \lim_{n\to\infty}\left(\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right)^r = S_0\left\{\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right\}^r.$$

Помітимо, що границя у фігурних дужках співпадає з другою чудовою границею. Звідси витікає, що при річній ставці r, при відсотку, що безперервно нараховується, сума S_0 за 1 рік нарощується до величини S_1*, яка визначається з формули $$S_1^* = S_0 e^r. \qquad (2.4)$$

Хай тепер сума S_0 надається у борг з нарахуванням відсотка n раз на рік через рівні проміжки часу. Позначимо r_e річну ставку, при якій в кінці року сума S_0 нарощується до величини S_1* з формули (1.6). В цьому випадку говоритимемо, що r_e – це річна ставка при нарахуванні відсотка n раз на рік, еквівалентна річному відсотку r при безперервному нарахуванні. З формули (1.5) одержуємо $$S_1^* = S_0\left(1 + \frac{r_e}{n}\right)^n. \qquad (2.5)$$

Прирівнюючи праві частини останньої формули і формули (2.4), вважаючи в останній $T = 1$, можна вивести співвідношення між величинами r і r_e:

$$r = n\ln\left(1+\frac{r_e}{n}\right),\quad r_e = n\left(e^{\frac{r}{n}} - 1\right).$$

2.4.2. Моделі фінансових розрахунків

Чистий приведений доход дозволяє одержати найбільш узагальнену характеристику результату інвестування, тобто його кінцевий ефект в абсолютній сумі. Під чистим приведеним доходом розуміється різниця між приведеними до дійсної вартості сумою чистого грошового потоку за період експлуатації інвестиційного проекту і сумою інвестиційних витрат на його реалізацію (рис. 2.3). Розрахунок цього показника при одноразовому здійсненні інвестиційних витрат здійснюється за формулою:

$$NPV = \sum_{t=0}^{T} \frac{In_t - Ot_t}{(1+r_t)^t}\,, \quad (2.6)$$

де T – загальний період інвестиційного проекту, t – етап інвестиційного проекту, In_t, Ot_t — відповідно доходи та витрати на t-му етапі інвестиційного проекту, , r_t – норма дисконту.

Аналіз цієї функції показує, що вона є нелінійною і залежить в першу чергу від T. Чим воно більше, тим дужче спадає NPV. Така ж залежність від параметру r_t.

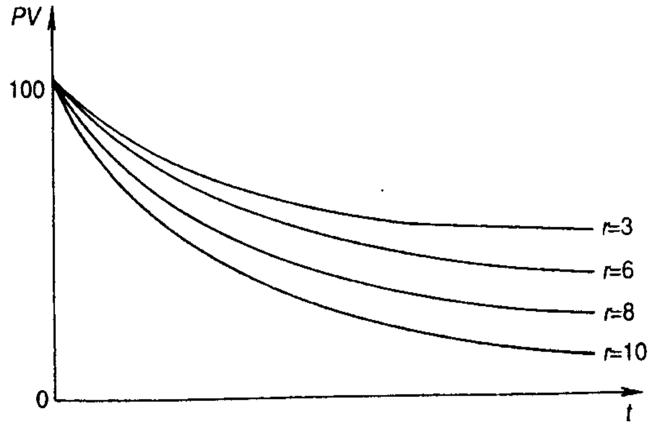


Рис. 2.6. Темпи спаду NPV в залежності від часу і коефіцієнта дисконтування

Формула (2.6) визначає чистий прибуток на кінець проекту. Якщо нас цікавить чистий прибуток на початок проекту, то треба застосовувати вираз

$$NPTV = \sum_{t=0}^{T} [In_t - Ot_t](1+r_t)^t\,. \quad (2.7)$$

Обидві ці формули було отримано з математичного аналізу, аналогічно отриманню формули (2.5).

Рівняння ефективної лінії ринку визначається для середньої доходності інвестиційного портфелю цінних паперів:

$$E(R_p) = R_F + \frac{[E(R_M) - R_F]}{SD(R_M)} SD(R_F)\,, (2.8)$$

де R_M, R_F – відповідно доходність ризикових та без ризикових цінних паперів, $E(R_M)$ – середня доходність ризикових цінних паперів, $SD(R_M)$, $SD(R_F)$ – відповідно ва-

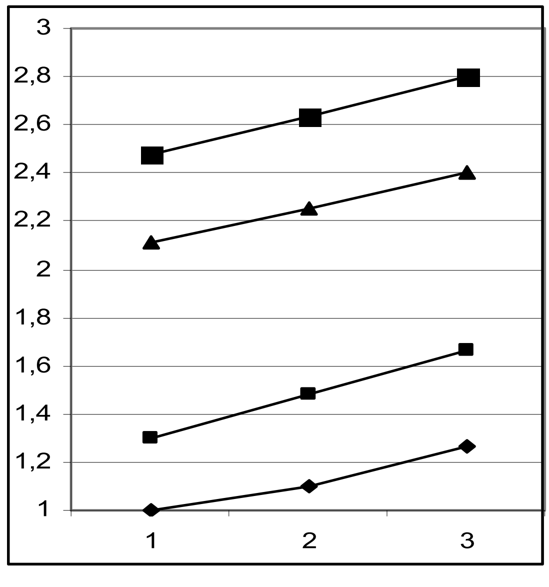


Рис. 2.7. Рівняння ефективної лінії ринку

ріації стандартного відхилення ризикових та без ризикових цінних паперів.

Аналіз цього рівняння показує лінійну залежність середньої доходності від параметрів R_M, R_F, $SD(R_F)$ та параболічну – від параметру $SD(R_M)$.

На графіку, наведеному на рис. 2.4, можна бачити, як доходність змінюється від лінійного (верхні лінії) до нелінійного (нижня лінія) форматів.

Оцінка вартості облігацій. Ціна облігації може бути виражена у вигляді математичної функції від необхідної прибутковості

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{C}{(1+r)^t} + \frac{M}{(1+r)^n}, \qquad (2.9)$$

де P – ціна; n – число періодів (число років помножена на 2); C – піврічна купонна виплата; r – процентна ставка на період (необхідна річна прибутковість поділена на 2); M – сума погашення; t – моменти купонних виплат.

Якщо ми хочемо оцінити, як змінюється ціна облігації при зміні необхідної прибутковості, то потрібно обчислити першу похідну цього рівняння.

Обчисливши першу похідну і розділивши її на початкову ціну, одержимо

$$\text{Дюрацію Маколея} = \left[\frac{1C}{(1+y)^1} + \frac{2C}{(1+y)^2} + \cdots + \frac{nC}{(1+y)^n} + \frac{nM}{(1+y)^n}\right]\frac{1}{P}. \qquad (2.10)$$

Величина в дужках – це модель середньозваженого терміну виплат по облігації, де вагами є їхній поточні вартості, ділені на початкову ціну (тут вони помножені на величини, зворотні цінам).

2.4.3. Моделі Кобба-Дугласа та Лоренца

Якщо у **функції Кобба–Дугласа**

$$z=b_0x^{b1}y^{b2} \qquad (2.11)$$

вважати, що витрати праці є лінійна залежність від часу, а витрати капіталу незмінні, то вона прийме вид $g(t)=(\alpha t+\beta)e^{\gamma t}$.

Тоді об'єм продукції, що випускається за T років складе

$$Q = \int_0^T (\alpha t + \beta) e^{\gamma t} dt$$

Досліджуємо криву Лоренца – залежність відсотка доходів від відсотка населення, що має їх (криву OBA, рис. 2.15.).

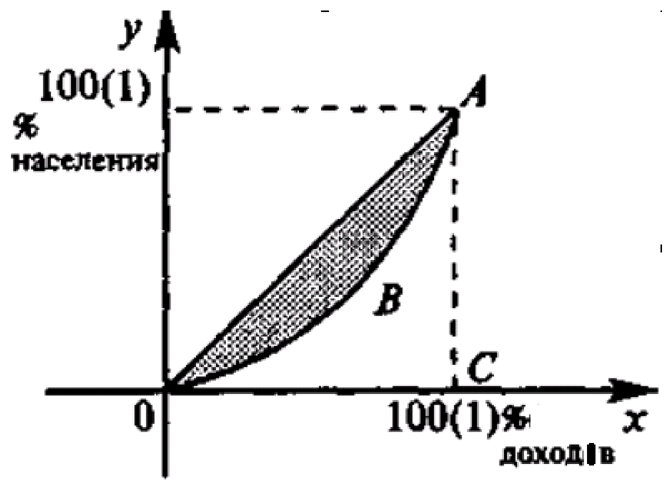


Рис. 2.8. Крива Лоренца

Ми можемо оцінити степінь нерівності в розподілі доходів населення. При рівномірному розподілі доходів крива Лоренца вироджується в пряму – бісектрису OA, тому площа **фігури** OAB між бісектрисою OA і кривою Лоренца, віднесена до площі трикутника OAC (коефіцієнт Джині), характеризує степінь нерівності в розподілі доходів населення.

Нехай, за даними досліджень в розподілі доходів в одній з країн крива Лоренца *OBA* (рис. 2.15.) може бути описана рівнянням $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$, де x – частка населення, y – частка доходів населення. Обчисливши коефіцієнт Джині.

$k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - \frac{S_{OBAC}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - 2 \cdot S_{OBAC}$, оскільки $S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}$.

Тому $$k = 1 - 2\left(1 - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx\right) = 2\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx - 1.$$

За допомогою заміни, наприклад, x = Sin$t$ можна обчислити

$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}$. Отже, коефіцієнт Джині $k = 2 \cdot \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0{,}57$.

Достатньо високе значення k показує істотно нерівномірний розподіл доходів серед населення в даній країні.

Визначення початкової суми по її кінцевій величині, одержаній через час t (років) при річному відсотку (процентній ставці) p, називається *дисконтуванням*. Задачі такого роду зустрічаються при визначенні економічної ефективності капітальних вкладень.

Хай відома функція $t = t(x)$, що описує зміну витрат часу t на виготовлення виробу залежно від степені освоєння виробництва, де x – порядковий номер виробу в партії. Тоді середній час t_{cp}, витрачене *на виготовлення одного виробу в період освоєння* від x_1 до x_2 виробів, обчислюється за теоремою про середнє

$$t_{cp} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x)\, dx \tag{2.12}$$

Що стосується функції зміни витрат часу на виготовлення виробів $t = t(x)$, то часто вона має вигляд $$t = ax^{-b}, \tag{2.13}$$

де a – витрати часу на перший виріб, b – показник виробничого процесу.

2.4.3. Моделі теорії корисності

їУ кількісній теорії корисності передбачається, що споживач може дати кількісну оцінку (у деяких одиницях вимірювання) корисності будь-якої кількості споживаного їм товару.

Це означає існування функції корисності *TU* аргументу *Q* – кількість купленого товару. Введемо поняття граничної корисності, як додаткової корисності, що додається кожною останньою порцією товару. Далі побудуємо двовимірну систему координат, відкладаючи по горизонтальній осі кількість споживаного товару *Q,* а по вертикальній осі – загальну корисність *TU*, як це зроблено на рис. 2.5. У цій системі координат проведемо графік функції *TU = TU(Q).* Точка Q_0 на горизонтальній осі означає кількість придбаного товару, величина ΔQ – додатково придбаний товар. Різниця $\Delta TU = TU(Q_0 + \Delta Q)$ - $TU(Q_0)$ – додаткова корисність, одержана від покупки ΔQ. Тоді додаткова корисність від останньої придбаної порції (або одиниці кількості) товару обчислюється за формулою $\Delta TU / \Delta Q$. Цей дріб, як можна бачити, залежить від величини ΔQ. Якщо тут перейти до границі при $\Delta Q \to 0$, то вийде формула для визначення граничної корисності MU $$MU=\frac{dTU}{dQ}.$$

Це означає, що гранична корисність дорівнює похідній функції корисності $TU(Q)$. Закон граничної корисності, що убуває, зводиться до зменшення цієї похідної із зростанням величини Q. Звідси слідує опуклість графіка функції $TU(Q)$. Поняття функції корисності і представлення граничної корисності у вигляді похідної цієї функції широко використовується в математичній економіці.

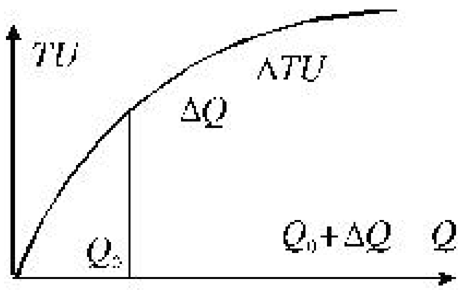


Рис. 2.9. Функція корисності

Лінії рівня функції корисності (вони називаються кривими байдужості) дозволяють розглядати питання заміщення одного товару іншим і ілюструвати рішення задачі про оптимальне споживання. Лінія рівня витрат на придбання товарів x, y зображені на рис. 2.10. пунктиром. Оптимальне споживання забезпечується значенням (x_0, y_0) – координатами точки дотику кривої байдужості і лінії рівня витрат. У цій точці задана корисність досягається найбільш економічним чином.

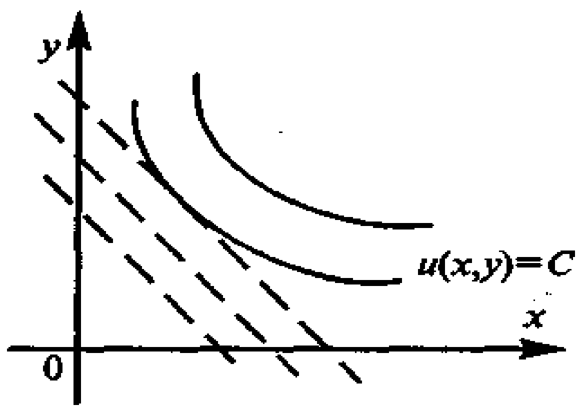


Рис. 2.10. Криві байдужості

Поняття часткової похідної також знаходить застосування в економічній теорії. Можна ввести поняття часткової еластичності функції декількох змінних $z=(x_1, x_2, ..., x_n)$ щодо змінної x_i

$$E_{x_i}\left(z\right)=\lim_{\Delta x_i\to 0}\left(\frac{\Delta x_i z}{z}:\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)=\frac{x_i}{z}\cdot z'_{x_i} \qquad (2.14)$$

Так, наприклад, у **виробничій функції Кобба–Дугласа** $z=b_0x^{b1}y^{b2}$, як неважко переконатися, $Ex(z)=b_1$, $Ey(z)=b_2$, тобто показники b_1 і b_2 приблизно показують, на скільки відсотків зміниться випуск продукції при зміні тільки витрат праці x або тільки об'єму виробничих фондів y на 1%.

Розглянемо тепер часткові похідні u'_x, u'_y – функції корисності. Вони називаються граничними корисності $M\,u_x$, $M\,u_y$. Якщо вимірювати кількість товару у вартісному виразі, то граничні корисності можна розглядати як функції попиту на супутній товар. Знайдемо граничні корисності для функції постійної еластичності

$$u(x,y)=\frac{a_1}{1-b_1}x^{1-b_1}+\frac{a_2}{1-b_2}y^{1-b_2}. \qquad (2.15)$$

Маємо $M\,u_x=a_1\cdot x^{-b_1}$, $M\,u_y=a_2\cdot x^{-b_2}$, тобто функції попиту зі зростанням вартості кожного товару є такими, що убувають, а параметри b_1 і b_2 представляють часткові еластичності попиту на ці товари.

2.4.4. Виробнича модель

Значна частина економічних механізмів ілюструється на малюнках, що зображають лінії рівня функції двох змінних $z = f(x,y)$. Наприклад, лінії рівня виробничої функції називаються *ізоквантами*.

Хай розглядається функція випуску $z = f(x,y)$, де x і y – два різні чинники виробництва, а $f(x,y)$ – максимально можливий випуск продукції, який дозволяють значення чинників x і y. На рис. 2.7 заштрихована так звана *економічна область*, яка характеризується тим, що частини ізоквант, що відсікаються нею, є графіками функцій, що убувають, тобто збільшення кількості одного чинника дозволяє зменшити кількість іншого, не міняючи розміру випуску.

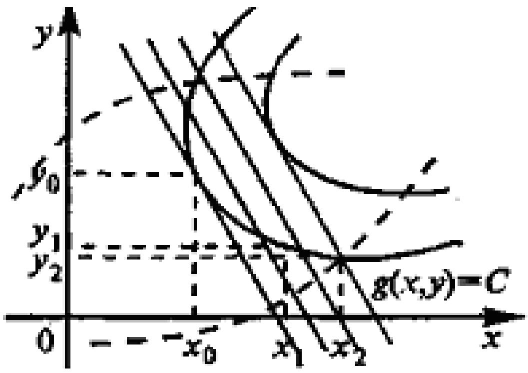


Рис. 2.11. Економічна область функції

Іншими словами, економічна *область – це множина значень чинників, що допускають заміщення одного з них іншим.* Очевидно, що всі "розумні" значення x і y належать економічній області.

Ізокванти дозволяють геомет-рично ілюструвати рішення **задачі про оптимальний розподіл ресурсів.** Хай $z = g(x,y)$ – функція витрат, що характеризує витрати, необхідні для забезпечення значень ресурсів x і y (часто можна вважати, що функція витрат лінійна

$g(x,y) = p_x x + p_y y$, де p_x і p_y – "ціни" чинників x і y).

Лінії рівня цієї функції також зображені на рис. 2.11. Комбінації ліній рівня функції $f(x)$ і $g(x)$ дозволяють робити висновки про перевагу того або іншого значення чинників x і y. Очевидно, наприклад, що пара значень (x_1,y_1) більш переважна, ніж пара (x_2,y_2), оскільки забезпечує той же випуск, але з меншими витратами. Оптимальними ж значеннями чинників будуть значення (x_0,y_0) – координати точки дотику лінії рівня функції випуску і функції витрат.

2.4.6. Лінійна модель обміну (модель міжнародної торгівлі)

Нехай маємо n країн $S_1, S_2,\ldots, S_n$ національний прибуток кожної з яких дорівнює відповідно $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Позначимо коефіцієнтами a_{ij} частину національного прибутку, що країна S_j витрачає на покупку товарів у країни S_i. Будемо вважати, що увесь національний прибуток витрачається на закупівлю товарів або усередині країни, або на імпорт з інших країн, тобто:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1\,(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Розглянемо матрицю $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, (2.16)

що одержала назву *структурної матриці торгівлі*. Відповідно до формули $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$, сума елементів будь-якого стовпця матриці A дорівнює 1.

Для будь-якої країни S_i (i=1, 2,…, n) виторг від внутрішньої і зовнішньої торгівлі складе $p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$.

Для збалансованої торгівлі необхідна бездефіцитність торгівлі кожної країни S_i, тобто виторг від торгівлі кожної країни повинний бути не менше її національного прибутку: $p_i \geq x_i$ (i=1, 2,…, n).

Якщо вважати, що $p_i \geq x_i$ (i=1, 2,…, n), то одержуємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \geq x_n. \end{cases} \quad (2.17)$$

Склавши і згрупувавши всі нерівності останньої системи, одержимо:

$$x_1\left(a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{n1}\right) + x_2\left(a_{12} + a_{22} + \ldots + a_{n2}\right) + \ldots$$
$$\ldots + x_n\left(a_{1n} + a_{2n} + \ldots + a_{nn}\right) \geq x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

З огляду на $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$, вирази в дужках рівні одиниці, і ми приходимо до суперечливої нерівності: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

Таким чином, нерівність $p_i \geq x_i$ (i=1, 2,…, n) неможлива, і умова $p_i \geq x_i$ приймає вид $p_i = x_i$ (i=1, 2,…, n). З економічної точки зору це зрозуміло, тому що всі країни не можуть одночасно отримувати прибуток.

Уводячи вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ національних прибутків країн, одержимо рівняння: $AX = X$, або $AX = \lambda X$, (2.18)

тобто задача звелася до знаходження власного вектора матриці A, що відповідає власному значенню $\lambda = 1$.

2.4.7. Використання динамічних моделей в економіці

Ці моделі описуються диференційними рівняннями.

Логістична функція. Хай торговою фірмою реалізується деяка продукція, про яку у момент часу $t = 0$ з реклами одержали інформацію x_0 людина із загального числа N потенційних покупців. Далі ця інформація розповсюджується за допомогою спілкування людей, і у момент часу $t > 0$ число знаючих про продукцію людей рівне $x(t)$. Зробимо припущення, що швидкість росту числа знаючих про продукцію пропорційна як числу обізнаних в даний момент покупців, так і числу не інформованих покупців. Це приводить до диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x). \tag{2.19}$$

Тут k – позитивний коефіцієнт пропорційності. З рівняння одержуємо рівність диференціалів двох функцій аргументу t $\quad \dfrac{dx}{x(N-x)} = kdt$.

Інтегруючи ліву і праву частини, знаходимо загальне рішення диференціального рівняння $\quad \dfrac{1}{N}\ln\dfrac{x}{N-x} = kt + C$.

У загальне рішення входить невизначена константа C. Припускаючи, що $NC = D$, одержимо рівність $\quad x/(N - x) = e^{Nkt + D}$, $\quad$ з якої визначимо функцію $x(t)$

$$x = \frac{N}{1 + Ee^{-Nkt}}. \tag{2.20}$$

Тут $E = e^{-D}$. Функція такого вигляду називається логістичною, а її графік – логістичною кривою.

Якщо тепер врахувати, що $x(0) = x_0$ і покласти $x_0 = N/\alpha$, де $\alpha > 0$, то можна знайти значення константи E. Логістична функція прийме вигляд

$$x = \frac{N}{1 + (\alpha - 1)e^{-Nkt}}. \tag{2.21}$$

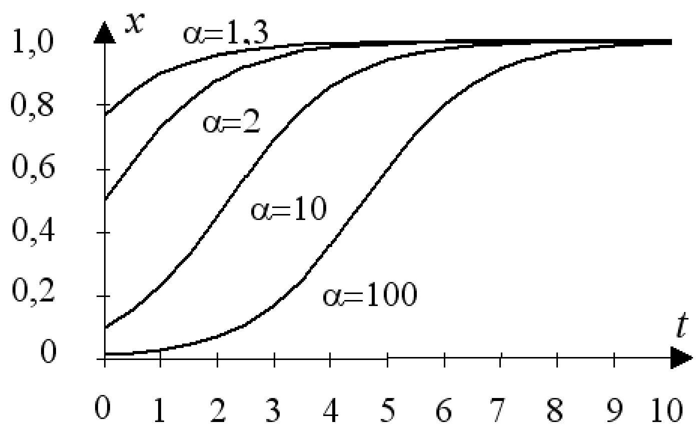


Рис. 2.12. Логістичні криві

На рис. 2.9 приведені приклади логістичних кривих, одержаних при різних значеннях α. Тут величина N умовно приймалася за 1, а величина k бралася рівною 0,5.

За допомогою логістичної функції описуються багато економічних, соціальних, технологічних і біологічних процесів, наприклад, постійне зростання продажів, розповсюдження чуток, розповсюдження технічних новин, зростання популяції певного виду тварин і ін.

Динамічна модель стійкості ринку Вальраса.

Вона формулюється таким чином. Є декілька продавців і декілька покупців деякого товару. Якийсь посередник оголошує ціну p на товар, після чого кожен продавець повідомляє, скільки товару він може продати при такій ціні. Сумарна кількість товару, що виставляється на продаж при даній ціні, називається пропозицією і позначатиметься $S(p)$. Також кожен покупець повідомляє, скільки товару він збирається купити при даній ціні. Сума потреб покупців надалі називатиметься **попитом** і позначатиметься $D(p)$. Введемо поняття надмірного попиту $E(p)$ як різниці між попитом і пропозицією: $E(p) = D(p) - S(p)$.

Якщо $E(p) \geq 0$, ціна росте до тих пір, поки не буде досягнута рівновага, яка визначається рівністю попиту і пропозиції, тобто рівністю $D(p) = S(p)$ або $E(p) = 0$. Якщо $E(p) \leq 0$, тобто має місце надмірна пропозиція, відбувається зниження ціни, поки не наступить рівновага. Тут доречно зробити найпростіше можливе припущення, яке полягає у тому, що швидкість зміни ціни в часі пропорційна надмірному попиту. Малий надмірний попит викличе повільне збільшення ціни товару, великий надмірний попит – швидке збільшення ціни, мала надмірна пропозиція – повільне пониження ціни і т.д. Звідси слідує рівняння

$$\frac{dp}{dt} = kE(p). \tag{2.22}$$

Тут k – позитивна константа, що відображає швидкість процесу.

Хай попит і пропозиція є лінійними функціями ціни: $D(p) = \alpha + \beta p$ і $S(p) = \gamma + \delta p$. Тоді, прийнявши початкову умову $p(0) = p_0$, матимемо рівняння

$$p'(t) = k(\alpha + \beta p - \gamma - \delta p) = k(\beta - \delta)p + k(\alpha - \gamma). \tag{2.23}$$

Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку з постійними коефіцієнтами має рішення

$$p(t) = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \delta} + \left(p_0 - \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \delta}\right)e^{k(\beta - \delta)t}, \tag{2.24}$$

яке стійке, якщо $\beta - \delta < 0$ і нестійке при $\beta - \delta > 0$. Але β – тангенс кута нахилу кривої попиту, а δ – тангенс кута нахилу кривої пропозиції, і якщо виконується умова $\beta - \delta < 0$ (яке вірне при убуванні попиту і зростанні пропозиції із зростанням ціни), ринок стійкий, тобто надмірний попит знижується і остаточно усувається зростаючою ціною. Якщо $\beta - \delta > 0$, ринок нестійкий: матиме місце безперервна і необмежена інфляція.

Модель діяльності комерційного банку.

Тут прийняті наступні позначення: k_1, k_2, k_3 – функції, що характеризують управління активами. $k_1(t) = p(t) - r_c(t) - r_v(t)$, де $p(t)$ – непроцентні доходи, $r_c(t)$ – умовно постійні і $r_v(t)$ – умовно перемінні витрати. $k_2(t) = f(\alpha_2(t), r_a(t), l(t))$, де α_2, r_a та l – коефіцієнти прибутковості, ризику та ліквідності відповідно; r – коефіцієнт резервування залучених коштів, що включає й нормативи резервування, встановлені Національним банком. k_3 визначено як функцію управління іммобілізацією при заданих параметрах: структура активів і пасивів, що дозволяє виділити кошти для довгострокових проектів, не порушуючи при цьому встановлені коефіцієнти ризику та ліквідності; розмір банку, що характеризує необхідний обсяг основних засобів.

Тобто, $k_3(t) = f((X_1(t), X_2(t), X_3(t), W_1(t), W_2(t), \alpha_3(t), r_a(t), l(t))$.

d_1, d_2 – функції, що описують залучення пасивів.

$d_1(t) = f(e_c(t), \varphi_{d1}(t))$, де $e_c(t)$ – коефіцієнт, що відбиває залежність обсягу пасивів до запитання від витрат по обслуговуванню клієнтів, $\varphi_{d1}(t)$ – випадкова функція, що описує некеровану зміну обсягу пасивів до запитання.

$d_2(t) = f\big(c_f(t), c_p(t), c_r(t), \varphi_{d2}(t)\big)$, де $c_f(t)$, $c_p(t)$, $c_r(t)$ – коефіцієнти, що відбивають залежність обсягу термінових пасивів від: банківських витрат по створенню мережі філій (політика розширення економічного простору банку); процентних витрат по депозитам та іншим терміновим пасивам (у даному випадку – це процентна ставка, встановлена банком); витрат, пов'язаних з проведенням рекламних кампаній та іншими небанківськими операційними витратами відповідно, а $\varphi_{d2}(t)$ – випадкова функція, що описує некеровану пропозицію термінових пасивів (рис. 2.10).

$$\begin{cases} \dfrac{dX_1}{dt} = \dfrac{k_1 + (\alpha_1 - 1)}{\tau_1} \cdot X_1 + \dfrac{\alpha - k_2}{\tau_2} \cdot X_2 + \dfrac{1 - k_3}{\tau_3} \cdot X_3 + \\ + \dfrac{d_1 - \beta_1}{\lambda_1} \cdot W_1 + \dfrac{r \cdot (d_2 - 1) - (\beta_2 - 1)}{\lambda_2} \cdot W_2 \\ \dfrac{dX_2}{dt} = \dfrac{k_2 - 1}{\tau_2} \cdot X_2 + (1 - r) \cdot \dfrac{d_2 - 1}{\lambda_2} \cdot W_2 \\ \dfrac{dX_3}{dt} = \dfrac{(k_3 - 1) + (\alpha_3 - 1)}{\tau_3} \cdot X_3 \\ \dfrac{dW_1}{dt} = \dfrac{d_1 - 1}{\lambda_1} \cdot W_1 \\ \dfrac{dW_2}{dt} = \dfrac{d_2 - 1}{\lambda_2} \cdot W_2 \end{cases} \qquad (2.25)$$

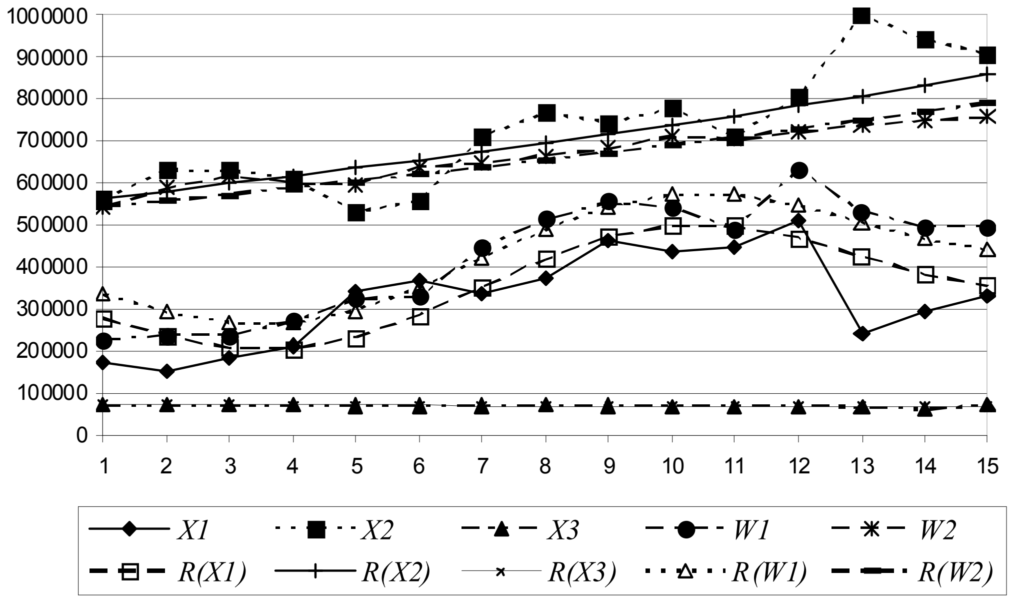


Рис. 2.13. Фактичні та прогнозні значення показників, X_1, X_2, X_3, W_1 і W_2 – фактичні та $R(X_1)$, $R(X_2)$, $R(X_3)$, $R(W_1)$ і $R(W_2)$ – прогнозні значення показників.

Модель самоорганізації ринку праці, динаміка якої залежить від кількості зайнятих у галузі $N_1(t)$ у певний момент часу. Передбачається, що місткість ринку праці стала й дорівнює N, тоді $N - N_1(t)$ – кількість потенційних безробітних або кількість вільних робочих місць. Розглядаються ймовірність того, безробітний знайде роботу в проміжку часу $[t, t+1]$, яка залежить від кількості вільних робочих місць $W_1(t) = k_1(N - N_1(t))$, та ймовірність звільнення, що залежить від кількості вільних робочих місць $W_2(t) = k_2 N_1(t) + k_3(N - N_1(t))$. Вважається, що $k_1, k_2 > 0, k_3 < 0$. Тоді рівняння моделі має вигляд:

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = W_1(t)(N - N_1(t)) - W_2(t)N_1(t). \qquad (2.26)$$

Можна показати, що існує лінійна заміна змінних, яка приводить рівняння (16.3) до класичного логістичного відображення (2.12).

Макроекономічна модель зростання, Хаавельмо.

$$\frac{dN}{dt} = N\left(a - \frac{bN}{Y}\right), \qquad a, b > 0,$$
$$Y = AN^{\alpha}, \qquad A > 0,\ 0 < \alpha < 1, \qquad (2.27)$$

де N – чисельність населення; Y – реальний обсяг виробництва; a, b, A, α – константи. Після підставлення другого рівняння в перше отримаємо

$$\frac{dN}{dt} = N\left(a - \frac{bN^{1-\alpha}}{A}\right). \qquad (2.28)$$

Увівши дискретний час та замінивши похідні першими різницями, після заміни змінних запишемо:

$$x_{t+1} = (1 + a)x_t(1 - x_t^{1-\alpha}), \qquad (2.29)$$

де нова змінна визначається співвідношенням

$$N_t = x_t\left(\frac{A(1 + a)}{b}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \qquad (2.30)$$

Отже, можна побачити, що закон зростання являє собою узагальнення логістичного відображення.

Якщо взяти, скажімо, $\alpha = 1/2$, то для $a < 4$ рівновага буде стійкою, тобто вона досягається будь-якою траєкторією, що починається в довільній точці. Але при $4 < a < 5{,}75$ траєкторії не будуть рівноважними, а залишатимуться в області, обмеженій нулем та одиницею. Фактично тільки-но параметр $a > 4$, нестійка точка рівноваги розпадається на дві стійкі точки з періодом два, тобто відбуваються біфуркації подвійного періоду. При значеннях параметра, що перевищують 4,8, двоперіодичний цикл стає нестійким, і кожна двоперіодична точка розпадається на дві чотириперіодичні точки.

Зі зростанням a цей процес триває, генеруючи невироджені орбіти періоду 2^k ($k = 2, \ldots$). Область, усередині якої зароджуються стійкі орбіти періоду k, які далі стають нестійкими та розпадаються на $2k$-періодичні орбіти, обмежена значенням параметра $a_c \approx 5{,}54$ (точне його значення невідоме). Інтервал $a_c < a < 5{,}75$ називають областю хаосу.

2.4.8. Моделі банкрутства

Система показників раннього попередження та реагування, прогнозування банкрутства підприємств включає наступні моделі.

Модель Альтмана являє собою функцію від деяких показників, які характеризують економічний потенціал підприємства та результати його роботи за минулий період. Застосування індексу Альтмана доцільне для оцінки ймовірності банкрутства великих акціонерних товариств, які торгують своїми акціями на біржах. Коефіцієнт ймовірності банкрутства (Z_A) розраховується за такою формулою

$$Z_A = 3{,}3K_1 + 1{,}4K_2 + 1{,}2K_3 + K_4 + 0{,}6K_5 \qquad (2.31)$$

де K_1 – Балансовий прибуток / Середньорічна вартість активів; K_2 – Нерозподілений прибуток / Середньорічна вартість активів; K_3 – Власні оборотні активи / Середньорічна вартість активів; K_4 – Виручка від реалізації / Середньорічна вартість активів; K_5 – Ринкова вартість акцій / Залучений капітал. Якщо значення індексу Альтмана приймає значення менше 1,8 – то ймовірність банкрутства дуже висока, якщо знаходиться в діапазоні 1,81 – 2,70, то висока, 2,71-2,99, банкрутство можливе, при 3,00 і більше – дуже низька

Модель Спрінгейта

$$Z_C = 1{,}03A + 3{,}07B + 0{,}66C + 0{,}4Д, \qquad (2.32)$$

де A – робочий капітал/загальна вартість активів; B – прибуток до сплати податків та відсотків/загальна вартість активів; C – прибуток до сплати податків/короткострокова заборгованість; $Д$ – обсяг продажів /загальна вартість активів. Якщо Z_C менше 0,862. то підприємство є потенційним банкрутом.

Коефіцієнт вірогідності банкрутства доцільно застосовувати для акціонерних товариств, які не торгують своїми акціями на біржах

$$R = 8{,}38K_1 + K_2 + 0{,}054K_3 + 0{,}63K_4 \qquad (2.33)$$

де, K_1 – Обіговий капітал / Середньорічна вартість активів; K_2 – Нерозподілений прибуток / Власний капітал; K_3 – Виручка від реалізації / Середньорічна вартість активів; K_4 – Нерозподілений прибуток/Загальні витрати. Якщо R менше 0, то ймовірність банкрутства 90 – 100%, якщо R знаходиться в діапазоні 0 - 0,18 ймовірність банкрутства 60 – 80%, при 0,18-0,32 – 35-50%, 0,32-0,42 –15 - 20%, Більше 0,42 – 10)%.

Універсальна дискримінанта використовується для прогнозування банкрутства

$$Z_У = 1{,}5x_1 + 0{,}08x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 0{,}3x_3 + 0{,}1x_6, \qquad (2.34)$$

де x_1 – поточні активи + амортизація./зобов'язання; x_2 – валюта балансу/ зобов'язання; x_3 - прибуток /валюта балансу; x_4 – прибуток/ виручка від реалізації; x_5 - виробничі запаси / виручка від реалізації; x_6 - виручка від реалізації/ валюта балансу. Якщо величина $Z_У$ менше 0, то підприємство є банкрутом на половину, якщо від 0 до 1, то підприємству загрожує банкрутство, якщо воно не здійснить санаційних заходів, якщо 1 - 2 – у підприємства порушено фінансову рівновагу (фінансову стійкість),.але йому не загрожує банкрутство за умови переходу на антикризове управління, якщо більше 2, то підприємство є фінансове стійким і йому не загрожує банкрутство.

Коефіцієнт Бівера використовується для виявлення незадовільної структури балансу. Розраховується як відношення різниці між чистим прибутком і нарахованою амортизацією до суми довгострокових і поточних зобов'язань за формулою

$$Z_Б = (Ф_{220} - Ф_{260}) / (П_{480} + П_{620}), \qquad (2.35)$$

де $Ф_{220}$, $Ф_{260}$ – чистий прибуток і амортизація; $П_{480}$, $П_{620}$ – довгострокові поточні зобов'язання. Ознакою формування незадовільної структури балансу є таке фінансове становище підприємства, у якого протягом тривалого часу (1,5 - 2 роки) коефіцієнт Бівера не перевищує 0,2, що відображає небажане скорочення частки прибутку, який направляється на розвиток виробництва.

Модель банкрутства Мартиненка – це економіко-статистична модель визначення імовірності банкрутства підприємств громадського харчування

$$Кі.б. = Кп.л. + 3{,}33\ Ка. + 5{,}71 Кр.в.з., \qquad (2.36)$$

де *Кі.б.* – коефіцієнт імовірності банкрутства; *Кп.л.* – коефіцієнт поточної ліквідності; *Ка* – коефіцієнт автономії; *Кр.в.з.* – коефіцієнт рентабельності власних засобів. Якщо *Кі.б.* = 6,0 і вище, то ймовірність банкрутства низька, якщо знаходиться в діапазоні 5,99-5,30, то можлива, якщо 5,29-3,49 – висока, а якщо 3,48 і нижче, то дуже висока.

Пістунова-Чухлєбової схильності до банкрутства торгово-транспортних підприємств Дніпропетровської області

$$\text{Ðåéòèíã} = 0{,}9 \cdot \frac{\text{×ÄÐ}^{0,1} \cdot \text{ÂÀ}^{0,63} \cdot \text{ÑÐÏ}^{0,07}}{\text{ÊÇ}^{0,73} \cdot \text{Ç}^{0,07}} \left(\frac{\text{×Ï (Ç)}}{\text{ÂÀ}} + 3 \right)^{0,29} \left(\frac{\text{×Ï (Ç)}}{\text{×ÄÐ}} + 4 \right)^{0,08}, \qquad (2.37)$$

де *СРП* – собівартість реалізації продукції; *ЧП(З)* – чистий прибуток (збиток) ; *ЧДР* – чистий доход від реалізації ; *ВА* – вартість активів; *КЗ* – кредиторська заборгованість ; *З* – запаси. Чим ближче значення рейтингу до 1, ти більше ймовірність банкрутства, а чим ближче до 12 – тим менше.

2.5. Індивідуальні завдання № 2

Кожен студент обирає собі по п'ять задач згідно номера за списком групи. Номера цих задач подано у наступних таблицях, а самі задачі вміщено нижче.

Варіанти завдань

Варіант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Задача1	1	2	1	4	2	3	1	9	2	3	4	1	2	3	4
Задача2	9	12	3	14	5	6	7	10	12	5	6	5	6	7	9
Задача3	10	15	13	17	15	16	8	11	16	13	14	15	16	8	10
Задача4	11	18	16	21	18	19	17	21	18	19	20	21	19	17	11
Задача5	14	20	24	22	23	25	20	22	23	24	25	22	23	25	18

Варіант	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
Задача1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	7	9	12	13
Задача2	5	6	7	9	12	7	9	10	13	14	7	8	10	18	15
Задача3	9	13	8	10	14	8	10	12	16	17	8	16	11	21	19
Задача4	12	20	21	11	17	13	11	15	20	21	15	19	17	22	23
Задача5	19	24	22	23	25	24	14	18	24	22	18	23	20	25	24

ЗАВДАННЯ

1. Які з приведених нижче співвідношень невірні і чому?

а) $x \in \{2, a, x\}$;

б) $3 \in \{1\ \{2, 3\}, 4\}$;

в) $x; \in \{l, \sin(x)\}$;

г) $\{x, y\} \in \{ a, \{ x,y\},b\}$.

2. Чи рівні між собою множини *A і B* (якщо немає, то чому)?

а) $A = \{2, 5, 4\}$, $B = \{5, 4, 2\}$;

б) $A = \{1, 2, 4, 2\}$, $B = \{I, 2, 4\}$;

в) $A = \{2, 4, 5\}$, $У = \{2, 4, 3\}$;

г) $A = \{1\ \{2, 5\}, 6\}$, $У = \{1\ (5, 2\}, 6)$;

д) $A = \{1\ \{2, 5\}, 6\}$, $У == \{1, 2, 5, 6\}$.

3. Чи зв'язані множини *A і У* відношенням включення (якщо так, то вкажіть, яке з них є підмножиною іншого)?

а) .$A = \{ a, b, d\}$, $У = \{a, b, c,d\}$;

б) $A = \{ a, з, d, e\}$, $У = \{ a, e, з\}$;

в) $A = \{ з, d, e\}$, $У = \{ з, a\}$.

4. У яких відносинах знаходяться між собою наступні три множини: $A = \{1, 3\}$; У – множина непарних позитивних чисел; З – множина вирішень рівняння $x2 - 4x + 3 = 0$?

5. Утворіть множину святкових днів 2006 р. Чи перетинається ця множина з множиною недільних днів того ж року? Якщо так, то запишіть елементи перетину цих двох множин.

6. До яких видів відносяться наступні множини: A – множина конденсаторів в радіоприймачі; B – множина квадратів цілих чисел; З – множина вирішень рівняння $2x - 3 = 0$**;** D – множина дерев на Місяці?

7. Прийнявши множину перших 20 натуральних чисел як універсум, запишіть наступні його підмножини: A – парних чисел; B – непарних чисел; C – квадратів чисел; D – простих чисел. У яких відносинах знаходяться ці підмножини?

8. Запишіть множини, що отримуються в результаті наступних операцій над множинами із завдання 7: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$, $A\ \ D$, $C \setminus A$, $C \setminus B$, $C + \overline{D}$. Сформулюйте визначальні властивості кожної з отриманих множин.

9. Три прилади *x, y, z* порівнюють за двома показниками, причому виділяють той з приладів, у якого даний показник якнайкращий (випадки однакових показників виключаються).

а) Утворіть множину *U* всіляких результатів такого порівняння, позначивши елементи цієї множини впорядкованими парами букв для приладів з якнайкращими показниками (наприклад, результат ***yz*** означає, що по першому показнику кращим виявився прилад ***y***, а по другому – прилад ***x***).

б) Скільки елементів містить множина всіляких результатів порівняння *m* приладів за *n* показниками?

в) Перерахуєте елементи множини можливих результатів, при яких прилад ***x*** виявляється кращим по першому показнику (А), по другому показнику (В), хоч би по одному показнику (С), за обома показниками (D), не є кращим ні по одному показнику (Е).

10. Для множин А, В, З, D, Е із завдання 9 в дайте відповіді на наступні питання:

а) Які множини виражаються через об'єднання, доповнення, перетин інших множин?

б) Якій множині відповідає різниця А \ Y і який його сенс?

в) Які множини зв'язані між собою відношенням включення?

г) Якій множині відповідає диз'юнктивна сума А + Y і який його сенс?

11. На прикладі множин А і *В* из задачі 9в покажіть справедливість співвідношення $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ і проілюструйте його за допомогою кіл Ейлера.

12. Що можна сказати про відносини між множинами А, *В, С, представленими* колами Ейлера на рис. 1? Запишіть за допомогою операцій над множинами вирази для множин, які відповідають заштрихованим областям.

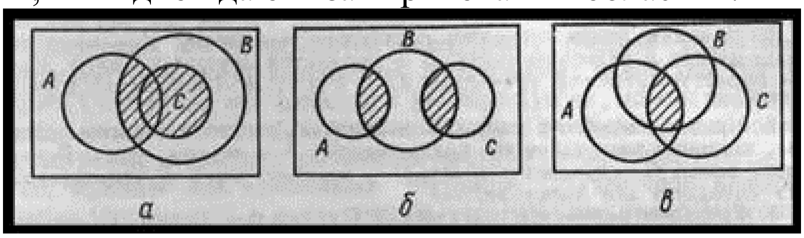


Рис.2.14. Круги Ейлера до завдання 12.

13. Для написання цифр поштового індексу використовують множину з дев'яти елементів, які позначені буквами на рис. 5,а, а самі цифри зображені на рис. 5,б.

а) Скільки різних фігур можна зобразити за допомогою всіляких комбінацій з елементів початкової множини, вважаючи, що в кожній такій комбінації може брати участь від 0 до 9 елементів? Який відсоток цих комбінацій використовується для зображення цифр?

б) Запишіть множину A_k(k = 0, 1 ..., 9) елементів кожною з десяти цифр (наприклад, A_7 = { а, *з, f]*). Чи є серед них множини, що не пересікаються?

в) Запишіть для кожного з елементів s (s = *a,b ...,* i) множину B_s що складається з цифр, в написанні яких використовується елемент s (наприклад, Bf = {0, 6, 7, 8}). Які елементи використовуються найбільш рідко і найчастіше?

г) Вважаючи мірою близькості цифр, кількість загальних елементів, вкажіть цифри, найменш і найбільш близькі цифрі 3. Якій операції над множиначю A_k відповідає множина, що визначає міру близькості цифр?

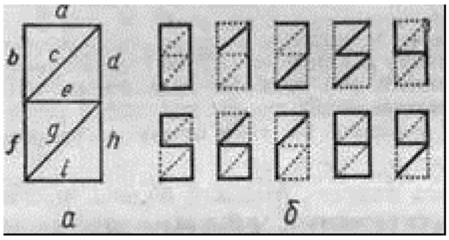


Рис. 2.15. Зображення цифр поштового індексу:
а — елементи початкової множини; б — цифри.

14. У хімічному продукті можуть опинитися домішки чотирьох видів, позначених через ***a, b, c, d***. Прийнявши як початкову множину А = { a, b, c, d}, утворіть множини всіх його підмножин Р(А). Дайте змістовне тлумачення цієї множини і його елементів. Яким ситуаціям відповідають, зокрема, невласні підмножини?

15. Доведіть, що для кінцевої множини, що складається з ***n*** елементів, множина всіх його підмножин містить ***2n*** елементів.

16. Перевірте властивість транзитивності відношення включення на прикладі множин $X = \{b, з\}$, $Y = \{ a, b, з\}$, $Z = \{b\}$.

17. Дайте словесний опис кожній з наступних множин:

а) {*x* | *x* — точка площини, що знаходиться на відстані **r** від початку координат};

б) {x | x2 **-** 4x+ 3 = 0};

в) *{ x | x—інженер* нашого відділу};

г) $\{ x \mid x \in A$ і $x \in B\}$; *A* — множина транзисторів; *B* — множина деталей радіоприймача;

д) $\{x \in R \mid x = 3k, k \in N\}$; *N* — множина натуральних чисел;

е) $\{x^2 + 1 \mid$ x – ціле число}.

18. Покажіть, що для будь-яких множин *A* і *B* справедливе відношення

$$\varnothing \subset A \cap B \subset A \cup B.$$

19. Покажіть, що для будь-якої множини *A* справедливі співвідношення:

$$A + A = 0; \quad A + \varnothing = A.$$

20. Покажіть, що із співвідношення $A \cap B = C$ слідує $C \subset A$ і $C \subset B$.

21. Хай M_1 і M_2 — відповідно множина деталей першого і другого механізмів, а *P* — множина пластмасових деталей. Запишіть у вигляді співвідношень наступні умови.

а) Серед деталей першого механізму є всі пластмасові деталі.

б) Однакові деталі, що входять в обидва механізми, можуть бути тільки пластмасовими.

в) У другому механізмі немає пластмасових деталей.

22. Чи є сукупність отриманих в попередньому завданні співвідношень ($P \subset M1$, $M1 \cap M2 \subset P$, $M2 \cap P = \varnothing$) є несуперечливою? Якщо так, то чи можна її спростити? Для відповіді на поставлені питання проведіть спочатку логі-

чні міркування, а потім скористайтеся колами Ейлера. Сформулюйте виводи, відповідні отриманому результату.

23. Запишіть множина впорядкованих пар *(x, y),* що виражають відношення “x, — дільник y» на множині цілих чисел від 2 до 10 включно. Чи є це відношення функцією? Чи має воно властивість транзитивності?

24. Запишіть відношення між елементами множинаі цифр із завдання **13,** що виражається як *«* x має більше двох загальних елементів з y».

25. Хай $x \in X$, $y \in Y$ і A — відношення між елементами множин X і Y, що виражається співвідношенням $x\ A\ y$. Вкажіть, в яких випадках A можна розглядати як функцію:

а) X — множина студентів, Y — множина учбових дисциплін, $x\ A\ y$ — «x вивчає y»;

б) X — множина спортсменів, Y — зріст в одиницях довжини, $x\ A\ y$— «x має зріст y»;

в) X — множина компонентів електричного ланцюга, Y — множина вузлів ланцюга, $x\ A\ y$ — «x пов'язаний з y».

2.6. Індивідуальні завдання № 3
Застосування економічних моделей в розрахунках на комп’ютері

Завдання: провести розрахунки на комп’ютері за описаними вище моделями. Виконати їх дослідження за методами математичного аналізу, знайти критичні точки, побудувати графіки.

Порядок виконання: для визначення свого варіанту студент використовує останню цифру номеру залікової книжки *Nз* та номер за списком навчальної групи *Nг*. Варіант функції, за якою проводиться розрахунок, обирається з табл. 2.1 за *Nг.*

Методичні вказівки: 1) за обраною з табл. 2.1 формулою будується формула у

, з посиланням на пусті клітинки.

2) за допомогою формули **=RANDBETWEEN((*Nз*+1)*Nг; (*Nз*+2)*(*Nг*+1))/341** генерується 15 випадкових чисел, які в подальшому слугують константами у обраних формулах і використовуються у тому порядку, як вони були подані у поясненнях до відповідної формули.

3) за допомогою тієї ж формули генеруються пари чисел, які відповідають діапазону змін факторів у формулах.

4) використовуючи «Майстер діаграм» (рис. 2.11), побудувати сімейство кривих та зробити висновки за отриманими результатами.

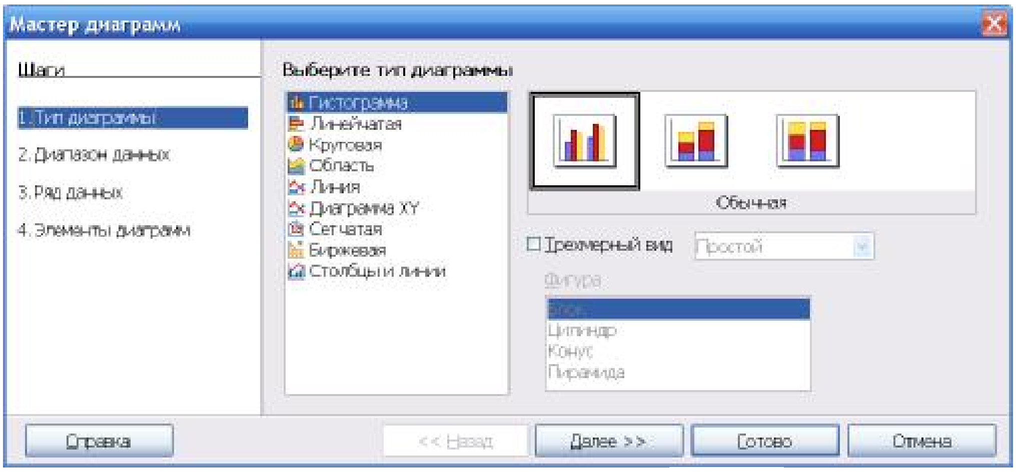


Рис. 2.11. Майстер діаграм

Таблиця 2.1.

Варіанти індивідуальних завдань

Номер варіанту	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Номер формули	(2.5)	(2.7)	(2.8)	(2.10)	(2.11)	(2.13)	(2.15)	(2.37)	(2.21)	(2.24)

Контрольні запитання

1. Поясність багатозначність терміну «модель».
2. Опишіть зміст поняття «математична модель».
3. Чим дискретна модель відрізняється від безперервної?
4. Які бувають види моделювання?
5. Які методи використовуються при створенні економіко-математичних моделей?
6. Яку задачу вирішують методи математичного програмування?
7. Що таке бієкція?
8. Наведіть приклад потужності множини.
9. Поясність зміст терміну «оптимальне споживання».
10. Що таке «ізокванта»?
11. Як доводиться неможливість одночасного отримання прибутку в моделі міжнародної торгівлі?
12. В яких випадках економічні явища моделюються динамічними моделями?
13. Коли настає «область хаосу» в моделі Хаавелмо?

Засвоївши матеріали розділу студенти опанують типи моделей і види моделювання, вивчать деякі з існуючих моделей економічних процесів, як статичних так і динамічних .

3. АНАЛІЗ, ЯК КАТЕГОРІЯ ПІЗНАННЯ, ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ В ДОСЛІДЖЕННЯХ СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ

В розділі наведено основні поняття про різні типи кібернетичних методів аналізу, приклади вирішення задач з аналізу соціально-економічних систем.

Спочатку розглянемо основні терміни та визначення.

Аналіз (від грець. αναλυσις – розклад) – розчленування предмета пізнання, абстрагування його окремих сторін. Під цим методом розуміють наступне.

1. Метод дослідження, який включає в себе вивчення предмета за допомогою мисленого або практичного розчленування його на складові елементи (частини об'єкта, його ознаки, властивості, відношення). Кожна із виділених частин аналізується окремо у межах єдиного цілого. Протилежне – синтез.
2. Уточнення логічної форми (будови, структури) міркування засобами формальної логіки.
3. Синонім наукового дослідження взагалі.

Економічний аналіз – взаємопов'язані й взаємозумовлені методи вивчення і наукового дослідження певних явищ, процесів, дій, результатів. У економіці застосовується з метою виявлення закономірностей і тенденцій розвитку економічних процесів, встановлення та оцінки основних факторів, що позитивно чи негативно впливають на показники ефективності. За допомогою економічного аналізу виявляють внутрішню структуру соціально-економічних систем, що дозволяє будувати більш точні моделі цих систем. Результати економічного аналізу використовують для прогнозування і перспективного планування економічних процесів, а також для розробки програм і рекомендацій подальшого ефективного розвитку, прибуткової діяльності.

Об'єктом статистичного економічного аналізу можуть бути дані про окреме підприємство, район, галузь, економіку держави в цілому, а також про сукупність об'єктів дослідження. Дані для статистичного економічного аналізу беруть із різних статистичних джерел, а також одержують в результаті соціологічних спостережень. Статистичний аналіз може бути повним (всебічне вивчення стану і розвитку явища в цілому) та частковим (з'ясування стану явища за даних умов, взаємозв'язку ознак, динаміки явищ тощо).

В цьому розділі буде розглянуто тільки кібернетичні аспекти аналізу соціально економічних систем, які базуються на припущенні, що окрім чисельних вхідних та вихідних факторів, отриманих в результаті спостереження за цими системами, внутрішня структура самих систем невідома.

Будь-який вид аналізу починається з формування таблиці спостережень, в якій вхідні фактори розташовуються у лівих колонках, а вихідні – у правих. Запис чергового спостереження здійснюється в один рядок таблиці водночас усіх факторів. Якщо попередня гіпотеза про зв'язок вхідних і вихідних факторів включає в себе і час, цей фактор записується у першій колонці. Таким чино, загальний вид таблиці спостережень наступний (табл.. 3.1). Така таблиця називається вибіркою числових значень факторів соціально-економічної системи.

Таблиця 3.1

Приклад формату таблиці спостережень за факторами соціально-економічної системи

Час або дата спостереження	Вхідні фактори				Вихідні фактори			
	X_1	X_2	…	X_n	Y_1	Y_2	…	Y_m

З таблиці видно, що кількість вхідних факторів – n, а вихідних – m. Саме для таблиць такого виду і буде вестися подальше викладення матеріалу, причому, всі фактори – вхідні і вихідні – будуть позначатися як X_i.

3.1. Статистичний аналіз соціально-економічних систем

Цей аналіз проводиться окремо для кожного фактора полягає у визначенні декількох параметрів, що їх характеризують. Це середнє, дисперсія, стандарт та варіація.

Середнє – це один з найбільш розповсюджених прийомів узагальнень. Правильне розуміння сутності середньої визначає її особливу значимість в умовах ринкової економіки, коли середнє через одиночне і випадкове дозволяє виявити загальне і необхідне, виявити тенденцію закономірностей економічного розвитку.

$$M_X = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \,, \qquad (3.1)$$

де X_i –окреме значення фактору; N – число одиниць сукупності (кількість вимірів цього фактору).

Але середня величина – це абстрактна, узагальнююча характеристика ознаки досліджуваної сукупності, вона не показує будівлі сукупності, що дуже істотно для її пізнання. Середня величина не дає представлення про те, як окремі значення досліджуваної ознаки групуються навколо середньої, чи зосереджені вони поблизу чи значно відхиляються від неї. У деяких випадках окремі значення ознаки близько примикають до середньої арифметичної і мало від неї відрізняються. У таких випадках середня добре представляє всю сукупність. В інші, навпаки, окремі значення сукупності далеко знаходяться від середньої, і середня погано представляє всю сукупність.

Коливання окремих значень характеризують показники варіації, через яку виявляється більшість статистичних закономірностей. Під варіацією в статистиці розуміють такі кількісні зміни величини досліджуваної ознаки в межах однорідної сукупності, що обумовлені перехресним впливом дії різних факторів.

Аналіз систематичної варіації дозволяє оцінити ступінь залежності змін у досліджуваній ознаці від визначаючих її факторів. Наприклад, вивчаючи силу і характер варіації у сукупності, можна оцінити, наскільки однорідною є дана сукупність у кількісному, а іноді і якісному відношенні, а отже, наскільки характерною є обчислена середня величина. Ступінь близькості даних окремих одиниць до середнього виміряється низкою абсолютних, середніх і відносних показників. Серед них:

Дисперсія – показник, що характеризує розсіювання значень ознаки щодо його середньої величини

$$D_X = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - M_X^2 , \qquad (3.2)$$

де X_i –окреме значення ознаки; M_X – середня арифметична ознаки; N – число значень ознаки.

Середнє квадратичне відхилення (або математичний стандарт чи просто стандарт)– це узагальнююча характеристика абсолютних розмірів варіації ознаки в сукупності. Середнє квадратичне відхилення є мірилом надійності середньої. Чим менше середнє квадратичне відхилення, тим краще середня арифметична відбиває собою всю вибірку. Середнє квадратичне відхилення – це квадратний корінь з дисперсії.

$$\sigma_X = \sqrt{D_X} , \qquad (3.3)$$

де D_X – дисперсія ознаки.

Незважаючи на логічну подібність, дисперсія є більш чуттєвим до варіації, а, отже, й частіше застосовуваним показником.

Оскільки числові характеристики випадкової величини ми знаходимо за вибіркою конечного розміру, то ми не можемо визначити їх точно, а знаходимо тільки якусь оцінку, виникає питання, а на скільки ж воно відрізняється від справжнього значення середнього чи дисперсії?

Нехай нас цікавить величина інтервалу ε на який відхилиться від справжньої оцінки числової характеристики, розраховане за результатами експериментальної вибірки. При цьому ми повинні наперед визначити ймовірність β, значення якої викликало б у нас довіру до цього інтервалу (тобто високу ймовірність – 0.8, 0.9, 0.95...). Цей інтервал так і називається – “довірчим”.

Отже нам треба зробити дію, зворотну визначенню ймовірності того, що справжнє значення числової характеристики випадкової величини ($Чх[X]$)буде відрізнятися від його оцінки $O[X]$ не більше ніж на величину ε

$$P(|Чх[X] - O[X]| < \varepsilon) = \beta. \qquad (3.4)$$

Коли буде знайдено ε, то справжнє значення числової характеристики буде знаходитися в межах $O[X] - \varepsilon < Чх[X] < O[X] + \varepsilon$.

Розмір довірчого інтервалу для кожної числової характеристики можна знайти із застосуванням функції Лапласа

– для середнього $$\varepsilon_m = \ddot{\sigma}_x \Phi^{-1}(\beta)\,; \qquad (3.5)$$

– для дисперсії $$\varepsilon_D = \ddot{D}_x \Phi^{-1}(\beta)\sqrt{\frac{0{,}8N + 1{,}2}{N(N-1)}}\,, \qquad (3.6)$$

де, $\ddot{\sigma}_m = \sqrt{\dfrac{D_X}{N}}$; $\Phi^{-1}(\beta)$– зворотне значення функції Лапласа, тобто таке значення аргументу (квантиля – t), при якому функція Лапласа дорівнює β.

Функція Лапласа має вигляд $$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt\,, \qquad (3{,}7)$$

але цей інтеграл у явному вигляді взяти неможливо, тому використовують таблиці його значень.

В деяких випадках перед початком статистичного аналізу потрібно виконати нормування чисельних значень нашої вибірки. Воно провадиться за формулою $$X_i^{н} = \frac{X_i - M_X}{\sigma_X}\,. \qquad (3.8)$$

Таке нормування з імовірністю 98% переведе всі значення X у діапазон [-4;+4] з середнім, що дорівнює 0, та стандартом, що дорівнює 1.

Якщо в процесі розрахунків за нормованими даними виникає потреба виконати денормування, то потрібна формула $X_i = \sigma_X X_i^{н} + M_X$. (3.9)

Мірою відносного відхилення значень випадкової величини відносно оцінки його середнього служить варіація та коефіцієнт варіації

$$\mathrm{var}(X) = \frac{\ddot{D}(x)}{\ddot{M}(X)};\ \ K\mathrm{var}(X) = \frac{\ddot{\sigma}(x)}{\ddot{M}(X)}. \quad (3.10)$$

Приклад. Економічний процес було досліджено за 4-ма параметрами. Було отримано 5 точок значень цих параметрів. Провести нормування цих параметрів.

№ п/п	X_1	X_2	X_3	X_4
1	87	0,39	560	2770
2	25	0,82	430	2590
3	67	0,29	270	2870
4	62	0,52	860	1920
5	53	0,54	790	2770

Рішення цієї задачі будемо виконувати у . Розрахуємо середні для кожного параметра із застосуванням функції AVERAGE(), у дужках через двокрапку вкажемо діапазон адрес клітинок, які містять зміни значення першого фактора для всіх 5-ти точок. Далі знаходимо стандарт, використовуючи функцію STDEVA(), де так само подано діапазон клітинок для 1-го фактора. І нарешті, за допомогою формули STANDARDIZE(X; M_X; σ_X) виконуємо нормування. Тут перше число – адреса

№ п/п	X_1	X_2	X_3	X_4
1	1,25	-0,61	-0,09	0,48
2	-1,49	1,54	-0,62	0,02
3	0,36	-1,11	-1,27	0,74
4	0,14	0,04	1,13	-1,73
5	-0,26	0,14	0,85	0,48

клітинки, яка має бути нормована, 2-е – адреса клітинки, де є середнє, 3-є – клітинка, де є стандарт.

Вікно функції STANDARDIZE представлене на рис. 3.1.

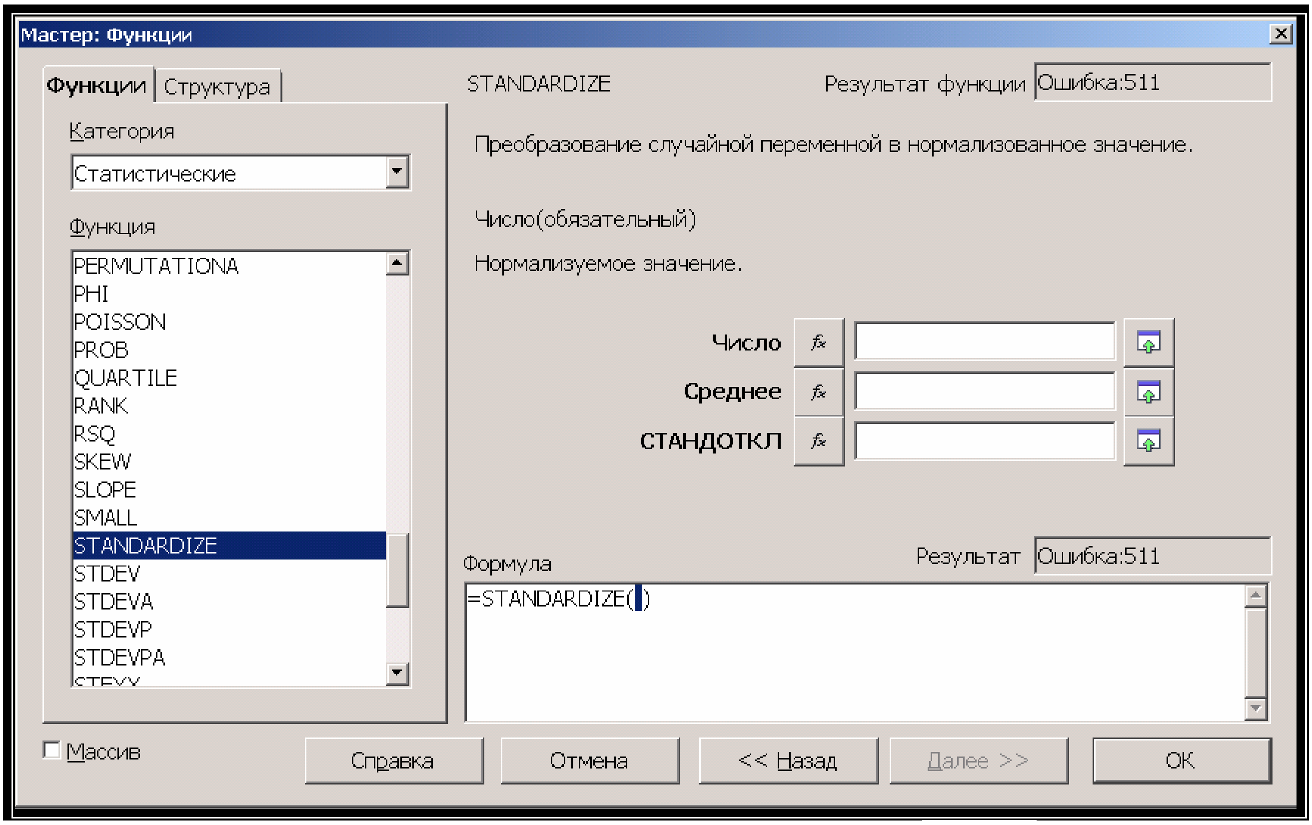


Рис. 3.1. Вікно функції STANDARDIZE з

Знати закон розподілу кожного фактора соціально-економічної системи потрібно, щоб скористатися всіма вже раніше зробленими висновками щодо можливих характеристик цієї випадкової величини.

Для визначення того, якому закону підлягає випадкова величина, необхідно вибрати відомий закон (чи рівномірний, чи експоненціальний, чи нормальний, чи ще який) і висунути так звану «**нуль-гіпотезу**» про те, що математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення (чи дисперсія) для цього закону дорівнюють оцінкам цих величин, отриманих з результатів розрахунку за вибіркою випадкової величини (3.1)-(3.10) з певною довірчою ймовірністю *p*.

Далі, розбиваємо область існування випадкової величини на діапазони з урахуванням (4.2) і знаходимо відносні частоти k_i. Для кожного діапазону знаходимо ймовірності попадання випадкової величини в конкретний діапазон за формулою

$$P(x_i<x<x_{i+1}) = F(x_{i+1}) - F(x_i), \qquad (3.11)$$

де x_i, x_{i+1} – значення випадкової величини на верхній і нижній межах *i*-го діапазону, $F(x)$ – прийнята ними як нуль-гіпотеза, функція розподілу, у якій параметрами математичного сподівання та дисперсії використовуються їхні оцінки, розраховані з експериментальної вибірки.

Нуль-гіпотеза приймається, якщо критерій узгодження Пірсона (або «хі-квадрат»)

$$\chi_P^2 = n\sum_{i=1}^{d}\frac{(p_i - k_i)^2}{p_i}, \tag{3.12}$$

буде менший або дорівнювати табличному значенню цього критерію при достатньо великому значенні довірчої ймовірності.. Тут n – розмір вибірки, k_i – частоти на відповідних діапазонах; p_i – імовірності попадання випадкової величини в той же діапазон, по якому розраховані і відносні частоти, розраховані за формулою (4.13): d – загальна кількість діапазонів, на які розбита область існування випадкової величини.

Табличні значення критерію Пірсона $\chi^2(r,\ p)$ можна отримати, скориставшись функцією **ХИ2ОБР(довірча ймовірність;число степенів свободи)** або **CHIINV(довірча ймовірність;число степенів свободи)**

Інколи цю задачу вирішують через визначення рівня довірчої ймовірності. Тобто, за розрахованим значенням χ^2 та за числом степенів свободи знаходять, якій імовірності вони відповідають. А потім приймають рішення, чи можна довіряти отриманим результатам з такою ймовірністю. Для таких розрахунків існує функція **ХИ2РАСП(розраховане значення χ2;число степенів свободи)** або **CHIDIST(розраховане значення χ2;число степенів свободи)**

На рис. 3.2 наведено приклад розрахунку за критерієм Пірсона. Вибірка значень фактора, що досліджується, не наведена.

B18 =ХИ2ОБР(B17;B16)

	A	B	C	D	E	F
7	мін=	9	мах=	43		
8	k=	4	del=	8,5		
9	Діапазони		K	k	P	(k-P)^2 /P
10	мін	мах				
11	9	17,5	3	0,3	0,1866	0,0689
12	17,5	26	1	0,1	0,1391	0,011
13	26	34,5	1	0,1	0,1036	0,0001
14	34,5	43	5	0,5	0,0772	2,3144
15					Xi-кв.=	23,944
16	r=	2				
17	P=	0,95				
18	Xi таб=	0,10259				

Рис. 3.2. Приклад розрахунку

3.2. Дисперсійний аналіз факторів соціально-економічних систем

Завданням дисперсійного аналізу є вивчення впливу одного або декількох чинників на дану ознаку. Часто дослідник має у своєму розпорядженні не одну вибірку даних, а декілька. Наприклад, можна визначати зміну у часі валюти балансу підприємств роздрібної торгівлі, та металургійних комбінатів. При побудові математичної моделі потрібно вирішити для себе, чи можні ці вибірки поєднати в одну чи ні? Вирішенням цієї задачі займається декілька додаткових статистичних характеристик.

Коефіцієнт кореляції – параметр, який характеризує ступінь лінійного взаємозв'язку між двома вибірками, розраховується за формулою:

$$r_{xy} = \frac{\sum (x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \overline{x})^2 \cdot \sum (y_i - \overline{y})^2}} \qquad (3.13)$$

Коефіцієнт кореляції змінюється від –1 (строго обернена лінійна залежність) до 1 (строго пряма пропорційна залежність). При значенні 0 лінійної залежності між двома вибірками немає.

Незважаючи на те, що задовільного рівня коефіцієнта кореляції по усім видам інвестування не було отримано, ми не можемо казати про повну відсутність зв'язку між досліджуваними змінними. Тому виникає необхідність визначення значимості отриманих коефіцієнтів шляхом отримання границь надійного інтервалу, в який потрапляє окремо досліджуваний коефіцієнт.

Для значимих параметрів зв'язку ці границі визначають надійні інтервали з наперед заданою надійністю γ. Для цього використовують z-перетворення Фішера.

Перетворення виконується за формулою $$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}, \qquad (3.14)$$

де z – z-перетворення Фішера, r – коефіцієнт кореляції.

Надійний інтервал для z визначається як

$$z' - t_\gamma \sqrt{\frac{1}{n-1-3}} \le z \le z' + t_\gamma \sqrt{\frac{1}{n-1-3}}, \qquad (3.15)$$

де n – кількість спостережень.

В є функції, що автоматично розраховують кореляцію

CORREL(адреси клітинок першого масиву даних; адреси клітинок другого масиву даних)

Якщо потрібно дослідити взаємну кореляцію більше двох факторів, зручно використовувати програму Кореляція пакету аналізу ,

Критерій Стьюдента використовується, щоб визначити, наскільки вірогідно, що дві вибірки узяті з генеральних сукупностей, мають одне і те ж середнє.

Якщо ймовірність невелика (<0,55), можна вважати, що вибірки мають істотно відмінні середні, а отже, їх не можні поєднувати в одну для побудови математичної моделі.

Для реалізації цього закону розподілу існує функція TTEST

ТТЕСТ(Дані 1; Дані 2; Режим; Тип)

Тут: **Дані 1** перший масив даних; **Дані 2** другий масив даних; **Режим** = 1, то функція використовує односторонній розподіл, якщо **Режим** = 2, то двосторонній розподіл; **Тип** є типом t - тесту (для перевірки за критерієм Стьюдента). Тип 1 означає двосторонній. Тип 2 означає дві вибірки, рівну вірогідність. Тип 3 означає дві вибірки, нерівну вірогідність.

Приклад

Визначити відмінність дисперсій двох вибірок, представлених нижче

X_1	0,45	0,59	0,78	0,04	0,44	0,32	0,92
X_2	0,34	0,29	0,88	0,87	0,68	0,28	0,88

Скористаємося функцією FTECT Результат розрахунку показано на рис. 3.3. Імовірність 0,88 означає, що ці вибірки статистично взяті з однієї генеральної сукупності. Отже, їх можна поєднати в одну для побудови економіко-математичної моделі.

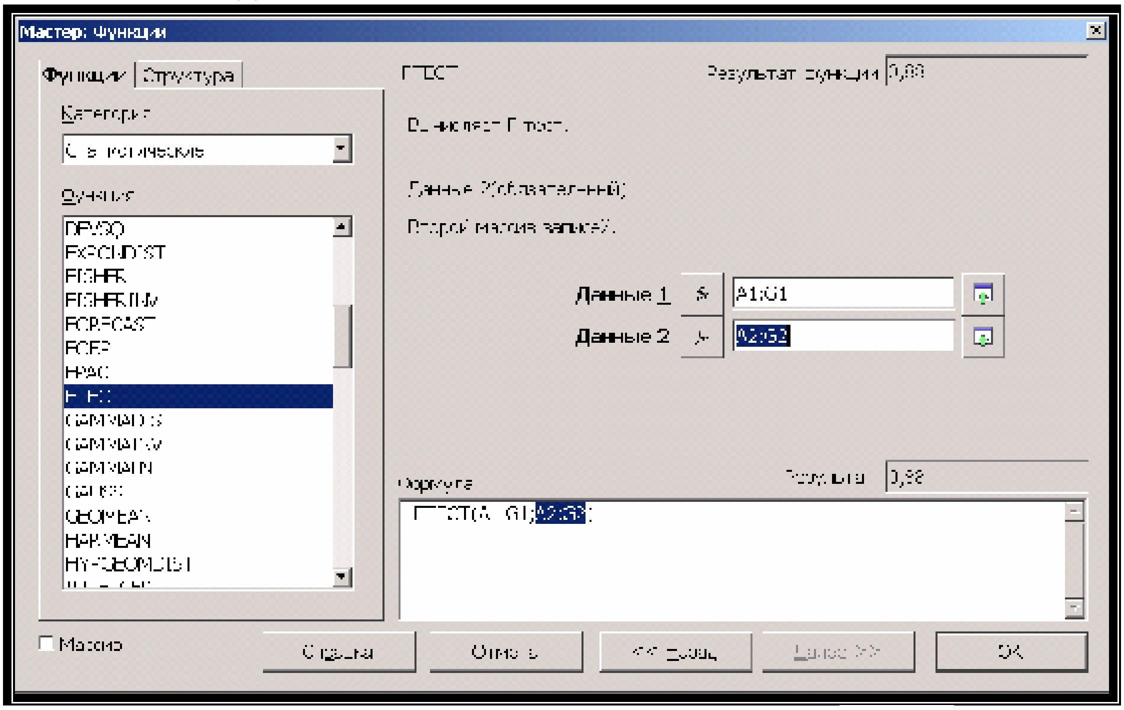


Рис. 3.3. Приклад роботи функції FTEST

F-тест (Фішера) визначає односторонню вірогідність того, що дисперсії аргументів массив1 і массив2 розрізняються неістотно. Ця функція використовується для того, щоб визначити, чи мають дві вибірки різні дисперсії. Наприклад, якщо дані результати тестування для приватних і суспільних шкіл, то можна визначити, чи мають ці школи різні рівні різнорідності учнів за наслідками тестування.

Якщо ймовірність буде невеликою (<0,55), це означає, що за дисперсією вибірки відрізняються істотно, а отже, при імітаційному моделюванні не можна використовувати дані з вибірок водночас.

Для реалізації цього тесту існує функція FTECT

FTECT(масив1;масив2)

Пояснимо критерій Фішера.

Нехай є N нормально розподілених генеральних сукупностей з рівними дисперсіями та, можливо, з різними математичними сподіваннями.

Із кожної сукупності робимо вибірку об'єму $\{n_i\}, i = 1, 2, .., N,$

тоді $\sum\limits_{i=1}^{n} n_i = n$ - об'єм усієї вибірки.

Позначимо j варіант випадкової величини X з i-тої сукупності x_{ij}. Тоді середня арифметична вибірки із i-тої сукупності буде $x_i = \frac{1}{n_i} \cdot \sum\limits_{j=1}^{n_i} x_{ij}$, а середня усієї вибірки буде $\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} x_i \cdot n_i$.

При рівні значущості α треба перевірити основну гіпотезу про рівність математичних сподівань сукупностей, що розглядаються

При рівності дисперсій статистична характеристика буде мати розподіл Фішера з N - 1 та n - N степенів свободи. Тому в якості статистичної характеристики для перевірки цієї гіпотези візьмемо функцію $F = \dfrac{\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2 n_i}{\frac{1}{n-N}\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \overline{x})^2}$, (3.16)

Критичну область у цьому випадку знаходять з урахуванням умови $P(F > f_a) = \alpha$, де $- f_a$ критичне значення розподілу Фішера.

Приклад. Є дані про вартість (в тис. гривень) проданих трьох видів виробів певним магазином в окремі дні тижня

вівторок	середа	четвер	п'ятниця	субота
10.2	10.8	10.7	13.0	12.0
11.5	9.8	11.5	13.2	11.5
12.0	12.1	12.0	11.5	11.8

Припускаючи нормальний закон розподілу одержаної суми кожного дня та рівність дисперсій, перевірити гіпотезу H_0: $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5$ при рівні значущості α = 0,05,

Розв'язання. Умови прикладу дозволяють застосувати до розв'язання задачі критерій дисперсійного аналізу.

У цьому випадку маємо: N = 5; n_i = 3, i = 1,2,..., 5; n = 15. Знаходимо

$$x_1 = 11.2,\ x_2 = 10.8,\ x_3 = 11.4,\ x_4 = 12.6,\ x_5 = 11.8,\ \overline{x} = 11.6$$

Зробимо обчислення сум

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i - \overline{x})^2 \cdot n_i = 0.48 + 1.92 + 0.12 + 3 + 0.12 = 5.64,$$

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3}(x_{ij} - \overline{x})^2 = 1.96 + 0.01 + 0.16 + 1 + 3.24 + 0.25 + 0.81 + 0.01 +$$

$$+0.16 + 1.96 + 2.56 + 0.01 + 0.15 + 0.01 + 0.04 = 12.34.$$

Тепер за формулою (3.16) знайдемо значення статистичної характеристики

$$F_{cn} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 5.64}{\frac{1}{10} \cdot 12.34} = 1.14$$

Із таблиці критичних значень розподілу Фішера зі степенями вільності N - 1 = 5-1 = 4 та n - N = 15-5 = 10 і рівнем значущості α = 0,05 знаходимо $F_{kp} = f_{0.05} = 3.48.$

Одержали, що $F_{cn} = 1.14 < F_{kp} = 3.48,$ тому гіпотеза H_0 може бути прийнята.

Загальні принципи порівняння вибірок наступний:

1. Розраховуємо кореляцію, t- тест та F- тест для кожної пари вибіркових значень.
2. Вибірки можна об'єднувати в одну якщо кореляцію позитивна, а тести дають значну ймовірність (>0.65).

3.3. Аналіз соціально економічних систем методом експертних висновків

У тих випадках, коли об'єктивній інформації виявляється не досить для визначення чисельних значень необхідного фактора при аналізі соціально економічної системи, треба використовувати суб'єктивні оцінки, засновані на накопиченому досвіді, знаннях, ідеях, думках і припущеннях фахівців, привернутих до вироблення суб'єктивної оцінки.

Отримання об'єктивних оцінок базується на наступних загальних положеннях:

1) ***аксіома незміщеності***, яка стверджує, що думка більшості є компетентною;

2) ***аксіома транзитивності***, яка стверджує, що суб'єктивні оцінки можуть бути переміщені.

З цього виходить, що мірою якості суб'єктивних оцінок є їх розсіяння.

Для визначення взаємозв'язку між ознаками, передусім на основі бальних оцінок, застосовуються методи рангової кореляції. Рангами називають числа натурального ряду, які згідно зі значеннями ознаки надаються елементам сукупності і певним чином упорядковують її. Ранжування проводиться за кожною ознакою окремо: перший ранг надається найменшому значенню ознаки, останній – найбільшому або навпаки. Кількість рангів дорівнює обсягу сукупності. З огляду на те, що рангова кореляція не потребує додержання будь-яких математичних передумов щодо розподілу ознак, зокрема вимоги нормальності розподілу, рангові оцінки щільності зв'язку доцільно використовувати для сукупностей невеликого обсягу, якими найчастіше і є економічні дані.

Для визначення міри зв'язку використовують коефіцієнт рангової кореляції, запропонований К. Спірменом $$\rho = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n^3 - n} , \qquad (3.17)$$

де n – число одиниць сукупності, d_i - різниця рангів за ознакою x та за ознакою y для i-ої одиниці сукупності.

Цей коефіцієнт має такі саме властивості, як і лінійний коефіцієнт кореляції: змінюється в межах від - 1 до + 1, водночас оцінює щільність зв'язку та вказує на його напрям.

Але при наявності співпадаючих значень рангів вищенаведена формула не працює. Тому замість неї використовують коефіцієнт кореляції рангів Кенделла, який порівнює ранги для всіх пар одиниць сукупності, що заздалегідь підпорядковані по значенню познаки x.

$$W = \frac{12\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{d}\rho_{ij} - \frac{d(m+1)}{2})^2}{d^2(m^3 - m)}, \qquad (3.18)$$

де d – кількість експертів, m – кількість критеріїв, ρ_{ij} – ранги.

Його використання доцільне, оскільки при розрахунку цього коефіцієнта не використовуються самі значення рангів, а тільки встановлюється більше або менше ранг даної одиниці, тобто немає необхідності при тотожності значень ознаки розраховувати середній ранг.

Але незважаючи на всі переваги традиційних методів, основаних на формулах Спірмена і Кенделла, вони часто не дають змоги отримати потрібний результат при недостатній погодженості об’єктів по одному з вимірювань та малому обсязі сукупності вимірювань. Крім того, подані формули потребують обробки при тотожності рангів об’єктів.

Для рішення даної проблеми пропонується використовувати модифікований коефіцієнт конкордації

$$W = 1 - \sum_{i=1}^{n}\frac{|y_i - x_i|}{n(k_i - 1)}, \qquad (3.19)$$

де n – об’єм вибірки, k_i – кількість ознак по i-му елементу вибірки.

В разі, коли $\forall_i (k_i = n)$ вид (3.19) спрощується

$$W = 1 - \sum_{i=1}^{n}\frac{|y_i - x_i|}{n(n-1)}, \qquad (3.20)$$

Формула (3.19) є аналогом коефіцієнта Кенделла, але не має обмежень, що покладаються на неї. Наприклад, для знаходження кореляції між результатами, формула Кенделла потребує рангового перетворення з наступним усередненням показників для рівних рангів.

Модифікований коефіцієнт конкордації може працювати безпосередньо з вихідними даними. При цьому необхідно або зменшити все значення сукупності на величину мінімального значення, або привести (2.21) до виду

$$W = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}|y_i - x_i|}{n(k - m)}, \qquad (3.21)$$

де n - об’єм вибірки, k - максимально можливе значення ознаки, m - мінімально можливе значення ознаки.

Щоб можна було скористатися цими формулами, в є функція автоматично визначення рангів чисел у вибірці

RANK(Число;Адреси клітинок масиву;Тип)

Адреси клітинок масиву треба задавати як константи, тобто додавати до них символ $. Тип = 0, якщо ранжування виконується у зростаючому порядку і Тип = 1, – якщо в убуваючому.

Приклад. Сім експертів подали свої оцінки чисельного значення економічних факторів X_1 та X_2. Знайти міру узгодженості їх думок.

Чисельні значення експертних висновків наведено в таблиці. Там же подано ранжування у зростаючому порядку їх значень за допомогою функції RANK електронних таблиць Calc. На рис. 3.5 подано фрагмент цих розрахунків.

	№ експерта	1	2	3	4	5	6	7
Параметри	X_1	0,55	0,06	0,54	0,92	0,27	0,32	0,6
	X_2	0,78	0,77	0,98	0,14	0,93	0,29	0,78
Ранги	X_1	3	7	4	1	6	5	2
	X_2	3	5	1	7	2	6	4

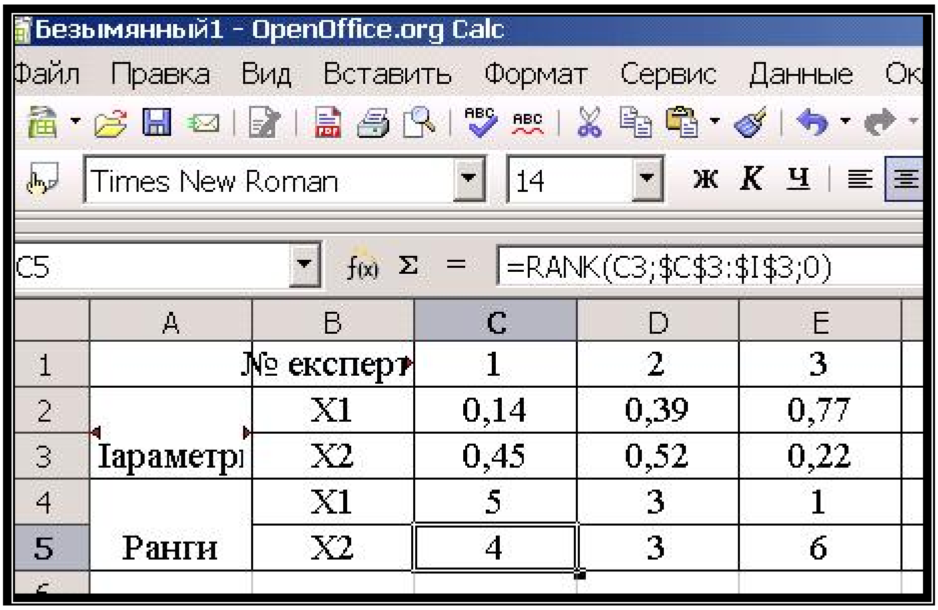


Рис. 3.4. Приклад визначення рангів експертних оцінок

Для вирішення подальшої задачі, скористаємося коефіцієнтом рангової кореляції Спірмена (3.17). Число одиниць сукупності n = 7. Суму різниць рангів в квадраті знайдемо, використавши функцію

SUMXMY2(масив1; масив2).

Вона дорівнює 67. Тоді, коефіцієнт Спірмена дорівнює -0,2.

Отже, міра узгодженості експертних оцінок двох економічних параметрів показує нам, що думки експертів не узгоджені, а отже, їх не можна використовувати для побудови економіко-математичної моделі.

3.4. Аналіз запізнювання впливу вхідних факторів на вихідні

Деяким соціально-економічним системам властива інерція, що виявляється в тому, що зміна їх стану супроводжується перехідним процесом. Тобто, при зміні вхідного фактора, вихідні, що пов’язані з ним, не одразу приймають нове значення. Для цього потрібен деякий час.

Якісні особливості властивостей економічного об'єкту, які можуть трактуватися як інерційні, і недолік апріорної інформації про їх характеристики приводять до необхідності їх статистичної оцінки шляхом належної обробки інформації про спостереження траєкторії (зміні у часі) входів і виходів об'єкту.

Спостережуваним ефектом «інерції» є запізнювання виходу або стану елементу щодо моменту зміни вхідної дії. Так, «запізнюється» випуск готової продукції щодо моменту реалізації витрат, приріст потужностей щодо моменту виділення для цієї мети капітальних вкладень, зміна попиту, обумовлена зміною ціни на товари і послуги, і так далі Звичайно, в кожному з приведених прикладів природа запізнювання різна: у першому воно викликане тривалістю виробничого циклу; у другому – складається з ряду етапів – проектування, створення і монтаж устаткування, освоєння потужностей, що вводяться; у третьому – породжується інерцією споживачів.

Проте у всіх вказаних і інших випадках запізнювання в елементах і зв'язках економічної системи істотно впливає на її функціонування і розвиток, і тому його облік має важливе теоретичне і практичне значення. Розглянемо деякі лінійні моделі запізнювання, якими зазвичай користуються при аналізі функціонування економічних об'єктів.

У таких системах вихідна змінна може бути представлена у вигляді суперпозиції її «ідеального» значення (відповідного не інерційного елементу) і складової, породжуваної інерцією об'єкту. Тому при аналізі запізнювання і його впливу на поведінку елементу зручно розрізняти потенційні значення запізнювання вихідний змінної. Перше – $y^0(t) = c_1 x(t)$ для «ідеального» виходу, друге – $y(t)$ для виходу із запізнюванням. На рис. 3.5 зображена схема системи, що інтерпретує взаємодію обох виходів. Тут F^0 – «ідеальний» перетворювач; його вихідний полюс ототожнений зі вхідним полюсом інерційної ланки I, що моделює запізнювання. Внутрішній стан цієї ланки визначається $g_в(t)$ накопиченим у нім запасом речовини, енергії або інформації.

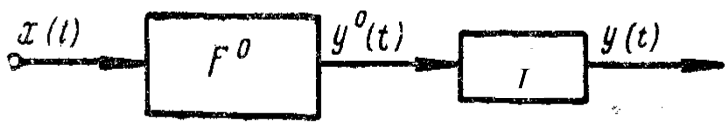


Рис. 3.5. Ідеальна схема системи з запізнюванням

Для характеристики запізнювання важливо дві оцінки його впливу на поведінку об'єкту. Перша характеристика – *тривалість запізнювання (часовий лаг)* $\tilde{T}$; вона достатня для опису сталого режиму функціонування об'єкту, при якому y, y° і $g_в$ зберігають постійні значення, а $y = y^\circ$ (із заданою точністю). Часовий лаг може бути регламентований (скажімо, тривалість транспортування продукту, час передачі інформаційного повідомлення, термін будівництва) або визначений шляхом спостережень. Очевидно, що в сталому режимі

$$g_в = y^0\tilde{T}. \qquad (3.22)$$

На рис. 3.6 представлено два типи графіків запізнювання, які найчастіше зустрічаються в соціально-економічних системах при зміні значення на вході.

Перший тип (*а*) визначає криву, яка поступово підходить від значення y до y° за час T. Час T, після закінчення якого різниця $y(t) - y^0$ перевершує деяку

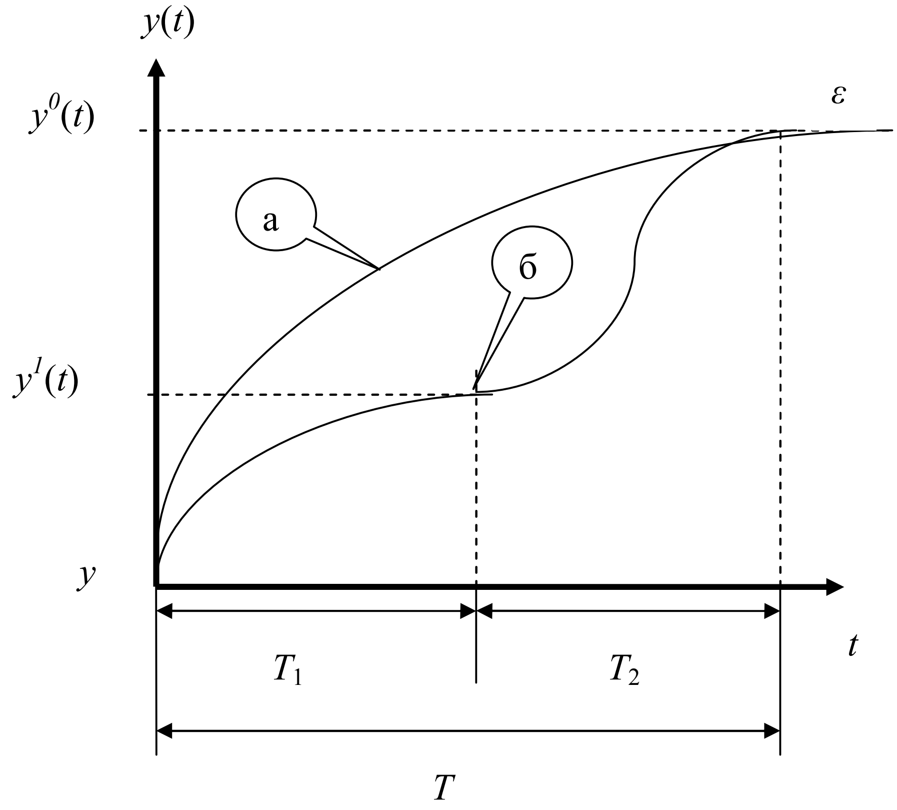


Рис. 3.6. Типи інерційних процесів у соціально-економічних системах

задану величини ε, визначається співвідношенням $T = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{y^0}{\varepsilon}$

З цього співвідношення можна визначити величину $\boldsymbol{\varepsilon}$. Оскільки

$$\lambda = \frac{1}{\tilde{T}}, \qquad (3.23)$$

то при $t = \tilde{T}$ відхилення

$$\varepsilon = \frac{y^0}{e} \simeq 0{,}379 y^0 \qquad (3.24)$$

Для графіку другого типу (*б*) характерним є наявність двох вигинів кривої зміни в часі вихідного фактора. Дослідник має розділити ці вигини на дві ділянки з відповідним часом T_1 та T_2. Кожна з цих ділянок дозволяє визначити власні параметри констант

$$\lambda_1 = \frac{1}{T_1};\ \lambda_2 = \frac{1}{T_2}. \qquad (3.25)$$

Відповідно маємо два відхилення $\varepsilon_1 \approx 0.379 y_1;\ \varepsilon_2 \approx 0.379(y_0 - y_1).$ (3.26)

3.5. Спектральний аналіз

Цей вид аналізу застосовується у випадку дослідження періодичних процесів в соціально-економічних системах. Тобто тоді, коли припускається, що вони можуть бути описані періодичними функціями. Періодичні функції визначаються так. Для кожної з них існує число $T > 0$ таке, що при всіх x, що належать області визначення функції f, значення $x + T$ і $x - T$ також належать цій області і виконується рівність $f(x+T) = f(x)$.

Такі функції називаються Т - періодичними.

Для визначення періодичності серед отриманих даних використовується спектральний аналіз. Спектр виходить в результаті розкладання початкової функції, залежної від часу (часовий ряд) або просторових координат (наприклад, зображення) в базис деякої періодичної функції. Найчастіше для спектральної обробки використовується спектр Фурье, що отримується шляхом розкладання початкової функції в базис синуса (розкладання Фурье, перетворення Фурье).

Основний сенс перетворення Фурье в тому, що початкова неперіодична функція довільної форми, яку неможливо описати аналітично і в загальному випадку важка для обробки і аналізу, представляється у вигляді сукупності синусів або косинусів з різною частотою і амплітудою. Іншими словами, складна функція представляється у вигляді сукупності простіших (розкладання). Кожна синусоїда (або косинусоїда) з певною частотою і амплітудою, отримана в результаті розкладання Фурье, називається спектральною складовою або гармонікою. Спектральні складові утворюють спектр Фурье.

Візуально спектр Фурье представляється у вигляді графіка, на якому по горизонтальній осі відкладається кругова частота, а по вертикалі – амплітуда спектральних складових, що зазвичай позначається латинською буквою *A*. Тоді кожна спектральна складова може бути представлена у вигляді відліку, положення якого на горизонтальній осі відповідає частоті складової, а висота – її амплітуді. Гармоніка з нульовою частотою називається постійною складовою (у тимчасовому уявленні це пряма лінія).

Навіть простій візуальний аналіз спектру може багато сказати про характер функції, на основі якої він був отриманий.

Довжина хвилі функцій синуса або косинуса, як правило, виражається числом циклів (періодів) в одиницю часу (Частота), часто позначається як η; у деяких підручниках також використовують *f*). Наприклад, часовий ряд, що складається з кількості листів, що обробляються поштою, може мати 12 циклів в році: першого числа кожного місяця відправляється велика кількість кореспонденції (багато рахунків приходить саме першого числа кожного місяця); потім, до середини місяця, кількість кореспонденції зменшується; і потім знов зростає до кінця місяця. Тому кожен місяць коливання в кількості кореспонденції, що обробляється поштовим відділенням, проходитимуть повний цикл. Таким чином, якщо одиниця аналізу - один рік, то буде дорівнювати 12 (оскільки є 12 циклів в році). Звичайно, можуть бути і інші цикли з різними частотами. Наприклад, річні цикли ($v = 1$) і, можливо, тижневі цикли ($v = 52$ тижні в рік).

Модель лінійної множинної регресії може бути записана як

$$x_t = a_0 + \sum (a_k \cdot \cos(\lambda_k \cdot t) + b_k \cdot \sin(\lambda_k \cdot t)), \tag{3.27}$$

(для λ_k до k= 1 до q)

Наступне загальне поняття класичного гармонійного аналізу в цьому рівнянні λ_k – (лямбда) – це кругова частота, виражена в радіанах в одиницю часу, тобто $\lambda = 2 \cdot \pi \cdot \eta_k$, де π – константа (3.1416) і $\eta_k = \frac{k}{q}$.

Тут важливо усвідомити, що обчислювальне завдання підгонки функцій синусів і косинусів різних довжин до даних може бути вирішена за допомогою множинної лінійної регресії. Відмітимо, що коефіцієнти при косинусах і коефіцієнти при синусах – це коефіцієнти регресії, що показують ступінь, з яким відповідні функції корелюють з даними (відмітимо, що самі синуси і косинуси на різних частотах не корельовано або, іншою мовою, ортогональні. Таким чином, ми маємо справу з окремим випадком розкладання по ортогональних поліномах). Всього існує q різних синусів і косинусів; інтуїтивно ясно, що число функцій синусів і косинусів не може бути більше числа даних в ряду. Не вдаючись до подробиць, відзначимо, якщо N – кількість даних, то буде $N/2+1$ функцій косинусів і $N/2-1$ функцій синусів. Іншими словами, різних синусоїдальних хвиль буде стільки ж, скільки даних, і ви зможете повністю відтворити ряд по основних функціях. (Відмітимо, якщо кількість даних у ряді непарно, то останнє спостереження зазвичай опускається. Для визначення синусоїдальної функції потрібно мати, принаймні, дві точки: високого і низького піку).

У результаті, спектральний аналіз визначає найбільш характерні частоти чиї періоди характеризують конкретну соціально-економічну систему.

Приклад. Файл містить частину відомих чисел сонячних плям з 1749 року по 1924 рік. Нижче показаний список перших декілька даних з файлу з прикладами розрахунку із застосуванням пакету прикладних програм STATISTICA (рис. 3.7).

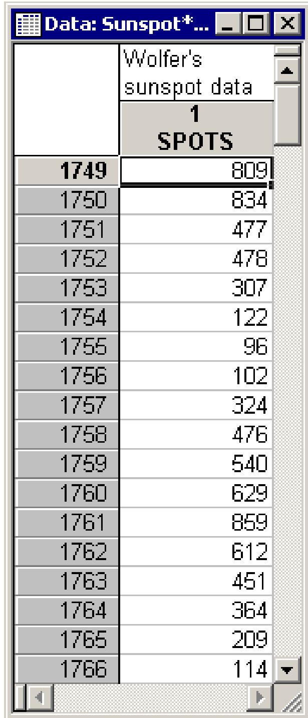


Рис.3.7. Файл даних.

Припускається, що кількість сонячних плям впливає на погоду на землі, а також на сільське господарство, на телекомунікації і так далі Застосовуючи цей аналіз, можна спробувати з'ясувати, чи дійсно активність сонячних плям має циклічну природу.

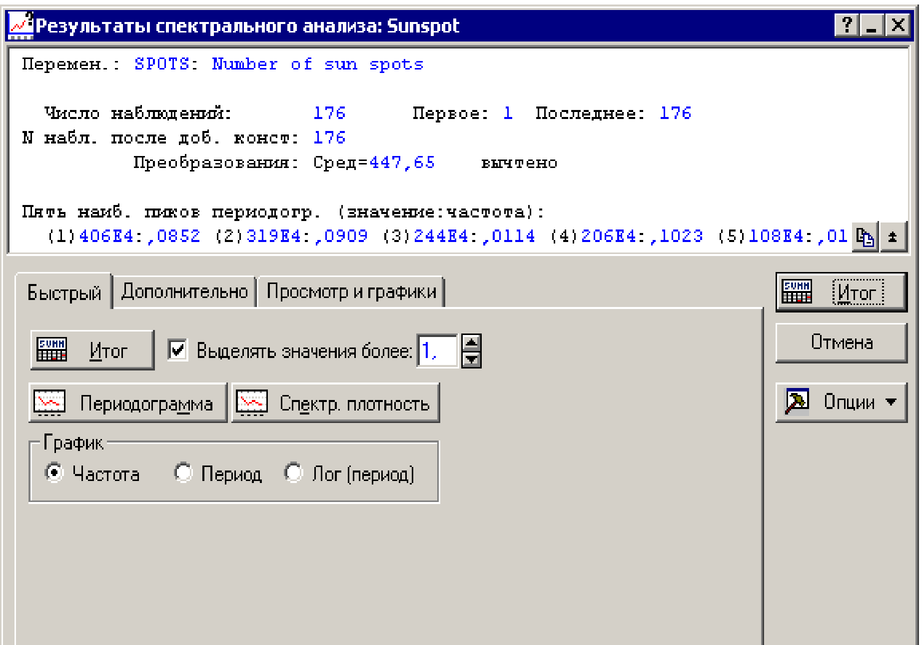


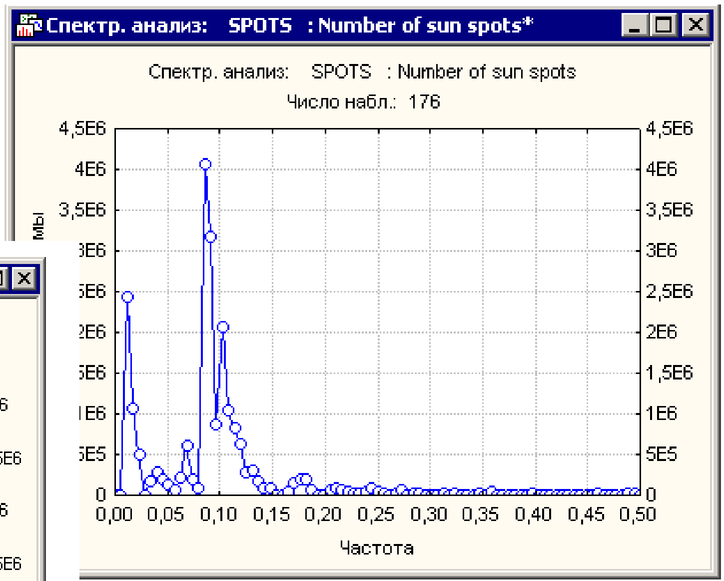
Рис. 3.8. Результати спектрального аналізу

Розділ інформації у верхній частині діалогового вікна показує деякі підсумкові статистики ряду (рис. 3.8). Він також показує п'ять найбільших піків періодограми (по частоті). Найбільших три піки на частотах 0.0852, 0.0909 і 0.0114. Ця інформація часто корисна при аналізі дуже великих рядів (наприклад, з більш ніж 100,000 спостереженнями), які непросто надати на одному графіку.

На графіку періодограми видно два чіткі піки (рис. 3.9-10). Максимальний – на частоті приблизно 0.9. Нижче показана частина таблиці результатів з найбільшим піком, встановленим за періодограмою.

Таким чином, Частота 0.0909 відповідає значенню 11 Періоду (число одиниць часу, потрібних на повний цикл). Оскільки дані сонячних плям в

Sunspot.sta є річними спостереженнями, можна укласти, що існує яскраво виражений 11-річний (можливо трохи довше чим 11-річний) цикл в активно-



іс. 3.9. Графік періодограми по частоті

сті сонячних плям.

Спектральна щільність. Зазвичай для обчислення оцінок спектральної щільності періодограму згладжують, щоб прибрати випадкові коливання.

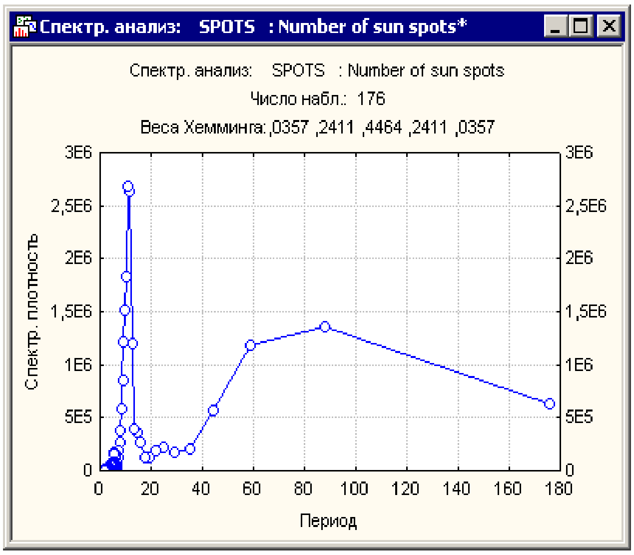


Рис. 3.10. Графік значень періодограми по періоду

Два піки стали тепер навіть виразніше. Подивимося на значення періодограми по періоду.

Знову видно, що існує яскраво виражений 11-річний цикл в активності сонячних плям; більш того, є ознаки існування тривалішого приблизно 80-ти - 90-річного циклу.

3.6. Кластерний аналіз

При дослідженні різних соціально-економічних об’єктів, при отриманні вибірок про числові значення виникає питання про можливість угрупування цих даних. Така проблема вирішується методами автоматичної класифікації, серед яких найбільш зручним є кластерний аналіз.

3.6.1. Місце кластерного аналізу серед інших методів автоматичної класифікації

Розглянемо інші методи класифікації, щоб зрозуміти межу застосування кластерного аналізу.

РОЗПІЗНАВАННЯ ОБРАЗІВ – процес, при якому на підставі численних характеристик (ознак) якогось об'єкта визначається одна або кілька нових, найістотніших його характеристик, зокрема, його приналежність до певного класу об'єктів. Розв'язати задачу розпізнавання образів – значить за непрямими даними знайти правила, за якими кожному наборові значень ознак якогось об'єкта ставиться у відповідність одне рішення із заданої множини можливих рішень, що визначають істотні характеристики цього об'єкта.

ДИСКРИМІНАНТНИЙ АНАЛІЗ – використовується для ухвалення рішення про те, які перемінні розрізняють (дискримінують) дві або більш виникаючі сукупності (групи). Наприклад, економіст може записати різні характеристики подібних типів (груп) підприємств, щоб потім провести аналіз дискримінантної функції, що щонайкраще розділяє типи або групи.

Як видно з викладеного вище, кластерний аналіз корисний у випадках, коли практично невідомо наперед про можливу структуру класів об'єктів. А саме такою, частіше всього, є економіка, з її складністю зв'язків, розмаїтістю видів об'єктів, невизначеністю наслідків від керуючого впливу. Тому кластерний аналіз є найбільш прийнятним при дослідженні економічних систем.

3.6.2. Вимірювання відстаней між об'єктами

Кожен економічний об'єкт може бути представлений одним і тим же набором факторів або параметрів. Наприклад, торгове підприємство може бути охарактеризоване такими факторами як виторг, обсяг реалізації, валюта балансу, кількість працівників, кількість торгових точок тощо. Позначимо кожен з цих факторів чи параметрів економічного об'єкта як X_i. Тут i – номер фактора, який характеризує об'єкт. Тобто, кожен об'єкт може бути представлений вектором

$$X = (X_1, X_2, ..., X_{Nf}) \tag{3.28}$$

де N_f – кількість факторів. Цей вектор являє собою точку в гіперпросторі, який має розмірність N_f. Наприклад, якщо три об'єкти характеризуються двома факторами які мають значення відповідно, (1;2), (2;3) та (3;1) то їх можна представити як три точки на плоскому графіку (рис. 1.1).

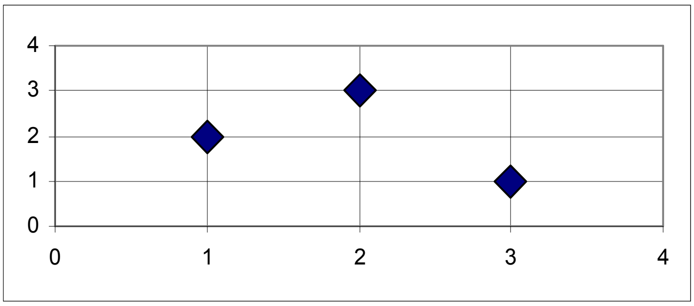


Рис. 3.11. Представлення трьох об'єктів, як точок на площині

І хоча фактори для всіх об'єктів, що розглядаються, є однаковими, їх числові значення будуть відрізнятися. Якщо охарактеризувати інший об'єкт аналогічним (1.1) вектором, який позначимо як Y, можна розрахувати міру близькості цих об'єктів.

Міра близькості або відстань між об'єктами розраховується за допомогою різних формул, які ще називаються метриками відстаней.

Відстань між двома об'єктами позначається як $d(x_i, y_i)$ – це ненегативна функція близькості задається при наступних умовах:

1) Вона завжди більше або дорівнює нулю.
2) Відстань від точки X до точки Y така сама, як і від Y до X.
3) Якщо числові значення факторів двох об'єктів однакові, відстань між ними дорівнює нулю.
4) Нехай існує третя точка U. Тоді сума відстаней між точками XU та YU завжди більша ніж відстань поміж точками XY.

Або у вигляді формули це записується так:

$$\left.\begin{bmatrix} d(x_i, y_i) \geq 0 \\ d(x_i, y_i) = d(y_i, x_i) \\ d(x_i, y_i) = 0 \Leftrightarrow x_i = y_i \\ d(x_i, y_i) \leq d(x_i, u_i) + d(u_i, y_i) \end{bmatrix}\right\} \forall\{i\} \in N \tag{3.29}$$

Найбільш розповсюдженою функцією відстані між двома об'єктами (X; Y) – є відстань у **метриці Евкліда**

$$d_E(x_i; y_i) = \sqrt{\sum_{i=1}^{Nf} (x_i - y_i)^2} \tag{3.30}$$

Метрика Евкліда дозволяє не враховувати знакові розходження, пропорційно збільшує відстань між об'єктами у випадку різних абсолютних значень показників. У результаті збільшується розмірність кластерного поля, об'єкти штучно віддаляються друг від друга, у результаті чого границі між кластерами стають більш чіткими і точними.

Другий по значимості функцією відстані прийнято вважати **міру несхожості Хемінга**

$$d_{XEM}(x_i; y_i) = \sum_{i=1}^{Nf} (x_i - y_i) \tag{3.31}$$

Метрика Хемінга може використовуватися в тих випадках, коли знакові розходження характеристик об'єктів мають принципове значення. За рахунок нівелювання знакових розходжень показників об'єкти виявляються сконцентрованими до області ядра кластера, але при цьому утрачаються важливі знакові характеристики розходжень.

Несуттєво від метрики Евкліда відрізняється і функція відстані в метриці ***L*-норма** (d_L), яка інколи ще називається відстанню міських кварталів або манхеттенською відстанню

$$d_L(x_i; y_i) = \sum_{i=1}^{Nf} |x_i - y_i| \tag{3.32}$$

Різниця у відстанях, обчислених за метриками у просторі Евкліда і *L*-норми, залежить від абсолютних числових значень і кількості розглянутих показників. У *L* - норми компактність вище, у середньому, на 3...10 відсотків, якщо $(x_i, y_i) \in [1;100]$, а при інтервалі $[0;1]$ компактність менше, у тих же пропорціях. Але з урахуванням визначеної невірогідності вихідних показників подібна різниця може бути визнана несуттєвою.

У деяких умовах класифікації, коли компактність кластерів занадто велика і розділити їх на підмножини досить складно, застосовують метрику «норма - верхня границя» або **метрика Чєбишева**

$$d_{SUP}(x_i; y_i) = SUP|x_i - y_i| \tag{3.33}$$

Цей запис означає, що з усіх різниць значень факторів, взятих по модулю, потрібно вибрати одну – найбільшу. І саме вона буде характеристикою відстані між об'єктами. Використання цієї міри відстані може неправомірно змінити картину класифікації через зневагу усіма факторами крім одного. Тут необхідно теоретичне обґрунтування коректності обраної міри $(d_{\sup})$.

Узагалі, дослідник може використовувати безліч функцій відстані, запропонованих у різних роботах по кластерному аналізу, або власних. Відзначимо ще трохи функцій відстані, що згадуються часто.

Степенева відстань. Іноді бажають прогресивно збільшити або зменшити вагу, що відноситься до розмірності, для якої відповідні об'єкти сильно відрізняються. Це може бути досягнуто з використанням *степеневої відстані*:

$$d_S(x_i;y_i)=\left(\sum_{i=1}^{Nf}\left|x_i-y_i\right|^p\right)^{\frac{1}{r}} \tag{3.34}$$

де r і p - параметри, визначувані користувачем. Декілька прикладів обчислень можуть показати, як "працює" ця метрика. Параметр p відповідальний за поступове зважування різниць по окремих координатах, параметр r відповідальний за прогресивне зважування великих відстаней між об'єктами. Якщо обидва параметри - r і p, рівні двом, то ця відстань співпадає з відстанню Евкліда.

Функція **відстані Джеффріса-Матусіти**

$$d_M(x_i;y_i)=\sqrt{\sum_{i=1}^{Nf}(\sqrt{x_i}-\sqrt{y_i})^2} \tag{3.35}$$

Функція Махаланобіса. Ця функція узагальнює можливі варіанти використання метрики Евкліда. Вона задана в матричній формі. Перетворення T (транспонування матриці) кореляційної матриці інваріантно-невиродженим лінійним перетворенням $D^2=(X_i,X_j)=(X_i-X_j)^T W^{-1}(X_i-X_j)$, (3.36)

де $\overline{X}=\sum_{i=1}^{n_1} x_i/n_1$, $\overline{Y}=\sum_{i=1}^{n_2} y_i/n_2$ – статистичні відстані між кластерами. W^{-1} – матриця, зворотна матриці розсіяння $W=\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}(\overline{X}-\overline{Y})(\overline{X}-\overline{Y})^T$ (3.37)

Приклад. Побудувати матрицю відстаней для 4-х об’єктів, представлених двома факторами у наведеній нижче таблиці, за метрикою Махаланобіса.

№ об’єкта	X_1	X_2
1	1	2
2	1	3
3	2	2
4	3	1

Рішення цієї задачі будемо виконувати в пакеті MATLAB. Задамо вхідні дані: X = [1 2; 1 3; 2 2; 3 1]

Для розрахунку відстані використовуємо функцію *Y=pdist*(*X*,'*metric*') – де *X* – вектор вхідних даних, '*metric*' – вид функції відстані (можливі значення '*Euclid*' – метрика Евкліда, '*Mahal*' – метрика Махаланобіса, '*CityBlock*'– манхетенська відстань). Для розрахунку відстані за метрикою Махаланобіса скористаємося *Y=pdist*(*X*,'*mahal*'), результати роботи функції наведені в наступній таблиці, де в заголовках рядку і стовпця стоять номери об’єктів.

	1	2	3	4
1	0	2.35	2.00	2.35
2	2.35	0	1.23	2.45
3	2.00	1.23	0	1.23
4	2.35	2.45	1.23	0

3.6.3. Кластеризація повним перебором об'єктів

Методично цей спосіб кластеризації найбільш простий і надійний, але досить трудомісткий. Вона виконується в такому порядку.

1. Складемо вихідну матрицю спостережень над об'єктами.

2. Одержимо матрицю значень відстаней від довільно обраного об'єкта (його числової характеристики).

3. Введемо поняття приналежності i-го об’єкта до k-го кластера. Це буде матриця Q розмірності N_OxN_O, де N_O – кількість об’єктів, які розглядаються. В ній по стовпцям розташовані номера об’єктів, а по рядках – номера кластерів. Припускається, що кількість кластерів буде дорівнювати кількості об’єктів. Елементи цієї матриці представляють собою бінарні числа, тобто такі, які можуть приймати значення тільки 0 або 1.

4. Введемо цільову функцію, що відповідає обраному критерію внутрішньо групової однорідності об'єктів

$$Z = \sum_{i=1}^{N_0}\sum_{j=1}^{N_0} q_{ij} d_{ij} \to \max \tag{3.38}$$

де q_{ij} – елемент матриці Q, d_{ij} – метрика відстані поміж об’єктами ($1 \le i,j \le N_O$).

5. Додамо до цільової функції обмеження

$$\sum_{i=1}^{N_0} q_{ij} \le N_0 , \tag{3.39}$$

$$\sum_{j=1}^{N_0} q_{ij} = 1 \tag{3.40}$$

Перше обмеження означає, що сума елементів q_{ij} по рядку не повинна перевищувати числа об’єктів, друге – що один і той же об’єкт не може бути включений до двох чи більше кластерів.

6. Останнє обмеження показує, що число об’єктів, включених до різних кластерів має дорівнювати їх загальній кількості

$$\sum_{i=1}^{N_0}\sum_{j=1}^{N_0} q_{ij} = N_0 \tag{3.41}$$

Ознакою того, скільки об’єктів включено до кластера буде значення суми (2.3). Змінними параметрами задачі оптимізації будуть елементи матриці Q.

Приклад. Для матриці відстаней, розрахованої у прикладі з п.3.6.2, побудувати кластери методом повного перебору.

Перенесемо цю матрицю до . Там же утворимо чисту матрицю, теж розміром 5х5, в якій будуть знаходитися елементи матриці Q. При цьому ми припускаємо, що номери стовпців у ній відповідають номерам об’єктів, а номери рядків – номерам кластерів. У матриці Q знайдемо суму по рядкам, що буде відповідати лівій частині обмеження (3.39), та по стовпцях – лівій частині обмеження (3.40). Далі знайдемо загальну суму елементів матриці Q згідно з (3.41). Сума знаходиться за допомогою функції *SUM*(*II*:JJ), де *II* – адреса першої клітинки, яка містить масив чисел, а *JJ* – адреса останньої клітинки. Тепер сформуємо цільову функцію виду (3,38). Для цього скористаємося функцією *SUMPRODUCT*(*II:JJ;NN:MM*), де *II:JJ* – адреса масиву відстаней, а *NN:MM* – адреса масиву матриці Q. Спочатку всі суми дадуть нуль, оскільки всі елементи матриці Q дорівнюють нулю. Застосувавши функцію Solver , інтерфейс якої представлено на рис. 3.12-3.13, ми позначаємо

	1	2	3	4	5
1	0	0,89	0,41	0,74	0,46
2	0,89	0	0,86	0,87	0,61
3	0,41	0,86	0	0,96	0,66
4	0,74	0,87	0,96	0	0,62
5	0,46	0,61	0,66	0,62	0

елементи матриці Q, як змінні параметри, що мають бінарний характер, спрямовуємо функціонал до мінімуму, додаємо обмеження і отримуємо наступне оптимальне рішення, для якого функціонал дорівнює 4,36.

		Об'єкти					Сума по кластерам
		1	2	3	4	5	
Кластери	1	0	1	0	0	0	1
	2	1	0	0	0	0	1
	3	0	0	0	1	1	2
	4	0	0	1	0	0	1
	5	0	0	0	0	0	0
Сума по стовпцям		1	1	1	1	1	5

Аналіз результатів показує, що у перший кластер попав 2-й об’єкт, у другий кластер – 1-й, у третій кластер – 4-й та 5-й, у четвертий кластер – 3-й, у п’ятий – не включено жодного об’єкта.

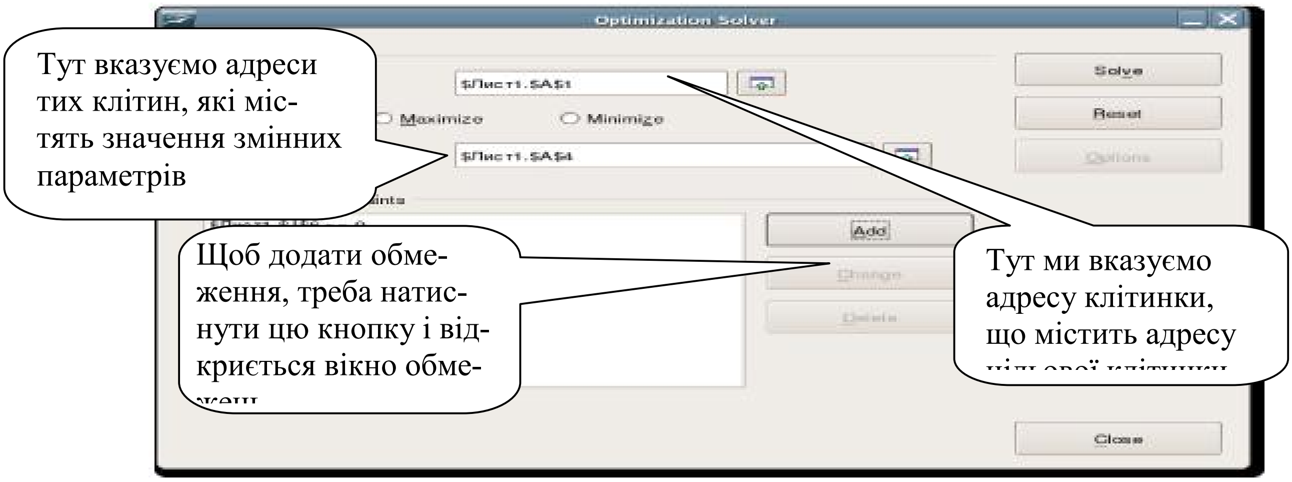


Рис. 3.12. Головне вікно функції Solver

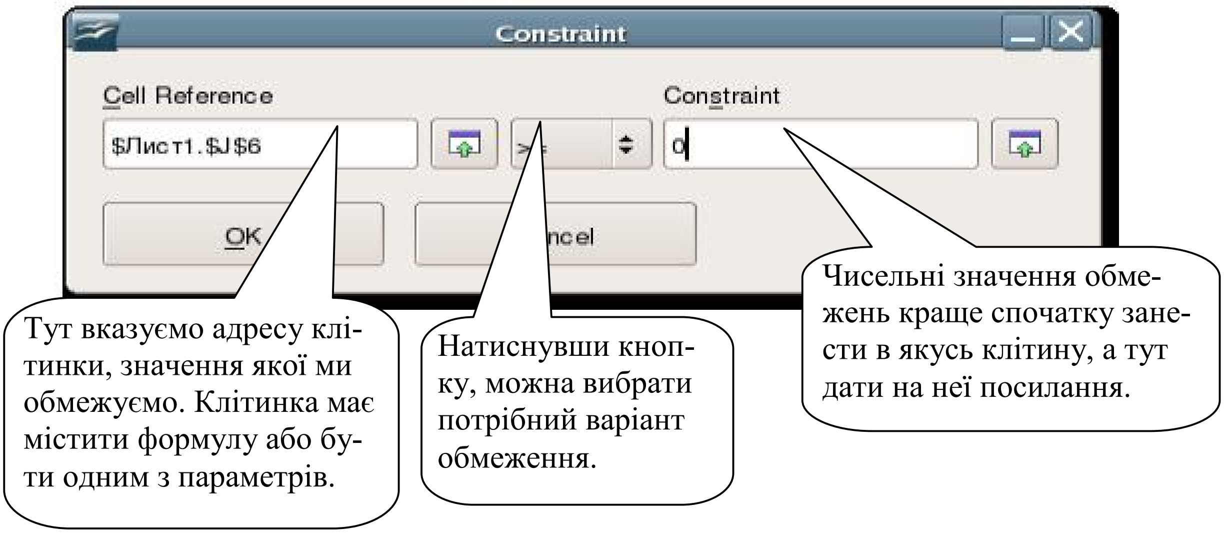


Рис. 3.13. Вікно введення обмежень функції Solver

3.7. Індивідуальні завдання №4. Статистичні розрахунки

Завдання: Вивчити методи розрахунків статистичних параметрів та міри узгодженості експертних оцінок.

Порядок виконання: для визначення свого варіанту студент використовує номер за списком навчальної групи *№г* і обирає дані з табл.. 3.2

Методичні вказівки: Сім експертів подали свої думки щодо п'яти економічних параметрів. Визначити: 1) статистичні характеристики (середнє, стандарт) цих оцінок; 2) можливість поєднати ці вибірки в одну та міру узгодженості за модифікованим коефіцієнтом конкордації (через ранги та абсолютні значення).

Рекомендація: перед розрахунком проведіть нормування факторів X_i.

Таблиця 3.2.

Варіанти завдань

№ п/п	№ експерта	1	2	3	4	5	6	7
1	X_1	0,29	340	2710	304,92	8368,7	4,98953	4,43939
	X_2	0,73	370	2770	279,51	8483,3	7,67620	3,10606
	X_3	0,69	470	2780	415,03	4098,3	5,47801	1,90909
	X_4	0,54	290	1280	145,68	4728,9	4,74529	1,86363
	X_5	0,64	340	1460	272,73	5674,6	5,61758	1,84848
2	X_1	0,82	430	2590	164,31	5416,7	4,50104	4,46969
	X_2	0,29	270	2870	492,95	3525,1	10,8513	2,98484
	X_3	0,52	860	1920	528,52	4069,7	9,24633	3,19697
	X_4	0,31	380	2830	135,52	4470,9	8,51360	4,33333
	X_5	0,54	790	2770	133,82	3926,4	4,67550	4,65151
3	X_1	0,49	750	3100	247,32	5560,0	8,65317	3,62121
	X_2	0,49	380	1850	152,46	5760,6	4,04745	1,62121
	X_3	0,38	290	840	138,90	4958,1	10,5722	1,34848
	X_4	0,57	860	2030	218,52	8769,9	10,9909	3,28787
	X_5	0,26	620	1450	203,28	8827,2	9,76971	2,43939
4	X_1	0,26	390	2420	526,83	2636,7	3,24494	4,09090
	X_2	0,29	760	1170	164,31	5846,6	8,09490	4,40909
	X_3	0,75	640	1890	531,91	5216,1	10,1535	1,68181
	X_4	0,54	860	2880	177,87	5846,6	3,21004	4,07575
	X_5	0,52	360	2730	238,85	5531,3	3,66364	4,65151
5	X_1	0,46	460	2300	442,13	4528,2	6,38520	3,83333
	X_2	0,5	470	1560	282,89	3238,5	3,83810	3,09090
	X_3	0,34	330	2070	430,27	7050,3	3,03559	2,39393
	X_4	0,76	400	850	509,89	6706,4	8,19958	3,10606
	X_5	0,76	890	1140	164,31	5674,6	5,58269	3,54545
6	X_1	0,41	510	2140	218,52	8941,9	10,2233	3,31818
	X_2	0,33	400	1270	226,99	5359,4	5,26866	4,45454
	X_3	0,74	630	2670	440,44	8769,9	4,67550	2,15151
	X_4	0,57	490	810	159,23	5703,3	3,38450	2,92424

№ п/п	№ експерта	1	2	3	4	5	6	7
	X_5	0,67	460	3060	181,25	4155,7	4,53593	1,98484
7	X_1	0,42	580	1810	399,78	5101,4	8,12979	4,34848
	X_2	0,7	800	3040	362,51	5646,0	2,79134	1,54545
	X_3	0,46	570	2950	459,07	8082,1	3,52407	1,62121
	X_4	0,52	360	1810	499,73	7766,8	3,83810	3,92424
	X_5	0,68	790	1610	481,09	2206,8	10,0837	1,40909
8	X_1	0,5	440	2510	333,71	5273,4	7,53663	4,77272
	X_2	0,65	350	860	282,89	3840,4	9,63014	1,90909
	X_3	0,88	550	2350	506,50	8282,7	8,33914	3,25757
	X_4	0,46	430	1830	171,09	5187,4	7,11793	1,90909
	X_5	0,89	750	3090	501,42	8082,1	6,35031	3,30303
9	X_1	0,54	800	1670	242,24	7222,3	10,5024	1,78787
	X_2	0,54	250	1870	154,15	7136,3	8,82763	1,68181
	X_3	0,62	540	790	169,4	4213,0	6,55966	4,66666
	X_4	0,76	440	1750	169,4	7938,8	8,16468	3,06060
	X_5	0,88	820	1000	262,57	4814,8	2,89602	3,75757
10	X_1	0,7	520	2690	154,15	5273,4	10,3977	3,87878
	X_2	0,39	600	1460	525,14	4213,0	4,53593	3,42424
	X_3	0,38	490	3130	469,23	7021,7	9,24633	4,27272
	X_4	0,64	870	890	499,73	6419,8	6,35031	4,39393
	X_5	0,77	440	1900	398,09	4127,0	10,7117	3,33333
11	X_1	0,51	610	2180	160,93	4786,2	7,78087	4,46969
	X_2	0,81	270	1580	453,99	2522,0	4,71039	3,07575
	X_3	0,79	730	2110	406,56	3353,2	8,09490	3,62121
	X_4	0,54	280	2890	311,69	4814,8	7,32728	3,5
	X_5	0,53	760	1190	176,17	7824,1	4,32658	3,98484
12	X_1	0,45	440	1390	359,12	8426,0	7,57152	2,51515
	X_2	0,83	540	1670	282,89	4012,4	10,3279	3,27272
	X_3	0,51	330	1200	489,56	7967,4	10,3279	2,90909
	X_4	0,3	500	2220	506,50	7222,3	4,60572	2,98484
	X_5	0,88	460	3060	237,16	6591,8	4,46615	1,77272
13	X_1	0,74	470	2290	411,64	3066,6	9,56036	1,63636
	X_2	0,6	660	2820	374,37	4069,7	9,59525	4,71212
	X_3	0,31	540	1290	425,19	4413,6	7,88555	1,80303
	X_4	0,82	680	1020	477,70	6219,2	6,38520	1,83333
	X_5	0,62	720	1690	340,49	6104,5	10,8513	3,63636
14	X_1	0,67	750	1980	238,85	6161,9	8,19958	3,86363
	X_2	0,5	800	2650	477,70	7766,8	9,69993	2,27272
	X_3	0,73	810	1910	421,80	3381,8	4,98953	1,60606
	X_4	0,67	700	2610	442,13	3496,5	9,66503	3,46969
	X_5	0,31	630	1740	333,71	5416,7	9,42079	2,75757
15	X_1	0,37	410	1260	362,51	8941,9	2,86113	2,28787
	X_2	0,88	850	1170	216,83	2206,8	5,58269	4,60606
	X_3	0,72	490	2410	413,33	7021,7	6,00139	2,30303
	X_4	0,5	570	1960	496,34	3553,8	7,43196	4,22727

№ п/п	№ екс-перта	1	2	3	4	5	6	7
	X_5	0,61	850	2380	513,28	4184,3	5,86182	2,16666
16	X_1	0,29	340	2710	304,92	8368,7	4,98953	4,43939
	X_2	0,73	370	2770	279,51	8483,3	7,67620	3,10606
	X_3	0,69	470	2780	415,03	4098,3	5,47801	1,90909
	X_4	0,54	290	1280	145,68	4728,9	4,74529	1,86363
	X_5	0,64	340	1460	272,73	5674,6	5,61758	1,84848
17	X_1	0,82	430	2590	164,31	5416,7	4,50104	4,46969
	X_2	0,29	270	2870	492,95	3525,1	10,8513	2,98484
	X_3	0,52	860	1920	528,52	4069,7	9,24633	3,19697
	X_4	0,31	380	2830	135,52	4470,9	8,51360	4,33333
	X_5	0,54	790	2770	133,82	3926,4	4,67550	4,65151
18	X_1	0,49	750	3100	247,32	5560,0	8,65317	3,62121
	X_2	0,49	380	1850	152,46	5760,6	4,04745	1,62121
	X_3	0,38	290	840	138,90	4958,1	10,5722	1,34848
	X_4	0,57	860	2030	218,52	8769,9	10,9909	3,28787
	X_5	0,26	620	1450	203,28	8827,2	9,76971	2,43939
19	X_1	0,26	390	2420	526,83	2636,7	3,24494	4,09090
	X_2	0,29	760	1170	164,31	5846,6	8,09490	4,40909
	X_3	0,75	640	1890	531,91	5216,1	10,1535	1,68181
	X_4	0,54	860	2880	177,87	5846,6	3,21004	4,07575
	X_5	0,52	360	2730	238,85	5531,3	3,66364	4,65151
20	X_1	0,46	460	2300	442,13	4528,2	6,38520	3,83333
	X_2	0,5	470	1560	282,89	3238,5	3,83810	3,09090
	X_3	0,34	330	2070	430,27	7050,3	3,03559	2,39393
	X_4	0,76	400	850	509,89	6706,4	8,19958	3,10606
	X_5	0,76	890	1140	164,31	5674,6	5,58269	3,54545
21	X_1	0,41	510	2140	218,52	8941,9	10,2233	3,31818
	X_2	0,33	400	1270	226,99	5359,4	5,26866	4,45454
	X_3	0,74	630	2670	440,44	8769,9	4,67550	2,15151
	X_4	0,57	490	810	159,23	5703,3	3,38450	2,92424
	X_5	0,67	460	3060	181,25	4155,7	4,53593	1,98484
22	X_1	0,42	580	1810	399,78	5101,4	8,12979	4,34848
	X_2	0,7	800	3040	362,51	5646,0	2,79134	1,54545
	X_3	0,46	570	2950	459,07	8082,1	3,52407	1,62121
	X_4	0,52	360	1810	499,73	7766,8	3,83810	3,92424
	X_5	0,68	790	1610	481,09	2206,8	10,0837	1,40909
23	X_1	0,5	440	2510	333,71	5273,4	7,53663	4,77272
	X_2	0,65	350	860	282,89	3840,4	9,63014	1,90909
	X_3	0,88	550	2350	506,50	8282,7	8,33914	3,25757
	X_4	0,46	430	1830	171,09	5187,4	7,11793	1,90909
	X_5	0,89	750	3090	501,42	8082,1	6,35031	3,30303
24	X_1	0,54	800	1670	242,24	7222,3	10,5024	1,78787
	X_2	0,54	250	1870	154,15	7136,3	8,82763	1,68181
	X_3	0,62	540	790	169,4	4213,0	6,55966	4,66666
	X_4	0,76	440	1750	169,4	7938,8	8,16468	3,06060

№ п/п	№ експерта	1	2	3	4	5	6	7
	X_5	0,88	820	1000	262,57	4814,8	2,89602	3,75757
25	X_1	0,7	520	2690	154,15	5273,4	10,3977	3,87878
	X_2	0,39	600	1460	525,14	4213,0	4,53593	3,42424
	X_3	0,38	490	3130	469,23	7021,7	9,24633	4,27272
	X_4	0,64	870	890	499,73	6419,8	6,35031	4,39393
	X_5	0,77	440	1900	398,09	4127,0	10,7117	3,33333
26	X_1	0,51	610	2180	160,93	4786,2	7,78087	4,46969
	X_2	0,81	270	1580	453,99	2522,0	4,71039	3,07575
	X_3	0,79	730	2110	406,56	3353,2	8,09490	3,62121
	X_4	0,54	280	2890	311,69	4814,8	7,32728	3,5
	X_5	0,53	760	1190	176,17	7824,1	4,32658	3,98484
27	X_1	0,45	440	1390	359,12	8426,0	7,57152	2,51515
	X_2	0,83	540	1670	282,89	4012,4	10,3279	3,27272
	X_3	0,51	330	1200	489,56	7967,4	10,3279	2,90909
	X_4	0,3	500	2220	506,50	7222,3	4,60572	2,98484
	X_5	0,88	460	3060	237,16	6591,8	4,46615	1,77272
28	X_1	0,74	470	2290	411,64	3066,6	9,56036	1,63636
	X_2	0,6	660	2820	374,37	4069,7	9,59525	4,71212
	X_3	0,31	540	1290	425,19	4413,6	7,88555	1,80303
	X_4	0,82	680	1020	477,70	6219,2	6,38520	1,83333
	X_5	0,62	720	1690	340,49	6104,5	10,8513	3,63636
29	X_1	0,67	750	1980	238,85	6161,9	8,19958	3,86363
	X_2	0,5	800	2650	477,70	7766,8	9,69993	2,27272
	X_3	0,73	810	1910	421,80	3381,8	4,98953	1,60606
	X_4	0,67	700	2610	442,13	3496,5	9,66503	3,46969
	X_5	0,31	630	1740	333,71	5416,7	9,42079	2,75757
30	X_1	0,37	410	1260	362,51	8941,9	2,86113	2,28787
	X_2	0,88	850	1170	216,83	2206,8	5,58269	4,60606
	X_3	0,72	490	2410	413,33	7021,7	6,00139	2,30303
	X_4	0,5	570	1960	496,34	3553,8	7,43196	4,22727
	X_5	0,61	850	2380	513,28	4184,3	5,86182	2,16666

3.8. Індивідуальні завдання №5. Кластеризація об'єктів

Завдання: Вивчити методи розрахунків відстаней між об'єктами за допомогою різних метрики Евкліда та Джеффріса-Матусіти та прийоми по їх автоматичній кластеризації..

Порядок виконання: для визначення свого варіанту студент використовує останню цифру номеру залікової книжки *Nз* .

Методичні вказівки: 1) розрахувати матриці відстаней за метриками Евкліда, та Джеффріса-Матусіти; 2) Застосувавши функцію Solve електронних таблиць Calc з пакету Open Office вільного програмного забезпечення, потрібно вирішити оптимальні задачі включення до кластерів для матриць відстаней, розрахованих за цими метриками. 3) порівняти результати кластеризації і зробити висновки.

Таблиця 3.2

Варіанти завдань

№ п/п	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
0	64	0,29	340	2710	304,92	8368,7	4,98953	4,43939	19602
	31	0,73	370	2770	279,51	8483,3	7,67620	3,10606	7194
	39	0,69	470	2780	415,03	4098,3	5,47801	1,90909	9504
	44	0,54	290	1280	145,68	4728,9	4,74529	1,86363	11814
	87	0,64	340	1460	272,73	5674,6	5,61758	1,84848	15378
	74	0,76	360	1220	448,91	2866	8,72295	1,27272	5148
	54	0,54	710	2480	149,07	8110,7	5,1291	4,10606	18084
	74	0,64	770	1790	220,22	7652,2	6,28053	2,80303	13992
	78	0,85	300	1690	150,76	2780,0	9,35101	4,75757	17622
	87	0,39	560	2770	501,42	8311,4	6,07117	3,96969	19074
1	25	0,82	430	2590	164,31	5416,7	4,50104	4,46969	20262
	67	0,29	270	2870	492,95	3525,1	10,8513	2,98484	7326
	62	0,52	860	1920	528,52	4069,7	9,24633	3,19697	13530
	53	0,54	790	2770	133,82	3926,4	4,67550	4,65151	13068
	42	0,42	610	1100	232,07	5474,0	4,29169	1,72727	6270
	64	0,29	700	2860	267,65	7107,6	9,69993	2,45454	14916
	30	0,57	550	2150	531,91	6305,2	8,72295	2,18181	8646
	41	0,88	800	1840	499,73	6276,5	6,28053	2,10606	12342
	68	0,37	740	1220	381,15	6047,2	5,82693	4,50000	20592
	49	0,58	490	2430	474,32	4384,9	4,57083	4,22727	8976
2	76	0,49	750	3100	247,32	5560,0	8,65317	3,62121	11616
	35	0,49	380	1850	152,46	5760,6	4,04745	1,62121	5214
	43	0,38	290	840	138,90	4958,1	10,5722	1,34848	14916
	52	0,57	860	2030	218,52	8769,9	10,9909	3,28787	10164
	72	0,26	620	1450	203,28	8827,2	9,76971	2,43939	6270
	73	0,28	460	1360	470,93	7824,1	6,62944	2,62121	8844
	88	0,37	750	2230	433,66	8712,6	10,8513	3,96969	9438
	42	0,59	770	1520	252,40	7795,5	10,6420	3,92424	5412
	69	0,72	740	990	320,16	3983,7	3,66364	4,45454	6204
	75	0,31	380	2830	135,52	4470,9	8,51360	4,33333	18150
3	33	0,26	390	2420	526,83	2636,7	3,24494	4,09090	19338
	41	0,29	760	1170	164,31	5846,6	8,09490	4,40909	20328
	69	0,75	640	1890	531,91	5216,1	10,1535	1,68181	11352
	66	0,54	860	2880	177,87	5846,6	3,21004	4,07575	13398
	38	0,52	360	2730	238,85	5531,3	3,66364	4,65151	19536
	57	0,5	680	1230	476,01	7709,5	8,44382	3,06060	8316
	58	0,59	410	2620	367,59	2264,1	2,82623	2,16666	7326
	33	0,69	310	1280	513,28	8110,7	5,23377	3,72727	18216
	60	0,89	800	1630	215,13	6878,4	8,79274	2,31818	14058
	32	0,76	500	2370	216,83	2350,1	6,14096	1,40909	17028
4	59	0,46	460	2300	442,13	4528,2	6,38520	3,83333	13464
	68	0,5	470	1560	282,89	3238,5	3,83810	3,09090	8316
	34	0,34	330	2070	430,27	7050,3	3,03559	2,39393	17754

№ п/п	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
	38	0,76	400	850	509,89	6706,4	8,19958	3,10606	19866
	56	0,76	890	1140	164,31	5674,6	5,58269	3,54545	5610
	84	0,43	870	1860	203,28	6591,8	4,08234	3,10606	13398
	86	0,65	540	820	166,01	2665,3	5,16399	4,09090	16500
	87	0,6	310	1740	481,09	7594,9	9,66503	3,33333	15840
	60	0,89	250	1230	370,98	7852,8	2,68667	4,43939	19602
	28	0,58	870	1670	210,05	4442,3	6,87369	4,03030	7062
5	86	0,41	510	2140	218,52	8941,9	10,2233	3,31818	17094
	81	0,33	400	1270	226,99	5359,4	5,26866	4,45454	18084
	58	0,74	630	2670	440,44	8769,9	4,67550	2,15151	6336
	40	0,57	490	810	159,23	5703,3	3,38450	2,92424	11352
	55	0,67	460	3060	181,25	4155,7	4,53593	1,98484	9306
	53	0,42	390	920	404,86	8110,7	5,09420	4,07575	9636
	44	0,78	400	2730	272,73	4155,7	4,81507	2,30303	11088
	59	0,79	310	980	143,99	4384,9	8,40893	1,59090	15246
	29	0,45	890	2230	164,31	4069,7	10,9211	1,60606	16962
	88	0,7	330	1890	274,42	2722,7	5,02442	4,18181	7062
6	25	0,42	580	1810	399,78	5101,4	8,12979	4,34848	20790
	69	0,7	800	3040	362,51	5646,0	2,79134	1,54545	10164
	74	0,46	570	2950	459,07	8082,1	3,52407	1,62121	17490
	72	0,52	360	1810	499,73	7766,8	3,83810	3,92424	7062
	86	0,68	790	1610	481,09	2206,8	10,0837	1,40909	20460
	63	0,51	790	2460	442,13	2436,1	10,7815	1,25757	9108
	55	0,62	770	2740	171,09	2579,4	6,21074	2,68181	11946
	84	0,83	820	990	433,66	6047,2	10,3628	2,60606	12540
	51	0,54	740	1610	447,21	4127,0	5,05931	4,77272	15708
	87	0,31	490	870	509,89	2780,0	7,25750	4,34848	15642
7	53	0,5	440	2510	333,71	5273,4	7,53663	4,77272	5214
	36	0,65	350	860	282,89	3840,4	9,63014	1,90909	19866
	32	0,88	550	2350	506,50	8282,7	8,33914	3,25757	9504
	71	0,46	430	1830	171,09	5187,4	7,11793	1,90909	7194
	67	0,89	750	3090	501,42	8082,1	6,35031	3,30303	5940
	77	0,43	330	1290	225,30	5388,0	5,23377	1,46969	5280
	40	0,64	290	2840	465,85	5072,8	5,02442	3,71212	13926
	54	0,86	850	2720	354,04	4872,2	4,46615	1,68181	18612
	49	0,68	820	3130	182,95	3152,6	10,6769	2,62121	17754
	49	0,71	250	2190	409,94	2436,1	7,85066	2,54545	19536
8	48	0,54	800	1670	242,24	7222,3	10,5024	1,78787	18480
	29	0,54	250	1870	154,15	7136,3	8,82763	1,68181	16962
	82	0,62	540	790	169,4	4213,0	6,55966	4,66666	19932
	53	0,76	440	1750	169,4	7938,8	8,16468	3,06060	13200
	68	0,88	820	1000	262,57	4814,8	2,89602	3,75757	6534
	36	0,69	530	2480	188,03	3295,9	5,37334	1,74242	14520
	82	0,86	550	2700	304,92	8827,2	2,96580	1,57575	12408
	82	0,86	820	2980	389,62	6161,9	7,99023	2,37878	10296
	27	0,73	410	1200	514,97	6563,1	7,67620	3,09090	8712
	80	0,34	690	1380	409,94	8368,7	9,59525	4,65151	14916
9	80	0,7	520	2690	154,15	5273,4	10,3977	3,87878	11352
	75	0,39	600	1460	525,14	4213,0	4,53593	3,42424	15444

№ п/п	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
	83	0,38	490	3130	469,23	7021,7	9,24633	4,27272	6204
	38	0,64	870	890	499,73	6419,8	6,35031	4,39393	7524
	72	0,77	440	1900	398,09	4127,0	10,7117	3,33333	9240
	68	0,31	690	1370	437,05	3525,1	10,8164	3,45454	9570
	40	0,68	460	1940	269,34	3754,4	3,52407	2,74242	8052
	71	0,67	730	1400	367,59	6849,7	8,40893	3,68181	17160
	83	0,75	330	2550	479,40	7365,6	5,16399	4,74242	20394
	89	0,51	440	3110	260,87	7537,5	5,1291	3,53030	8976

Контрольні запитання

1. Що показує такий параметр як стандарт?
2. Що є мірою тісноти зв'язку двох різних вибірок?
3. Для чого використовується тест за критерієм Стьюдента?
4. Які ви знаєте критерії міри узгодженості експертних оцінок?
5. Для чого потрібно нормування вибіркових даних?
6. Чому кластерний аналіз більш прийнятний для класифікації економічних об'єктів?
7. Що таке метрика відстані?
8. Яка з метрик є найбільш популярною?
9. Як виконати нормування чисельних значень факторів?
10. Поясніть задачу дисперсійного аналізу.
11. Які коефіцієнти рангової кореляції ви знаєте?
12. Для чого вони застосовуються?
13. Як визначити параметри запізнювання вихідних факторів системи по відношенню до вхідних?
14. Як перетворення Фурье допомагає визначити характерні частоти і періоди в соціально-економічних системах?
15. Для чого потрібне угрупування об'єктів?

Вивчивши матеріали цього розділу, студенти опанують основні методологічні принципи розрахунку статистичних характеристик вибірок, міру узгодженості експертних оцінок, можливість поєднання різних вибірок в одну, визначення параметрів запізнювання та принципи угрупування об'єктів..

4. МЕТОДОЛОГІЯ І МЕТОДИ СИНТЕЗУ МОДЕЛЕЙ СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ

В розділі наведено основні методи синтезу моделей соціально економічних систем з розподілом їх на динамічні, статистичні та нечіткі.

Синтез (від грец. συνθεσις – поєднання, з'єднання, складання) – поєднання абстрагованих сторін предмета і відображення його як конкретної цілісності; метод вивчення об'єкта у його цілісності, у єдиному і взаємному зв'язку його частин. У процесі наукових досліджень синтез пов'язаний з аналізом, оскільки дає змогу поєднати частини предмета, розчленованого у процесі аналізу, встановити їх зв'язок і пізнати предмет як єдине ціле.

Синтез моделей соціально-економічних систем полягає у з'єднанні результатів їх аналізу в єдиний комплекс математичного опису і/або формалізований опис системи на якісь спеціальній мові. В цьому розділі буде подано інформацію про перший напрямок синтезу. Інколи замість терміну «синтез», вживається термін «ідентифікація», що в межах цього посібника буде розумітися як синонім.

Економічний об'єкт, що підлягає ідентифікації, найчастіше стає перед дослідником як «чорний ящик». Відомі тільки стани його вхідних та вихідних факторів та існує статистика їх значень. При викладенні матеріалу розділу припускається, що на етапі дослідження соціально-економічної системи було визначено ті вхідні фактори, які мають статистично достовірний зв'язок, і для побудови моделі було залишено тільки такі входи, що такого зв'язку між собою не мають. Включення до моделі взаємозалежних факторів викликає явище «мультиколінеарності», що погіршує якість створеної моделі. Отже вважатимемо, що всі входи взаємонезалежні і тоді задачею синтезу є побудова моделі з багатьма входами і одним виходом. Якщо в реальній соціально-економічний системі виходів більше, то представлені нижче методи потрібно застосувати для кожного виходу окремо, а повна модель буде являти собою сукупність «чорних ящиків».

4.1. Синтез статистичних лінійних та квазілінійних моделей

Статистичні дослідження економічних систем і процесів, що відбуваються в них, провадяться для утворення їх результатів – таблиць з чисельними значеннями різних економічних факторів. Збирання даних провадиться частіше всього для різних моментів часу (пороках, кварталах місяцях) або для одного моменту часу, але для різних економічних об'єктів. Їх розташовують в одному стовпці для одного моменту часу або для одного економічного об'єкту. Приклад таких статистичних таблиць в табл. 4.1.

Таблиця 4.1

Статистика по шахті № 7 за 2006 р

Період	Рентабельність	Матеріали	Основні засоби
I квартал	**5%**	**2500000**	**5200000**
II квартал	**4%**	**2200000**	**5100000**
III квартал	**1%**	**2800000**	**5400000**
IV квартал	**12%**	**1200000**	**5800000**

Статистика по підприємствам за I квартал

Підприємства	Рентабельність	Матеріали	Основні засоби
Вагоноремонтний завод	**2%**	**25000**	**690000**
Металургійний комбінат	**15%**	**9900000**	**5800000**
Шахта № 7	**5%**	**2500000**	**5200000**
Трамвайне депо	**-0,2%**	**12000**	**2800000**

На першому етапі збирання статистичних даних всі фактори вважаються рівнозначними. Але для подальшої роботи по створенню математичних моделей, фактори треба розділити на вхідні і вихідні, або інакше, залежні і незалежні. Цей розподіл виконується довільно, згідно задач, які ставить перед собою дослідник. Наприклад, якщо потрібно побудувати модель впливу на рентабельність матеріалів та основних засобів, то рентабельність буде залежним фактором, а матеріали та основні засоби – незалежними. Залежних і незалежних факторів може бути декілька. Залежні позначаються як y_1, y_2, y_3......., а незалежні як x_1, x_3, x_3….

Для зручності подальшої обробки даних на комп'ютері, залежні і незалежні фактори розташовуються у сусідніх стовпцях таблиці, – кожна група окремо. Приклад такого угрупування показано в табл. 3.1.

Алгоритм синтезу квазілінийних статистичних моделей базується на положеннях регресивного аналізу, який дозволяє знайти емпіричну формулу залежності вихідних факторів від вхідних

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^{K} a_i x_i , \qquad (4.1)$$

де a_0 – коефіцієнти моделі, x_i – вхідні фактори, y – вихідний фактор.

На першому етапі розробки моделі довільної форми, висувається гіпотеза про можливий вигляд такої моделі.

Це може бути (тут і далі наводяться формули для одного залежного і одного незалежного фактора)

– поліном n-го порядку
$$y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x^i ; \qquad (4.2)$$

– експоненційна функція $$y = a_0 \ell^{a_i x_i};\qquad (4.3)$$

– логарифмічна функція по основі n $$y = a_0 \log_n x;\qquad (4.4)$$

– обернена степенна $$y = a_0 + \sum_{i=-n}^{-1} a_i x^i,\qquad (4.5)$$

де a_0 – константа, а a_i – коефіцієнти при вхідних факторах.

Якщо незалежних факторів декілька, можна утворити з них комплекси типу $x_1\ x_2$, $x_1/\ x_2$, x_1-x_2, $\log x_1\ x_2$, і т. д, об’єднуючи їх по двоє, троє і більше.

Другим етапом роботи є додавання до початкової таблиці стовпців результатів математичних перетворень вигляду (4.2) - (4.5). Рекомендується результати перетворення кожного фактора розташовувати в сусідніх колонках таблиці, поруч з самим фактором.

Третій етап вимагає нормування всіх факторів статистичної таблиці разом з їх перетвореннями згідно (3.8). Нормуванню піддаються також і всі математичні перетворення, для яких потрібно знайти свої значення середнього та стандарту..

Для відбору вхідних техніко-економічних параметрів, що істотно впливають на вихідні параметри, обчислюється матриця коефіцієнтів парної кореляції для всіх пар нормованих факторів згідно (3.13). Якщо цих факторів було N, то загальна кількість пар буде $N(N\text{-}1)/2$. Наприклад, якщо в початковій статистичній таблиці було 2 незалежних фактора і 1 залежний, а до них було додано 3 перетворення виду (4.2) - (4.5), то потрібно буде розрахувати кореляцію для 6(6-1)/2 = 15 пар. Тепер потрібно провести аналіз величини отриманих коефіцієнтів кореляції залежних факторів з незалежними та їх перетвореннями на їх статистичну значимість за формулами (3.14-15). Якщо коефіцієнти кореляції вхідних факторів та їх математичних перетворень статистично не значимі, колонки з цими факторами потрібно вилучити з таблиці початкових даних.

Тепер таблиця підготовлена до розрахунку коефіцієнтів лінійної регресії виду
$$y = a_0 + \sum_{i=1}^{K} a_i x_i,\qquad (4.6)$$

де K – кількість вхідних факторів моделі. Оскільки при розрахунку коефіцієнтів регресії ми використовуємо чисельні значення не тільки самих вхідних факторів, але і їх математичні перетворення, фактично ми отримуємо нелінійну залежність y від x_i.

Для визначення параметрів лінійної регресії скористайтеся функцією

LINEST(Data_Y; Data_X; Linear_Type; Stats),

де **Data_Y** – масив даних вихідних факторів y. Має бути тільки один стовпець вихідного фактору; **Data_X** – масив вхідних параметрів, x, скільки потрібно стовпців; **Linear_Type** – ознака проходження лінії регресії через 0 (0 – проходить, 1 – не проходить); **Stats** – потреба виводити статистичні дані про розрахунок параметрів лінійної регресії (1 – якщо потрібно, 0 – непотрібно).

Наприклад (табл.4.2), для таблиці значень вхідних факторів X_1 та X_2 , та стовпчика значень Y. Покажемо фрагмент електронної таблиці. В ній незалежні фактори займають стовпчик A та B, а залежний – C.

Запишемо тепер формулу з адресами конкретних клітинок

=LINEST(C2:C8;A2:B8;1;1)

тут, **Data_Y** - це C2:C8; **Data_X** - це A2:B8; **Linear_Type** і **Stats** обоє дорівнюють 1. Як тільки натиснемо кнопку **OK**, виведе результати розрахунку в наступні клітинки:

Таблиця 4.2.

Приклад розрахунку коефіцієнтів лінійної регресії

	A	B	C	D	E	F	G
1	X1	X2	Y		Значення LINEST		
2	4	7	100		4,17	-3,48	82,33
3	5	9	105		5,46	10,96	9,35
4	6	11	104		0,87	5,06	#NA
5	7	12	108		13,21	4	#NA
6	8	15	111		675,45	102,26	#NA
7	9	17	120				
8	10	19	133				

E2 і F2: Коефіцієнти a_1 при вхідних параметрах залежності виду $y=a_0+a_1*x$ для значень X_1 і X_2. Порядок подання цих коефіцієнтів зворотній – в E2 коефіцієнт для X_2 і в F2 коефіцієнт для X_1.

G2: Коефіцієнт a_0.

E3 і F3: Стандартна помилка значення коефіцієнтів a_1.

G3: Стандартна помилка коефіцієнта a_0.

F4: Стандартна помилка регресії, обчисленої для значення Y.

E5: Значення F - критерію для аналізу якості апроксимації.

F5: Ступені свободи для аналізу якості апроксимації.

E6: Сума квадратів відхилення оцінених значень Y від їх середнього.

F6: Сума квадратів відхилення оцінених значень Y від наданих значень Y.

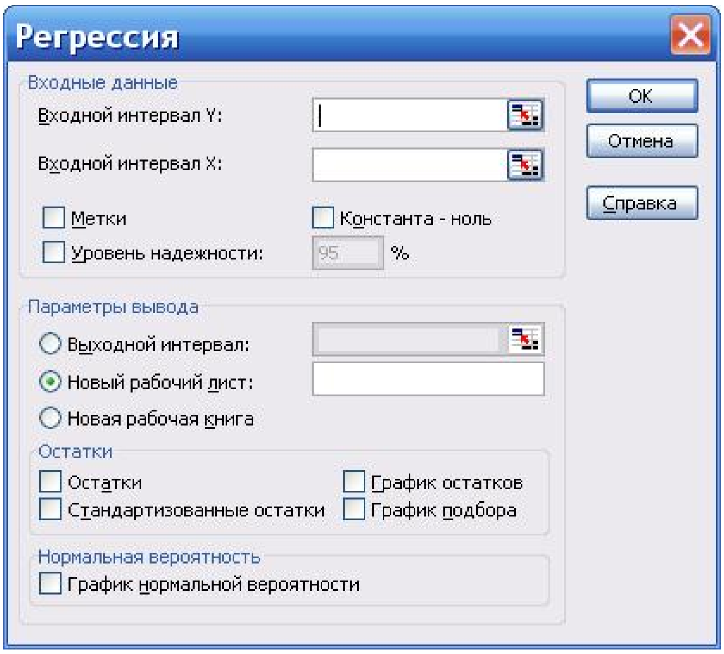


Рис. 4.1. Функція «Регресія»

У в пакеті «Аналіз даних» є функція «Регресія» яка виконує аналогічні операції (рис.4.1). Для отримання експоненційних залежностей можна скористатися також функцією **LOGEST,** яка обчислює коефіцієнти залежності виду $y= a_0 \cdot a_1^x$. Синтаксис її написання та розташування вихідних даних таке ж, як і у функції LINEST.

Після отримання числових значень коефіцієнтів квазілінійної статистичної моделі, виконаємо денормування коефіцієнтів при вхідних факторах та скорегуємо значення коефіцієнта a_0.

Пояснимо на прикладі це положення. Нехай шукалася залежність виду

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2. \tag{4.7}$$

Очевидно, що і для параметру x і для параметру x^2 було визначено своє середнє та стандарт, відповідно, M_x, σ_x, та M_{x2}, σ_{x2}. Нормувався також і вихідний параметр y. Параметри його нормування будуть M_y, σ_y. Тоді, для переходу від нормованих значень факторів до звичайних, потрібно у формулу (5.7) підставити формули їх нормування вигляду (3.8). Тоді одержимо

$$\frac{y - M_y}{\sigma_y} = a_0 + a_1 \frac{x - M_x}{\sigma_x} + a_2 \frac{x^2 - M_{x2}}{\sigma_{x2}}. \tag{4.8}$$

Після нескладних перетворень отримаємо таку корекцію розрахованих коефіцієнтів регресії

$$y = \left[M_y + \sigma_y \left(a_0 - \frac{a_1 M_x}{\sigma_x} - \frac{a_2 M_{x2}}{\sigma_{x2}} \right) \right] + \frac{a_1 \sigma_y}{\sigma_x} x + \frac{a_2 \sigma_y}{\sigma_{x2}} x^2. \tag{4.9}$$

Якщо всі фактори перед нормуванням було піддано логарифмуванню нормальними логарифмом, то початкова формула матиме вигляд (для двох вхідних факторів)

$$\mathrm{Ln}y = a_0 + a_1 * \mathrm{Ln}x_1 + a_2 * \mathrm{Ln}x_2. \tag{4.10}$$

Після денормування формула матиме вигляд

$$\mathrm{Ln}y = \left[M_y + \sigma_y \left(a_0 - \frac{a_1 M_x}{\sigma_x} - \frac{a_2 M_{x2}}{\sigma_{x2}} \right) \right] + \frac{a_1 \sigma_y}{\sigma_x} \mathrm{Ln}x_1 + \frac{a_2 \sigma_y}{\sigma_{x2}} \mathrm{Ln}x_2 \tag{4.11}$$

Але, враховуючи властивості логарифму, її можна перетворити на таку

$$y = \ell^{\left[M_y + \sigma_y \left(a_0 - \frac{a_1 M_x}{\sigma_x} - \frac{a_2 M_{x2}}{\sigma_{x2}} \right) \right]} x_1^{\frac{a_1 \sigma_y}{\sigma_x}} x_2^{\frac{a_2 \sigma_y}{\sigma_{x2}}}. \tag{4.12}$$

Це і буде формула Кобба-Дугласа, якщо в якості вхідних факторів було взято обсяг праці та капіталу, вихідного – об’єм виробництва.

4.2. Синтез авторегресійних моделей

Інколи, економічні фактори спостерігаються поодинці, тобто не має можливості поставити їм у відповідність якісь інші фактори, які можна було б позначити як незалежні, щоб побудувати модель. Буває й так, що такі фактори спостерігаються в залежності від часу, але інтервали спостереження дуже нерівномірні і кореляція між часом і цим фактором незначна. Тобто, час теж не можна вважати незалежним фактором, який впливає на фактор, що розглядається.

В цих випадках при побудові статистичної моделі в якості незалежних факторів беруть попередні значення фактора, зміна якого вивчається і для якого потрібно побудувати модель.

В залежності від кількості взятих попередніх значень фактора, модель може мати будь яку кількість вхідних факторів, але не більше ніж N-2, де N – кількість значень фактора, отриманих шляхом статистичних спостережень.

В загальному вигляді ця модель записується як

$$y = f(y_{-1}, y_{-2}, y_{-3} \ldots y_{-N}), \qquad (4.13)$$

тут N – кількість попередніх значень фактора, для якого будується така модель. Функція ж залежності може бути будь-якою, обраною згідно принципів, викладених у п.4.1.

Таблиця 4.3.

Рентабельність	**Попереднє значення рентабельності**
5%	**-**
4%	**5%**
1%	**4%**
12%	**1%**

Для прикладу, користаємося табл. 4.1 і побудуємо табл. 4.3 для рентабельності, в залежності від її попереднього значення. Перенесемо попередні значення рентабельності в сусідній стовпець зі зміщенням на 1 позицію так, як це покажуть стрілочки. При цьому, загальна кількість даних, яка буде використана для розрахунку коефіцієнтів регресійної моделі буде зменшена на 1. Тепер попереднє значення рентабельності буде вхідним фактором такої моделі. Якщо враховувати більше попередніх значень, розмір таблиці буде зменшуватися

4.3. Синтез періодичних моделей соціально-економічних систем

Якщо спектральний аналіз соціально-економічної системи (див. п.3.5) показав наявність деяких частот, що постійно присутні в різні моменти часу, коли проводився аналіз, рекомендується будувати періодичні моделі. Це такі моделі, в яких присутні тригонометричні періодичні функції. В деяких випадках дослідних може висунути гіпотезу про періодичність процесів апріорі.

В якості апроксимуючої залежності пропонується наступна формула

$$y = Ax^B + C(1 - e^{Dx})Sin(Ex^F + G) + H\,, \qquad (4.14)$$

де x – аргумент, y – функція, A - H – константи, e – основа натурального логарифму. В залежності від чисельних значень констант, ця формула дає множину кривих, представлену на рис. 4.2.

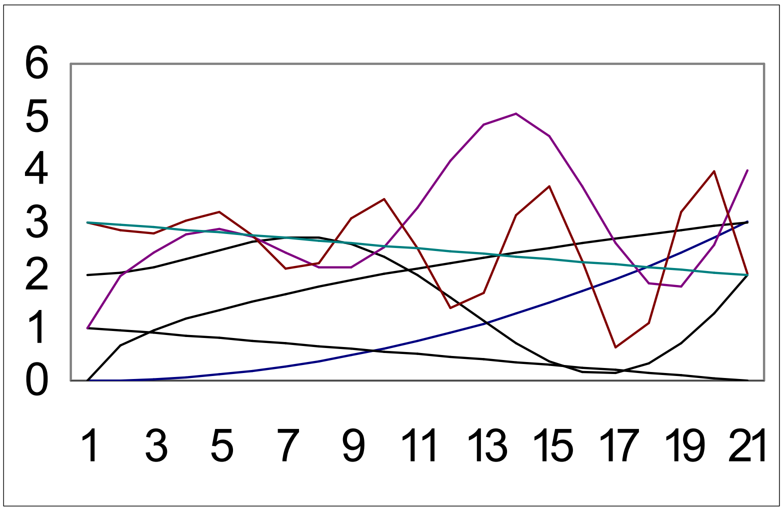


Рис. 4.2 Типи кривих, які можна створити за допомогою формули (5.14)

Вирішення задачі визначення числових значень коефіцієнтів такої моделі ускладнюється тим, що не існує таких математичних перетворень, які б дозволили лінеаризувати (4.14), щоб потім отримати значення констант A - H методом регресії. Тому для вирішення цієї задачі був застосований підхід, який враховує відсутність чи наявність знань про значення характерних частот чи періодів:

1. Встановити довільні значення констант A - H . Якщо відомі
2. Для всіх значень аргументу і довільних значень констант розрахувати величину y, яку позначимо як y_p за формулою (4.14).
3. Для кожного значення функції знайти $(y_p - y_ф)^2$, де $y_ф$ – фактичне значення функції, отримане за статистичними даними.
4. Вирішити оптимальну задачу з функціоналом виду

$$\sum_{i=1}^{N}(y_p \ - y_ф)^2 \rightarrow \min , \qquad (4,15)$$

а параметрами, що змінюються, будуть константи A - H . Де N – розмір статистичної вибірки.

Для збільшення точності розрахунку, рекомендується встановлювати обмеження на значення констант за наступним правилом:

1. На графіку, який було побудовано за статистичними даними, виділяється елемент кривої, що нагадує синусоїду і знаходиться проміжок значень аргументу, на якому ця синусоїда здійснює повне коливання – Δx. Тоді, для константи E треба встановити наступне обмеження
$$E \leq (0,5 – 1,5)\ 2\pi/\Delta x_1. \qquad (4.16)$$
Якщо період знайдено за спектральним аналізом, то підставляти ці значення.
2. Початкові значення констант B та F рекомендується становити рівними одиниці, константи H – середньому арифметичному статистичного значення функції, константу – D = 0.05, A = 0.
3. Константа C визначається з максимальної амплітуди Δy тієї частини графіку, яка визначена як синусоїдальна, і має наступні обмеження
$$C \leq (0,4 – 0,6)\ \Delta y. \qquad (4.17)$$
Якщо амплітуда знайдена за спектральним аналізом, то підставити її значення.

Розглянута вище методика для одного вихідного фактора може бути розповсюджена для будь-якої їх кількості. Це відбувається тоді, коли кількість характерних частот більше ніж одна. При цьому утворюється сума з формул виду (4.14), а далі вся процедура аналогічна. Тільки кількість змінних параметрів у (4.15) збільшується на кількість вхідних факторів, які включені до такої моделі.

Для прикладу, наведемо авторегресійну модель собівартості граніту Торчинського родовища (Дніпропетровська область) в якій було взято собівартість за попередній рік ($c_{t-12,1}$) та за попередні два роки ($c_{t-24,1}$).

$$C_{t,1}=1{,}342c_{t-12,1}{}^{0{,}887}+0{,}525(1\text{-e}^{-0{,}976c_{t-12,1}})\sin(0{,}524c_{t-12,1}{}^{1{,}187}+0{,}664)-$$
$$-0{,}402c_{t-24,1}{}^{0{,}686}+0{,}288(1\text{-e}^{-0{,}106c_{t-24,1}})\sin(0{,}524c_{t-24,1}{}^{0{,}808}+0{,}195)\text{-}0{,}146. \quad (4.18)$$

Як видно з рис. 4.3, отримана функція майже точно повторює фактичні значення собівартості.

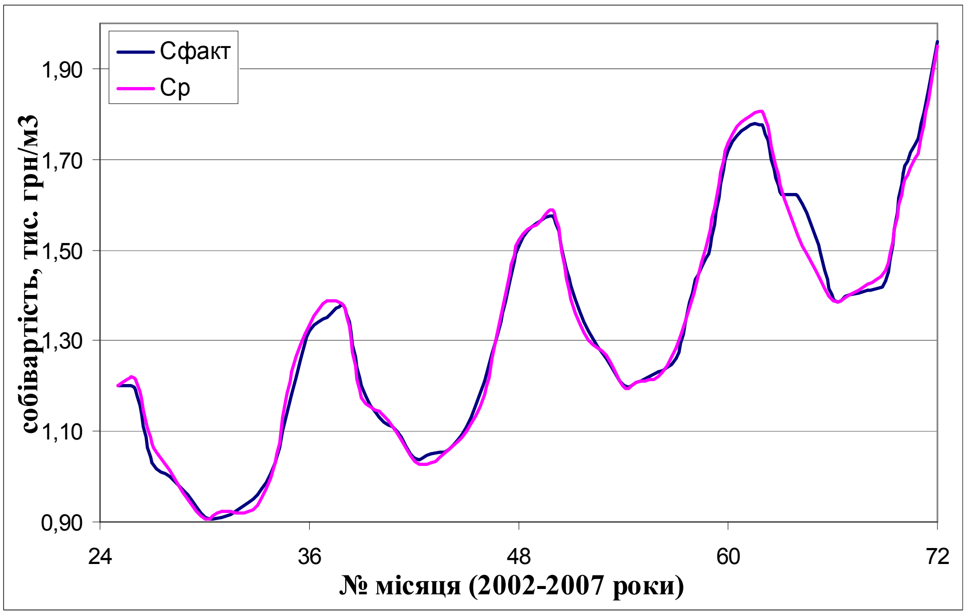


Рисунок 4.3. Порівняння фактичного та розрахункового значення собівартості Торчинського граніту

Запропонована методику була успішно використана для створення моделей споживання палива енергогенеруючою компанією, потоку замовлень на підприємстві зв'язку, розрахунку середньорічних температур, визначення врожайності зернових культур, тощо.

Для знайдення коефіцієнтів *A-H* рекомендується використання функції «Пошук рішення» з . Використання функції аналогічно використанню функції Solver, показаного на рис. 3.12-3.13.

4.4. Синтез статистичних моделей методом нейронних сіток

При моделюванні економічних процесів однією з найбільш складних задач є вибір виду функції апроксимації. Це пояснюється тим, що часто характер залежності одного економічного параметра від іншого є невідомим. Фактично, нам необхідно, знаючи певний набір значень вхідних параметрів, віднести значення вихідного параметра до певного класу чи значення.

Для вирішення поставленої задачі найбільш прийнятним є використання такого математичного методу як нейронні сітки.

Нейронні сітки – це сітки, що складаються зі зв'язаних між собою простих елементів – формальних нейронів. Ядром використовуваних представлень є ідея про те, що нейрони можна моделювати досить простими формулами, а вся складність процесу моделювання визначається зв'язками між нейронами. Кожен зв'язок представляється як зовсім простий елемент, що служить для передачі сигналу. Для опису кожного нейрону використовується проста і одна й та сама функція. Показана на рис. 4.4 модель нейрона, як найпростішого процесорного елемента, що виконує обчислення перехідної функції від скалярного добутку вектора вхідних сигналів *xi* і вектора вагових коефіцієнтів *wi* описується наступною системою рівнянь

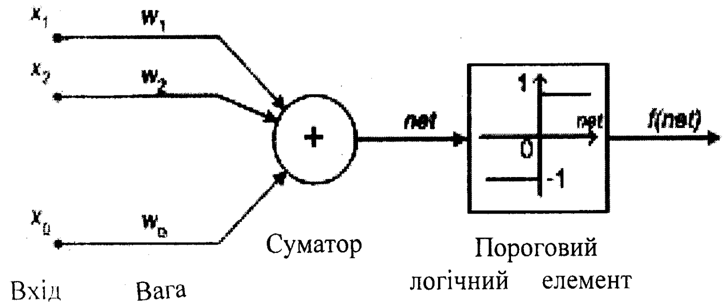


Рис. 4.4. Модель граничного нейрона МакКаллоха-Піттса

$$\left.\begin{aligned} net &= \sum_{i=1}^{n} x_i w_i \\ f(net) &= \mathbf{sgn}(net) = \begin{cases} \mathbf{+1}, & \mathbf{net} > \mathbf{0} \\ \mathbf{-1}, & \mathbf{net} < \mathbf{0} \end{cases} \end{aligned}\right\} \qquad (4.19)$$

Інколи в (4.19) додається ще параметр θ – порогової чутливості, яка віднімається від суми зважених сигналів.

Функція *f(net)* , яку ще позначають як *OUT(net),* називається активізуючою. Тому в штучних нейронних мережах використовують інші функції активації, найбільш популярною з яких є так звана логістична уніполярна сигмоїдальна функція (сигмоїд)

$$f(net) = \frac{1}{1+e^{-\lambda \cdot net}}, \qquad (4.20)$$

, $f(net) \in [0;+1]$, $\lambda > 0$ – коефіцієнт крутості безупинної функції *f(net)* біля *net* = 0,5 . Функція симетрична відносно *NET* = 0, *OUT* = 1/2.

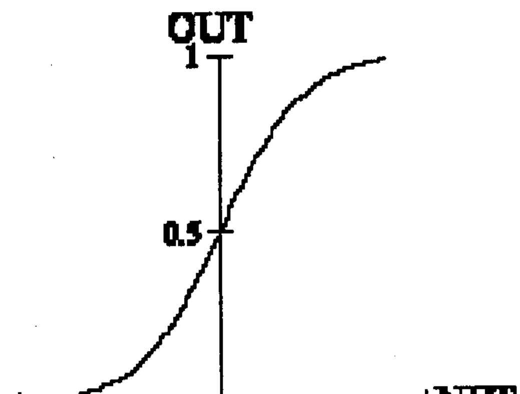


Рис. 4.5. Вид логістичної функції

Визначення коефіцієнтів λ та w_i називається навчанням, тому, існує задачник – набір прикладів із заданими відповідями. Ці приклади пред'являються системі. Нейрони одержують по вхідних зв'язках сигнали – «умови прикладу», перетворять їх, кілька разів обмінюються перетвореними сигналами і, нарешті, видають відповідь – також набір сигналів. Відхилення від правильної відповіді штрафується. Навчання складається в мінімізації штрафу як (неявної) функції зв'язків. Неявне навчання приводить до того, що структура зв'язків стає «незрозумілою» – не існує іншого способу її прочитати, крім як запустити функціонування сітки. Стає складно побудувати зрозумілу людині логічну конструкцію, що відтворює дії сітки.

Режими навчання з учителем нейронних сіток можуть бути різними, але найбільш ефективним є так зване “дельта-правило”:

1. Початкові ваги можуть бути будь-якими. Корекція провадиться пропорційно величині похідної по даній координаті. Похідна береться від функції активації. Підстроювання *j* ваги для *i* нейрона здійснюється за формулою $$\Delta w_{ij} = \eta \cdot [d_i - f(net_i)] \cdot f'(net_i) \cdot x_j \quad , \qquad (4.21)$$

   де *j=1,2,...,n* $\eta > 0$ - коефіцієнт навчання, підбирається евристично

2. Помилка при навчанні на *k* кроці: $$E_k = \frac{1}{2}[d_i - f(net_i)]^2 \quad , \qquad (4.22)$$

   де d_i - очікуваний вихід

3. Загальна помилка при навчанні:

$$E = \frac{1}{2 \cdot p} \sum_{k=1}^{p} [d_i - f(net_i)]^2 \quad , \qquad (4.22)$$

   де *p* - число прикладів у навчальній вибірці

4. Похідна від сигмоїди $$f'(net) = \lambda \cdot f(net) \cdot [1 - f(net)] \quad , \qquad (4.23)$$

   де *p* - число прикладів *у* навчальній вибірці.

Після проведення корекції коефіцієнтів моделів, їх пред’являється настиупні дані із «задачника».

Приклад. Побудуємо нейронну сітку для двох варіантів економічних процесів. Перший стосується розпізнавання безперервних економічних процесів, а другий – дискретних.

Почнемо зі створення апроксимуючої залежності для даних про кількість замовлень підприємства зв’язку по годинах робочого дня.

В якості моделі було обрано одношаровий перцептрон з логістичною функцією активації та з одним нейроном на три входи. На кожен вхід подавалося значення трьох послідовних значень кількості викликів від початку доби. Кожне значення вхідного параметру *x* бралося з вагою *w* та з певним значенням порогової чутливості θ. Таким чином, математична модель такого перцептрона мала наступний загальний вигляд

$$OUT = \frac{1}{1 + \ell^{-(w_1 x_i + w_2 x_{i+1} + w_3 x_{i+2})}} \; . \qquad (4.24)$$

На кожному наступному кроці, підставлялося нове значення *x*, як *i*+2–й елемент перцептрона, а *i*–е значення *x* відкидалося. Значення *OUT* порівнювалося зі значенням у з розрахунком погрішності прогнозування вигляду $x` = \frac{(x - m_x)}{\sigma_x}$. На кожному кроці розрахунку провадилося корегування ваги та порогової чутливості за правилом

$$\left.\begin{aligned}\Delta w_{ij} &= \varepsilon\left(d_j^s - y_j^s\right)x_{ij}\\ \Delta\theta_j &= -\varepsilon\left(d_j^s - y_j^s\right)\end{aligned}\right\} \quad (4.25)$$

де $d = y$, $y = OUT$, ε – число, яке характеризує швидкість навчання. Було встановлено наступне правило зменшення ε на кожному кроці розрахунку $\varepsilon' = \varepsilon/1.5668$, де ε' – нове значення швидкості навчання.

Перед початком навчання перцептрона всі дані були нормовані за правилом (3.8). В результаті навчання перцептрона було отримано показане на малюнку співпадіння розрахованих і реальних значень y. При цьому, сама апроксимуюча формула для нормованих значень параметрів, має вигляд

$$OUT = \frac{1}{1 + \ell^{-(1{,}58x_i + 0{,}37x_{i+1} + 1{,}15x_{i+2} + 1{,}62)}} . \quad (4.26)$$

На рис. 4.5 показано графіки навчальної вибірки та кривої, яка реалізується за (5.26), в якій бралися три попередніх значення кількості викликів. Можна бачити, що точність апроксимації поступово збільшується, оскільки експериментальна і розрахована криві поступово зближуються.

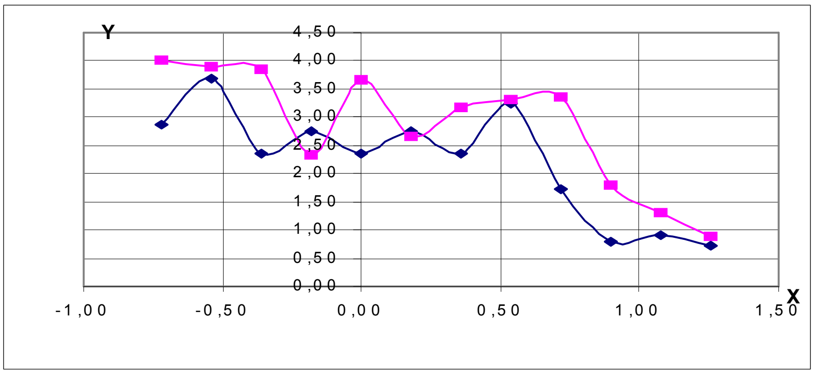


Рис. 4.5. Графік кількості викликів Y по годинам робочого дня X.
(♦ – експериментальна, ■ – розрахована крива)

Побудуємо тепер прогнозуючу модель зміни курсу австрійського шилінга відносно австралійського долара (дані взяти по відомостям НБУ за період 01.02.2000 по 31.10.2000). В цьому випадку нас цікавить передбачення самого факту збільшення чи зменшення крос-курсу.

Для вирішення цієї задачі було розроблено двошаровий перцептрон (тобто, модель системи, що складається з елементарний нейронів) (рис. 4.6), на вхід якого подавалося значення трьох попередніх значеннях крос-курсу австрійського шилінга і робився прогноз вихідного параметра, який являє собою функцію знаку числа

$$OUT = Sigfn(NET) = \begin{cases} 1, NET.0 \\ 0, NET = 0 \\ -1, NET < 0 \end{cases} \quad (4.27)$$

В якості активуючих функцій першого шару були взяті логістичні (4.20). Навчання перцептрона виконувалося так. На кожному наступному кроці, підставлялися нові значення x_i як для дієздатних так для недієздатних вузлів. Причому, вихідними значення d_i бралися числа: -1 – для випадку перебільшення курсу австрійського шилінга відносно австралійського долара, +1 – для протилежного випадку дієздатність якого експертами оцінюється як критична, +1 –

для випадку спів падіння курсів. Значення *OUT* порівнювалося зі значенням *di* з розрахунком погрішності прогнозування (7). На кожному кроці розрахунку провадилося корегування ваги та порогової чутливості за правилом (4.25). Було встановлено наступне правило зменшення ε на кожному кроці розрахунку t $\varepsilon' = \varepsilon/1.5668$, де ε' – нове значення швидкості навчання.

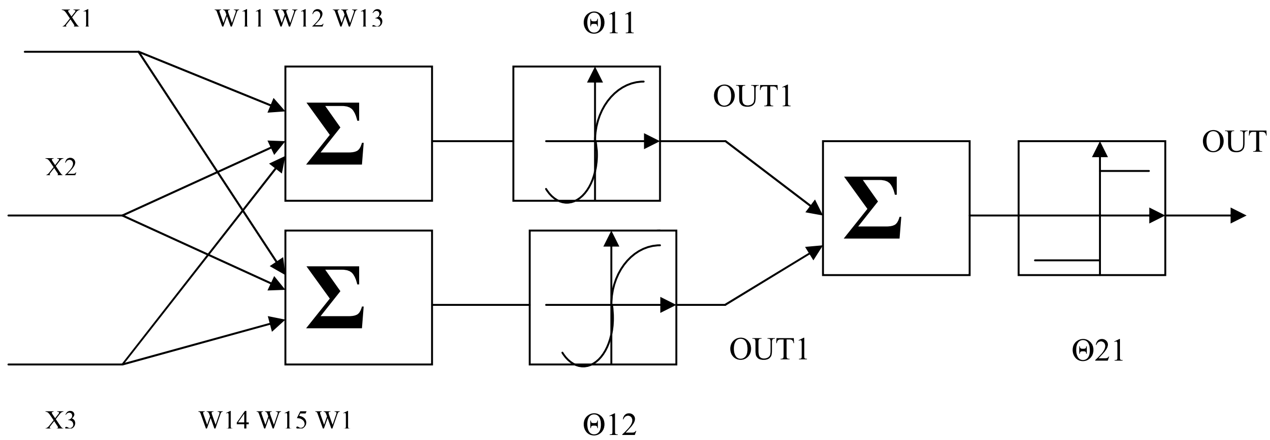
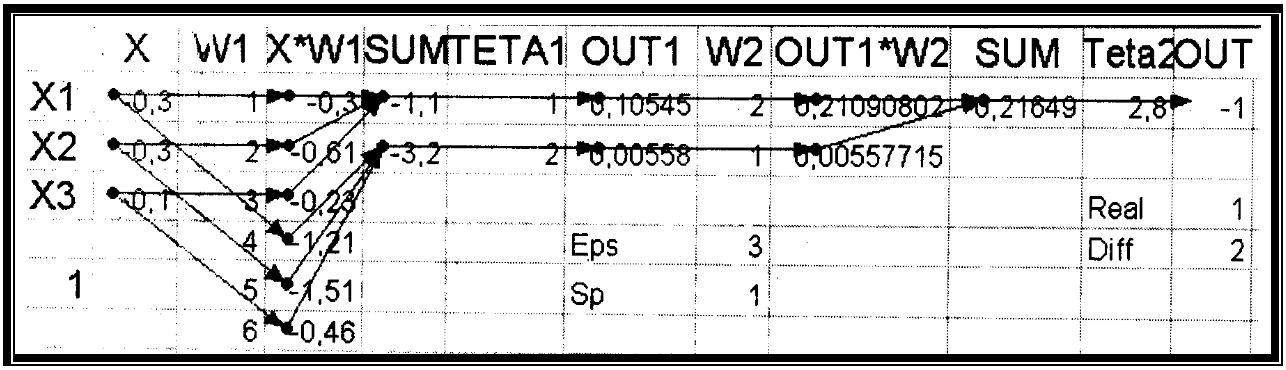


Рис. 4.6. Схема двошарового перцептрона
з трьома входами на кожному нейроні.

Перед початком навчання перцептрона вхідні дані були нормовані за правилом (3.8). На рис. 4.7 представлено схему застосування для розрахунків такого перцептрона.



	X	W1	X*W1	SUM	TETA1	OUT1	W2	OUT1*W2	SUM	Teta2	OUT
X1	-0,3	1	-0,3	-1,1	1	0,10545	2	0,21090802	0,21649	2,8	-1
X2	-0,3	2	-0,61	-3,2	2	0,00558	1	0,00557715			
X3	-0,1	3	-0,23							Real	1
		4	1,21			Eps	3			Diff	2
1		5	-1,51			Sp	1				
		6	0,46								

Рис. 4.7. Фрагмент таблиці , яка реалізує перцептрон з рис. 4.6.

Стрілки на рис. 4.7 показують порядок передачі даних. Потім вхідні дані поновлювалися на один крок, тобто, використовувалися чергові значення вхідних параметрів для іншого вузла Знаходилася розбіжність поміж значеннями, які видає перцептрон та справжньою оцінкою стану вузла. в порівнянні зі своїм попереднім значенням з корегуванням ваг та порогових функцій. Цей алгоритм показано на рис. 4.8.

В процесі навчання вже на 9-му кроці перцептрон давав більшість правильних відповідей на наступних значеннях курсу. Тому, процес навчання було припинено, а результуюча функція набула вигляду

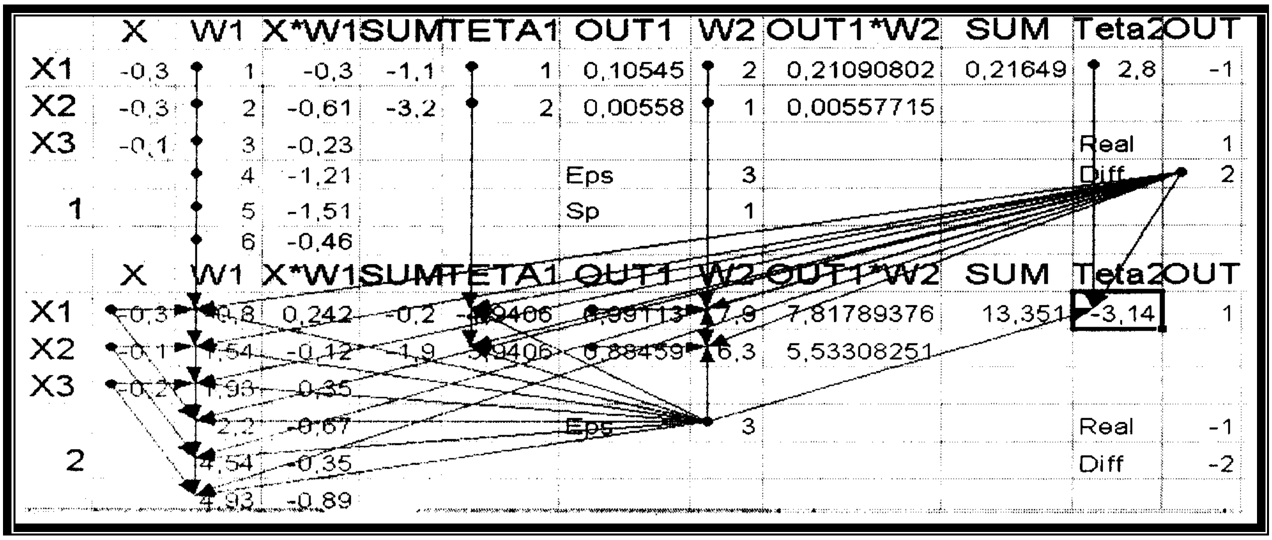


Рис. 4.8. Схема корегування ваг та порогів на наступному кроці, враховуючи результати з попереднього

$$OUT = Sign\left[\begin{array}{l}\dfrac{10,37669298}{\left[1+\ell^{-(-1,443525248X_1+1,561436345X_2+1,582503396X_3+4,683681367)}\right]}+\\+\dfrac{7,940045065}{\left[1+\ell^{-(1,556474752X_1+4,561436345X_2+4,582503396X_4+-3,683681367)}\right]}+\\2,883681367\end{array}\right]. \quad (4.28)$$

4.5. Оцінка адекватності апроксимації та якості прогнозування статистичних моделей

Слово «адекватність» означає відповідність статистичної моделі реальній соціально-економічній системі. В значенні апроксимації (тобто наближенню) вихідних факторів моделі до реальних значень, які було отримано в наслідок статистичних спостережень. Адекватність перевіряється для тих же реальних значеннях входів і виходів соціально-економічної системи, на яких було визначено коефіцієнти моделі.

Якщо потрібно визначити якість прогнозування, для розрахунків коефіцієнтів моделі використовується тільки частина даних, отриманих внаслідок статистичних спостережень. Друга частина даних використовується при визначенні якості прогнозування.

Найбільш зручним є перевірка за критерієм Пірсона, яка проводиться у наступному порядку:

1. Для перевірки адекватності апроксимації проводиться розрахунок вихідних значень математичної моделі, підставляючи в неї реальні вхідні значення, за якими ця модель була побудована. Для визначення якості прогнозування в модель підставляються ті значення вхідних факторів, які не було використано при розрахунках коефіцієнтів моделі.

2. Для кожної пари розрахованих $y_{Пi}$ та реальних y_{Pi} значень розраховується критерій «хі-квадрат» за формулою

$$\chi_P^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_{Pi} - y_{Пi})^2}{y_{Pi}} \qquad (4.29)$$

3. Визначається число ступенів свободи як $r = n - 2.$

4. Знаходиться теоретичне значення «хі-квадрат» за наперед визначеною довірчою ймовірністю. Ця довірча ймовірність має бути достатньо високою, щоб дослідник міг довіряти отриманим результатам (0,8-0,99). Якщо це значення більше розрахованого, модель вважається адекватною з визначеною довірчою ймовірністю. В іншому випадку – модель не адекватна, тобто, погано описує процес. Якість прогнозування теж розуміється з цією довірчою ймовірністю.

Для полегшення розрахунків можна звернутися до функцій , таких як **ХИ2ОБР(*β*;*r*)** та **ХИ2РАСП(**χ_P^2**;*r*)**, де β – довірча ймовірність*,* r – число степенів свободи, χ_P^2 – число, розраховане за (4.29). Перша з них повертає теоретичне значення розподілу «хі-квадрат» і дозволяє виконати розрахунки за означеним вище алгоритмом. Друга вираховує рівень ймовірності, з якою побудованій моделі можна довіряти.

4.6. Синтез динамічних моделей соціально-економічних систем

Якщо при аналізі соціально-економічної системи виявлено запізнювання, та вирахувані його параметри за (3.24) - (3.24), існує можливість синтезувати динамічні моделі, які відрізняються від статистичних використання диференційного та інтегрального числення.

У таких моделях вихідна змінна може бути представлена у вигляді суперпозиції її «ідеального» значення (відповідного не інерційного елементу) і складової, породжувані інерцією об'єкту (див. рис. 3.5). Тому при аналізі запізнювання і його впливу на поведінку елементу зручно розрізняти потенційні значення запізнювання вихідний змінної. Перше – $y^0\ (t) = c_1\ x\ (t)$ для «ідеального» виходу, друге – $y\ (t)$ для виходу із запізнюванням. Залежності для ідеального виходу можна отримати, синтезувавши статистичні моделі так, як це було описано вище, використовуючи значення вхідних і вихідних факторів, отримані після закінчення перехідного процесу.

Оскільки в процесі аналізу вже було отримано такі значення як $\tilde{T}$; ε та λ, то подальший синтез динамічної складової моделі залежить від форми зв'язку між входами і виходами в перехідному режимі, залежна від динамічних властивостей об'єкту. Її вибір здійснюється на основі якісного аналізу спостережуваного перехідного процесу, логічних міркувань, оцінки можливості отримання необхідної інформації. Слід зазначити, що перехідні режими в економічних системах надзвичайно складні і різноманітні. Тому вибір відповідної функції, що апроксимує ціле сімейство різних запізнювань, що виникають в системі, – завдання виключно важке, тим паче, що доводиться обмежуватися порівняно простими моделями, доступними з погляду інформаційного забезпечення і математичної обробки. Опишемо спочатку типові безперервні моделі запізнювання.

Простим є запізнювання у формі

$$y(t) = y^0(t - \tilde{T}); \quad t \geq \tilde{T}, \tag{4.30}$$

яка припускає, що вихід, що запізнюється, копіює вхід з лагом $\tilde{T}$, обчислюваним в безперервній шкалі часу. Інерційна ланка функціонує як лінія затримки, а

$$g_и(t) = \int_t^{t+\tilde{T}} y^0(t)\, dt. \tag{4.31}$$

Залежність (4.31) прийнятна для опису запізнювання в багатьох об'єктах зберігання і транспортування продукції. Нею користуються також як модель осередненого лага системи, що породжується безліччю запізнювань в її елементах (наприклад, середньою тривалістю виробничого циклу).

Найчастіше модель запізнювання будується в припущенні, що швидкість зміни виходу, що запізнюється, визначається величиною його відставання від потенційного виходу, тобто

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\lambda\,[y(t) - y^0(t)]. \tag{4.32}$$

Така гіпотеза досить добре узгоджується зі спостережуваною поведінкою економічних об'єктів і логікою перехідних режимів в інерційних елементах. .

У диференціальному рівнянні (4.32) коефіцієнт λ, відповідає швидкості зміни змінної $y(t)$ при відставанні виходу, що запізнюється, щодо потенційного, рівному одиниці; його називають *швидкістю реакції.*

Описувана модель може бути представлена в наступній еквівалентній формі

$$y(t) = \lambda \int_0^{\infty} e^{\lambda\theta} y^0(t - \theta)\, d\theta. \tag{4.33}$$

Тут – $f(\theta) = \lambda\, e^{-\lambda\theta}$ *вагова функція,* значення якої характеризують вплив попередніх вхідних дій на поточну величину виходу (ефект спадковості), що запізнюється, причому треба врахувати, що $\lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda\theta}\, d\theta = -e^{-\lambda\theta} \Big|_0^{\infty} = 1.$

Запізнювання у формі (4.30) або (4.33) називають *показовим (експоненціальним).*

Якщо потенційний вихід є ступінчастою функцією:

$$\begin{aligned} y^0(t) &= 0; \quad t \leq 0; \\ y^0(t) &= y^0; \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{4.34}$$

що породжена стрибкоподібною зміною інтенсивності вхідної змінної $x(t)$ об'єкту. Тоді рівняння (4.32) запишеться так:

$$\frac{dy(t)}{dt} + \lambda y(t) = \lambda y^0, \tag{4.35}$$

а його рішення за початкової умови *y (0)* = 0 має наступний вигляд:

$$y(t) = (1 - e^{-\lambda t})\, y^0. \tag{4.36}$$

Показове запізнювання достатнє добре описує перехідні режими, властиві багатьом реальним економічним процесам. Такі, наприклад, як зміни попиту споживання товару, викликані зниженням його ціни, процес освоєння капітальних вкладень на будівництво об'єкту і так далі Проте для моделювання запізнювання, наприклад, в попиті на новий товар, породжуваного психологічною інерцією споживачів, ця форма не підходить. Тут прийнятною є крива, показана на рис. 3.6. лінією *б*. Вона може бути отримана за допомогою моделі, утвореної двома послідовно сполученими інерційними ланками типу (4.32). Це запізнювання другого порядку описується системою з двох диференціальних рівнянь, коефіцієнти в яких визначаються з кривої *б*, а вихід однієї інерційної ланки є входом для іншої. Для деяких перехідних режимів синтез ланки запізнювання досягається за допомогою показових моделей третього і вищих порядків.

Опишемо тепер дискретні моделі запізнювання. Нехай – $\tau, \theta = 1, 2, \ldots$ номери часових інтервалів, а контрольовані моменти часу віднесені до їх кінців. Дискретна модель запізнювання, що функціонує як лінія затримки фіксованої тривалості $\tilde{T}$, описується співвідношенням (3.22), в якому час t і лаг $\tilde{T}$ цілочислові

$$y_\tau = y^0_{\tau-\tilde{T}}; \quad \tau \geqslant \tilde{T}. \tag{4.37}$$

У окремому, але поширеному випадку T приймають рівним одиниці (скажімо, як лаг приймають річний виробничий цикл) і $y_\tau = y^0_{\tau-1}$.

Разом з тим формула (4.37) сама є окремим випадком розподіленого запізнювання, при якому припускається, що вихід, що запізнюється, залежить від сукупності минулих значень потенційної змінної, узятих з вагами, що убувають β_θ. Тоді

$$y_\tau = \beta_1 y^0_{\tau-1} + \beta_2 y^0_{\tau-2} + \ldots = \sum_{\theta=1}^{N} \beta_\theta y^0_{\tau-\theta}, \tag{4.38}$$

Причому $\beta_\theta \leqslant \beta_{\theta+1}; \quad \sum_\theta \beta_\theta = 1.$

Приймаючи в (4.38) ваги що убувають по геометричній прогресії зі знаменником $r\ (0 < r < 1)$, отримаємо модель, що є дискретним аналогом показового запізнювання першого порядку:

$$y_\tau = (1-r)\,[y^0_{\tau-1} + r y^0_{\tau-2} + \ldots] = (1-r) \sum_{\theta=1}^{\infty} r^{\theta-1} y^0_{\tau-\theta}, \tag{4.39}$$

при цьому $(1-r) \sum_{\theta=1}^{\infty} r^{\theta-1} = 1.$

Відповідне цій формі кінцево-різницеве рівняння має вигляд:

$$\Delta y_\tau = \lambda\,[y^0_\tau - y_\tau], \tag{4.40}$$

де $\lambda = 1 - r$, а $y_{\tau+1} = y_\tau + \Delta y_\tau$; $\tau = 1, 2, \ldots$

4.7. Синтез моделей на формальній мові (нечіткі моделі)

Існують описові моделі на звичайній мові, які дозволяють зрозуміти якісні характеристики соціально-економічної системи. Але таки моделі не дозволяють отримати потрібні для їх вивчення, прогнозування і керування числові характеристики. В такому випадку варто застосувати синтез нечітких моделей, який базується на уявленні групи експертів про функціональну діяльність системи.

Нечіткі моделі базуються на поняттях нечітких множин, які представляють собою множину можливих значень нечіткої величини у формі функції приналежності виду $\boldsymbol{A = \{x/\square A(x)>0\}}$.

Хай E - універсальна множина, x - елемент E, а R – певна властивість. Звичайна (чітка) підмножина A універсальної множини E, елементи якої задовольняють властивість R, визначається як множина впорядкованої пари $A = \{\mu A\ (x)\ /x\}$, де $\mu A(x)$ – характеристична функція, що приймає значення 1, коли x задовольняє властивості R, і 0 – в іншому випадку.

Нечітка підмножина відрізняється від звичайної тим, що для елементів x з E немає однозначної відповіді "ні" щодо властивості R. У зв'язку з цим, нечітка підмножина A універсальної множини E визначається як множина впорядкованою парі $A = \{\mu A(x)\ /x\}$, де $\mu A(x)$ - характеристична функція приналежності (або просто функція приналежності), що приймає значення в деякій впорядкованій множині M (наприклад, $M = [0,1]$).

Розглянемо множину X всіх чисел від 0 до 10. Визначимо підмножину A множини X всіх дійсних чисел від 5 до 8. $A = [5,8]$

Покажемо функцію приналежності множині A, ця функція ставить у відповідність число 1 або 0 кожному елементу в X, залежно від того, належить даний елемент підмножині A чи ні. Результат представлений на рис. 4.9.

Тепер опишемо множину молодих людей. Формально можна записати так

B = { множина молодих людей}.

Оскільки, взагалі, вік починається з 0, то нижня межа цієї множини повинна бути нулем. Верхню межу визначити складніше. Спочатку встановимо верхню межу, скажімо, рівну 20 рокам. Таким чином, маємо B як чітко обмежений інтервал, буквально: $B = [0,20]$. Виникає питання: чому хтось в свій двадцятирічний ювілей – молодий, а відразу наступного дня вже не молодий? Очевидно, це структурна проблема, і якщо пересунути верхню межу в іншу точку, то можна поставити таке ж питання.

Природніший шлях створення множини B полягає в ослабленні строгого ділення на молодих і не молодих. Зробимо це, виносячи не тільки чіткі думки "Так, він належить множині молодих людей" чи ні, вона не належить множині молодих людей", але і гнучкі формулювання "Так, він належить до досить молодих людей" чи ні, він не дуже молодий".

Розглянемо як за допомогою нечіткої множини визначити вираз "він ще молодий".

У першому прикладі ми кодували всі елементи множини за допомогою 0 чи 1. Простим способом узагальнити дану концепцію є введення значень між 0 і 1. Реально можна навіть допустити нескінченне число значень між 0 і 1, в одиничному інтервалі $I = [0, 1]$.

Для наочності приведемо характеристичну функцію множини молодих людей, як і в першому прикладі.

Хай $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $M = [0,1]$; A – нечітка множина, для якої

$\mu A(x_1)=0,3$; $\mu A(x_2)=0$; $\mu A(x_3)=1$; $\mu A(x_4)=0,5$; $\mu A(x_5)=0,9$

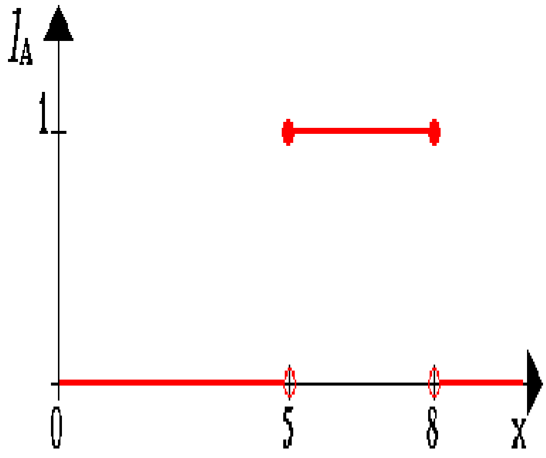
Тоді A можна представити у вигляді:

$$A = \{0,3/x_1;\ 0/x_2;\ 1/x_3;\ 0,5/x_4;\ 0,9/x_5\ \} \text{ або}$$

$$A = 0,3/x_1 + 0/x_2 + 1/x_3 + 0,5/x_4 + 0,9/x_5$$

(знак "+" є операцією не складання, а об'єднання) або

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$A =$	0,3	0	1	0,5	0,9



4.9. Зображення приналежності звичайної (чіткої) множини

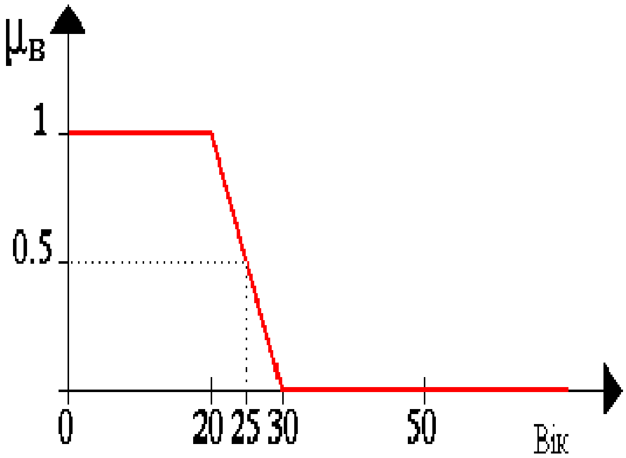


Рис. 4.10. Характеристична функція множини молодих людей

Сукупність функцій приналежності для кожного терма з базової терм-множини T зазвичай зображуються разом на одному графіку. На рис. 4.11 приведений приклад описаної вище лінгвістичної змінної «Ціна акції.

Рис. 4.11. Опис лінгвістичних змінних для категорії «Ціна акції»: «низька», «помірна» та «висока».

Непрямі методи визначення значень функції приналежності використовуються у випадках, коли немає елементарних вимірних властивостей для визначення нечіткої множини. Як правило, це методи попарних порівнянь. Якби значення функцій приналежності були відомі, наприклад, $\mu A(x_i) = w_i$, i=1,2,...,n,, тоді попарні порівняння можна представити матрицею відносин А = $\{a_{ij}\}$, де a_{ij}=w_i/w_j (операція ділення).

Простіше всього створення таких функцій приналежності проводити з групою експертів, які для кожної функції приналежності виражають власну думку щодо приналежності, наприклад, ціни акції до категорії «низька». Нехай їх було 10. Коли запитали при ціну в 100 одиниць – всі 10 сказали, що ціна низька. Тут $\mu A(100)$=10/10 = 1,0. Коли запитали про ціну 110 одиниць – тільки дев’ятеро сказали, що ціна ще низька, отже $\mu A(110)$=9/10 = 0,9. Коли їх було запропоновано ціну в 115 грошових одиниць – п'ятеро сказали, що ціна ще низька, тобто $\mu A(115)=5/10 = 0{,}5$. А для ціни в 120 – ніхто з експертів не погодився, що ціна є низькою, отже $\mu A(120)=0/10 = 0{,}0$.

Такий алгоритм дозволяє побудувати функцію приналежності до певної характеристики соціально-економічної системи. Особливо актуальним є не чітке визначення критеріальних значень коефіцієнтів, що характеризують роботу підприємства, оскільки рекомендовані їх значення завжди подаються в певному діапазоні.

Існує понад десяток типових форм кривих для завдання функцій приналежності. Найбільшого поширення набули: трикутна, трапецеїдальна функції та функція приналежності Гауса.

Трикутна функція приналежності визначається трійкою чисел (*a,b,c*), і її значення в точці *x* обчислюється згідно виразу:

$$MF(x) = \begin{cases} 1-\dfrac{b-x}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1-\dfrac{x-c}{c-b}, & b \le x \le c \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}, \tag{4.41}$$

При (*b-a*)=(*c-b*) маємо випадок симетричної трикутної функції приналежності, яка може бути однозначно задана двома параметрами з трійки (*a,b,c*).

Аналогічно для завдання трапецеїдальній функції приналежності необхідна четвірка чисел (*a,b,c,d*)

$$MF(x) = \begin{cases} 1-\dfrac{b-x}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & b \le x \le c \\ 1-\dfrac{x-c}{d-c}, & c \le x \le d \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}, \tag{4.42}$$

При (*b-a*)=(*d-c*) трапецеїдальна функція приналежності приймає симетричний вигляд.

Функція приналежності гауссова типу описується формулою

$$MF(x) = \exp\left[-\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2\right], \tag{4.43}$$

і оперує двома параметрами. Параметр *c* позначає центр нечіткої множини, а параметр σ відповідає за крутизну функції.

Інколи застосовують кругову функцію виду

$$\mu(x) = \frac{1}{1+\dfrac{(x-a)^2}{b}}/x \quad \text{або} \quad \mu(x) = a\sqrt{\frac{x}{x_{max}}\left(1-\frac{x}{x_{max}}\right)}, \tag{4.44}$$

Де *a, b* – діапазон значень x, в межах якого зображується півколо, x_{max} – найбільше значення аргументу, до якого сягає чверть кола. На рис. 4.12 представлені деякі з описаних функцій.

a *b* *c*

Рис. 4.12.. Типові кусочно-лінійні функції приналежності; трикутна (*a*) та трапецеїдальна (*b*), Гауса (*c*).

Визначимо деякі поняття нечітких множин. Хай M = [0,1] і A – нечітка множина з елементами з універсальної множина E і з множиною визначення M

- Величина $\mu A(x)$ $\sup\limits_{x \in E}$ називається висотою нечіткої множини A. Нечітка множина A є нормальною, якщо її висота дорівнює 1, тобто верхня межа її функції приналежності дорівнює 1 ($\sup\limits_{x \in E} \mu A(x)=1$). При $\mu A(x) <1$ нечітка множина називається субнормальною.
- Нечітка множина є порожньою, якщо $\forall x \in E$ μ $A(x)=0$. Не порожню субнормальну множину можна нормалізувати за формулою $\mu A(x) := \dfrac{\mu_a(x)}{\sup\limits_{x \in E} \mu_a(x)}$
- Нечітка множина є унімодальною, якщо $\mu A(x)=1$ лише для одного x з E.
- Носієм нечіткої множини А є звичайна підмножина з властивістю $\mu A(x) >0$, тобто носій $A = \{x/\mu A(x)>0\}$ $\forall$ $x \in E$
- Елементи $x \in E$, для яких $\mu A(x)=0{,}5$ називаються точками переходу множини A.

Основні операції з функціями приналежності зводяться до операцій з їх інтервалами достовірності. А операції з інтервалами, у свою чергу, виражаються через операції з дійсними числами - межами інтервалів:

- операція "складання":

$$[a_1, a_2]\ (+)\ [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2] \tag{4.45}$$

- операція "віднімання":

$$[a_1, a_2]\ (-)\ [b_1, b_2] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1] \tag{4.46}$$

- операція "множення":

$$[a_1, a_2]\ (\times)\ [b_1, b_2] = [a_1 \times b_1, a_2 \times b_2], \tag{4.47}$$

- операція "ділення":

$$[a_1, a_2]\ (/)\ [b_1, b_2] = [a_1 / b_2, a_2 / b_1], \tag{4.48}$$

- операція "піднесення до ступеня":

$$[a_1, a_2]\ (\wedge)\ i = [a_1^{\,i}, a_2^{\,i}]. \tag{4.49}$$

Аналізуючи властивості нелінійних операцій з нечіткими числами (наприклад, ділення), дослідники приходять до висновку, що форма функцій приналежності результуючих нечітких чисел часто близька до трикутної. Тобто, якщо ми вводимо опис трикутного числа набором абсцис вершин (a, b, c), то можна записати

$$(a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) \equiv (a_1 + a_2;\ b_1 + b_2;\ c_1 + c_2) \qquad (4.50)$$

На такому ж принципі базується і синтез моделі управління соціально-економічними системами.

Основою для синтезу нечіткого логічного управління є база правил, що містить нечіткі вислови у формі «Якщо-то» і функції приналежності для відповідних лінгвістичних термів (тобто, нечітких множин, які визначають лінгвістичну змінну). При цьому повинні дотримуватися наступні умови:

1. Існує хоч би одне правило для кожного лінгвістичного терма вихідний змінної.
2. Для будь-якого терма вхідної змінної є хоча б одне правило, в якому цей терм використовується як передумова (ліва частина правила).

Інакше має місце неповна база нечітких правил.

Приклад. Групі експертів з 8 осіб було запропоновано визначити дії керівництва щодо прийнятного рівень коефіцієнтів швидкої ліквідності та платоспроможності, нижче якого робота підприємства вважається незадовільною. Такими діями було визнано збільшення статутного капіталу пропорційно величині зменшення означених показників. Тобто, потрібно синтезувати модель управління статутним капіталом підприємства.

Вирішення задачі почнемо з визначення діапазону значень аргументів x для трьох нечітких множин: A_1 – множина значень коефіцієнта швидкої ліквідності , A_2 – множина значень коефіцієнта платоспроможності, B – множина значень збільшення статутного капіталу на 10% відносно рівня зменшення суми двох означених коефіцієнтів. В спеціальній літературі було означено прийнятний рівень першого коефіцієнта 0.6 - 0.8, а для другого – більше 0.5. Тому діапазон можливих значень для обох коефіцієнтів було обрано 0,2 - 0,8. Діапазон можливих значень x для множини B – 0,4 – 1,6.

Потім було проведено опитування експертів щодо незадовільних значень обох коефіцієнтів. Результати опитування наведені в наведеній нижче таблиці.

Коефіцієнт	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
	Кількість експертів, які вважають такий рівень коефіцієнту незадовільним						
швидкої ліквідності	8	8	8	7	4	1	0
платоспроможності	8	8	7	6	2	0	0

За цією таблицею можна побудувати нечіткі множини, розрахувавши степінь приналежності як результат ділення числа згодних експертів на їх загальну кількість:

$$A_1 = \{1{,}0/0{,}2;\ 1{,}0/0{,}3;\ 1{,}0/0{,}4;\ 0{,}875/0{,}5;\ 0{,}5/0{,}6;\ 0{,}125/0{,}7;\ 0/0{,}8\}.$$

$$A_2 = \{1{,}0/0{,}2;\ 1{,}0/0{,}3;\ 0{,}875/0{,}4;\ 0{,}75/0{,}5;\ 0{,}25/0{,}6;\ 0/0{,}7;\ 0/0{,}8\}.$$

Визначимо тепер прийнятний рівень збільшення рівня статутного капіталу в залежності від суми коефіцієнтів. Результати опитування наведені в наступній таблиці.

Сума кое-фіцієнтів	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
	Кількість експертів, які вважають, що при такому значенні суми двох коефіцієнтів, статутний капітал потрібно збільшити на 10%.						
швидкої ліквідності	8	7	5	1	0	0	0

За цією таблицею можна побудувати нечітку множину рішень збільшення статутного капіталу, розрахувавши степінь приналежності як результат ділення числа згодних експертів на їх загальну кількість:

$$B = \{1,0/0,4;\ 0,875/0,6;\ 0,625/0,8;\ 0,125/1,0;\ 0/1,2;\ 0/1,4;\ 0/1,6\}.$$

Визначення числових характеристик трьох нечітких множин дозволяє синтезувати структуру управління соціально-економічної системи, яка складається з двох коефіцієнтів у вигляді: ЯКЩО x_1 це A_1 . І . x_2 це A_2, ТО y це B.

4.8. Алгебра логіки

Своїм існуванням ця наука зобов'язана англійському математикові Джорджу Булю, який досліджував **логіку висловів** (начало XIX в).

Вислови будуються над множиною {В,,,, 0, 1}, де *В* – не порожня множина, над елементами якої визначено три операції:

$\neg$ *заперечення* – унарна операція, тобто операція з однією змінною.

$\wedge$ *кон'юнкція* – бінарна операція, тобто операція з двома змінними.

$\vee$ *диз'юнкція* – бінарна операція.

а також дві константи — логічний нуль **0** і логічна одиниця **1.**

Об'єкти з двома можливими станами характеризуються булевими змінними, які здатні приймати лише два різні значення. Для позначення цих двох значень зазвичай використовуються цифри 0 і 1 або букви Б (БРЕХНЯ) та І (ІСТИНА). Д. Буль позначив це як true і false. Тому частіше всього використовуються саме такі слова англійської мови.

Відносини між булевими змінними представляються булевими функціями, які подібно до числових функцій можуть . залежати від однієї, двох і, взагалі *n* змінних (аргументів). Запис $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ означає, що *у* — функція аргументів $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Найважливіша особливість булевих функцій полягає в тому, що вони, як і їх аргументи, приймають свої значення з двоелементної множини (0,1), або (І, Б}, тобто характеризуються одним з двох можливих станів.

Основними в двозначній логіці є наступні три функції.

Заперечення – функція $y = f(x)$ що приймає значення 1, коли $x = 0$, і значення 0, коли $x = 1$; вона позначається $y = \bar{x}$ (читається «не *x*»).

Диз'юнкція – функція, що приймає значення 0 тоді і тільки тоді, коли обидва аргументи мають значення 0; вона позначається $y = x_1 \vee x_2$ (читається «x_1 àáî x_2»). В інших випадках вона дорівнює 1.

Кон'юнкція – функція, що приймає значення 1 тоді і тільки тоді, коли обидва аргументи мають значення 1; вона позначається $y = x_1 \wedge x_2$ (читається «x_1 ³ x_2»). В інших випадках вона дорівнює 0.

4.8.1. Логічні операції

Легко показати, що на даній множині *B* можна задати чотири унарні і шістнадцять бінарних відносин, представлених в таблицях 3.1. та 3.2., проте всі вони можуть бути отримані через суперпозицію (можливі варіанти комбінацій) трьох вибраних операцій.

Спираючись на цей математичний інструментарій, логіка висловів вивчає вислови і предикати. Також вводяться додаткові операції, такі як еквівалентність «$\leftrightarrow$» («тоді і тільки тоді, коли»), імплікація «$\rightarrow$» («отже»), складання по модулю два «$\oplus$» («що виключає або»), штрих Шеффера, стрілка Пірса та інші.

Логіка висловів послужила основним математичним інструментом при створенні комп'ютерів. Вона легко перетвориться в бітову логіку: істинність вислову позначається одним бітом (0 – БРЕХНЯ, 1 – ІСТИНА); тоді операція $\neg$ набуває сенсу віднімання з одиниці; $\vee$ – складання не по модулю; & – множення; $\leftrightarrow$ – рівність; $\oplus$ – в буквальному розумінні складання по модулю 2 (АБО, що виключає – XOR); $|$ – не перевищення суми над 1 (тобто A $|$ B = (A + B) <= 1).

Згодом булева алгебра була узагальнена від логіки висловів шляхом введення характерних для логіки висловів аксіом. Це дозволило розглядати, наприклад, логіку, потрійну логіку (коли є три варіанти істинності вислову: «істина», «брехня» і «не визначено») і ін.

Таблиця 4.4

Унарні логічні операції

x	g_1 **(¬)**	g_2 **(=)**	g_3 **(1)**	g_4 **(0)**
0	1	0	1	0
1	0	1	1	0

$g_2(x)$ — тотожна функція ($g_2(x)$= x)

$g_1(x)$ — заперечення / негація ($g_1(x)$= ¬ x = x')

Таблиця 4.5

Бінарні логічні операції

x	***y***	f_1 ($\wedge$)	f_2 ($\vee$)	f_3 ($\equiv$) $x_1 \approx x_2$	f_4 ($\oplus$)	f_5 ($\subset$)	f_6 ($\supset$) $x_1 \to x_2$	f_7 ($\downarrow$)	f_8 ($|$)
0	0	0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0	1	1	0	0
x	***y***	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0	1	1	1	0

Тут **0** і **1** – тотожні нулю і одиниці відповідно

$\boldsymbol{f_1}(x, y)$ – кон'юнкція ($\boldsymbol{f_1}(x, y)= x\&y = xy = \min(x, y)$)

$\boldsymbol{f_2}(x, y)$ – диз'юнкція ($\boldsymbol{f_2}(x, y)= xy = \max(x, y)$)

$\boldsymbol{f_3}(x, y)$ – еквівалентність ($\boldsymbol{f_3}(x, y)= xy$)

$\boldsymbol{f_4}(x, y)$ – сума по модулю два ($\boldsymbol{f_4}(x, y)= xy$)

$\boldsymbol{f_5}(x, y)$ – імплікація від y до x ($\boldsymbol{f_5}(x, y)= xy$)

$\boldsymbol{f_6}(x, y)$ – імплікація від x до y ($\boldsymbol{f_6}(x, y)= xy$)

$\boldsymbol{f_7}(x, y)$ – стрілка Пірса = функція Таггера = функція Вебба («антидиз'юнкція») ($\boldsymbol{f_7}(x, y)= xy$).

$\boldsymbol{f_8}(x, y)$ – штрих Шеффера («антикон'юнкція») ($\boldsymbol{f_8}(x, y)= xy$)

$\boldsymbol{f_9}(x, y), \boldsymbol{f_{10}}(x, y)$ – інверсії імплікацій $\boldsymbol{f_5}$ і $\boldsymbol{f_6}$

$\boldsymbol{f_{11}}$ **-** $\boldsymbol{f_{14}}$ – функції тільки одного аргументу

$\boldsymbol{f_{15}}, \boldsymbol{f_{16}}$ – тотожність.

Всі перелічені вище функції називаються **логічними зв'язками**.

4.8.2. Властивості логічних операцій

1. Комутативність: $xy = yx \quad \circ \in \{\&, \vee, \oplus, \sim, |, \downarrow\}$.
2. Ідемпотентність: $xx = x \quad \circ \in \{\&, \vee\}$.
3. Асоціативність: $(xy)\circ z = x\circ(yz) \quad \circ \in \{\&, \vee, \oplus, \sim\}$.
4. Дистрибутивність кон'юнкцій і диз'юнкції щодо диз'юнкції, кон'юнкції і суми по модулю два відповідно:
   - $x\wedge(y\vee z) = (x\wedge y)\vee(x\wedge z)$,
   - $x\vee(y\wedge z) = (x\vee y)\wedge(x\vee z)$,
   - $x\wedge(y\oplus z) = (x\wedge y)\oplus(x\wedge z)$.
5. Закони де Моргана:
   - $\neg(x\wedge y) = (\neg x)\vee(\neg y)$,
   - $\neg(x\vee y) = (\neg x)\wedge(\neg y)$.
6. Закони поглинання:
   - $x\wedge(xy)= x$
   - $x\vee(xy)= x$.
7. Інші (1):
   - $x\wedge(\neg x) = x\wedge 0 = x\oplus x = 0$.
   - $x\vee(\neg x) = x\vee 1 = x\sim x = x\rightarrow x = 1$.
   - $x\vee x = x\wedge x = x\wedge 1 = x\vee 0 = x\oplus 0 = x$.
   - $x\oplus 1 = x\rightarrow 0 = x\sim 0 = x|x = x\downarrow x = \neg x$.
   - $\bar{\bar{x}} = x$.
8. Інші (2):

- $x \oplus y = (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y) = (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$.
- $x \sim y = \overline{x \oplus y} = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) = (x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y)$
- $x \to y = \bar{x} \vee y = ((x \wedge y) \oplus x) \oplus 1$.

9. Інші (3) (Доповнення законів де Моргана):
   - $x \mid y = \neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$.
   - $x \downarrow y = \neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$.

10. Закони склеювання: $(a \vee \bar{b}) \wedge (a \vee b) = a$

$$(a \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge b) = a$$

11. Ще два очевидних закони

$x \vee \bar{x} = 1;$ $x \wedge \bar{x} = 0.$

4.8.3. Правила перетворення логічних формул, які мають більше 2-х змінних

З простих формул можна конструювати складніші. Позначатимемо довільні формули як функції від деякого числа аргументів, наприклад $f(A)$ або $g(x_1, x_2 ... x_n)$. У дужках перераховуються змінні, що входять у формулу або цілі фрагменти формули, що є єдине ціле, Якщо список змінних неважливий, то писатимемо багатокрапку, наприклад $f(...)$. Ці дужки важливі для того, щоб відрізнити два випадки:

1. Окрема вільна змінна f, що має певну область значень (наприклад, true і false, якщо змінна булева).
2. Ціла формула $f(...)$, в яку може входити багато змінних (або одна, або жодній), кожна з яких, в принципі, може мати свою область значень.

Для багатьох розділів математики прийняті правила побудови формул по певних правилах. Для булевої алгебри ці правила такі:

1. true – булева формула (проста).
2. false – булева формула (проста).
3. Одна окрема булева змінна – формула (проста). Якщо булева формула $f(...)$, то з неї можна побудувати формули:

$$(f(...))$$
$$\sim(f(...)).$$

4. Якщо є дві булеві формули (можливо однакові) $f(...)$ і $g(...)$, то з них можна побудувати формули:

$$(f(...) \vee g(...))$$
$$(f(...) \oplus g(...))$$
$$(f(...) \& g(...))$$
$$(f(...) \Leftrightarrow g(...))$$
$$(f(...) \Rightarrow g(...))$$

$$(f(\ldots) \downarrow g(\ldots))$$
$$(f(\ldots) \mid g(\ldots))$$
$$(f(\ldots) \Leftarrow g(\ldots))$$
$$(\mathrm{f}(\ldots) \prec g(\ldots))$$
$$(f(\ldots) \succ g(\ldots))$$

Таким чином, формули будуються послідовно, крок за кроком від простих формул ("атомів") до все більш складних формул ("молекул"), які усередині себе містять простіші. Кожну формулу, яка використовується як складова частина для побудови складнішої формули, називатимемо підформулою. Вище за підформулу позначені як $f(\ldots)$ і $g(\ldots)$.

Зовнішні дужки в правилах покликані дотримати той порядок операцій, який відповідає порядку побудови формули з атомів. Зайві дужки можна прибрати. Процес прибирання і відновлення дужок виглядає точно так, як і в шкільній алгебрі: залежно від порядку операцій. Коли дужки відсутні, то в першу чергу виконується операція "~" (перший, вищий пріоритет), потім "&" (другий пріоритет), потім "$\vee$" і "$\oplus$" (третій пріоритет), потім всі останні (четвертий, нижчий пріоритет). Операції одного пріоритету виконуються зліва направо.

Цей порядок пріоритетів поширений в найбільш сучасній математичній і комп'ютерній літературі. Щоб його запам'ятати, звернете увагу на схожість з арифметичними операціями зміни знаку ("-" аналог "~"), множення (аналогічна операція "&" іноді називається логічним множенням), складання (аналогічні операції $\vee$ і $\oplus$) і операції порівняння (значки операцій $\Leftrightarrow$і $\Rightarrow$) зовні схожі на значки операцій порівняння =, <, ≥ і ін.).

Всі булеві формули мають одну дуже важливу загальну властивість:

Істинність булевої формули залежить тільки від істинності значень змінних.

Можете проглянути ще раз визначення кожної з булевих операцій і переконатися: всюди обчислення істинності подібних формул зводиться до розгляду булевих величин, які відображають істинність яких-небудь висловів. Величини просто підставляються в таблицю, з таблиці виходить відповідь, і більше ця відповідь ні від чого не залежить.

Не має значення, які конкретно вислови аналізуються, якщо ми вже визначили їх істинність. Як наслідок, ми можемо складати таблиці істинності і для складніших булевих формул.

Наприклад, розглянемо формулу

$$(\sim X \Leftrightarrow Y) \;\&\; (X \oplus Y) \vee \mathrm{false}$$

Складаємо таблицю, виписавши в ній всі можливі комбінації для істинності змінних:

X	Y	$(\sim X \Leftrightarrow Y) \;\&\; (X \oplus Y) \vee \mathrm{false}$
false	false	
false	true	
true	false	
true	true	

Визначимо порядок дій, згідно дужкам і пріоритетам:

$$\overset{1}{(\sim X} \overset{2}{\Leftrightarrow} Y) \overset{4}{\&} (X \overset{3}{\oplus} Y) \overset{5}{\vee} \text{false}$$

Для кожної операції визначаємо, звідки узяти операнди. Операнд може бути узятий

- безпосередньо з формули, якщо у формулі на місці операнда стоїть константа true або false;
- з таблиці істинності, якщо у формулі на місці операнда стоїть змінна;
- зі змінної, в якій був збережений проміжний результат, якщо у формулі на місці операнда стоїть складна формула.

Для кожної операції виконуємо обчислення істинності, згідно таблиці істинності цієї операції. Результат позначаємо проміжною змінною. Результат останньої операції буде результатом обчислення всієї формули. В даному випадку порядок дій такий:

1. Обчислити $\sim X$, позначити як $R1$.
2. Обчислити $R1 \Leftrightarrow Y$, позначити як $R2$.
3. Обчислити $X \oplus Y$, позначити як $R3$.
4. Обчислити $R2 \,\&\, R3$, позначити як $R4$.
5. Обчислити $R4 \vee \text{false}$, позначити як $R5$.
6. Прийняти $R5$ як результат обчислень.

Виконаємо ці дії для конкретного рядка таблиці істинності, де X = true, Y = false:

1. Обчислити $\sim X$, позначити як $R1$ = false.
2. Обчислити $R1 \Leftrightarrow Y$, позначити як $R2$ = true.
3. Обчислити $X \oplus Y$, позначити як $R3$ = true.
4. Обчислити $R2 \,\&\, R3$, позначити як $R4$ = true.
5. Обчислити $R4 \vee \text{false}$, позначити як $R5$ = true.
6. Прийняти $R5$ = true як результат обчислень.

Після цього можна заповнити один елемент таблиці істинності:

Аналогічно заповнюємо осередки, що залишилися:

X	Y	(~X ⇔Y) & (X Y) ∨false
false	false	false
false	true	true
true	false	true
true	true	false

В процесі обчислення можлива деяка оптимізація. Замість повторення одних і тих же дій можна обмежитися єдиним обчисленням, після чого використовувати значення, позначене в проміжній змінній. Для прикладу розглянете формулу $(A \vee\sim B) \,\&\, \sim(A \vee\sim B) \,\&\, \sim\sim(A \vee\sim B)$. Складіть для неї інструкцію по обчисленню і оптимізуйте її так, щоб не обчислювати $(A \vee\sim B)$ тричі.

4.8.4. Вислови і операції над ними

Наведені вище функції, які можуть бути використані як елемент логічного вислову. На їх підставі можна розраховувати результат деяких логічних посилок.

Під *висловом* розуміють граматично правильну оповідну пропозицію, про яку можна сказати, що воно або *істинно*, або *помилково*, наприклад: «Київ – столиця України», «Париж – столиця Росії». Перший вислів *істинний*, другий – *помилковий*.

Візьмемо два *прості* вислови:

A = «На вулиці йде дощ», B = «Над моєю головою розкрита парасолька».

За допомогою п'яти логічних зв'язок можна утворити наступні *складні* вислови:

1) *заперечення*: $\underline{A}$ = «На вулиці не йде дощ»;

2) *диз'юнкція*: $\underline{A} \vee B$ = «На вулиці *не* йде дощ *або* над моєю головою розкрита парасолька»;

3) *кон'юнкція*: $A \wedge \underline{B}$ = «На вулиці йде дощ *і* над моєю головою *не* розкрита парасолька»;

4) *імплікація*: $A \rightarrow B$ = «*Якщо* на вулиці йде дощ, *то* над моєю головою розкрита парасолька»

5) *еквівалентність*: $B \sim A$ = «Над моєю головою розкрита парасолька *тоді і тільки тоді, коли* на вулиці йде дощ».

Інші логічні зв'язки, відомі нам за логікою Буля, в логіці вислови не використовуються. Тепер зробимо з приводу кожної з п'яти вказаних зв'язків невеликі зауваження.

Заперечення. Вислів A по-іншому можна прочитати так: «*Істинне те, що на вулиці йде дощ». Тому, якщо* $A = 0$*, то це означає, що на вулиці не йде дощ.* Вислів, що доповнює $\underline{A}$ також орієнтується на дійсний вислів, тобто його слід розуміти як *«Істинне те, що на вулиці не йде дощ».* Тоді $\underline{A} = 1$ позначатиме ту ж саму ситуацію, що і у попередньому випадку, тобто відсутність дощу.

Диз'юнкція. У нашому конкретному прикладі диз'юнкція двох висловів A і B, в принципі, може мати на увазі і кон'юнкцію цих же висловів. Проте часто граматичний союз *або* не включає союз *і*. Хай дані два інших вислови:

P = «Петро знаходиться в кінотеатрі»

Q = «Петро знаходиться в басейні».

Якщо для нас не так важливо, де знаходиться Петро, то ми, звичайно, можемо використовувати союз *або* з включеним в нього союзом *і*, формально записавши:

$P \vee Q$= «Петро знаходиться в кінотеатрі *або/і* в басейні».

Але якщо потрібно точно встановити, де знаходиться Петро, то ми зобов'язані виключити випадок одночасної присутності Петра в кінотеатрі і басейні, тобто формально записати:

$(P \vee Q) \wedge (\underline{P \wedge Q})$.

Подібні вислови називаються *строгою диз'юнкцією*, яка означає «*або P, або Q, але не P і Q* одночасно». І хоча, з погляду логіки Буля, ця логічна операція рівносильна операції *симетричної різниці:*

$P + Q = (P \vee Q) \wedge (\underline{P} \vee \underline{Q})$,

історично склалося так, що символ « + » у логіці висловів не використовується.

Кон'юнкція. Логічний союз і необов'язково повинен представлятися через граматичний союз *і*. Зокрема, вище приведений вираз можна прочитати трохи інакше:

$A \wedge \underline{B}$ = «На вулиці йде дощ, *а* над моєю головою не розкрита парасолька»;

Союзи *а* і *але* по змісту часто співпадають з союзом *і*, тому вони використовуються в складних кон’юнктивних пропозиціях. Проте мовна ситуація може стати такій, що союз *і* перестає грати роль *кон'юнкції*; приведемо дві пропозиції:

$P \wedge Q$= «Йому стало страшно і він убив людину».

$Q \wedge P$ =«Он убив людину і йому стало страшно».

Тут не комутативність двох простих пропозицій очевидна, оскільки ми маємо справу з прихованою *імплікацією,* коли одна проста пропозиція обумовлює інше.

$Q \rightarrow P$ = «Коли він убив людину, йому стало страшно».

Імплікація. Вислів типу «*якщо A*, *то B*» носить *пояснюючий* характер. Він як би роз'яснює нам, чому має місце подія *B* – тому що мала місце подія *A*. Ця властивість імплікації особлива цінно для логіки висловів, про що ми детально зупинимося в наступному підрозділі.

Пояснюючий характер імплікації тісно пов'язаний з *причинно-наслідковим відношенням*, при якому *A* виступає в ролі *причини*, а *B* – *слідства*. Причинно-наслідковий зв'язок між *A* і *B* граматично може бути оформлена пропозиціями: «*A* є достатньою підставою для *B*», «*B*, тому що *A*», «*B* за умови виконання *A*» і так далі Якщо під *A* і *B* розуміти колишні вислови, то результат причинно-наслідкового відношення можна оформити наступною таблицею істинності. Другий рядок таблиці говорить про відсутність причинно-наслідкового відношення між подіями *A* і *B*.

Таблиця 4.6

A	B	$A \rightarrow B$	Результати
0	0	1	Залишуся сухим
1	0	0	Вимокну
0	1	1	Залишуся сухим
1	1	1	Залишуся сухим

Еквівалентність. Вислів «*A* еквівалентно *B*» може бути з успіхом замінено на «*A* рівно *B*», «*A* тотожно *B*», «*A* рівносильне *B*», «*A* тоді і тільки тоді, коли

B» і так далі Оскільки еквівалентність виражається через кон'юнкцію двох імплікацій:

$A \sim B = (A \to B) \wedge (B \to A)$,

то це відношення часто виникає при одночасному виконанні двох умов: «з *A* слідує *B*» і «з *B* слідує *A*». Таким чином, при еквівалентності двох подій неможливо одному з них приписати роль тільки *причини, а іншому – тільки следствия. Наприклад, дві події:*

R = «Наростання анархії в суспільстві»

S = «Падіння авторитету влади»

є цілком подіями рівного порядку, оскільки причиною наростання анархії в суспільстві є падіння авторитету влади; і навпаки, падіння авторитету влади відбувається із-за наростання анархії в суспільстві. У даній ситуації безглуздо звинувачувати тільки владу в слабкості і некомпетентності або звинувачувати народ в несвідомості і недисциплінованості.

Події *R* і *S* утворюють логічне коло; їх називатимемо сильно зв'язаними подіями і виражати наступними тотожними формами:

$R \sim S = (R \wedge S) \sim (R \vee S) = (R \vee S) \to (R \wedge S)$.

Поняття «Сильної зв'язаності» співпадає з поняттям «еквівалентності», якщо мова йде про двох подіях. Але візьмемо, наприклад, добре відоме пояснення, на чому тримається Земля:

Земля (X) тримається на трьох китах (Y), кити (Y) тримаються на водах океану (Z), океан (Z) тримається на Землі (X).

Послідовність, куди входять три названі об'єкти *X, Y* і *Z*, теж утворюють логічне коло:

$(X \to Y) \wedge (Y \to Z) \wedge (Z \to X)$.

Проте відношення еквівалентності (бути взаємною опорою один для одного) між всіма трьома об'єктами, тобто

$$X \sim Y \sim Z$$

тут не виникає, та і не може виникнути, оскільки ми не стверджуємо, що Земля є безпосередньою опорою для китів ($X \sim Y$), або що кити є безпосередньою опорою для вод океану ($Y \sim Z$). Тому еквівалентність в даному випадку виявляється у вельми своєрідній формі:

$(X \wedge Y \wedge Z) \sim (X \vee Y \vee Z)$ або

$(X \vee Y \vee Z) \to (X \wedge Y \wedge Z)$,

що можна тлумачити у разі операції еквівалентності як: одночасна поява всіх трьох опор відбудеться *тоді і тільки тоді, коли виникне хоч би одна з опор, і навпаки; для операції імплікації: якщо* виникне яка-небудь одна з опор, *то* це приведе до появи всіх трьох опор. Таким чином, *сильна зв'язаність*, або *логічне коло*, є *не логічна операція, а щось проміжне між причинно-наслідковим відношенням і відношенням еквівалентності. Подібні аномальні* відносини виникають нерідко, наприклад, між членами злочинної організації, де всі зв'язано круговою порукою, чиновники часто пускають людину по колу і він не може знайти крайнього з них і так далі. Всі ці соціальні явища випадають з розгляду математичної логіки.

Хай x_1 і x_2 — деякі вислови, які можуть бути істинними (1) або помилковими (0), наприклад: «Я піду в театр» (x_1) і «Я зустріну друга» (x_2). Диз'юнкцією $y = x_1 \vee x_2$ є складний вислів «Я піду в театр *або* зустріну друга», а кон'юнкцією $y = x_1 \wedge x_2$ – вислів «Я піду в театр *і* зустріну друга».

Отже, вислови можна розглядати як двійкові змінні, а зв'язки «не», «або», «і», за допомогою яких утворюються складні вислови, – як операції над цими змінними. У алгебрі висловів використовуються ще дві операції: *імплікація* $x_1 \rightarrow x_2$ відповідна зв'язці «*якщо, то»* і е*квіваленція* $x_1 \approx x_2$ відповідна зв'язці «*якщо і тільки якщо*».

У нашому прикладі імплікацією буде вислів: «Якщо я піду в театр, то зустріну друга», а еквіваленцією – «Я піду в театр, якщо і тільки якщо зустріну друга». Як видно з таблиць, імплікація висловів помилкова тільки у разі, коли перше з простих висловів істинно, а друге помилково. Еквіваленція є дійсним висловом, якщо обидва прості вислови істинні або помилкові одночасно.

Позначивши буквами прості вислови, можна представити складний вислів формулою за допомогою відповідних зв'язок. Наприклад, вислову «Якщо тиск масла на кульку клапана більше зусилля його пружини (x_1), то масло відкриває клапан (x_2) і частково перетікає з нагнітальної порожнини у впускну порожнину (x_3) відповідає формула $x_1 \rightarrow x_2 x_3$.

4.8.5. Побудова доказів в логіці висловів

Логіка — це наука про способи доказу. З'ясуємо, в чому, власне, полягає відмінність в побудові доказів в логіці висловів і логіці Буля.

У булевій логіці всі докази будувалися на *відношенні еквівалентності*. Навіть якщо в множинних виразах і фігурувало відношення включення, що є окремим випадком *відношення порядку,* то його ми переводили в тотожність. Дві логічні функції вважалися еквівалентними, якщо вони давали на відповідних наборах аргументів абсолютно однакові значення нулів і одиниць. При використанні формального запису логічних виразів окремі ланки ланцюга будь-якого доказу там були зв'язані через символ рівності « = ». Відношення еквівалентності задовольняє трьом законам:

рефлективності: $A = A$;
симетричності: якщо $A = B$, то $B = A$;
транзитивності: якщо $A = B$ *і* $B = C$, *то* $A = C$.

У логіці висловів докази будуються на *відношенні порядку*, тобто на відношенні, яке існує між причиною і наслідком. Тут вже окремі ланки ланцюга доказу зв'язані символом імплікації. Проте символ імплікації «→» при логічному висновку ми замінюватимемо на символ « $\Rightarrow$ », подібно до того, як в логіці Буля використовуються два символи еквівалентності – « ~ » і « = ». Символ « ~ » є *об'єктним, а символ « = » – суб'єктним*.

Таким чином, слід розрізняти *мову логіки висловів* і *метамову дослідника*. Щоб уникнути плутанини, введемо ще два *метасимволи: замість об'єктної* *кон'юнкції « $\wedge$ » використовуватимемо суб'єктний символ метаконъюнкции – «, », а замість об'єктної диз'юнкції «$\vee$» – суб'єктну метадизъюнкцию « ; ». Тоді твердження, яке потрібно довести, оформляється у вигляді наступного причинно-наслідкового відношення:*

$$P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n \Rightarrow C \qquad (4.50)$$

де *Pi* — *посилка* (*причина*), *C* — *висновок* (*слідство*). Читається: «Якщо посилки $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$ істинні, то й висновок *C* теж істинний» або, по-іншому: «Якщо причини $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$ мали місце, то матиме місце і слідство *C*».

Щоб не сплутати об'єктний вислів (пропозиція) з суб'єктним висловом, справедливість якого ми маємо намір встановити, умовимося пропозиції типу (3.1) називати *клаузой* (*clause* — *пропозиція*). Клауза — це метаречення, в якому використано відношення порядку, оформлене через символ метаімплікації «$\Rightarrow$». Як і відношення еквівалентності відношення порядку задовольняє трьом законам

рефлективності: $A \Rightarrow A$;

антисиметричності: якщо $A \Rightarrow B$, *то* $\underline{B} \Rightarrow \underline{A}$; ;

транзитивності: якщо $A \Rightarrow B$ *і* $B \Rightarrow C$, *то* $A \Rightarrow C$.

Відношення порядку припускає виконання закону антисиметричності, який записується ще і так:

якщо $A \Rightarrow B$ *і* $B \Rightarrow A$, *то* $A = B$;

якщо $A = B$, *то* $A \Rightarrow B$ *і* $B \Rightarrow A$

Клауза є саме формальний запис доводжуваної пропозиції. Замість букв в ній можна підставити об'єктні вислови, і тоді клауза наповнюється конкретним змістом, який вже іменується *семантикою* або *легендою*. Приклад клаузи:

$$A \rightarrow B,\ A \Rightarrow B.$$

Якщо прийняти, що *A* = «виблискувала блискавка», *B* = «пролунав грім», то можна скласти наступну легенду: «Відомо, що коли виблискувала блискавка, то після цього пролунає грім. Блискавка виблискувала. Отже, повинен пролунати і грім».

Над суб'єктом, який формулює метаречення, може стояти інший суб'єкт, для якої пропозиції першого суб'єкта виявляться об'єктними. Тоді клаузу (4.50) другий суб'єкт або метасуб’єкт запише для себе наступним логічним виразом:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_{n-1} \wedge P_n \rightarrow C.$$

Перетворимо цей вираз в диз’юнкт, отримаємо:

$$\underline{P}_1 \vee \underline{P}_2 \vee \ldots \vee \underline{P}_{n-1} \vee \underline{P}_n \vee C.$$

Звідси знаходимо:

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_{n-1}) \rightarrow (\underline{P}_n \vee C).$$

Тому клауза (3.1) може бути представлена в іншій *еквівалентній* формі:

$$P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \Rightarrow \underline{P}_n ; C \qquad (4.51)$$

Через комутативність кон'юнкції на місці посилки P_n може опинитися будь-яка інша, причому не одна. Наприклад, клауза:

$$P_1, P_2, P_3, P_4 \Rightarrow C_1; C_2 ; C_3.$$

може бути перетворена в іншу еквівалентну форму:

$$P_4, \underline{C}_2, P_1, \underline{C}_1 \Rightarrow \underline{P}_1 ; C_3 ; \underline{P}_2. \qquad (4.52)$$

Проте клауза (3.1) в порівнянні з (3.2), (3.3) і іншими подібними формами має певні переваги і, зокрема, використовується в *мові логічного програмування ПРОЛОГ. Її називають хорновскою. Довільну клаузу завжди можна звести до хорновского вигляду шляхом еквівалентних перетворень.*

Якщо символ метаімплікації « $\Rightarrow$ » клаузи (3.2) змістити в крайнє ліве положення, то вона перетвориться на *тавтологію*; якщо ж його змістити в крайнє праве положення, то – в *суперечність*:

$1 \Rightarrow \underline{P}_1 ; \underline{P}_2 ; \ldots ; \underline{P}_{n-1} ; \underline{P}_n ; C$ — *тавтологія*,

$P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n, \underline{C} \Rightarrow 0$ — *суперечність*.

Як і в логіці Буля, в логіці висловів існують *аксіоматичний* і *конструктивний* підходи доказів логічних виразів. Аксіоматична побудова логіки висловів полягає в тому, щоб спробувати вичленувати з нескінченного числа дійсних клауз *незалежну систему аксіом*, за допомогою якої можна було б встановити справедливість будь-яких інших клауз.

Розглянемо ще приклади застосування алгебри логіки для визначення деяких висловлювань.

1. Затримані підозрювані в злочині Браун, Джон і Сміт. Один з їх говорить правду, інший - напівправду, третій - брехню. Приведемо їх свідчення.

Браун:"Я зробив це, Джон не винен."

Джон:"Браун не винен, злочинець - Сміт."

Сміт:"Я не винен, винен Браун."

Знайти злочинця, якщо відомо, що він один.

Рішення.

Введемо позначення:

B – винен Браун;

C – винен Сміт;

D – винен Джон.

Тоді умова завдання буде виражена двома рівняннями:

1)$BD'+B'C+B'C' = 1$ (свідчення підозрюваних, одне з них істинно);

2)$B'C'+B'D'+C'D' = 1$ (злочинець єдиний).

Складемо функцію, що об’єднує ці висловлювання

$$M = (BD'+B'C+B'C')(B'C'+B'D'+C'D') = B'CD'+BC'D' = 1.$$

BC'D' відпадає, оскільки інакше Браун і Сміт обидва говорять правду. Отже, істинно $B'CD'$, тобто злочинець – Сміт, він ще і брехун. Джон говорить правду, Браун – напівправду. До речі, відсіяти $BC'D'$ можна було на першому етапі, оскільки з умов завдання виходить $BD'+BC' = 0$, тому

$$M = B'C(B'C'+B'D'+C'D')= B'CD'.$$

2. Якщо в експедицію поїде Кавунів, то поїде або Бруквин або Вишневський. Якщо поїдуть Кавунів з Вишневським, то поїде і Бруквин. Хто відправиться в експедицію?

Рішення.

A - поїде Кавунів.

B - поїде Бруквин.

W - поїде Вишневський.

1)$A \rightarrow (B+W)$;

2)$AW \rightarrow B$.

$$M = (A' + B + W)(A'W' + B) = 1$$

$$\text{Отже } 1 + B[A'(W' + 1) + W] = 1$$

$$\text{Тоді } B[A'+W] = 0 \text{ або } BA'+BW = 0$$

тобто хибним є твердження, що поїде Бруквин і не поїде Кавунів або поїдуть Бруквин і Вишневський. Висновок: поїдуть Кавунів і Бруквин.

4.9. Селективні функції

При моделюванні кібернетичних систем нерідко виникає необхідність виділення ділянок складних об'єктів, що описуються порівняно простими математичними виразами.

Наприклад, деякі складні залежності можуть бути представлені лінійними відрізками. Заміна кривих залежностей деякими лінійними наближенням називається кусочно-лінійною апроксимацією. Для її здійснення необхідно навчиться виділяти відрізки за допомогою математичних виразів.

Це можна зробити за допомогою селективних функцій.

Хай необхідно описати відрізок прямої:

$$y = a \cdot x + b \tag{4.53}$$

Рівняння (1) описує пряму лінію на площині X, Y від $x = -\infty$ до $x = +\infty$. Припустимо, що нам необхідно виділити відрізок АВ:

$a = tg(\alpha)$

Рис. 4.13. Приклад опису відрізка АВ

Введемо спеціальну функцію, яка виділяє (селектує) відрізок на осі X. Тому вона називається селективною.

Тоді рівняння відрізку АВ можна представити у вигляді:

$$y = Si(x, x_A, x_B) \cdot (a \cdot x + b) \tag{4.54}$$

Відмітимо, що функція $Si(x, x_A, x_B)$ селектує замкнутий відрізок, тобто в нього включаються і кінці відрізку A і B.

За допомогою селективних функцій можна описувати складні фігури і конструкції. Наприклад, можна написати формулу гайки у вигляді суми відрізків прямих: Окрім лінійних функцій можна використовувати і нелінійні.

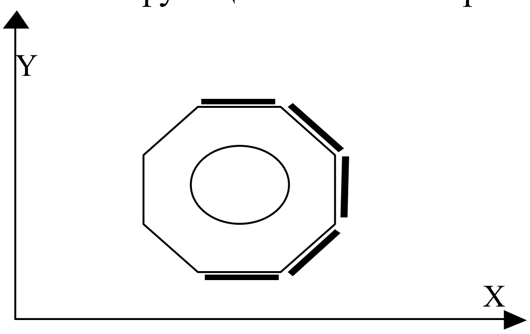


Рис. 4.14. Опис форми гайки відрізками прямих

Реалізувати селективні функції можна різними способами. Наприклад, за допомогою знакових функцій

$$sign(a) = \begin{cases} 1, & при\ b > 0; \\ 0, & при\ b = 0; \\ -1, & при\ b < 0. \end{cases} \quad \text{або} \quad \mathrm{sgn}(a) = \begin{cases} 1, & при\ b \geq 0; \\ -1, & при\ b < 0. \end{cases} \tag{4.55}$$

Ці функції можуть бути представлені графічно таким чином (рис. 6.3). Як видно з формул, вони відрізняються тільки тим, що sign(0) = 0, а sgn(0) = 1.

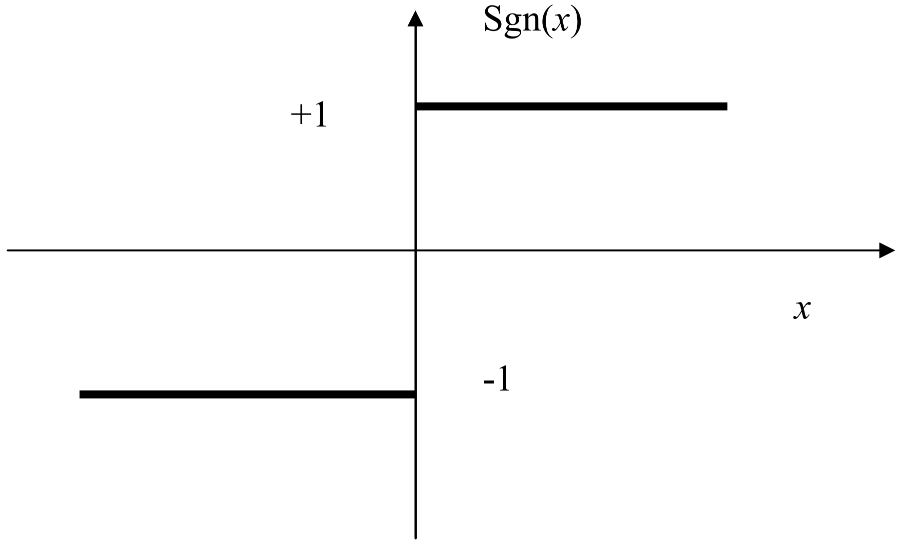


Рис. 4.15. Вигляд функції sgn(x)

Їх легко реалізувати в електронних таблицях Excel. Для SIGN э готова функція ЗНАК, а SGN можна реалізувати логічним оператором

ЕСЛИ(A1>=0;1;-1)

Інший тип селективних функцій, який є комбінацією вже відомих селективних функцій (6.3), таких як

$$\left.\begin{aligned} Si(x, x_{\min}, x_{\max}) &= \frac{1}{2}\cdot\{1+\operatorname{sgn}[(x-x_{\min})\cdot(x_{\max}-x)]\} \\ &\text{або} \\ Si(x, x_{\min}, x_{\max}) &= sign\{1+sign[(x-x_{\min})\cdot(x_{\max}-x)]\}. \end{aligned}\right\} \quad (4.16)$$

Ці функції вже пристосовані до можливості використання функцій sign та sgn до конкретних значень меж відрізка $x_{\min}$ òà $x_{\max}$. Вони генерують значення 1 в діапазоні $x_{\min}$ òà $x_{\max}$ і значення 0 – за межами цього діапазону. Причому, вони дають однакові результати . Їх можна реалізувати в електронних таблицях Excel за допомогою операторів

=(1+ЕСЛИ(B2>=0;1;-1)/2 або =ЗНАК(1+ЗНАК(B2)),

де B2 – адреса клітинки, що містить значення $(x-x_{\min})\cdot(x_{\max}-x)$.

Для прикладу покажемо розрахунки в наступній таблиці для значень *Xmin* = 10, *Xmax* = 22.

X	(*X-Xmin*)(*X-Xmax*)	SGN	SIGN	Si_1	Si_2
4	-108	-1	-1	0	0
7	-45	-1	-1	0	0
10	0	1	0	1	1
13	27	1	1	1	1
16	36	1	1	1	1
19	27	1	1	1	1
22	0	1	0	1	1
25	-45	-1	-1	0	0
28	-108	-1	-1	0	0
31	-189	-1	-1	0	0

Коли ми хочемо виділити певну функцію за межами діапазону $x_{\min}$ *òà* $x_{\max}$, потрібно використовувати перетворення вигляду

f(*x*)[1-Si(*x*;*Xmin*;*Xmax*)].

Для прикладу покажемо використання селективних функцій для того, щоб задати функцію вигляду

$$f(x) = \begin{cases} 5x-12, x < 3 \\ 0.8x^2+2 \ ,3 \le x \le 10 \\ 2\ \ell^{x}, \quad x > 10 \end{cases}$$

Така функція матиме вигляд

$$f(x) = (5x - 12)(1 - SGN(3) + (0.8x^2 + 2)Si(x;3;10) + 2\,\ell^x\, SGN.$$

4.10. Індивідуальні завдання № 6. Розрахунки статистичних квазілінійних моделей соціально-економічної системи та синтез структури управління

Задача 1

Завдання: синтезувати статистичні квазілінійні моделі.

Порядок виконання: для визначення свого варіанту студент використовує останню цифру номеру залікової книжки *Nз* та номер за списком навчальної групи *Nг*.

Методичні вказівки: 1) за допомогою функції

=RANDBETWEEN((*Nз*+1)Nг*; (*Nз*+2)*(*Nг*+1))/341**

згенерувати три стовпці по 50 чисел. Перші два стовпці позначити як X_1 та X_2 (вхідні фактори), а третій – як Y (вихідний фактор);

2) застосувати методику синтезу квазілінійних статистичних моделей для створення таблиці початкових розрахунків;

3) скористатися функцією LINEST для розрахунку коефіцієнтів моделі;

4) записати одержану модель у вигляді формули;

5) додати до моделі блок запізнювання виду (4.36) для $\lambda =$ ((*Nз*+1)**Nг*/0,12 і побудувати графік зміни $y(t)$.

Задача 2

Завдання: синтезувати структуру управління соціально-економічної системи згідно прикладу з п.4.7.

Порядок виконання: для визначення свого варіанту студент використовує останню цифру номеру залікової книжки *Nз* та номер за списком навчальної групи *Nг*.

Методичні вказівки: 1) варіант першого коефіцієнта, обирається з табл. 4.1 за 21 - (*Nг* +*Nз*)/5, другого за (*Nг* +*Nз*)/5;

2) побудова нечітких множин проводиться шляхом опитування студентів своєї групи кількістю не менше 4-х;

3) збільшення власного капіталу прийняти 10%;

4) прийнятний рівень фінансових коефіцієнтів узяти зі спеціальної літератури за курсом «Економіка підприємства».

Таблиця 4.1

Варіанти завдань

№ п/п	Фінансові показники
1.	Коефіцієнт зносу основних засобів
2.	Коефіцієнт покриття

3.	Коефіцієнт швидкої ліквідності.
4.	Коефіцієнт абсолютної ліквідності.
5.	Чистий оборотний капітал, тис. грн.
6.	Коефіцієнт платоспроможності
7.	Коефіцієнт фінансування
8.	Коефіцієнт забезпеченості власними оборотними засобами
9.	Коефіцієнт маневреності власного капіталу
10.	Коефіцієнт оборотності активів
11.	Коефіцієнт оборотності кредиторської заборгованості
12.	Коефіцієнт оборотності дебіторської заборгованості
13.	Строк погашення дебіторської заборгованості, днів
14.	Строк погашення кредиторської заборгованості, днів
15.	Коефіцієнт оборотності матеріальних запасів
16.	Коефіцієнт оборотності основних засобів (фондовіддача)
17.	Коефіцієнт оборотності власного капіталу
18.	Коефіцієнт рентабельності активів
19.	Коефіцієнт рентабельності власного капіталу
20.	Коефіцієнт рентабельності діяльності
21.	Коефіцієнт рентабельності продукції

4.11. Індивідуальне завдання №7.
Алгебра логіки

Студенти виконують варіант згідно формули

$$\left.\begin{array}{l}\text{Варіант} = N/4 + 1, \text{ якщо } N<17 \\ \text{Варіант} = (N-17)/4 + 1, \text{ якщо } N>= 17 \text{ та } N<= 34 \\ \text{Варіант} = (N-35)/4 + 1, \text{ якщо } N>= 35\end{array}\right\}$$

де N – номер за списком групи.
Результат від ділення округляється до цілого.

Варіант 1

1. Підстановкою у формулу $a \vee b$ змінних запишіть нові формули і спростіть їх, якщо це можливо:
   a) $a = \bar{x}y, \quad b = z;$
   b) $a = xy,. \quad b = x\bar{y};$
   c) $a = x,. \quad b = xy;$
   d) $a = x,. \quad b = \bar{x}y;$
   e) $a = xy,. \quad b = c \vee d, \quad c = xz, \quad d = y\bar{z}.$

8. Перетворіть формули до такого вигляду, щоб операції заперечення застосовувалися тільки до логічних змінних:

a) $\overline{xy \vee \overline{z}}$;

b) $x(xy \vee \overline{yz} \vee \overline{y \vee z\overline{v}}$.

16. Дані прості вислови: x_1 – «йде дощ», x_2 – «дуже жарко».

a) Запишіть формулу складного вислову «Невірно, що йде дощ і дуже жарко».
b) Перетворіть формулу згідно із законом де Моргана і складіть відповідний вислів.
c) Переконаєтеся в тотожності початкового і перетвореного висловів.

Варіант *2*

2. Запишіть таблиці відповідності для наступних формул:

a) $x\overline{x}$
b) $xy \vee \overline{x}$
c) $(p \vee q)\left(\overline{p \vee \overline{q}}\right)$
d) $\overline{x \vee y}$.

9. Переконаєтеся за допомогою таблиць відповідності в справедливості виразів для імплікації і еквіваленції:

a) $x_1 \to x_2 = \overline{x_1} \vee x_2$
b) $x_1 \approx x_2 = x_1 x_2 \vee \overline{x_1 x_2} = (x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee x_2)$;
c) $x_1 \approx x_2 = (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_1)$.

17. Мандрівник зупинився у розвилки доріг, що ведуть в пункти A і B, і йому потрібно з'ясувати, в якій саме пункт веде кожна з доріг. Двоє людей, які знаходилися у розвилки заявили, що вони можуть відповісти тільки на одне запитання і що один з них завжди правдивий, а інший брехун. Яке питання повинне задати мандрівник, щоб у будь-якому випадку відповідь на нього містила необхідну інформацію?

a) Вирішите задачу шляхом безпосередніх міркувань без застосування алгебри логіки.
b) Представте ситуацію у вигляді складного вислову, складеного з простих.
c) Запишіть відповідну формулу і таблицю відповідності.
d) По таблиці відповідності сформулюйте шукане питання.

Варіант *3*

3. Перевірте за допомогою таблиць відповідності наступну тотожність:

a) $\overline{x \vee y} = \overline{xy}$;
b) $x(x \vee y) = x$;

c) $x \vee \bar{x}y = x \vee y$.

14. Запишіть формули для наступних висловів, позначивши буквами прості вислови, що входять до них:

a) Тиск падає і система не працює.
b) Обчислення виконані точно або конструкція не досконала.
c) Проект розробив Андрій або Петро, а експеримент виконав Іван.
d) Якщо буде гарна погода, ми відправимося на стадіон або підемо за грибами.
e) Програма може бути виконана, якщо і тільки якщо матеріали поступають своєчасно.
f) Якщо я поїду на автобусі, то запізнюся на роботу, або я скористаюся таксі.
g) Андрій допомагає Петру або Петро допомагає Андрію, або вони допомагають один одному.

18. Вислів є логічно істинним, якщо відповідна йому формула тотожно рівна одиниці, і логічно помилковим, якщо формула рівна нулю. Визначите за допомогою таблиць відповідності, яким висловам відповідають приведені нижче формули (істинним, помилковим або ні тим не іншим):

a) $p \approx p$
b) $p \to \bar{p}$
c) $(p \vee q) \approx pq$
d) $(p \to \bar{q}) \to (q \to \bar{p})$
e) $(p \to q) \to p$
f) $((p \to q) \to p) \to p$;
g) $\overline{p \vee q} \approx \bar{p}\bar{q}$.

Варіант 4

5. Спростіть наступні формули:

a) $\bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z}$;
b) $xy \vee z \vee \overline{xy \vee z}(zv \vee x)$;
c) $x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee xyz$;
d) $(x \vee y)(\overline{xy} \vee z) \vee \bar{z} \vee (x \vee y)(u \vee v)$.

15. Запишіть формулу, відповідну вислову: «Програма буде виконана тоді і тільки тоді, коли закінчаться випробування і показники будуть задовільні; якщо програма не буде виконана, співробітники не отримають премію або будуть переглянуті технічні умови ».

19. При x_1=1; x_2=0; x_3=0 і x_4=1 знайдіть значення кожною з наступних функцій:

a) $\overline{x_1 \vee x_2} \vee x_3 x_4$;

b) $x_1x_2 \vee x_3(x_1 \vee x_4) \vee x_4(x_2 \vee x_3)$;

c) $x_1 \to (x_2 \vee x_3)$;

d) $(x_1 \vee x_2) \approx x_2\overline{x_3}$;

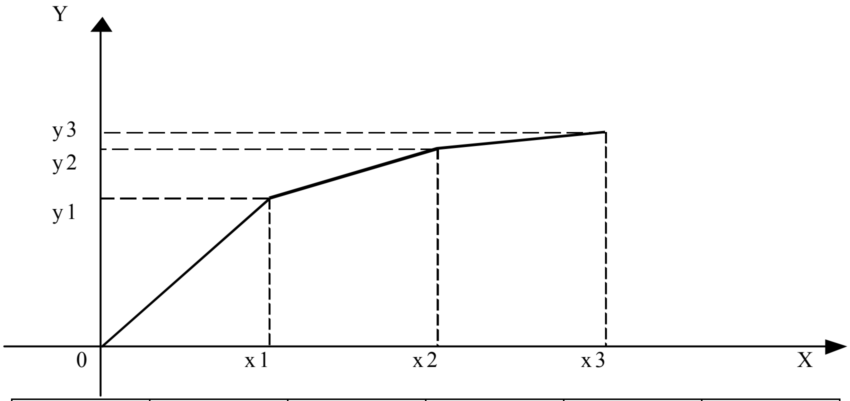
e) $x_1\overline{x_2} \to (x_2 \approx x_3)$;

f) $x_1x_2 \to (x_3 \to x_2\overline{x_4})$.

4.12. Індивідуальне завдання №8. Селективні функції

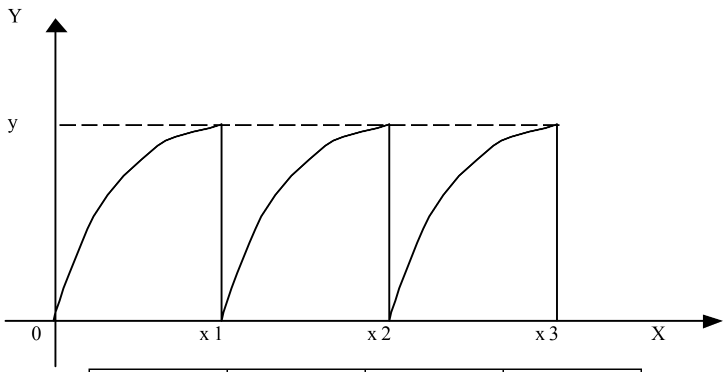
Необхідно побудувати рівняння для наступних графіків. Номер варіанта N – це номер студента за списком групи. Кожен студент виконує всі шість завдань.

1.



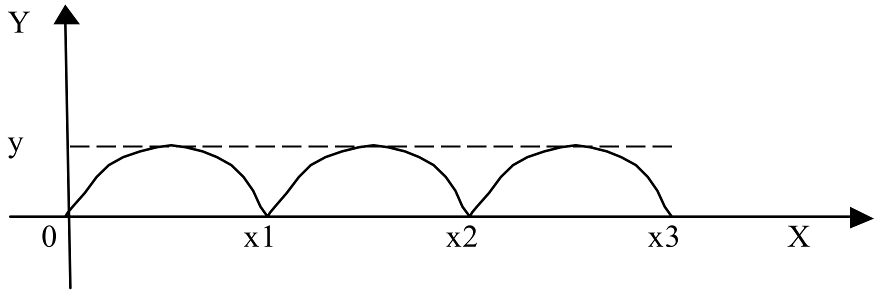
$x1$	$x2$	$x3$	$y1$	$y2$	$y3$
N	N+2	3N	N+1	3N+1	4N

2.



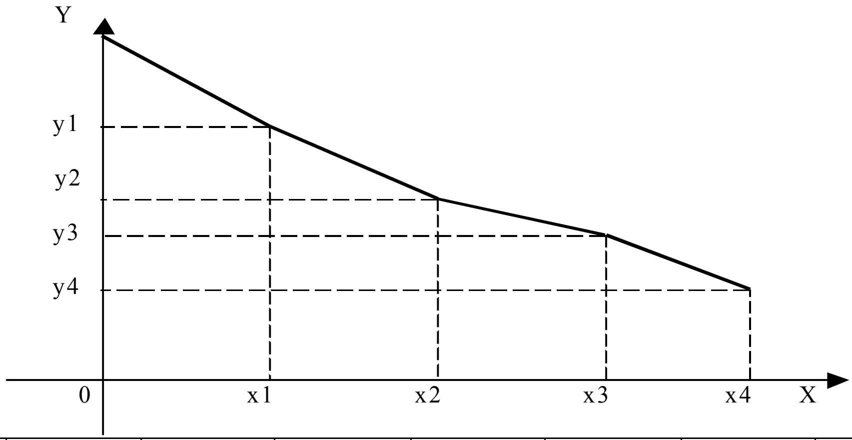
$x1$	$x2$	$x3$	y
N	2N	3N	N+1

3.



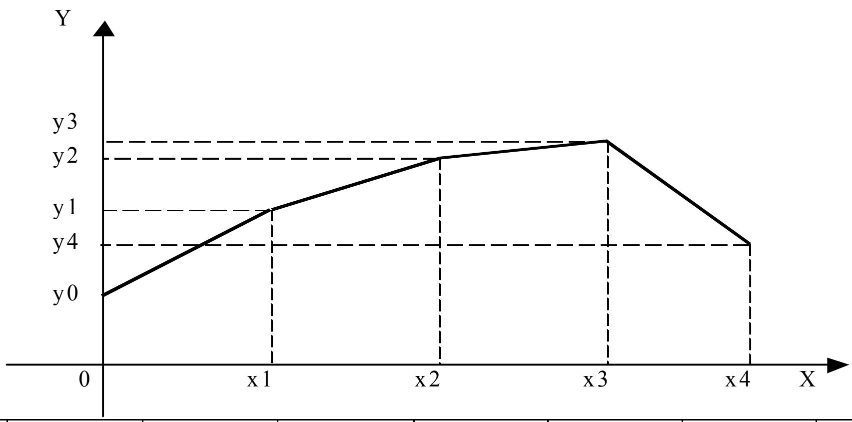
$x1$	$x2$	$x3$	Y
N	$2N$	$3N$	$N/2$

4.



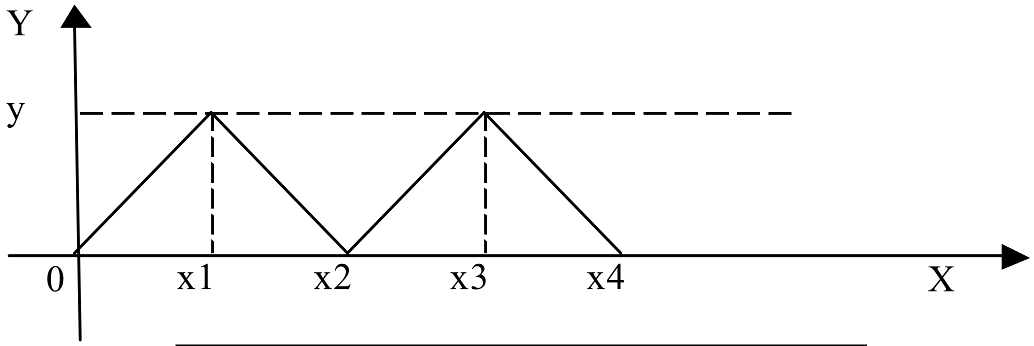
$x1$	$x2$	$x3$	$x4$	$y0$	$y1$	$y2$	$y3$	$y4$
N	N+2	3N	3N+3	5N	4N+1	3N	2N+4	N

5.



$x1$	$x2$	$x3$	$x4$	$y0$	$y1$	$y2$	$y3$	$y4$
N	N+2	3N	3N+3	5	7	18	15	6

6.



***x*1**	*x*2	*x*3	*x*4	*y*
N	2*N*	3*N*	4*N*	*N*+1

Контрольні запитання

1. Чи можна отримати модель у вигляді експоненційної залежності?
2. Як відрізнити циклічний економічний процес від не циклічного?
3. Коли треба будувати авторегресійні моделі?
4. Чи в усіх випадках можна застосовувати нейронні сітки?
5. Чим пояснюється потребу синтезу моделей на формальній мові?
6. Яким цілям слугують періодичні моделі соціально-економічних систем?
7. Які функції називаються селективними?
9. Поясніть різницю поміж функціями SGN та SIGN?
11. Чим алгебра логіки відрізняється від звичайної алгебри?
12. Чим кон’юнкція відрізняється від диз’юнкції?
13. Як будуються докази в алгебрі висловів?

В розділі розглянуто синтез моделей соціально-економічних систем на підставі результатів статистичних досліджень, такі як регресійний, авторегресії, моделювання циклічних процесів, нейронні сітки, нечіткі множини. Подано основні поняття про теорію множин, алгебру логіки та селективні функції.

5. ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНИХ СИСТЕМ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ В ОПТИМІЗАЦІЇ ПРОЦЕСІВ УПРАВЛІННЯ В ЕКОНОМІЦІ

Вивчивши матеріал цього розділу студент опанує основні прийоми знайдення оптимальних рішень в залежності від типу моделі соціально-економічної системи.

Економіко-математичні моделі, що використовуються при оптимізації управлінських рішень, важко класифікувати, оскільки може бути декілька підходів до класифікації, наприклад по місцю їх застосування, складності, їх математичним основам, обліку або нехтуванню в них чинника часу, характеру отримуваного результату і по інших ознаках.

Найбільш повно розробленими і вживаними на практиці моделями, що дозволяють оптимізувати управлінські рішення, є статистичні моделі. Вони дають можливість робити вибір сукупності чисел x_i (змінних в рівняннях), що забезпечують екстремум деякої функції Z (цільова функція або показник якості ухваленого рішення) при обмеженнях, визначуваних умовами роботи системи. Математично модель записується так: обчислити вектор, що обертає в максимум або мінімум $\overline{X} = x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_j,\ \ldots,\ x_n$, цільову функцію

$$z = f(\overline{X}) = f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_j,\ \ldots,\ x_n) \qquad (5.1)$$

за умов

$$\left.\begin{aligned} & q_i(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_j,\ \ldots,\ x_n) = 0\ \ (i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m_1); \\ & q_i(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_j,\ \ldots,\ x_n) \leq 0\ (i = m_1 + 1,\ m_1 + 2, \ldots, m); \\ & x_j \geqslant 0\ \ (j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n). \end{aligned}\right\} \qquad (5.2)$$

Вирази типу (5.2) називаються обмеженнями, які задають область рішень цільової функції (5.1). Саме цільова функція, почасти, і є моделлю соціально-економічної системи. Варто відмітити, що вид функцій f та q_i може бути як лінійний так і нелінійний. Для знайдення оптимуму моделей цього типу застосовуються числові методи. Вони описані нижче.

Іншим типом моделей є динамічні. В цьому випадку для знайдення їх екстремуму використовується відомий з математичного аналізу прийом знайдення першої похідної моделі, при рівняння нулю та розрахунок оптимальних значень змінних, що входять до неї. Тому спинятися на цих прийомах ми не будемо.

Якщо модель задано у вигляді нечітких множин і якщо задано також нечітку функцію управління такою системою, існують спеціальні методи, які дозволяють отримати чіткий висновок з таких нечітких моделей.

Особливий клас оптимізації складають прийоми, що базуються на теорії ігор, в яких оптимізація розуміється в сенсі взаємодії з іншими суб'єктами ринку.

5.1. Методи знайдення оптимального рішення економіко-математичних моделей

Найбільш популярними з них є два:

- шляхом знайдення першої похідної, тобто застосування методу математичного аналізу;
- чисельні методи, які були започатковані іще Ньютоном і в наш час мають широко розгалужену теорію.

Розглянемо ці методи на прикладах.

Формула Вільсона. (Economic order quantity).

Введемо наступні позначення: A – витрати на розміщення і виконання замовлення; S – річна потреба в ресурсах; q – розмір одноразової поставки; r – процентна ставка на зберігання ресурсів (ставка дисконтування); p – ціна одиниці закуповуваних ресурсів, $C_{св}$ – сумарні витрати за певний період часу (для спрощення розрахунків, період часу зазвичай приймається рівним одному року); C_p - витрати на розміщення замовлення; C_x - витрати на зберігання ресурсів, $C_з$ – витрати на закупівлю ресурсів.

Визначення економічного розміру замовлення на поставку товару засноване на мінімізації загальної вартості двох видів витрат:

–на зберігання запасів, що прямо пропорційних розміру замовлення;

–витрат на розміщення замовлення.

Загальні витрати на матеріал потік визначаються за такою відомою формулою:

$$C_{св} = C_p + C_x + C_з.$$

У розгорнутому вигляді формула буде наступною:

$$C_{св} = \frac{AS}{q} + \frac{rpq}{2} + Sp.$$

Оптимальний розмір поставки може бути знайдений за допомогою методу дослідження функції, пошуку її екстремуму. Якщо зазначену формулу сумарних витрат прийняти за функцію і послідовно змінювати розмір поставки q, то оптимальний розмір поставки буде відповідати мінімальному значенню сумарних витрат.

З іншого боку, функція сумарних витрат є безперервною і такою, що диференціюється на наперед визначеному інтервалі. Завдання визначення оптимального розміру поставки, відповідного мінімальним сумарним витратам, полягає в пошуку мінімального значення функції шляхом дослідження. Мінімальне значення знаходиться в точці її екстремуму. Якщо взяти похідну по q, то результат буде таким:

$$\frac{\mathrm{d}C_{св}}{\mathrm{d}q} = \frac{AS}{q^2} + \frac{rp}{2} + 0.$$

Для того щоб стверджувати про знаходження екстремальної точки, перша похідна функції повинна мати рішення, а точка, в якій перша похідна дорівнює нулю, повинна бути стаціонарною. Формула має такий вигляд:

$$-\frac{AS}{q^2} + \frac{rp}{2} = 0$$

Відповідно точка екстремуму функції, мінімум витрат і оптимальний розмір поставки будуть знаходитися в точці $q_{опт}$. Вирішуючи рівняння щодо q, одержимо:

$$q_{опт} = \sqrt{\frac{2AS}{rp}} \tag{5.3}$$

Це і є формула оптимального розміру замовлення – формула Вільсона.

До широкого розповсюдження комп'ютерів було розроблено велику кількість спеціальних методів, які дозволяють знайти рішення «вручну», без застосування ЕОМ, або з відносно простим математичним забезпеченням. З'явилися методи математичного програмування, які залежать від типу моделі. Моделі математичного програмування, в яких змінні в рівняннях по своєму фізичному сенсу можуть приймати лише обмежене число дискретних значень, складають групу моделей цілочислового програмування. Якщо початкові параметри при змінних в моделях завдань математичного програмування можуть змінюватися в деяких межах, їх називають моделями параметричного програмування. Моделі, за допомогою яких вирішуються умовно-екстремальні завдання за наявності випадкових параметрів в їх умовах, називають моделями стохастичного програмування.

В наш час персональні комп'ютери мають спеціальні програми, які дозволяють знайти оптимальне рішення числовими методами. Це стосується як (рис. 5.1) так і M. В обох програмах застосовано метод Ньютона та інші методи.

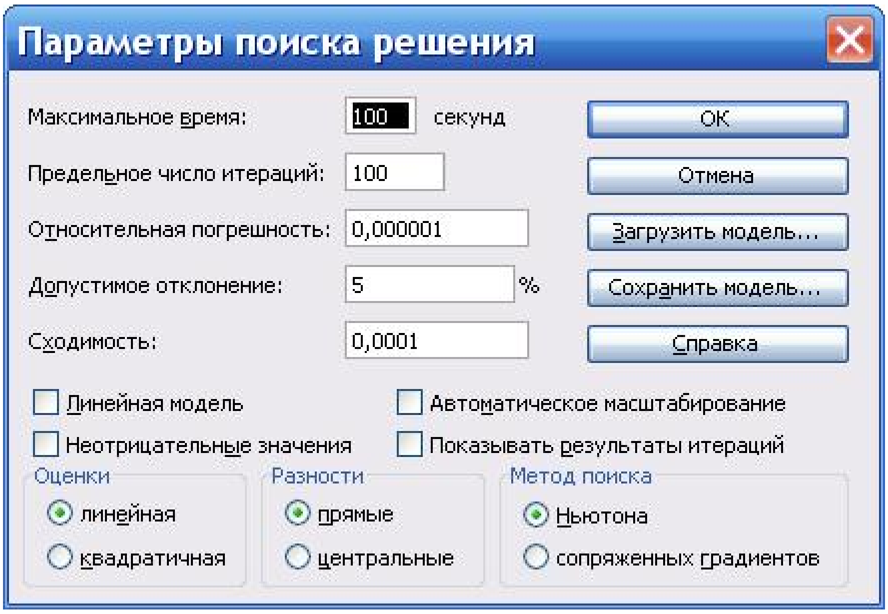


Рис. 5.1. Параметри функції «Пошук рішення»

Розглянемо найстаріший і найзрозуміліший із них.

Метод Ньютона (також відомий як метод дотичних) – це ітераційний числовий метод знаходження кореня (нуля) заданої функції. Пошук рішення здійснюється шляхом побудови послідовних наближень і заснований на принципах простої ітерації.

Основна ідея методу полягає в наступному: задається початкове наближення поблизу гаданого кореня, після чого будується дотична до досліджуваної функції в точці наближення, для якої знаходиться перетин з віссю абсцис . Ця точка і береться як наступне наближення. І так далі, поки не буде досягнута необхідна точність.

Нехай існує функція $f(x):\ [a,\ b] \to \mathbb{R}$ визначена на відрізку $[a,\ b]$ і така, що піддається диференціюванню на нім. Тоді формула ітеративного числення наближень може бути виведена таким чином:

$$f'(x_n) = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_n) - 0}{x_n - x_{n+1}} = \frac{0 - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}, \tag{5.4}$$

де α кут нахилу дотичної в точці x_n.

Отже шуканий вираз для x_{n+1} має вигляд $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{5.4}$$

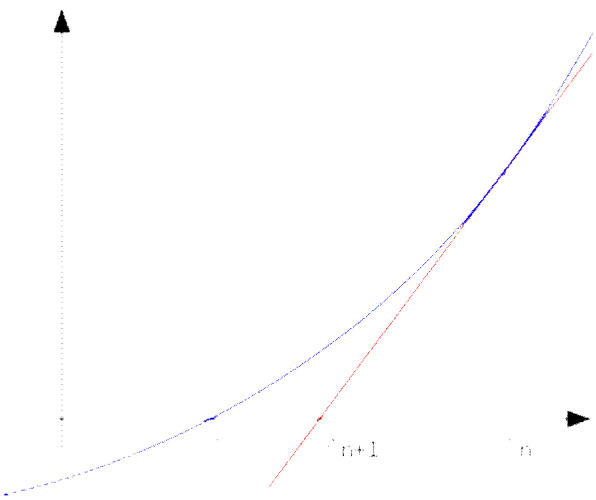


Рис. 5.2. Геометрична інтерпретація метода Ньютона

Ітераційний процес починається з якогось початкового наближення x_0 . Поки не виконана умова зупинки, яку можна узяти $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ або $|f(x_{n+1})| < \varepsilon$ (тобто погрішність в потрібних межах), обчислюють нове наближення: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Ілюстрація методу Ньютона (рис. 5.2, синім зображена функція $f(x)$ нуль якої необхідно знайти, червоним дотична в точці чергового наближення x_n). Тут ми можемо побачити, що подальше наближення x_{n+1} краще попереднього x_n.

5.2. Математичне програмування

Оскільки власні методи математичного програмування з розвитком обчислювальної техніки стали не актуальним, в цьому пункті будуть наведені тільки постановки задач та приклади їх вирішення із застосування описаних вище числових методів функцією «Пошук рішення» або функцією Solver .

5.2.1. Лінійне програмування

Загальна постановка задачі лінійного програмування має вигляд:

– Цільова функція $\sum C_i X_i \rightarrow Extr$; (5.6)

– обмеження

$$\left.\begin{aligned} &\sum a_{ij} X_i \{=<;=;>=\} b_j, (j=\overline{(1,m)} \\ &d_i <= X_i <= D_i, (i=\overline{(1,n)} \end{aligned}\right\} \quad (5.7)$$

Тут X_i – змінні вхідні фактори, оптимальне значення яких потрібно знайти; C_i – коефіцієнти моделі; a_{ij} – коефіцієнти обмежень; b_j – числова величина, яку обмеження не може перебільшувати(або навпаки менше якої не може бути); d_i, D_i – межі, в яких можуть змінюватися вхідні фактори, m – кількість обмежень; n – кількість вхідних факторів.

Приклад. Знайти оптимальний план випуску товарної продукції. Інші умови подані в процесі вирішення задачі. Цільова функція – це максимізація доходу від випуску товарної продукції $\sum Pi \cdot Ci \rightarrow \max$, де P_i – ціна одиниці продукції, C_i – об'єм випуску кожного виду продукції.

Накладемо на цільову функцію набір обмежень. Основним буде недолік виробничих площ. Всього в наявності є 230 місць, кожне з яких займає 7,4 квадратних метрів, враховуючи проходи до них. Необхідно також розвернути мінімум 10 робочих місць для інженерів, кожне з яких займає 8,5 квадратних метрів. Загальна площа виробничих приміщень становить 2000 квадратних метрів. Одержуємо обмеження $7{,}4L + 8{,}5L_i \leq 2000$, $L_i \geq 10$, $L \leq 230$, де L – кількість робочих місць, L_i – кількість місць для інженерів.

Другою групою обмежень є обмеження по складських приміщеннях. Їх не можна пристосувати під виробничі, і крім того вони абсолютно необхідні для тимчасового зберігання випущеної продукції, а також займаються під склади деталей і матеріалів. Вважатимемо, що площа, необхідна для розміщення готової продукції кожного виду становить:

$0{,}3A$, де A – кількість телевізорів, що випускаються за місяць;

$0{,}35B$, де B – кількість відеомагнітофонів, що випускаються за місяць;

$0{,}4C$, де C – кількість музичних центрів, що випускаються за місяць.

Тоді для всього випуску потрібно складська площа у розмірі $0{,}35B+0{,}3A+0{,}4C$. Загальна площа обладнаних складських приміщень становить 600 квадратних метрів. Обмеження по об'єму складських приміщень

$$0{,}35B+0{,}3A+0{,}4C \leq 600.$$

Тепер розглянемо ціну товарної продукції: телевізор – 180 у.о., відеомагнітофон – 260 у.о., музичний центр - 420 у.о.

Собівартість складається з витрат на оренду площі – 4000 у.о., витрат на комплектуючі – 100, 170, 315 відповідно на випуск одного телевізора, відеомагнітофона та музичного центру; інших витрат – 4500 у. о. Необхідна зарплата інженерів складає 400, директора - 600, робітників на конвеєрі - 350. Для підприємства нашого масштабу необхідно 3 директори незалежно від випуску і 1 на кожні 150 одиниць продукції. Необхідно 1-2 інженери на кожні 150 одиниць випуску продукції

Одержуємо обмеження, що собівартість не може перевищувати доходів від продажу продукції

$$4000+100A+170B+315C+4500+400L_i+350L+600 \le AP_1+BP_2+CP_3,$$

$$P_1 \le 180,\ P_2 \le 260,\ P_3 \le 420,$$

де P_1, P_2, P_3 – відповідно ціни одного телевізора, відеомагнітофона та музичного центру.

Фонд заробітної платні, обмежений через податкові проблеми у 260,5 млн. у.о. Обмеження на фонд зарплати

$$3\cdot600 +600(A+B+C)/150+2\cdot400(A+B+C)/150+350L \le 260500000.$$

Позначивши як вхідні фактори величини A, B, C, P_1, P_2, P_3, L, L_i, виконаємо розрахунки за допомогою функції Solwer. Одержуємо, що оптимальним випуском є виробництво 3800 телевізорів, 2000 відеомагнітофонів і 1500 музичних центрів в місяць за умови збереження наявної тактики поведінки на ринку.

5.2.2. Цілочислове програмування

Цілочислове програмування має таку ж постановку задачі як і лінійне, тобто його цільова функція та обмеження мають вигляд (5.5) – (5.6). Відміною тут є те, що змінні параметри X можуть приймати тільки цілі значення. Це стосується, наприклад визначення кількості осіб, що працюють на підприємстві. Не можна ж призначити на роботу 1,5 особи.

Деякою відміною є 0-1 програмування. В ньому параметри X можуть приймати тільки значення 0 та 1.

Приклад. Потрібно розмістити на складі якомога більше різних видів продукції, запакованої у ящики. Позначимо як S – загальну площу складських приміщень; X_i – кількість ящиків i-го виду продукції, N – кількість видів продукції, C_i – ціна одиниці продукції, K_i – кількість продукції і-го виду у одному ящику. S_1 – площа, що займає один ящик Ящики можна розташовувати у три яруси. Цільова функція визначає максимізацію вартості продукції на складі

$$E = \sum_{i=1}^{N} C_i K_i X_i \to \max .$$

Тоді, – площа на складі, яку займає i-тий вид продукції $S_i = X_i S_1$, а загальна кількість ящиків, що можуть розміщатись на складі одночасно

$X_3 = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Обмеження по площі мають вигляд $3S \ge S_1 \sum_{i=1}^{N} X_i$.

Ще одне обмеження визначає, що $X_i \ge 0$ та ще те, що всі X_i є цілочисловим. Вирішимо цю задачу для $S = 250$ кв. м, $N = 5$, $C_i = 2, 3, 5, 7, 15$ грн. відповідно, $K_i = 35, 40, 12, 55, 36$ штук відповідно, $S_1 = 2{,}5$ кв. метри.

Застосувавши функцію Solwer при змінних параметрах X_i, отримаємо наступне рішення $X_1 =0$, $X_2 =0$, $X_3 = 0$, $X_4 =0$, $X_5 = 300$ ящиків. Отже, весь склад вигідніше всього завантажити продукцією 5-го типу.

5.2.3. Нелінійне програмування

Якщо функції f та q у (5.1) - (5.2) мають нелінійний характер, така постановка задачі називається нелінійним програмування. Наприклад, якщо параметр X буде зведено у квадрат.

Приклад. Попит на продукцію виражається залежністю
$Q = 20 + 2.3C - 0.05C^2$, де Q – обсяг спожитої продукції, C – ціна одиниці продукції. Накладні витрати на виробництво продукції виражаються залежністю
$P = 130 + 2{,}3Q$,

Знайти оптимальну ціну на продукцію при умові найбільшого прибутку.

Прибуток, це різниця між доходами та витратами. Остання умова вимагає, щоб ця різниця прагнула максимуму, отже, це і буде цільова функція

$$QC - 130 - 2{,}3Q \rightarrow \max.$$

Тоді, накладні витрати будуть обмеженням. Змінним параметром (вхідним фактором) буде ціна C, для якої теж є обмеження $C \geq 0$.

Вирішимо цю задачу за допомогою функції Solwer. В результаті отримаємо, що $Q = 39{,}2479$, $C = 35{,}00175$, $E = 1153{,}475$.

5.2.4. Транспортна задача

Транспортні задачі відомі у двох постановках: матричній і мережній.

Матрична постановка транспортної задачі:

Хай є ряд пунктів споживання і підприємств-постачальників деякої продукції, де:

A_i – ресурс i-го постачальника (запас продукції або план відвантаження з поточного виробництва).

B_j – потреби в тій же продукції в пунктах j.

C_{ij} – відстань або вартості перевезення з i в j.

Вимагається знайти такі розміри поставок від кожного постачальника кожному споживачу X_{ij} (змінні задачі), при яких загальна сума витрат або загальний пробіг будуть мінімальними.

Розрізняють наступні різновиди транспортних задач (рис. 5.4)

Система обмежень закритої задачі: передбачає поставку кожному споживачу кількість продукції, рівного потребі в ній (5.7) і вивіз продукції від кожного постачальника в кількості, рівній її ресурсу (5.8.)

$$\Sigma X_{ij} = B_i \text{ , } (j=1,2, \ldots\ n \text{ – кількість постачальників}), \quad (5.8)$$

$$\Sigma X_{ij} = A_i \text{ , } (i= 1,2, \ldots\ m \text{ – кількість споживачів}); \quad (5.9)$$

У відкритій задачі з перевищенням ресурсів можливий вивіз менше наявності

$$\Sigma X_{ij} < A_i, \quad (5.10)$$

У відкритій задачі з перевищенням потреб можливе постачання менше наявності

$$\Sigma X_{ij} < \Sigma B_j, \quad (5.11)$$

Критерієм оптимальності рішення є мінімум загальних витрат по перевезенню або з пробігу в тонно-кілометрах (вагоно-кілометрах) по всіх планованих відправленнях. Якщо вартість перевезення (відстань) від i до j - позначити як C_{ij} те цільова функція визначиться таким чином

$$\Sigma\, \Sigma\, C_{ij} X_{ij} \rightarrow \min, \quad (5.12)$$

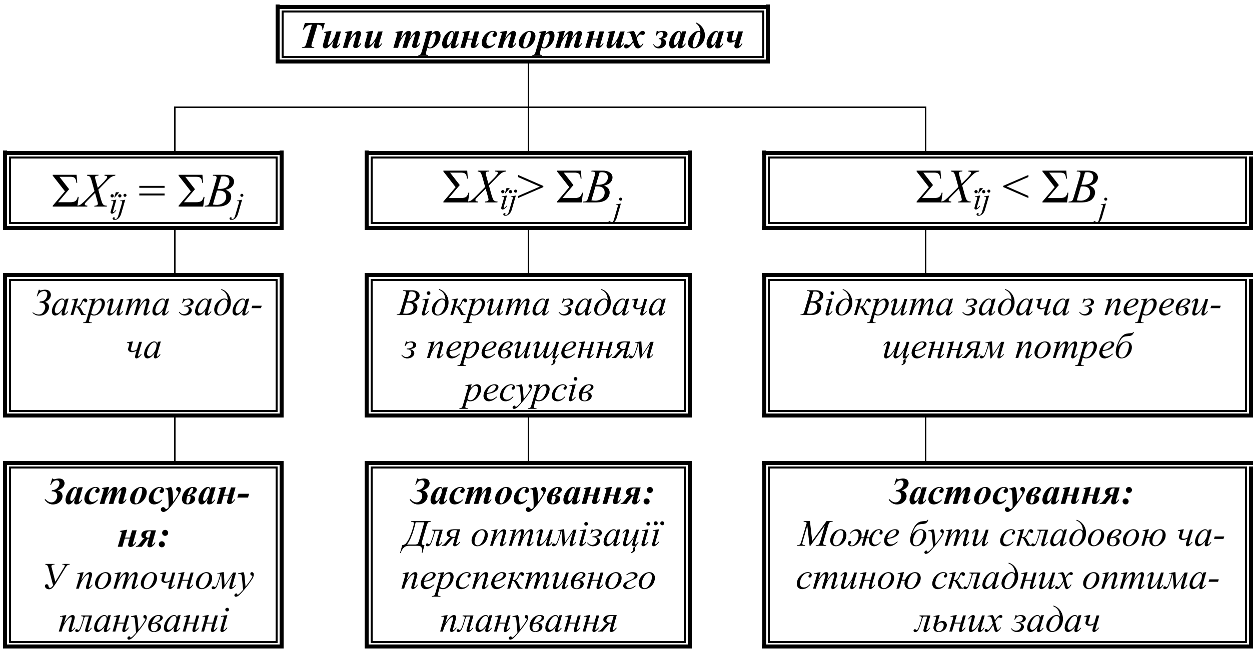


Рис. 5.4. Різновиди транспортних задач

<u>*Мережна транспортна задача:*</u>

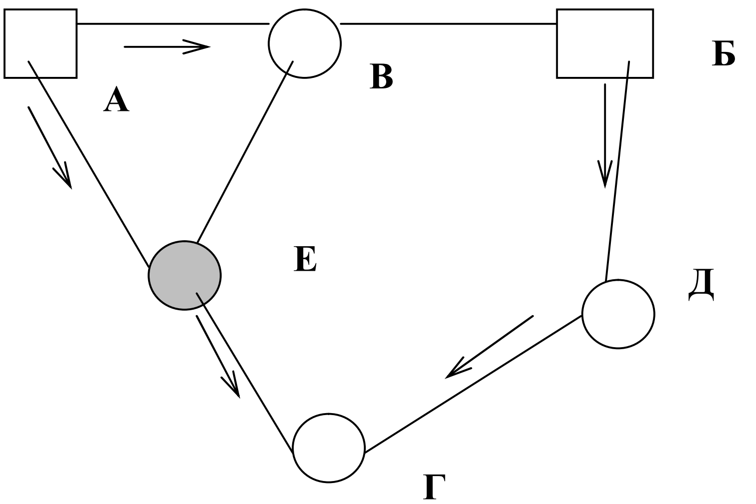


Рис. 5.5. Схема транспортної мережі:
+10 □Б - Пункти і розміри відправлення

-8 ◯Д - Пункти і розміри прибуття
—— - лінії з'єднання – «дуги» або «ланки»
←—— - стрілка – потік вантажу
$X_{AB} = 8$ - розмір вантажу

Оптимальне планування перевезень може бути проведене безпосередньо на схемі мережі шляхів сполучення (рис. 5.5). Схема складається з дуг і вузлів (або вершин). Вершинами є пункти або (центри агрегації) вантаження і вивантаження, а також всі реальні вузлові пункти мережі. Вершини без вантаження і вивантаження даного вантажу є транзитними. Кожну ділянку мережі між двома сусідніми вершинами звичайно розглядають як дві дуги протилежного напряму з рухом в одну сторону по кожній дузі.

Кожна дуга характеризується показником відстані (або вартості) перевезення одиниці вантажу або довжині дуги. При рішенні задач за критерієм вартості довжина прямої і зворотної дуг звичайно різна (оскільки витрати перевезення по ділянці "туди і назад" не співпадають).

Змінними мережної транспортної задачі є потоки вантажу по кожній дузі. Потік може включати багато відправок, наприклад, потік по дузі Б-Д включає поставки з Б в Д – 8 одиниць вантажу, а з Б в Г – 7 одиниць вантажу.

До вирішення задачі, як правило, невідомо, в яку сторону перевозитиметься вантаж по ділянці в оптимальному варіанті. Тому в число змінних включаються потоки в обох напрямах, а загальне число змінних приймається рівним подвоєному числу ділянок мережі. (При значному числі постачальників і одержувачів число змінних при мережній постановці значне менше ніж при матричній, що полегшує рішення задачі, Наприклад, за наявності на мережі 600 ділянок, 50 пунктів відправлення і 200 пунктів призначення, число змінних при мережній постановці складе 1200 (600*2), а при матричній постановці воно буде набагато більше (200*50=10000 змінних).

Обов'язковою умовою мережної задачі є вимога балансування прибуття і відправлення вантажу в кожній вершині мережі: прийом вантажу зі всіх напрямів плюс власне вантаження рівні здачі на всі напрями власне вивантаження

$$\Sigma X_{ks} - \Sigma X_{kr} = R_k , \qquad (5.13)$$

де K – довільна вершина; R_k – завантаження (+) або вивантаження (-) ($R_k = 0$ для транзиту) вершини K; X_{ks} – потоки від K до всіх сусідніх вершин S; X_{kr} – потоки до K від сполучених вершин r;

Цільова функція закритої мережної задачі має вигляд

$$\Sigma \Sigma C_{rs} X_{rs} \rightarrow \min. \qquad (5.14)$$

Підсумовування виконується по всіх дугах мережі.

Описана модель мережної задачі не враховує пропускної спроможності ділянок мережі – для цього вводиться додаткове обмеження

$$X_{rs} < d_{rs} , \qquad (5.15)$$

де d_{rs} – пропускна спроможність ділянки мережі r-s в напрямі від r до s.

З урахуванням (5.12) - (5.14) одержуємо мережну транспортну задачу з обмеженням пропускної спроможності в простому вигляді (для перевезення одного вантажу).

Мережна і матрична моделі в більшості випадків взаємозамінні.

В деяких випадках обирається інший, ніж мінімум витрат на перевезення, критерій оптимальності Вибір критерію залежить від: характеру проблеми, наявної інформації і необхідної точності знаходження оптимуму.

Прикладами локального критерію оптимальності транспортної задачі можуть служити:

а) критерій мінімуму сумарного пробігу (придатний тільки для вирішення закритих транспортних задач в межах одного виду транспорту).

б) при оптимізації перевезень в межах року звичним вартісним критерієм є сума залежних приведених витрат $E_{зав} + E_{пер} + E_п + (K_{пс} + C_{гр})$,

де $E_{зав}$ – залежні від руху експлуатаційні витрати; $K_{пс}$ – капітальні вкладення на пересувний склад; $C_{гр}$ – вартість вантажів, що знаходяться в процесі перевезення; $E_{пер}$ – витрати по перевалюваннях; $E_п$ – вартість поставки вантажів.

в) При складанні оптимальних схем перевезень на перспективу можливе посилення пропускної спроможності ліній залежно від розміщення на них оптимальних вантажопотоків. Тому в критерії оптимальності враховується $K_{пост}$ – витрати на необхідний розвиток пропускної спроможності по постійних пристроях; $E_{нез}$ – незалежні експлуатаційні витрати.

$$E_{зав} + E_{пер} + E_{нез} + E_{п} + (K_{пс} + K_{пост} + C_{гр}),$$

г) в деяких випадках при рішення відкритих транспортних задач допускається використовування як критерій – сума витрат виробництва і тарифної платні за перевезення.

д) у окремих задачах по оптимізації термінових перевезень як критерій виступає час: тонно-часи (вагони-годинник) перебування вантажу в процесі перевезення або загальний час завершення певної перевізної операції.

Приклад. У трьох постачальників, кожен з яких має наступні ресурси – 25, 75, 13, є п’ять споживачів, які потребують таку кількість ресурсів – 15, 35, 22, 18, 23. розробити схему оптимальних перевезень, якщо вартості перевезень C_{ij}, разом з обсягами запасів та споживання подані в наступній таблиці. Оскільки сума поставок та споживання однакова і дорівнює 113, ми маємо закриту транспортну задачу.

Сформуємо ці дані в . Відведемо окрему матрицю під значення обсягів перевезень X_{ij} з i-го постачальника до j-го споживача. Знайдемо суму всіх X_{ij}, оскільки це потрібно для формування обмежень виду (5.7) - (5.8). Знайдемо добуток всіх X_{ij} на C_{ij} та їх суму, щоб сформувати цільову функцію виду (5.12).

			Споживачі, номер та обсяг споживання				
			1	2	3	4	5
			15	35	22	18	23
Постачальники, номер та обсяг поставок	1	25	2	6	3	4	6
	2	75	4	3	2	5	4
	3	13	6	4	3	4	3

Застосовуємо функцію Solwer і отримуємо рішення, яке показано в таблиці, що розташована нижче

		Споживачі					
		1	2	3	4	5	$\Sigma\ X_{ij}$
Постачальники	1	15	0	0	10	0	25
	2	0	35	22	5,1991	12,8009	75
	3	0	0	0	2,8009	10,1991	13
$\Sigma\ X_{ij}$		15	35	22	18	23	

Тут ми бачимо обсяги оптимальних перевезень з кожного постачальника на кожного споживача. Наприклад, з першого постачальника треба відправити на першого споживача 15 одиниць продукції, а на четвертого – 10. Мінімальна вартість усіх перевезень – 338 умовних одиниць.

Матрична постановка транспортної задачі виду (5.8) - (5.12) може бути сформульована як задача складення оптимального розкладу або задачу комівояжера.

Проблема полягає у тому, щоб рух поміж точками маршруту було здійснено за мінімальний час або з мінімальними витратами, відвідуючи їх тільки один раз.

Введемо наступні умовні позначення: N - число секторів, з яких починається рух об'єкта; M – число секторів в яких закінчується рух об'єкта; C_{ij} – матриця витрат на перехід з i-го сектора в j-й- , $j – 1..M$., $i = 1..N$; D_i – матриця кількості об'єктів, які мають вийти з i-го сектора; P_j – матриця кількості об'єктів, які мають прийти в j-й сектор; X_{ij} - матриця розкладу $X_{ij} = 1$, якщо здійснюється перехід з i-го сектора в j-й, Інакше $X_{ij} = 0$.

Критерій оптимальності – мінімум втрат на перехід з об'єкту на об'єкт

$$F(X) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} C_{ij} \cdot X_{ij} \cdot D_i \cdot P_j \to \min \tag{5.16}$$

Обмеження
$$\sum_{i=1}^{N} X_{ij} = P_j \, , \, i = 1..N \tag{5.17}$$

$$\sum_{j=1}^{M} X_{ij} = D_i \, , \; j = 1..Ь \tag{5.18}$$

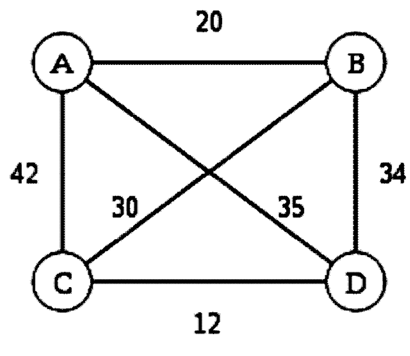
$$X_{ij} = 0 \text{ або } 1 \tag{5.19}$$

Умова (5.17) означає, що установники з кожного сектора об'єкти виходять тільки один раз, умова (5.18) – в кожен сектор об'єкти заходять тільки один раз, умова (5.19) – матриця переходів має значення 0 або 1.

5.2.5. Задача комівояжера

Задача комівояжера (комівояжер – бродячий торговець; англ. *Travelling Salesman Problem*, TSP; нім. *Problem des Handlungsreisenden*) полягає у знаходженні найвигіднішого маршруту, що проходить через вказані міста хоча б по одному разу. В умовах завдання вказуються критерій вигідності маршруту (найкоротший, найдешевший, сукупний критерій тощо) і відповідні матриці відстаней, вартості тощо. Ця задача є найскладнішим варіантом транспортної задачі і має нескінченну кількість рішень.

Оскільки комівояжер в кожному з міст постає перед вибором наступного міста з тих, що він ще не відвідав, існує $(n-1)!$ маршрутів для асиметричної та $(n-1)!/2$ маршрутів для симетричної задачі комівояжера. Таким чином, розмір простору пошуку зростає надекспоненційно від кількості міст.



Симетрична TSP для чотирьох міст.

Для можливості застосування математичного апарату для розв'язання проблеми, її слід представити у вигляді математичної моделі. Проблему комівояжера можна представити у вигляді моделі на графі, тобто, використовуючи вершини та ребра між ними. Таким чином, вершини графу (на мал.: від A до D) відповідають містам, а ра (i, j) між вершинами i та j сполучення між цими містами. У відповідність кожному ребру (i, j) можна зіставити вагу $c_{ij} \geq 0$, яку можна розуміти як, наприклад, відстань між містами, час або вартість подорожі. *Маршрутом* називається маршрут на цьому графі до якого входить по одному разу кожна вершина графа. Задача полягає у відшуканні найкоротшого маршруту.

В залежності від того, що зіставляється вазі ребер, розрізняють різні варіанти задачі, найважливішими з яких є *симетрична* та *метрична* задачі.

Асиметрична та симетрична задачі

В загальному випадку, *асиметрична задача комівояжера* відрізняється тим, що ребра між вершинами можуть мати різну вагу в залежності від напряму, тобто, задача моделюється орієнтованим графом. Таким чином, окрім ваги ребер графа, слід також зважати і на те, в якому напрямку знаходяться ребра.

У випадку *симетричної задачі* всі пари ребер між одними й тими самими вершинами мають однакову вагу, тобто, для ребра (i, j) ваги однакові $c_{ij} = c_{ji}$. Як наслідок, всі маршрути мають однакову довжину в обидва напрямки. В симетричному випадку кількість можливих маршрутів вдвічі менша за асиметричний випадок. Симетрична задача моделюється не орієнтовним графом.

Насправді, задача комівояжера у випадку реальних міст може бути як симетричною, так і асиметричною в залежності від тривалості або довжини маршрутів в залежності від напряму руху.

Метрична задача. Симетричну задачу комівояжера називають метричною, якщо відносно довжин ребер виконується нерівність трикутника. Умовно кажучи, в таких задачах обхідні шляхи довші за прямі, тобто, ребро від вершини i до вершини j ніколи не довше за шлях через проміжну вершину k:

$$c_{ij} \leq c_{ik} + c_{kj}$$

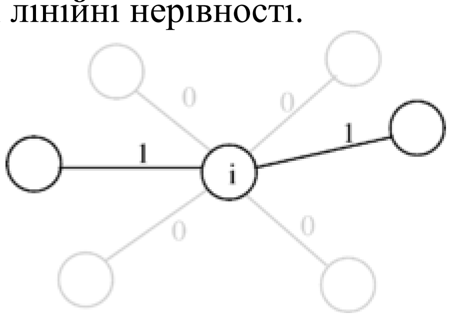
Така властивість довжини ребер визначає вимірний простір на множині ребер та міру віддалі, що задовольняє інтуїтивному розумінню відстані.

Не-метрична задача комівояжера може виникати, наприклад, у випадку мінімізації тривалості подорожі за наявності вибору транспортних засобів в різних напрямах. В такому випадку обхідний шлях літаком може бути коротший за пряме сполучення автомобілем.

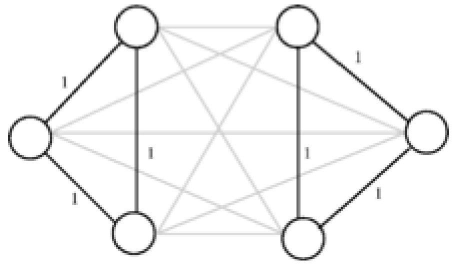
Якщо, на практиці, в умовах задачі дозволяється відвідувати міста декілька раз, то симетричну задачу можна звести до метричної. Для цього задачу розглядають на так званому *графі відстаней*. Цей граф має таку саму множину вершин як і вихідний та, на доданок, є повністю зв'язним. Вага ребер c_{ij} між вершинами i та j на графі відстаней відповідає вазі найліпшого сполучення між вершинами i та j у вихідному графі. Для визначених в такий спосіб ваг c_{ij} виконується нерівність трикутника, і кожному маршруту на графі відстаней завжди відповідає маршрут з можливими повтореннями вершин у вихідному графі.

Формулювання у вигляді задачі дискретної оптимізації

Одним з підходом до розв'язання задачі є формулювання її у вигляді задачі дискретної оптимізації, при цьому розв'язки представляються у вигляді змінних а зв'язки у вигляді відношень нерівності між ними. Таким чином, можливо декілька варіантів. Наприклад, симетричну задачу можна представити у вигляді множини ребер V. Кожному ребру $\{i, j\}$ зіставляється двійкова змінна $x_{ij} \in \{0, 1\}$, яка дорівнює 1 якщо ребро належить маршруту та 0 в протилежному випадку. Довільний маршрут можна представити у вигляді значень множини змінних приналежності, але не кожна така множина визначає маршрут. Умовою того, що значення множини змінних визначають маршрут є описані далі лінійні нерівності.



Умова кратності: кожна вершина повинна мати одне вхідне та одне вихідне ребро маршруту.



Цикли: змінні задовольняють умові кратності, але не визначають маршрут.

Кожна вершина має сполучатись через пару ребер з рештою вершин, тобто, через вхідне та вихідне ребро.

В сумі кожний доданок x_{ij} дорівнює або 1 (належить маршруту) або 0 (не належить). Тобто, отримана сума дорівнює кількості ребер в маршруті, таких що мають вершину i на одному з кінців. Вона дорівнює 2, оскільки кожна вершина має вхідне та вихідне ребро. У наведеному поруч малюнку вершина i показана з вхідним та вихідними ребрами, а ребра маршруту відмічено товстішими лініями. Поруч з ребрами вказано ваги x_{ij} що додаються до вказаної вище суми.

5.2.6. Динамічне програмування

Динамічне програмування – це математичний метод пошуку оптимального управління, спеціально пристосований до багатокрокових процесів.

Наприклад, хай планується діяльність групи підприємств на *N* років. Тут кроком є один рік. На початку 1-го року на розвиток підприємств виділяються кошти, які повинні бути якось розподілені між цими підприємствами. В процесі їх функціонування виділені кошти частково витрачаються. Кожне підприємство за рік приносить деякий доход, залежний від вкладених засобів. На початку року наявні засоби можуть перерозподілятися між підприємствами. Кожному з них виділяється якась частка засобів.

Ставиться питання: як на початку кожного року розподіляти наявні засоби між підприємствами, щоб сумарний дохід від всіх підприємств за *N* років був максимальним?

Перед нами типова задача динамічного програмування, в якій розглядається керований процес – функціонування групи підприємств. Управління процесом полягає в розподілі (і перерозподілі) засобів. Управляючою дією (УД) є виділення якихось засобів кожному з підприємств на початку року.

УД на кожному кроці повинне вибиратися з урахуванням всіх його наслідків в майбутньому. Дійсно, припустимо, що в розглянутій групі підприємств одні зайняті випуском предметів споживання, а інші випускають для цього машини. Причому метою є отримання за N років максимального об'єму випуску предметів споживання.

У задачі динамічного програмування використовуватимуться наступні позначення: N – число кроків; $\bar{x}_k = (x_{1k}, x_{2k}, ..., x_{nk})$ – вектор, що описує стан системи на k-му кроці; $\bar{x}_0$ – початковий стан, тобто стан на 1-у кроці; $\bar{x}_N$ – кінцевий стан, тобто стан на останньому кроці; X_k – область допустимих станів на k-му кроці; $\bar{u} = (u_{1k}, u_{2k}, ..., u_{mk})$ – вектор УД на k-му кроці, який забезпечує перехід системи із стану x_{k-1} в стан x_k; Uk – область допустимих УД на *k-му* кроці; Wk – величина виграшу, одержаного в результаті реалізації k-го кроку; S – загальний виграш за N кроків; $\bar{u}^* = (\bar{u}_1^*, \bar{u}_2^*, ..., \bar{u}_N^*)$ – вектор оптимальної стратегії управління за N кроків; $S_{k+1}(\bar{x}_k)$ – максимальний виграш, одержуваний при переході з будь-якого стану $\bar{x}_k$ у кінцевий стан $\bar{x}_0$ при оптимальній стратегії управління починаючи з k-го кроку; $S_1(\bar{x}_0)$ – максимальний виграш, одержуваний за N кроків під час переходу системи з початкового стану $\bar{x}_0$ у кінцеве $\bar{x}_N$ при реалізації оптимальної стратегії управління $\bar{u}^*$. Очевидно, що $S = S_1(\bar{x}_0)$, якщо $\bar{x}_0$ – фіксовано.

Метод динамічного програмування спирається на умову відсутності післядії і умову адитивності цільової функції.

Умова відсутності післядії. Стан $\bar{x}_k$, в яке перейшла система за один к-й крок, залежить від стану $\bar{x}_{k-1}$ і вибраної УД $\bar{u}_k$ і не залежить від того, яким чином система прийшла в стан $\bar{x}_{k-1}$,

$$\bar{x}_k = \bar{f}_k(\bar{x}_{k-1}, \bar{u}_k). \tag{5.20}$$

Аналогічно, величина виграшу Wk залежить від стану $\bar{x}_{k-1}$ і вибраного УД $\bar{u}_k$

$$W_k = W_k(\bar{x}_{k-1}, \bar{u}_k)., \tag{5.21}$$

Умова адитивності цільової функції. Загальний виграш за N кроків обчислюється за формулою

$$S = \sum_{k=1}^{N} W_k(\bar{x}_{k-1}, \bar{u}_k). \tag{5.22}$$

Приклад. У таблиці, наведеній нижче, відображені п'ять проектів, яка конкурують між собою за отримання інвестиційних фондів компанії. Ми бачимо, яка готівка буде отримана на вкладення однієї гривні.

Наприклад, проект *A* - це інвестиції, які можна зробити на початку першого року на два наступних роки, причому в кінці цього ж року можна повернути 30 копійок на вкладений долар, а в кінці наступного року можна додатково отримати ще 1 грн. Максимальна сума, яка може бути вкладена в цей проект, становить 500 000 грн. Проект *B* – повністю аналогічний –, але вкладення грошей можна зробити тільки на початку наступного року і т.д.

Рік	Ефективність інвестиційного проекту на одну вкладену гривню				
	A	*B*	*C*	*D*	*E*
Перший	-1,00	0	-1,00	-1,00	0
Другий	+0,30	-1,00	+1,00	0	0
Третій	+1,00	+0,30	0	0	-1,00
Четвертий	0	+1,00	0	+1,75	+1,40

Гроші, отримані внаслідок інвестицій, можна реінвестувати згідно з запропонованою схемою. У доповнення до цього компанія може отримувати по 6 % річних за короткостроковий внесок всіх грошей, які не були вкладені в інвестиції у даному році. У компанії є 1 000 000 грн. для інвестицій. Вона хоче максимізувати суму грошей, накопичених до кінцевого періоду. Сформулюємо задачу лінійного програмування.

Побудуємо економіко-математичну модель і приведемо отримане оптимальне рішення. Позначення: a_1, $в_1$, c_1, d_1, e_1 - інвестиції в проекти *A, B, C, D, E* відповідно; індекси 1, 2, 3 вказують перший, другий і третій роки вкладення інвестицій; s_1, s_2, s_3 - суми, які можна покласти під короткострокові 6% відповідно в першому, другому, третьому роках.

Економіко-математична модель:

а) в проект *A* в перший рік не може бути вкладено більше за 500 000 грн.: $a_1 \leq 5000\,000$;

б) оскільки у компанії є 1 000 000 грн., то у всі проекти ця сума повинна бути вкладена в першому році (інакше до кінцевого періоду компанія не максимізує своїх накопичень): $a_1 + c_1 + d_1 + s_1 = 1\,000\,000$;

в) аналогічний баланс на другий рік: $0.3a_1 + 1{,}1c_1 + 0{,}6\, s_1 = b_2 + s_2$

г) аналогічний баланс на третій рік: $a_1 + 0{,}3b_2 + 1{,}06\, s_3 = e_3 + s_3$;

д) максимальний прибуток до кінцевого періоду:

$$b_2 + 1{,}75d_1 + 14e_3 + 1{,}06s_3 \rightarrow \max;$$

Отримане оптимальне рішення: a_1 = 500 000 грн.; d_1 = 500 000 грн.; e_3 = 659 000 грн.; s_2 = 150 000 грн. Максимальний прибуток до кінцевого періоду є 1 797 600 грн., що вказує на високу ефективність інвестиційного процесу (приріст на 79,76 %). Інші не приведені значення вказаних змінних моделі дорівнюють нулю.

5.3. Багатокритеріальні задачі

Лише в окремих випадках мета, яку особа, що ухвалює рішення (ОУР) прагне досягти в планованій їм операції, вдається описати за допомогою одного кількісного показника. Різноманіття цілей ОУР адекватніше може бути описане за допомогою деякої сукупності часткових критеріїв (ч-критеріїв), що характеризують ступінь досягнення окремих цілей. Суперечливий характер цілей обумовлює, як правило, і суперечність ч-критеріїв. З формальної точки зору це призводить до того, що свої екстремальні значення ч-критерії одержують в різних точках області допустимих рішень

(ОДР) – Dx. Отже, ОУР приймаючи рішення, завжди повинен йти на компроміс, в розумних межах допускаючи погіршення значень одних ч-критеріїв в ім'я поліпшення значень інших. Рішення, що приймається ОУР із залученням сукупності ч-критеріїв, називатимемо компромісним, раціональним або просто рішенням ОУР.

Основна ідея обґрунтування і ухвалення рішення ОУР в умовах багатокрітеріальності полягає в послідовному звуженні ОДР Dx до мінімальних розмірів, що полегшує ухвалення остаточного рішення ОУР. Першим, найістотнішим кроком в цьому напрямі буде звуження ОДР Dx до деякої підмножини $Dx^{\pi} \subset Dx$.

5.3.1. Формальна постановка багатокритеріальної задачі

Формальна схема багатокритеріальної задачі математичного програмування від звичної відрізняється наявністю декількох цільових функцій

$$L^r(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j^r \cdot x_j + c_0^r \to \max_x, \quad r = \overline{1;R}, \tag{5.23}$$

$$D_x \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge -b_i, \Rightarrow \varepsilon_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i, i = \overline{1;m}, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1;n}, \end{cases} \tag{5.24}$$

де ε_i – ненегативні змінні, $i = 1; m$).

Знак max означає той факт, що бажаним є збільшення кожного з критеріїв оптимізації $Lr(x)$, що відображає деяку r-у мету задачі.

Вимога тільки максимізації не звужує загальності задачі. Так, наприклад, вимога мінімізації витрат деяких ресурсів еквівалентна вимозі максимізації залишку від спочатку виділених ресурсів. Наявність багатьох ч-критеріїв дозволяє зробити модель (5.23)-(5.24) адекватній економіко-математичній системі, що вивчається, проте виводить її з класу задач математичного програмування і вимагає розробки нових способів її аналізу. Рішення x' домінує рішення x ($x' > x$), якщо при x' хоча б один ч-критерій має більше значення при рівності інших. Тому рішення x може бути виключене з подальшого розгляду, як явно гірше, ніж x'. Якщо рішення x, не домінує із жодним з рішень $x \in Dx$, то його називають Паретто-оптимальним (π - оптимальним) або ефективним рішенням (π - рішенням). Таким чином, π-рішення – це не краще (таке, що не домінує) рішення, і ясно, що рішення задачі повинно володіти цією властивістю – інші рішення немає сенсу розглядати.

Формальне визначення π-оптимальності рішення x' записується як вимога про відсутність такого рішення $x \in Dx$, при якому б були виконані умови

$$L^r(x) \ge L^r(x'), \forall r, \tag{5.25}$$

і хоча б одне з них – строго (зі знаком >).

Іншими словами, умови (5.25) виражають вимогу неможливості поліпшення рішення x^{*} в межах ОДР *Dx* ні по одному ч-критерію без погіршення хоча б по одному з інших.

5.3.2. Зведення до задачі математичного програмування

Щоб можна було перевірити умову (3.18) для деякої довільно узятої точки x^{*}, не вдаючись до попарного порівняння з іншими, умову, сформулюємо її у вигляді наступної задачі математичного програмування

$$\delta^{r} = L^{r}(x) - L^{r}(x^{'}) = \sum_{j=1}^{n} c_j^{r} x_j - \sum c_j x_j^{'}, \forall \delta^{r}, \tag{5.26}$$

$$\Delta = \Delta(x) = \sum_{r=1}^{R} \delta^{r} \to \max_{x}, \tag{5.27}$$

$$x \in D_x, \forall x_j \geq 0. \tag{5.28}$$

Значення задачі математичного програмування неважко зрозуміти, якщо врахувати, що δ^{r} – це приріст ч-критерію *Lr*, одержаний при зсуві рішення x^{*} в точку *x*. Тоді, якщо після рішення задачі виявиться $\Delta_{max} = 0$, то це означатиме, що жоден з ч-критеріїв не можна збільшити, якщо не допускати зменшення будь-якого з інших ($\forall\ \delta^{r} \geq 0$). Але це і є умова π-оптимальності x^{*}. Якщо ж при рішенні виявиться, що $\Delta \geq 0$, то значить якийсь ч-критерій збільшив своє значення без погіршення значень інших ($\forall\ \delta^{r} \geq 0$), і значить $x^{*} \notin D^{\pi}_{x}$.

Приклад. Дані цільові функції:

$$L_1 = -x_1 + 2x_2 + 2,\ \ L_2 = x_1 + x_2 + 4,\ \ L_3 = x_1 - 4x_2 + 20,$$

і система обмежень:

$$x_1 + x_2 \leq 15,\ \ 5x_1 + x_2 \geq 1,\ \ -x_1 + x_2 \leq 5,\ \ x_2 \leq 20,\ \ \forall x_j \geq 0.$$

Перетворимо цільові функції в одну, згідно з (5.26) - (5.28):

$$\delta^1 = x_1 - 2x_2 + 1,\ \delta^2 = x_1 + x_2 - 8,\ \ \delta^3 = -x_1 + 4x_2 - 7,$$

$$\Delta = x_1 + 3x_2 - 14 \to \max.$$

Тепер ми маємо одну цільову функцію, яку і можемо вирішити за допомогою функції Solwer: $x_1 = 5$, $x_2 = 10$, $\Delta = 21$.

5.3.3. Метод гарантованого результату

При будь-якому довільному рішенні $x \in Dx$ кожний з ч-критеріїв прийме певне значення і серед них знайдеться, принаймні, один, значення якого буде якнайменшим

$$\varphi = \varphi(x) = \min_{1 \leq r \leq R} L^{r}(x) \to \max_{x}. \tag{5.29}$$

Метод гарантованого результату дозволяє знайти таке гарантоване рішення, при якому значення «якнайменшого» критерію стане максимальним. Таким чином, цільова функція (ЦФ) є деякою згорткою ч-критеріїв (5.29), а рішення зводиться до задачі частково-опуклого програмування при ОДР *Dx*, заданої лінійними обмеженнями.

Приклад. Для прикладу з п.5.3.2, застосувати метод гарантованого результату. Для цього вирішимо три задачі лінійного програмування з трьома різними критеріями оптимізації та з однаковими обмеженнями.

Застосувавши функцію Solwer, отримуємо, що при пошуку максимуму для L_1 та L_2, значення змінних параметрів буде однаковим $x_1 = 5$, $x_2 = 10$. При цьому $L_1 = 17$, $L_2 = 19$. А при пошуку максимальних значень відносно L_3, отримуємо x_1= 53687096, x_2 = -2,1 10^8, L_3 = 9,1 10^8. Отже, згідно з принципу (5.29) останнє рішення треба відкинути і взяти перше.

5.3.4. Метод згортки часткових критеріїв

Лінійна згортка ч-критеріїв виходить як x сума з деякими ваговими коефіцієнтами μ_r

$$L(x) = \sum_{r=1}^{R} \mu_{\hat{e}} L^r(x), \qquad (5.30)$$

Коефіцієнти ваги звичайно знаходять шляхом опиту експертів з відповідної наочної області. Оскільки вектор $\mu = (\mu_r)$ – суть вектор-градієнт $L^{\mu}(x)$, то припускається, що він указує напрям до екстремуму невідомої функції корисності. Найкращою лінійна згортка ч-критеріїв може виявитися у тому випадку, коли ч-критерії однорідні і мають єдиний еквівалент, що погоджує їх найбільш природним чином. Позитивна сторона такого підходу – нескладність, не завжди компенсує його серйозний недолік – втрату фізичного значення лінійної згортки різнорідних ч-критеріїв. Це утрудняє інтерпретацію результатів, тому одержане таким шляхом рішення, слід розглядати тільки як можливий (альтернативний) варіант рішення задач лінійного програмування. Для його порівняльного аналізу слід привертати будь-які інші варіанти і, звичайно, значення ч-критеріїв, одержувані при цьому.

Іноді при отриманні згортки ч-критеріїв заздалегідь нормуються наступним способом:

1. Знаходиться часткове рішення за кожним з критеріїв окремо.
2. Оптимальне значення кожного критерію $L^r_{ОПТ}(x)$ використовується для подальшого нормування критеріїв

$$\frac{L^r(x) - L^r_{ОПТ}(x)}{L^r_{ОПТ}(x)}. \qquad (5.31)$$

Таке нормування зводить різнорідні критерії в один масштаб.

3. Нормовані значення критеріїв зводяться в один функціонал, для якого і знаходиться його мінімальне значення.

Цей принцип можна застосовувати до будь-якого виду цільових функцій та обмежень: як лінійних так і нелінійних.

Принципи зведення не нормованих критеріїв в один функціонал залежать від того, куди прагне кожен ч-критерій:

1. Якщо всі критерії прагнуть максимуму, достатньо утворити їх суму з ваговими коефіцієнтами.

2. Якщо є критерії, що прагнуть мінімуму, потрібно їх перетворити на такі, що прагнуть максимуму $L^r_{MAX}(x) = \frac{1}{L^r_{MIN}(x)+1}$. Далі утворюється сума ч-критеріїв з ваговими коефіцієнтами, яка буде цільовою функцією, що прагне максимуму. Одиниця у знаменнику додана для випадку, коли $L^r_{MIN}(x)$ у своєму русі до оптимуму буде проходити через нуль, що викличе зупинку процесу пошуку екстремуму.

$$L(x) = \frac{\sum_{r=1}^{R} \mu_{\hbar} L^r_{MAX}(x)}{\sum_{r=1}^{R} \mu_{\hbar} L^r_{MIN}(x)+1}, \qquad (5.32)$$

3. Як варіант, можливе утворення функціоналу виду (5.32), де в чисельнику стоять ч-критерії, що прагнуть максимуму, а у знаменнику, такі, що прагнуть мінімуму.

Приклад.

Знайти оптимальний план співвідношень продукції (соків та вина), яку накопичує на складі торгова фірма, з урахуванням статистичних досліджень попиту. Умовні позначення: Xi - вид товарної групи (асортиментна позиція); m - кількість місяців; Q_1, Q_2 - нижня й верхня межі обсягів товарообігу для складу; P_{1i} - ціна покупки одиниці товару; P_{2i} - ціна реалізації одиниці товару; k_1 - собівартість плюс додаткові витрати на зберігання 1 шт продукту, який не був проданий у встановлений час, оскільки попит на нього виявився меншим від того, що прогнозується; k_2 - утрата прибутку на 1 шт продукту, зумовлена відсутністю товару, попит на який перевищив замовлену кількість; Параметри ящика: l - довжина; h –висота ; w – ширина; $S_{\text{од}}$ –площа, що займає одиниця продукції (ящик); $X_{\text{заг.ск.}}$ – загальна кількість ящиків, що можуть розміщатись на складі одночасно;$X_{опт}$ – оптимальний (розрахункова) кількість товару і-того виду на складі;$C_{\text{збі}}$ – вартість зберігання товару i –того виду; $C_{\text{прі}}$ – прибуток від реалізації одиниці товару і –того виду.

Статистичний метод розрахунку оптимального запасу продукції базується на спостереженнях за попитом товару протягом певного часу.

На підставі цього спостереження будується емпірична функція розподілу вигляду

$$F(X) = P(x < X), \qquad (5.33)$$

де P – імовірність того, що попит – x – буде менше наперед заданого значення X.

Тоді оптимальний попит ($X_{опт}$) буде знайдено за оптимальним значенням цієї функції, який розраховується за

$$F(X_{опт}) = C_{прі} / (C_{збі} + C_{прі}). \qquad (5.34)$$

Потрібне вирішеннявідносно ($X_{опт}$). Оскільки, частіше всього емпірична функція розподілу описується логарифмічно функцією виду

$$F(X_{опт}) = a + b\ln(X_{опт}), \qquad (5.35)$$

де a, b – константи,

рішення має вигляд

$$X_{onò} = \exp\left(\frac{1}{b}\left(\frac{\tilde{N}_{\text{ïð³}}}{\tilde{N}_{\text{çá}} + \tilde{N}_{\text{ïð³}}} - a\right)\right). \qquad (5.36)$$

Торгове підприємство має обмежену площу складу (*S*) і номенклатуру продукції з *n* найменувань, які представлені на складі у кількості *xi*. Для кожного найменування відомо площу, яку займає одиниця продукції s_i ($1<i<n$).

В цих умовах задача стає багатокритеріальною. З одного боку потрібно, щоб прибуток

$$Пр=\sum_{i=1}^{n} k_{1i}x_i\ , \tag{5.37}$$

був максимальним. З іншого боку бажано, щоб різниця між оптимальним значенням запасу продукції і реальним

$$Оз=\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-\exp\left(\frac{1}{b_i}\left(\frac{C_{npi}}{C_{зб}+C_{npi}}-a\right)\right)\right|, \tag{5.38}$$

була б мінімальною. Знак „по модулю” означає, що відхилення *xi* від оптимального запасу може бути в обидва боки. Обмеженням тут виступає загальна площа складу

$$S=\sum_{i=1}^{n} s_i x_i\ . \tag{5.39}$$

Для вирішення цієї задачі пропонується функціонал виду

$$\frac{Пр}{Оз+1}\to\max \quad \text{або} \quad \frac{\sum_{i=1}^{19} k_{1i}x_i}{\sum_{i=1}^{19}\left[\frac{k_{1i}}{k_{1i}+k_{2i}}-\left(a+b\ln x_i\right)\right]+1}\to\max \tag{5.40}$$

з обмеженнями на площу (загальна площа складських приміщень в цьому обмеженні множиться на 5, так як, піддони з ящиками можна ставити один на один у висоту, але не більше 5 штук)

$$\sum_{i=1}^{n} s_i x_i \le 5S\ , \tag{5.41}$$

та на ненегативні значення кількості кожного виду продукту.

$$\begin{gathered} x_i \ge 0 \\ (1\le i\le n)\,. \end{gathered} \tag{3.39}$$

Введемо додаткові обмеження на верхні та нижні межі товарообігу на складі

$$Q_{1i}\le x_i\le Q_{2i} \tag{3.40}$$

Вирішення подібної задачі для торгового підприємства, яке має номенклатуру з 19 продуктів і обмежений склад було виконано за допомогою функції «пошук рішення» . Емпіричні функції розподілу було розраховано за спостереженнями попиту продукту протягом 1 року. Результати рішення показали можливість отримання додаткового прибутку 125343 грн. за рік.

5.3.5. Складання зведеної таблиці

Як видно з пп. 5.3.1-5.3.4, остаточне прийняття рішення про те, як використовувати отримані результати вирішення оптимізації багатокритеріальних задач, має приймати особа, що ухвалює рішення.

Для цього всі рішення зводиться в таблицю, де записуються альтернативні варіанти. Розглядаючи таблицю, ОУР визначається з тим, який з варіантів влаштовує його найбільше, або найменш ризикованим.

Приклад . Зведена таблиця оптимізації багатокритеріальних задач за попередніми прикладами з з пп. 5.3.1-5.3.4.

Метод	Оптимальні значення змінних параметрів, x_0	Критерії оптимізації			Сума оптимальних значень критеріїв L^{Σ}
		L_1	L_2	L_3	
Метод гарантованого результату	(27/2 ; 3/2)	25/2	19	25/2	44
Метод згортки	(28/3;17/3)	0	19	33 1/3	52 1/3
Оптимізація L_1	(15;0)	17	19	5	41
Оптимізація L_2, L_3	(28/3;17/3)	0	19	33 1/3	52 1/3
$x \notin Dx^{\pi}$	(5;3)	1	12	-13	0

Як видно з таблиці, метод згортки та оптимізація L_2, L_3 забезпечують найбільше значення суми оптимальних значень критеріїв. Такий результат може спонукати ОУР до вибору цих рішень, але при цьому L_1 дорівнює нулю, що порушує принцип π - оптимальності. Тому рішення, як це було сказано раніше, залишається на розсуд ОУР.

5.4. Оптимізація конфліктних ситуацій в економіці (теорія ігор)

Звичайно теорію гри визначають як розділ математики для вивчення конфліктних ситуацій. Це означає, що можна виробити оптимальні правила поведінки кожної сторони, що бере участь у рішенні конфліктної ситуації.

Гра – спрощена формалізована модель реальної конфліктної ситуації. Математично формалізація означає, що вироблені певні правила дії сторін в процесі гри: варіанти дії сторін; вихід гри при даному варіанті дії; обсяг інформації кожної сторони про поведінку всіх інших сторін. Виграш або програш сторін оцінюється чисельно. Гравець - це одна зі сторін в ігровій ситуації. Стратегія гравця - це його правила дії в кожній з можливих ситуацій гри.

Платіжна матриця (матриця ефективності, матриця гри) включає всі значення виграшів (в кінцевій грі). Нехай гравець 1 має m стратегій A_i гравець 2 - n стратегій B_j ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$). Гра може бути названа грою m/n. Подамо матрицю ефективності гри двох осіб.

Гравець 2 / Гравець 1	B_1	B_2	…….	B_n	α_i
A_1	a_{11}	a_{12}	…….	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	…….	a_{2n}	α_2
……..	……..	….	…….	……..	……..
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…….	a_{mn}	α_m
β_j	β_1	β_2	…….	β_n	

У даній матриці елементи a_{ij} - значення виграшів гравця 1 - можуть означати й математичне сподівання виграшу (середнє значення), якщо виграш є випадковою величиною. Величини α_i, $i = \overline{1,m}$, и β_j, $j = \overline{1,n}$, - відповідно мінімальні значення елементів a_i по рядках і максимальні - по стовпцях.

Ігри діляться на кінцеві й нескінченні. У кінцевій грі кожний з гравців має кінцеве число можливих стратегій. Якщо хоч би один з гравців має нескінченне число можливих стратегій, гра є нескінченною.

Ще ігри діляться на кооперативні, коаліційні і безкоаліційні. Якщо гравці не мають права вступати в угоди, утворювати коаліції, то така гра відноситься до безкоаліційних; якщо гравці можуть вступати в угоди, створювати коаліції - коаліційних. Кооперативна гра – це гра, в якій заздалегідь визначені коаліції.

Ігри можна розділити на одноходові та багатоходові. Одноходові ігри закінчуються після одного ходу кожного гравця. Так, в матричній грі після одного ходу кожного з гравців відбувається розподіл виграшів.

5.4.1. Антагоністична гра

Розглянемо антагоністичну гру, представлену матрицею виграшів $m \times n$, де число рядків $i = \overline{1,m}$, а число стовпців $j = \overline{1,n}$. Застосуємо принцип отримання максимального гарантованого результату при найгірших умовах. Гравець 1 прагне прийняти таку стратегію, яка повинна забезпечити максимальний програш гравця 2. Відповідно гравець 2 прагне прийняти стратегію, що забезпечує мінімальний виграш гравця 1. В цих умовах, якщо

$$\max_i \min_j \alpha_{ij} = \min_j \max_i \alpha_i = v. \tag{5.41}$$

гра називається грою з «сідловою» точкою і гравці мають додержуватися стратегій, які її забезпечують, і називаються «чистими», а v. – називавється ціною гри.

Якщо в матричній грі відсутня сідлова точка, то знаходять «змішану» стратегію гравців, тобто набір застосування його чистих стратегій при багаторазовому повторенні гри в одних і тих же умовах із заданими ймовірностями. Для гравця 1 змішана стратегія полягає в застосуванні чистих стратегій $A_1, A_2, ..., A_m$ з відповідними ймовірностями (частотою) $p_1, p_2 .... p_m$,

$$S_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2, & \ldots, & A_m \\ p_1 & p_2, & \ldots, & p_m \end{pmatrix}, \qquad \text{де} \ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, p_i \geq 0 \qquad (5.42)$$

Для гравця 2

$$S_2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2, & \ldots, & B_n \\ q_1 & q_2, & \ldots, & q_n \end{pmatrix}, \qquad \text{де} \ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, q_j \geq 0 \ ; \qquad (5.43)$$

q_j - імовірність застосування чистої стратегії B_j.

Чисті стратегії гравця є єдино можливими неспільними подіями. У матричній грі, знаючи матрицю A (вона відноситься й до гравця 1, і до гравця 2), можна визначити при заданих векторах $\overline{p}$ і $\overline{q}$, середній виграш (математичне сподівання ефекту) гравця 1

$$M(A, \overline{p}, \overline{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j \ , \qquad (5.44)$$

де $\overline{p}$ і $\overline{q}$, - вектори; p_i і q_j - компоненти векторів.

Потрібно зазначити, що при виборі оптимальних стратегій гравцеві 1 завжди буде гарантований середній виграш, не менший, ніж ціна гри, при будь-якій фіксованій стратегії гравця 2 (і, навпаки, для гравця 2). Активними стратегіями гравців 1 і 2 називають стратегії, що входять до складу оптимальних змішаних стратегій відповідних гравців зі ймовірностями, відмінними від нуля. Значить, до складу оптимальних змішаних стратегій гравців можуть входити не всі апріорі задані їх стратегії.

Приклади. Приклад 1. Визначити верхню та нижню ціни при заданій матриці гри і указати максимінну і мінімаксну стратегії. Представимо матрицю гри з позначеннями стратегій, A_j, B_i;

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	1	1	3	1
A_2	4	5	6	4
β_j	4	5	6	

Визначимо нижню ціну гри: α_1 =1; α_2 =4; α =4 (див. стовпець α_i,).

Визначимо верхню ціну гри: $\beta_1 = 4$; $\beta_2 = 5$; $\beta_3 = 6$; $\beta = 4$ (див. рядок β_j).

Таким чином, $\alpha = \beta = 4$, тобто $\max_i \min_j \alpha_{ij} = \min_j \max_i \alpha_i = 4$.

Значить, $\alpha = \beta = v = 4$ - чиста ціна гри при стратегіях A_2 і B_1. Отже, маємо гру з сідловою точкою.

Приклад 2. Дана матриця гри $\begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 3 & 5 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$. Знайти її змішані стратегії.

Побудуємо цільову функцію згідно (5.44)

$$M(A, \overline{p}, \overline{q}) = 25 p_1 q_1 + p_1 q_2 + 3 p_2 q_1 + 5 p_2 q_2 + p_3 q_1 + 9 p_3 q_2 \rightarrow \max \ ,$$

та враховуючи обмеження (5.42) - (5.43), знайдемо оптимальні значення ймовірностей застосування різних стратегій, застосувавши функцію Solwer. Рішенням цієї гри є те, що всі ймовірності дорівнюють нулю, окрім $p_1 = 1$ $q_1 =$

1. Отже ця гра повинна виконуватися у чистих стратегіях.

5.4.2. Кооперативна гра

Оптимальні стратегії у випадку, коли учасники гри є співробітниками, знаходяться методами біматричної гри. По аналогії з матричними іграми двох осіб в біматричній грі кожен з гравців вибирає свою стратегію, робить один хід, після чого відбувається розподіл виграшів. Відмінність полягає в тому, що біматричная гра визначається не одній, а двома матрицями виграшів. Кожен з гравців має свою матрицю, і виграш один з них зовсім не означає програш іншого.

Хай матриці виграшів першого і другого гравців мають відповідно вигляд

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \cdots a_{1j} \cdots a_{1n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{i1}\, a_{i2} \cdots a_{ij} \cdots a_{in} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{m1}\, a_{m2} \cdots a_{mj} \cdots a_{mn} \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} b_{11}\, b_{12} \cdots b_{1j} \cdots b_{1n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ b_{i1}\, b_{i2} \cdots b_{ij} \cdots b_{in} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ b_{m1}\, b_{m2} \cdots b_{mj} \cdots b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Обидві матриці можуть бути представлені однією матрицею пар елементів A і B, так званою біматрицею

$$C=\begin{pmatrix} (a_{11},b_{11}) & (a_{12},b_{12}) \cdots (a_{1j},b_{1j}) \cdots (a_{1n},b_{1n}) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ (a_{i1},b_{i1}) & (a_{i2},b_{i2}) \cdots (a_{ij},b_{ij}) \cdots (a_{in},b_{in}) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ (a_{m1},b_{m1}) & (a_{m2},b_{m2}) \cdots (a_{mj},b_{mj}) \cdots (a_{mn},b_{mn}) \end{pmatrix}.$$

При виборі першим гравцем i-го рядка, а другим гравцем j-го стовпця виграш кожного з них складе пару (a_{ij},b_{ij}).

Природно, інтерес представляють ігри, в яких матриці A і B не співпадають і елементами однієї матриці не є монотонні перетворення іншої. Якщо ця умова не дотримана, то деякому максимальному елементу a_{kl} матриці A відповідає максимальний елемент b_{kl} матриці B. Це означає, що існує пара чистих стратегій (k,l) при використанні яких обох гравців мають максимальний виграш і конфлікт відсутній. У решті випадків досягти максимуму свого виграшу відразу обидва гравці не можуть. Необхідно ввести деяку ознаку компромісної оптимальності, якою є ситуація рівноваги. Під ситуацією маються на увазі конкретні використані змішані стратегії x, y.

Ситуація рівноваги для біматричної гри представляється парою таких змішаних стратегій x, y при яких дотримуються нерівності:

$$M_1^i \le M_1,\ i=\overline{1,m};\qquad M_2^j \le M_2,\ j=\overline{1,n}, \tag{5.45}$$

де M_1^i – математичне сподівання виграшу першого гравця при застосуванні ним тільки i-ї стратегії; M_2^j – математичне сподівання виграшу другого гравця при застосуванні j-ї чистій стратегії.

Змістовний сенс нерівностей (5.45) полягає в тому, що застосування чистих стратегій будь-яким з гравців дає не більший ефект, чим застосування змішаних стратегій (x, y) обома гравцями.

Оскільки (x, y) є розподілами вірогідності використання чистих стратегій гравцями, то очевидно, що

$$M_1^i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j, \ i = \overline{1,m}; \quad M_2^j = \sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i, \ j = \overline{1,n};$$
$$M_1 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j; \quad M_2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j. \tag{5.46}$$

Підставивши в нерівності (5.45) значення математичних сподівань з формул (5.46), отримаємо

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j, \ i = \overline{1,m}; \tag{5.47}$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i \le \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j, \ j = \overline{1,n}. \tag{5.48}$$

Відмітимо, що (x, y) є по фізичній суті вірогідністю вибору чистих стратегій, а можливі результати вибору стратегій кожним з гравців складають повну групу несумісних подій. Тому значення елементів (x, y) повинні задовольняти умовам

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_i = 1; \ x_i \ge 0, \ i = \overline{1,m}; \\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1; \ y_j \ge 0, \ j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{5.49}$$

Визначення ситуацій рівноваги здійснюється шляхом сумісного вирішення системи нерівностей і рівнянь (5.47) – (5.49).

Приклад. Нехай існують матриці виграшів кооперативної гри

A =

12	45	65
45	4	48
12	47	14

B =

122	752	124
456	485	459
478	258	254

Знайти оптимальні стратегії для обох гравців.

На рис. 5.6 представлено повний хід рішення цієї задачі, в якій було застосовано метод згортки часткових критеріїв (5.30)-(5.32). Жовтим виділено оптимальні частоти застосування стратегій для кожного гравця. При цьому виграш першого гравця складе 27, а другого – 459. Оптимальним стратегіями є $X = \{0; 0{,}88; 0{,}12\}$, $Y = \{0{,}6; 0{,}4; 0\}$.

5.4.3. Ігри з природою

Нерідко економічна ситуація є унікальною, і рішення в умовах невизначеності повинно прийматися одноразово. Це породжує необхідність розвитку методів моделювання прийняття рішень в умовах невизначеності і ризику. Традиційно наступним етапом такого розвитку є гра з природою. Формальне вивчення гри з природою, так само як і стратегічних, повинно починатися з побудови платіжної матриці.

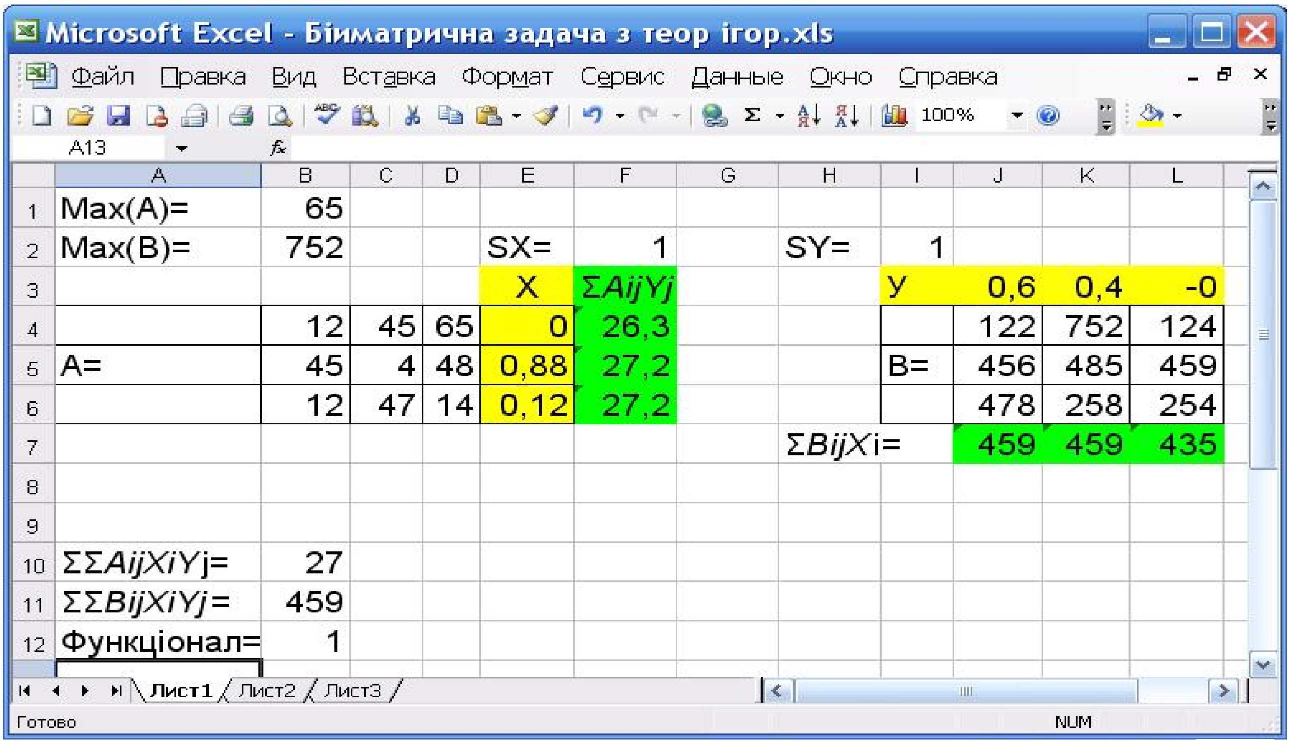


Рис. 5.6. Рішення біматричної задачі із застосуванням функції «Пошук рішення»

Помітна особливість гри з природою полягає в тому, що в ній свідомо діє тільки один з учасників, у більшості випадків званий гравцем 1. Гравець 2 (природа) свідомо проти гравця 1 не діє, а виступає як така, що не має конкретної мети і партнер по грі, що випадковим чином вибирає чергові «ходи». Тому термін «природа» характеризує деяку об'єктивну дійсність, яку не треба розуміти буквально, хоч цілком можуть зустрітися ситуації, в яких «гравцем» 2 дійсно може бути природа (наприклад, обставини, пов'язані з погодними умовами або з природними стихійними силами).

На перший погляд відсутність обдуманої протидії спрощує гравцеві задачу вибору рішення. Однак, хоч ОУР ніхто не заважає, їй важче обґрунтувати свій вибір, оскільки в цьому випадку гарантований результат не відомий.

Нехай гравець 1 має m можливих стратегій: $A_1, A_2, \ldots, A_m$, а у природи є n можливих станів (стратегій): $П_1, П_2, \ldots, П_n$, Тоді умови гри з природою задаються матрицею A виграшів гравця 1.

$$A = \left(\begin{array}{c|cccc} & П_1 & П_2 & \ldots & П_n \\ \hline A_1 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ A_2 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_m & a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{array}\right)$$

Платить, звичайно, не природа, а деяка третя сторона (або сукупність сторін, що впливають на прийняття рішень гравцем 1 і об'єднаних у поняття «природа»).

Можливий ще й інший спосіб завдання матриці гри з природою: не у вигляді матриці виграшів, а у вигляді так званої матриці ризиків $R = ||r_{ij}||_{m,n}$ або матриці упущених можливостей. Величина ризику – це розмір плати за відсутність інформації про стан середовища. Матриця R може бути побудована безпосередньо з умов задачі або на основі матриці виграшів A. Ризиком r_{ij}

гравця при використанні ним стратегії A_i і при стані середовища $П_j$ будемо називати різницю між виграшем, який гравець отримав би, якби він знав, що станом середовища буде $Пj$, і виграшем, який гравець отримає, не маючи цієї інформації. Тобто,

$$R_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij} . \qquad (5.50)$$

Знаючи стан природи (стратегію) $П_j$, гравець вибирає ту стратегію, при якій його виграш максимальний, тобто $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$, *де* $\beta_j = \max\limits_{1\le i\le m} a_{ij}$ при заданому j.

Прийняття рішень, якщо відомі ймовірності стану природи. p_j, вибір оптимальної стратегії активного гравця визначається як

$$\alpha = \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j , \qquad (5.51)$$

Тобто, знаходиться середнє по рядку платіжної матриці гри і обирається та стратегія, яка дає найбільше середнє значення.

В деяких випадках імовірності настання певних станів природи подаються обумовлені, що точність визначення цих імовірностей менше 100%. Частіше, для кожного стану природи $П_j$ вказується своя точність розрахунку ймовірності його стану t_j, яка як і ймовірність змінюється в діапазоні від 0 до 1 (від о% до 100%). У цьому випадку , вибір оптимальної стратегії активного гравця визначається із залученням матриці ризиків r_{ii}

$$\alpha = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j t_j - \sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j (1 - t_j) \right), \qquad (5.52)$$

Тобто, при визначенні середнього, його складові коректуються на величину точності визначення його ймовірності. В той же час визначається середній ризик, скоректований на можливий рівень не точності визначення станів природи. Відповідні значення середнього виграшу і середнього ризику віднімаються по рядках, а потім обирається та стратегія, яка дає найбільший результат.

Прийняття рішень в умовах повної невизначеності, пов'язане з відсутністю інформації щодо ймовірності станів середовища (природи), називають «безнадійною» або «поганою». У таких випадках для визначення найкращих рішень використовуються наступні критерії.

Критерії максимакса. З його допомогою визначається стратегія, яка максимізує максимальні виграші для кожного стану природи. Це критерій крайнього оптимізму. Найкращим признається рішення, при якому досягається максимальний виграш, рівний $M = \max\limits_{1\le i\le m} \max\limits_{1\le j\le n} a_{ij}$. Потрібно зазначити, що ситуації, що вимагають застосування такого критерію, в економіці загалом нерідкі, і користуються ними не тільки оптимісти, але й гравці, поставлені в безвихідне становище, коли вони вимушені керуватися принципом «або пан, або пропав».

Максимінний критерій Вальда. З позицій даного критерію природа розглядається як агресивно настроєний і свідомо діючий противник типу тих, які протидіють у стратегічній грі. Вибирається рішення, для якого досягається значення $W = \max\limits_{1\le i\le m} \min\limits_{1\le j\le n} a_{ij}$. Це перестраховочна позиція крайнього песимізму, розрахована на гірший випадок. Така стратегія прийнятна, наприклад, коли гравець не так зацікавлений у великому успіху, але хоче себе застрахувати від несподіваних програшів. Вибір такої стратегії визначається відношенням гравця до ризику.

Критерій мінімаксного ризику Севіджа. Вибір стратегії аналогічний вибору стратегії за принципом Вальда з тією відмінністю, що гравець керується не матрицею виграшів *A*, а матрицею ризиків *R*): $S = \min_{1 \le i \le m} \max_{1 \le j \le n} r_{ij}$.

Критерій песимізму-оптимізму Гурвіца. Цей критерій при виборі рішення рекомендує керуватися деяким середнім результатом, що характеризує стан між крайнім песимізмом і нестримним оптимізмом. Згідно з цим критерієм стратегія в матриці *A* вибирається у відповідності зі значенням $H_A = \max_{1 \le i \le m} \{p \min_{1 \le j \le n} a_{ij} + (1-p) \max_{1 \le j \le n} a_{ij}\}$, де p - коефіцієнт песимізму $(0 \le p \le 1)$. При p=0 критерій Гурвіца співпадає з максимаксним критерієм, а при $p = 1$ - з критерієм Вальда.

Коли за прийнятим критерієм рекомендується до використання декілька стратегій, вибір між ними робиться за додатковим критерієм, наприклад в розрахунок можуть прийматися середні квадратичні відхилення від середніх виграшів при кожній стратегії. Вибір може залежати від схильності до ризику ОУР.

Приклади.

Приклад 1. В умовах повної невизначеності знайти найкращу стратегію за наведеною нижче матрицею. Наступна матриця – ризиків, розрахована за (5.50)

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	20	30	15	15
A_2	75	20	35	20
A_3	25	80	25	25
A_4	85	5	45	5

$$r = \begin{pmatrix} 65 & 50 & 30 & 10 \\ 10 & 60 & 10 & 5 \\ 60 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 75 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

Для гравця 1 кращими є стратегії:

- за критерієм Вальда A_3;
- за критерієм Севіджа A_2 і A_3;
- за критерієм Гурвіца (при p= 0,6) - A_3;
- за критерієм максимакса A_4

Оскільки стратегія A_3 фігурує як оптимальна за трьома критеріями вибору з чотирьох перевірених, міру її надійності можна визнати досить високою для того, щоб рекомендувати цю стратегію до практичного застосування.

Приклад 2. Директор фірми повинен вирішити, скільки ящиків товару потрібно виробляти протягом місяця. Імовірності того, що попит на товар протягом місяця буде 6, 7, 8 або 9 ящиків, становить відповідно 0,1; 0,3; 0,5; 0,1.

Витрати на виробництво одного ящика є 45 грн. Фірма продає кожний ящик по ціні 95 грн. Якщо ящик з товаром не продається протягом місяця, то він псується й фірма не отримує прибутку. Скільки ящиків потрібно виробляти протягом місяця?

Користуючись початковими даними, будуємо матрицю гри. Стратегіями гравця 1 (тобто, фірми) є різні показники числа ящиків, які йому, можливо, потрібно виробляти. Станами природи виступають величини попиту на аналогічне число ящиків. Обчислимо, наприклад, показник прибутку, який отримає виробник, якщо він зробить 8 ящиків, а попит буде тільки на 7. У результаті отримаємо наступну платіжну матрицю в грі з природою (див. таблицю). Як бачимо, найбільший середній очікуваний прибуток є 352,5 грн. Він відповідає виробництву 8 ящиків.

На практиці частіше за все в подібних випадках рішення приймаються виходячи з критерію максимізації середнього очікуваного прибутку або мінімізації очікуваних витрат. Обираючи такий підхід, можна зупинитися на рекомендації проводити 8 ящиків, і для більшості ОУР рекомендація була б обґрунтованою. Саме так поступаємо ми, коли розглядаємо різні прикладні задачі прийняття рішень у грі з природою.

Попит на ящики / Виробництво ящиків	6 (0,1)*	7 (0,3)	8 (0,5)	9 (0,1)	Середній очікуваний прибуток
6	300	300	300	300	300
7	255	350	350	350	340,5
8	210	305	400	400	352,5
9	165	260	355	450	317

* У дужках приведена ймовірність попиту на ящики.

5.5. Оптимізація управління соціально-економічної системи, заданої нечіткою моделлю

Для отримання чіткого висновки з нечіткої моделі соціально-економічної системи і системи управління нею, потрібно мати їх нечіткий опис у вигляді функцій приналежності, описаних у п. 4.7. Тоді процедура отримання чіткого результату з нечітких моделей на підставі чіткого значення вхідних факторів полягає у наступному.

Хай в базі правил є m правил вигляду:

R_1: ЯКЩО x_1 це A_{11} . І . x_n це A_{1n}, ТО y це B_1.

R_i: ЯКЩО x_1 це A_{i1} . І . x_n це A_{in}, ТО y це B_i.

. . . .

R_m: ЯКЩО x_1 це A_{m1} . І . x_n це A_{mn}, ТО y це B_m.

де x_k, ($k = 1..n$) – вхідні змінні; y – вихідна змінна; A_{ik} – задані нечіткі множини з функціями приналежності для x_k, B_i – задані нечіткі множини з функціями приналежності для y.

Результатом нечіткого висновку є чітке значення змінної y^* на підставі заданих чітких значень x_k, k=1..n

У загальному випадку механізм логічного висновку включає чотири етапи: введення нечіткості (фазифікація), нечіткий висновок, композиція і приведення до чіткості, або дефазифікація (див. рис. 5.7).

Алгоритми нечіткого висновку розрізняються головним чином видом використовуваних правил, логічних операцій і різновидом методу дефазифікації. Розроблені моделі нечіткого виведення Мамдані, Сугено, Ларсена, Цукамото.

Розглянемо докладніше нечіткий вивід на прикладі механізму Мамдані (Mamdani). Це найбільш поширений спосіб логічного висновку в нечітких системах. У нім використовується мінімаксна композиція нечітких множин. Даний механізм включає наступну послідовність дій.

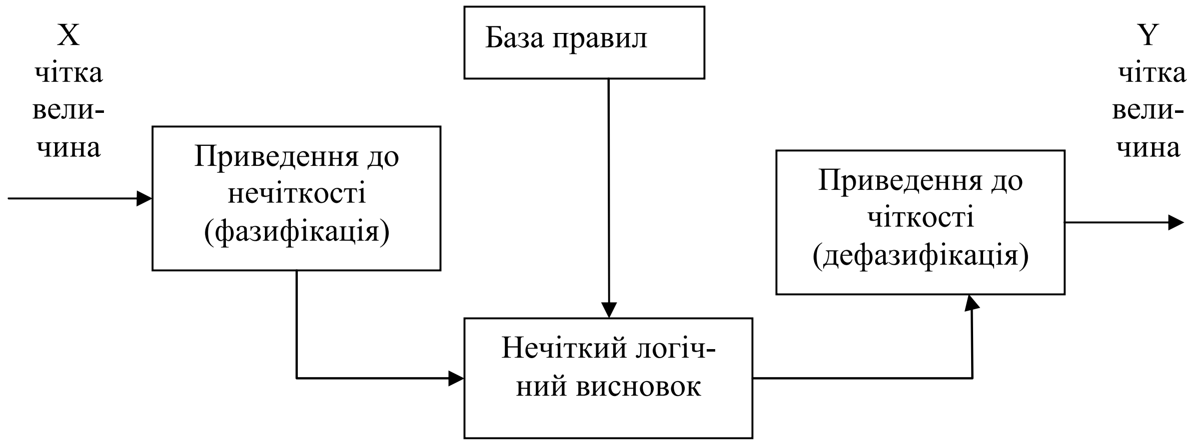


Рис. 5.7. Система нечіткого логічного висновку

1. Процедура фазифікації така: визначаються ступені істинності, тобто значення функцій приналежності для лівих частин кожного правила (передумов). Для бази правил з m правилами позначимо ступені істинності як $A_{ik}(x_k)$, i=1..m, k=1..n.

2. Нечіткий висновок. Спочатку визначаються рівні «відсікання» для лівої частини кожного з правил:

$$\alpha_i = \min_i (A_{ik}(x_k)) . \tag{5.53}$$

Далі знаходяться «усічені» функції приналежності:

$$B_i^*(y) = \min_i (\alpha_i, B_i(y)) . \tag{5.54}$$

3. Композиція, або об'єднання отриманих усічених функцій, для чого використовується максимальна композиція нечітких множин:

$$MF(y) = \max_i (B_i^*(y)), \tag{5.55}$$

де $MF(y)$ – функція приналежності підсумкової нечіткої множини.

4. Дефазифікація, або приведення до чіткості. Існує декілька методів дефазифікації. Наприклад, метод середнього центру, або центроїдний метод:

$$y = \frac{1}{y_{\max} - y_{\min}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} MF(y)dy = \frac{1}{y_{\max} - y_{\min}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \max(B_i^*(y))dy , \tag{5.56}$$

Де y_{max}, $y_{мin}$ – діапазон значень B^*_i після композиції (5.55). Геометричний сенс такого значення – центр тяжіння для кривої $MF(y)$.

Приклад. Для соціально-економічної системи з двома вхідним факторами і одним вихідним було розроблено чотири функції приналежності: A_{11} та A_{21} для x_1, A_{12} та A_{22} для x_2, які описують відношення вхідних факторів до вирішальних правил R_1 та R_2. Розроблено також нечіткі функції приналежності для системи управління B_1 та B_2 для вихідного фактора y. Було задано чіткі значення для вхідних факторів x'_1 та x'_2. Знайти чітке значення y^*.

На рис. 5.8. показано процес нечіткого висновку за методикою Мамдані для двох вхідних змінних і двох нечітких правил R_1 і R_2. Графіки функцій приналежності для x та y розташовуються у такому порядку: для кожного вирішального правила – в один ряд, для кожного вхідного фактора x – в одну колонку. На осі абсцис відмічаються значення x'_i і піднімається перпендикуляр до перетину з графіками функції приналежності. Для кожного вирішального правила R_1 та R_2 величини MF(x'_i) порівнюються і вибирається їх менше значення. Ця величина відсікає на графіку B_1 та B_2 площу між абсцисою та лінією $min(x'_i)$. Потім ці площі об'єднуються за правилом відкидання меншого значення і утворюється фігура, показана на лівому прямокутнику внизу. Центр тяжіння цієї фігури можна знайти, розділивши її на елементарні прямокутники і трикутники, і є чітким висновком з y^* з нечіткої моделі.

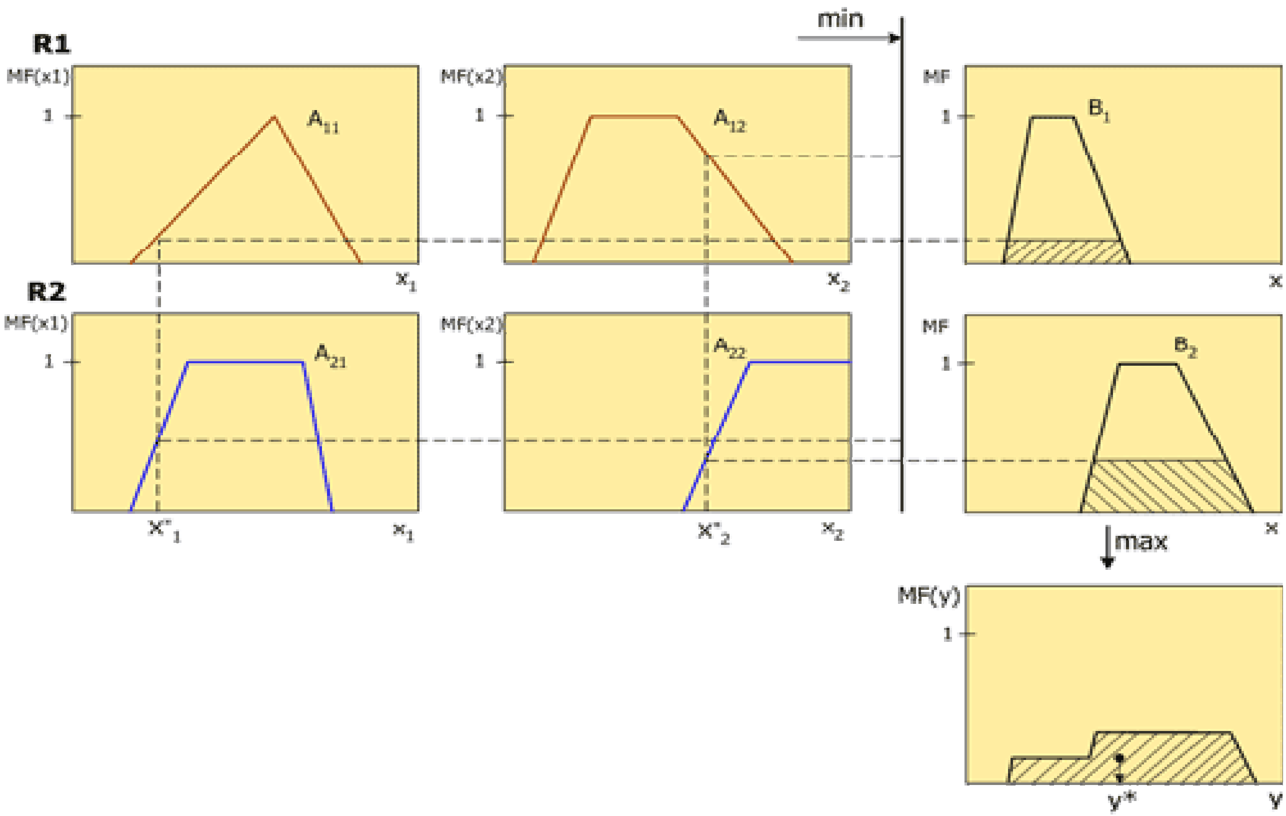


Рис. 5.8. Схема нечіткого висновку за Мамдані

5.6 Мінімізація булевих функцій

Нагадаємо, що під булевою алгеброю мається на увазі розділ математичної логіки, в якому для побудови логічних формул використовуються тільки операції НЕ, І, АБО.

За допомогою булевих функцій описується робота кібернетичних систем типу перемикача – лічильників, дешифраторів, диспетчерів, і так далі Розробка системи починається з вербального опису завдань, які ставляться перед нею і умов, в яких вона функціонуватиме. Далі будується логічна модель, що відображає роботу системи.

Модель описується логічними функціями, які задаються у вигляді таблиць істинності. Самі таблиці формуються в процесі розробки по вербальному (змістовному) опису принципів роботи системи. Математичний опис роботи системи є формулами алгебри логіки. Кожна змінна формули відображає стан окремих елементів системи. Тому, чим більше за змінні містить формула, чим складніше вона, тим система, що складніше розробляється. Одна і та ж система може описуватися різними по складності формулами, а, отже, може бути реалізована різними по складності способами.

За всіх інших рівних умов, чим простіше система, тим краще. Тому прагнуть отримати найбільш прості логічні формули (функції), тобто оптимізувати створювані системи за критерієм складності.

Для розуміння цих положень розберемо наступну задачу.

Приймальна комісія у складі трьох членів комісії і одного голови вирішує долю абітурієнта більшістю голосів. У разі рівного розподілу голосів більшість визначається голосом голови Побудувати автомат для таємного голосування.

Виразимо умову завдання у вигляді таблиці істинності (табл. 4.1). Тут x_4 – голова, $x_3 ... x_1$ - члени комісії, y – вихідна функція: $y = 1$, якщо абітурієнт успішно пройшов співбесіду, $y = 0$, якщо – ні.

Таблиця 4.1.

x_4	x_3	x_2	x_1	y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1

x_4	x_3	x_2	x_1	y
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Кон'юнкції вхідних змінних, на яких функція приймає значення 1, називатимемо одиничними, або робочими наборами (РН). Набори, на яких функція приймає значення 0, називатимемо нульовими або забороненими наборами(ЗН).

Для того, щоб по таблиці істинності знайти функцію, достатньо виписати всі робочі набори і з'єднати їх знаком логічного додавання . Якщо змінна входить в РН одиницею, то вона записується в прямому вигляді, інакше – в інверсному. З табл. 4.1 отримуємо

$$y = \overline{x}_4 x_3 x_2 x_1 + x_4 \overline{x}_3 \overline{x}_2 x_1 + x_4 \overline{x}_3 x_2 \overline{x}_1 + x_4 \overline{x}_3 x_2 x_1 +$$
$$+ x_4 x_3 \overline{x}_2 \overline{x}_1 + x_4 x_3 \overline{x}_2 x_1 + x_4 x_3 x_2 \overline{x}_1 + x_4 x_3 x_2 x_1$$

Даний вираз є досконалою диз'юнктивною нормальною формою (ДДНФ) булевої функції. Очевидно, що така функція є незручною для використання, тому її потрібно зменшити (мінімізувати).

Відома безліч методів мінімізації булевих функцій. Поширення набули методи Квайна–мак–Класьки, Вейча–Карно, Гарвардський метод, метод невизначених коефіцієнтів.

5.6.1. Метод невизначених коефіцієнтів

Математичною чіткістю і простотою відрізняється метод невизначених коефіцієнтів. Суть його полягає в представленні функції як диз'юнктивної нормальної форми (ДНФ) наступного вигляду:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k_1^1 x_1 \vee k_1^0 \overline{x_1} \vee k_2^1 x_2 \vee k_2^0 \overline{x_2} \vee \ldots \vee k_{12\ldots N}^{00\ldots0} \overline{x_1}, \overline{x_2} \ldots \overline{x_N}. \quad (5.57)$$

де k_i – коефіцієнти, які при входженні відповідної кон'юнкції в мінімальну ДНФ рівні одиниці, інакше рівні нулю, $i = 1,2,\ldots N$.

У правій частині виразу (4.1) представлені всі можливі елементарні кон'юнкції N аргументів. Підставивши в ліву частину вирази (5.57) значення функції згідно заданій таблиці істинності, а в праву – відповідні набори значень аргументів, отримаємо систему логічних рівнянь, які легко вирішуються щодо невідомих коефіцієнтів. Для нульових значень лівої частини виразу (5.57) коефіцієнти при кон'юнкціях, що не обертаються в нуль на даному наборі, повинні дорівнювати нулю, оскільки диз'юнкція тільки тоді рівна нулю, коли всі доданки рівні нулю. Для одиничних значень функцію досить, щоб хоч би один доданок дорівнював одиниці.

З викладеного витікає простій алгоритм методу невизначених коефіцієнтів. Складається ДНФ у вигляді (5.57), підставляються набори значень аргументів, на яких функція рівна нулю (нульові набори) і всі коефіцієнти при ненульових кон'юнкціях прирівнюються нулю. Підставляються одиничні набори і для кожного з них коефіцієнти при ненульових кон'юнкціях мінімального рангу прирівнюються одиниці, решта коефіцієнтів прирівнюється нулю. З кон'юнкцій з одиничними значеннями коефіцієнтів складається мінімальна ДНФ.

Основний недолік методу обумовлений трудністю перебору всіх можливих елементарних кон'юнкцій. Очевидно, число кон'юнкцій рівне числу можливих різних комбінацій аргументів і їх заперечень. Неважко бачити, що можливих комбінацій без урахування заперечень визначається виразом:

$$S_1 = C_N^1 + C_N^2 + \ldots + C_N^i + \ldots + C_N^N, \qquad (5.58)$$

де N – число аргументів; C_N^i – число сполучень з N по i.

Згідно формули розкладання бінома Ньютона

$$S_1 = (1+1)^N - C_N^0 = 2^N - 1. \qquad (5.59)$$

З урахуванням заперечення кожна певна кон'юнкція з множини S_1 у свою чергу дасть 2^i різних комбінацій. Тому загальне число різних елементарних кон'юнкцій має вигляд

$$S_1 = C_N^1 2^1 + C_N^2 2^2 + \ldots + C_N^N 2^N = 3^N - 1. \qquad (5.60)$$

Закодуємо змінні за позиційною ознакою. Хай x_1 відповідає 1, x_2 – 10, x_3 – 100, x_4 – 1000 і т.д.; не x_1 – 2, не x_2 – 20, не x_3 – 200 і так далі Одиниці в старшому розряді коди відповідає певному аргументу, двійка – запереченню цього аргументу. Якщо кон'юнкції відобразити у вигляді арифметичної суми кодів, то числовий ряд від 1 до $3^N - 1$, в трійковій системі числення, дасть всі можливі елементарні кон'юнкції.

Представимо цей ряд у вигляді вектора

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}. \qquad (5.61)$$

Формування вектора дає просте мнемонічне правило перебору кон'юнкцій, яким зручно користуватися як при ручному рахунку, так і при вирішенні завдань на ЕОМ.

Весь процес мінімізації може бути зведений до виконання наступних етапів:

1. Формуємо трійковий числовий ряд від 1 до $3^N - 1$ (вектор A).
2. Кожному елементу вектора A приводимо у відповідність арифметичний добуток значень відповідних аргументів (вектор E), тобто

$$A \to E = \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 - x_1 \\ x_2 \\ x_1 x_2 \\ \vdots \\ (1 - x_1)(1 - x_2)\dots(1 - x_N) \end{bmatrix}. \tag{5.62}$$

Тут заперечення i -го аргументу відображається різницею $(1 - x_i)$.

3. У вектор *E* послідовно підставляємо ті набори значень аргументів, на яких функція рівна нулю, – нульові набори. При кожній такій підстановці частина елементів обернеться в одиницю. Відповідні ним елементи початкового вектора *E* виключаємо з подальшого розгляду, прирівнюючи їх нулю.

4. У вектор *E* по черзі підставляємо одиничні набори, і результуючі елементи умножаємо на відповідні елементи вектора *A*.

5. З вектора, отриманого в результаті такого множення, вибираємо ненульові елементи, що містять мінімальне число цифр, відмінних від нуля. Цими елементами є коди кон'юнкцій мінімального рангу.

Число кон'юнкцій, що «проглядаються», також можна істотно скоротити, опираючись на той факт, що число елементарних кон'юнкцій, що не обертаються в нуль при підстановці певного набору значень аргументів у виразі (4.57), дорівнюють $2^N - 1$.

Правила знаходження цих кон'юнкцій дуже прості.

1. Формується двійковий ряд чисел від 1 до $2^N - 1$ (вектор *C*).

Хай $N = 3$. Тоді

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.63}$$

2. Кожен елемент вектора умножається на 2 (вектор *D*).

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}. \tag{5.64}$$

3. З числа в певному розряді кожного елементу вектора *D* віднімається значення відповідного аргументу в наборі за умови, що це число відмінне від

нуля. Якщо воно рівне нулю, то нуль переноситься в результат. Наприклад, хай значення аргументів x_3, x_2, x_1 рівні відповідно 1,0,1.

Тоді результат описаного перетворення представляється вектором *F*.

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad (5.65)$$

Це і є кон'юнкції, які на наборі 1,0,1 не обертаються в нуль.

Викладені правила дозволяють скоротити число кон'юнкцій $3^N - 1$, що проглядаються $3^N - 1\,2^N - 1$. Крім того, впорядкування елементарних кон'юнкцій за збільшенням їх рангів дозволяє добитися такої організації циклів, при якій можна вийти на кінець програми після отримання шуканого результату.

5.6.2. Метод алгебраїчних перетворень

Хай $x \in E_2$.

Позначимо $$x^{\sigma} = \begin{cases} x, \text{ якщо } \sigma = 1 \\ \underline{x}, \text{ якщо } \sigma = 0 \end{cases}$$

де для всіх $j = \overline{1, m}$

Формула, $x_{i_1}^{\sigma_1} \& x_{i_2}^{\sigma_2} \& \ldots \& x_{i_m}^{\sigma_m}$ називається *кон'юнкцією над множиною змінних* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $x_i \in E_2$. Кон'юнкція називається *елементарною* (скорочено е.к.), якщо $x_{i_j} \neq x_{i_k}\ j \neq k$.

Символи & у е.к. скорочено опускатимуться. Число букв в е.к. називається *рангом* е.к.

Формула вигляду $K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_s$ (короткий запис $\bigvee_{i=1}^{s} K_i$), де K_i ($i = \overline{1, s}$) – диз’юнкція, називається *диз'юнктивною нормальною формою* (скорочено д.н.ф.).

Угрупування

Елементарні кон'юнкції K_i і K_j в д.н.ф. групуються в пари так, щоб після винесення за дужку загального множника *K* формула $K_i \vee K_j$ мала вигляд $K(x \vee \bar{x})$ або $K(\mathbf{1} \vee x)$. Далі ці вирази замінюються еквівалентним ним виразам *K*.

Приклад

$$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 = \bar{x}_1 x_2 (\bar{x}_3 \vee x_3) \vee x_1 x_2 (\bar{x}_3 \vee x_3) =$$
$$= \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2 = x_2 (\bar{x}_1 \vee x_1) = x_2 .$$

5.6.3. Метод Блейка

Метод полягає в послідовному застосуванні двох правил до д.н.ф.

Правило 1 називається *узагальненим склеюванням* і грунтується на рівності:

$$x K_1 \vee \bar{x} K_2 = x K_1 \vee \bar{x} K_2 \vee K_1 K_2 .$$

Справедливість рівності можна показати за допомогою ланцюжка перетворень:

$$x K_1 \vee \bar{x} K_2 = x K_1 \mathbf{\&1} \vee \bar{x} K_2 \mathbf{\&1} = x K_1 (\mathbf{1} \vee K_2) \vee \bar{x} K_2 (\mathbf{1} \vee K_1) =$$
$$= x K_1 \vee x K_1 K_2 \vee \bar{x} K_2 \vee \bar{x} K_1 K_2 = x K_1 \vee \bar{x} K_2 \vee K_1 K_2 (x \vee \bar{x}) =$$
$$= x K_1 \vee \bar{x} K_2 \vee K_1 K_2 .$$

На першому етапі проводяться операції узагальненого склеювання, поки це можливо. Для цього в д.н.ф. відшукуються формули вигляду $x K_1 \vee \bar{x} K_2$ і до д. н. ф. додаються е.к. $K_1 K_2$.

Зручне порівняння е.к.. проводити таким чином : 1-а е.к. порівнюється з 2-ою, 3-ою і так далі і у разі, коли диз'юнкція е.к. утворює формулу вигляду, $x K_1 \vee \bar{x} K_2$ до $K_1 K_2$ Потім 2-а е.к. у д.н.ф. порівнюється з 3-ою, 4-ою і т. д., зокрема <u>із знов отриманими при </u>всіх <u>попередніх </u>склеюваннях. І так далі для всіх е.к. у д.н.ф.. На цьому етапі формула ускладнюється.

Приклад

Хай $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 x_3$.

Після першого етапу отримаємо

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_3 \vee x_3 .$$

Е.к. $x_2 x_3$ вийшла в результаті склеювання $x_1 x_2$ і $\bar{x}_1 x_3$ по x_1, $x_1 x_3$ – результат склеювання $\bar{x}_1 x_3$ із знов отриманою до. $x_1 x_3$ по x_1.

Правило 2 називається *поглинанням* і ґрунтується на рівності, що легко доводиться ланцюжком перетворень: $K_1 \vee K_1 K_2 = K_1 (\mathbf{1} \vee K_2) = K_1 \cdot \mathbf{1} = K_1$. На другому етапі проводяться всілякі операції поглинання. Для цього в перетвореній після операції склеювання формулі знаходяться е.с. найменшого рангу, і всі е.к. у д.н.ф., що містять ці е.к. як співмножники, викреслюються.

Приклад

Для функції з попереднього прикладу застосування правила поглинання дає:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_2x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3 \vee x_3 = x_1x_2 \vee x_3.$$

Якщо задана функція своєї д. н. ф., то при її спрощенні доцільно спочатку застосувати метод угрупування, як більш простій, потім метод Блейка. Якщо відразу починати з методу Блейка, то перетворення бувають дуже громіздкими.

Приклад 1

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 =$$
$$= \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2(x_3 \vee \bar{x}_3) \vee x_1\bar{x}_2(x_3 \vee \bar{x}_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 =$$
$$= \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1(x_2 \vee \bar{x}_2) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1 \vee \bar{x}_2x_3 = \bar{x}_2x_3 \vee x_1.$$

Приклад 2

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_3 =$$
$$= \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2(\bar{x}_3 \vee x_3) \vee x_1\bar{x}_3(\bar{x}_2 \vee x_2) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_3 =$$
$$= \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_3 = \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_3$$

5.6.4. Мінімізація булевих функцій за Куайном

Хай будуть задані номери наборів з чотирьох змінних, на яких логічна функція приймає одиничне значення:

$$f\,(2, 5, 6, 7, 10, 12, 13, 14) = 1.$$

Виразимо цю логічну функцію в ДНФ (символ кон'юнкції писати не будемо):

$$F\,(0010, 0101, 0110, 0111, 1010, 1100, 1101, 1110) =$$
$$= \underline{x}_4\underline{x}_3x_2\underline{x}_1 \vee \underline{x}_4x_3\underline{x}_2x_1 \vee \underline{x}_4x_3x_2\underline{x}_1 \vee \underline{x}_4x_3x_2x_1 \vee$$
$$\vee\, x_4\underline{x}_3x_2\underline{x}_1 \vee x_4x_3\underline{x}_2\underline{x}_1 \vee x_4x_3\underline{x}_2x_1 \vee x_4x_3x_2\underline{x}_1$$

На першому етапі мінімізації початкову ДНФ можна спростити за рахунок використання *закону склеювання*:

$$f = x_2\underline{x}_1 \vee \underline{x}_4x_3x_1 \vee \underline{x}_1x_3x_2 \vee x_3\underline{x}_2x_1 \vee x_4x_3\underline{x}_2 \vee x_4x_3\underline{x}_1.$$

Звертаємо увагу на те, що одну і ту ж конституанту (імпліканту) можна склеювати з іншими конституантами (імплікантами) багато разів, оскільки в логіці Буля діє *закон идемпотентности*:

$$a = a \vee a = a \vee a \vee a = \ldots, \qquad a = a \wedge a = a \wedge a \wedge a = \ldots,$$

тому будь-яку конституанту можна розмножити.

На другому етапі скористаємося *таблицею Куайна* (табл.5.1), відповідно до якої метод мінімізації отримав найменування — *метод Куайна*.

Таблиця 5.1.

$x_4x_3x_2x_1$	0010	0101	0110	0111	1010	1100	1101	1110
– – 0 1	1	0	1	0	1	0	0	1
0 1 – 1	0	1	0	1	0	0	0	0
0 1 1 –	0	0	1	1	0	0	0	0
– 1 0 1	0	1	0	0	0	0	1	0
1 1 0 –	0	0	0	0	0	1	1	0
1 1 – 0	0	0	0	0	0	1	0	1

У таблиці по вертикалі перераховані всі отримані на першому етапі спрощення імпліканти, а по горизонталі – початкові конституанти. Одиниця в табл. 1. стоїть там, де імпліканта «накриває» конституенту. Річ у тому, що конституанта завжди може бути замінена імплікантою або навіть окремим термом за законом *поглинання*:

$$a = a \vee (a \wedge b) = a \vee (a \wedge abc) = \ldots ,$$

$$a = a \wedge (a \vee b) = a \wedge (a \vee abc) = \ldots$$

Після заповнення таблиці Куайна вийшло так, що майже в кожній графі опинилося по дві одиниці; тим часом досить мати одну одиницю на графі. Тому, по можливості, потрібно виключити надмірні одиниці. Вибір одиниць проводиться з міркувань мінімальності числа термів (вибрані одиниці заштриховані). У результаті виявилось, що можна обійтися тільки трьома імплікантами замість шести:

$$f = x_2\underline{x}_1 \vee \underline{x}_4x_3x_1 \vee x_4x_3\underline{x}_2.$$

За допомогою таблиць істинності перевіряємо, що отримана в МНФ функція відтворює всі значення початкової функції. Відзначимо, що в загальному випадку рішень за критерієм мінімуму термів може бути декілька.

5.6.5. Мінімізація за методом поєднання індексів

Не менш ефективним способом мінімізації логічних функцій є *метод поєднання індексів*. Для його викладу складемо табл. 4.2., в стовпцях якої записані можливі поєднання індексів. У останній графі виписані значення функції *y*. Аналіз таблиці починається зліва по стовпцях. Принцип виключення *i, j - коду* наступний. На перетині *i-стовпця*, наприклад з поєднанням індексів 23, і *j-строки*, наприклад 3-го, знаходиться код 10, що відповідає імпліканті $x_2\underline{x}_3$.. Отже, в цьому стовпці скрізь, де зустрічається код 10, тобто в рядках 2, 3, 10 і 11, ці коди виключаються, оскільки значення функції в 3-му рядку рівне нулю. Тепер візьмемо стовпець з поєднанням індексів 124. Тут в 2-му і 6-му рядках залишені коди 010, а в 10-му і 14-му рядках – код 011. Зроблено це тому, що ці коди зустрічаються тільки на рядках зі значенням функції, рівним одиниці. Навпаки, код 110 цього ж стовпця зустрічається як при одиничних значеннях функції, так і при нульових.

Таблиця 5.2

n	1	2	3	4	12	13	14	23	24	34	123	124	134	234	1234	y
0	0	0	0	0	00	00	00	00	00	00	000	000	000	000	0000	0
1	1	0	0	0	10	10	10	00	00	00	100	100	100	000	1000	0
2	0	1	0	0	**01**	00	00	10	10	00	**010**	**010**	000	100	0100	1
3	1	1	0	0	11	10	10	10	10	00	110	110	100	100	1100	0
4	0	0	1	0	00	01	00	01	00	10	001	000	010	010	0010	0
5	1	0	1	0	10	11	10	01	00	10	**101**	100	**110**	010	1010	1
6	0	1	1	0	**01**	01	00	11	10	10	011	**010**	010	**110**	0110	1
7	1	1	1	0	11	11	10	11	10	10	111	110	**110**	**110**	1110	1
8	0	0	0	1	00	00	01	00	01	01	000	001	001	001	0001	0
9	1	0	0	1	10	10	11	00	01	01	100	101	101	001	1001	0
10	0	1	0	1	**01**	00	01	10	11	01	**010**	**011**	001	101	0101	1
11	1	1	0	1	11	10	11	10	11	01	110	111	101	101	1101	0
12	0	0	1	1	00	01	01	01	01	11	001	001	011	**011**	0011	1
13	1	0	1	1	10	11	11	01	01	11	**101**	101	111	**011**	1011	1
14	0	1	1	1	**01**	01	01	11	11	11	**011**	**011**	**011**	111	0111	1
15	1	1	1	1	11	11	11	11	11	11	111	111	111	111	1111	0

Отже, всі коди на рядках, що закінчуються нульовими значеннями функції, виключаються автоматично. Якщо ці коди потрапляють на рядки, що закінчуються одиничним значенням функції, то вони також не враховуються. Залишаються тільки ті коди, які розташовані на рядках з одиничним значенням функції (ці коди затемнені).

Далі керуються наступним правилом. Для того, щоб функція прийняла значення, рівне одиниці, достатньо того, щоб тільки яка-небудь одна імпліканта на рядку прийняла одиничне значення. Перш за все залишаємо мінімальну імпліканту $x_2\underline{x}_1$, яка перекриває одиниці в рядках 2, 6, 10 і 14. Потім, природно, звертаємося до 12-го рядка. Тут залишаємо єдиний на рядку код 011, що відповідає імпліканті $x_4x_3\underline{x}_2$. Ця ж імпліканта відповідальна за 13-й рядок, що закінчується теж одиницею. Залишилося розглянути 5-й і 7-й рядки. Загальною для них є імпліканта $\underline{x}_4x_3x_1$.

Таким чином, трьома імплікантами ми перекрили всі одиничні значення функції, що співпадає з результатом, отриманим на основі таблиці Куайна.

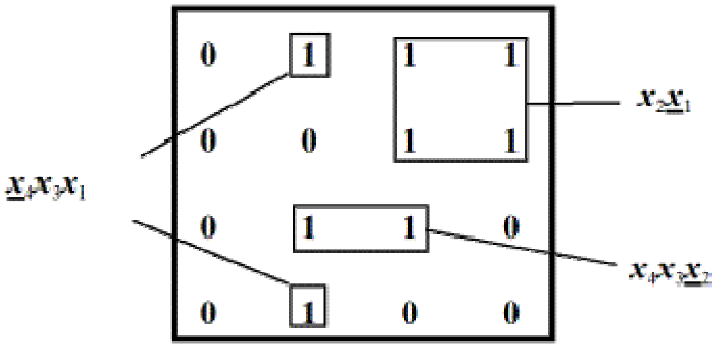
5.6.6. Карти Карно

Карта Карно для чотирьох змінних представлена табл. 4.3. Кожна клітка карти відповідає конституєнті. Заповнена карта представлена табл. 4 (функція узята та ж, що і по-перше двох методах). Згідно *закону склеювання*, дві суміжні конституєнти з одиничними значеннями завжди можна об'єднати для отримання відповідної імпліканти. Причому суміжними вважаються і ті, які лежать на межах карти. Які саме одиниці потрібно об'єднати для отримання відповідної імпліканти, легко визначити візуально. Слід також пам'ятати, що відповідно до закону идемпотентности одна і та ж одиниця табл. 4.4 може склеюватися з двома або трьома суміжними одиницями.

Таблиця 5.3

	x_1	x_1	$\underline{x}_1$	$\underline{x}_1$	
x_2	1100	1110	0110	0100	$\underline{x}_4$
x_2	1101	1111	0111	0101	x_4
$\underline{x}_2$	1001	1011	0011	0001	x_4
$\underline{x}_2$	1000	1010	0010	0000	$\underline{x}_4$
	$\underline{x}_3$	x_3	x_3	$\underline{x}_3$	

Таблиця 5.4



Пояснимо ідею карт Карно іншим способом.

Всю математичну логіку складають 3 операції: «заперечення» – «¬», «АБО» – «+», «І» – «&». За допомогою цих операцій можна реалізувати будь-яку функцію алгебри логіки. Значення, що повертаються цими логічними операціями видно з таблиці істинності.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A+B$	$A\,\&\,B$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1

Ідея карти Карно полягає в тому, щоб усі можливі варіанти розташувати в одній таблиці. На наступному малюнку показана нумерація таблиць Карно для 2, 3 і 4 змінних.

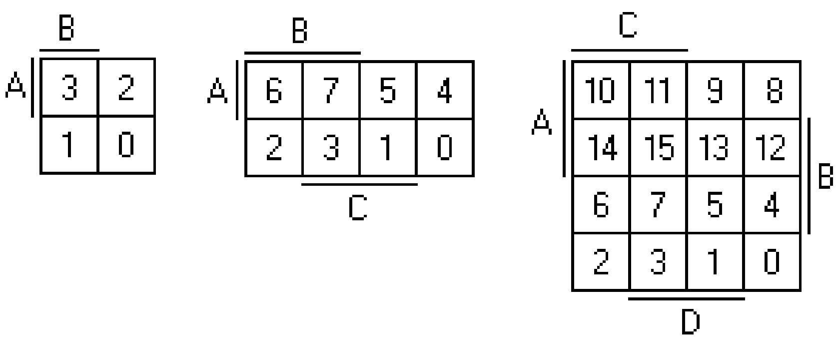


Рис. 5.9. Нумерація таблиць Карно для 2, 3 і 4 змінних

Нумерація таблиці така, що наприклад осередку з номером 2 відповідає варіант, в якому A = 1 і B = 0. Риски над елементами таблиці обмежують такі зони, в яких значення даної змінної завжди рівне одиниці.

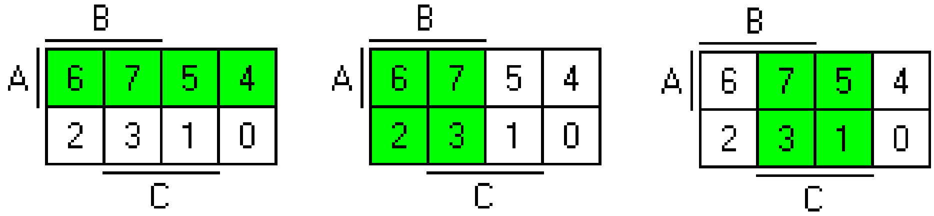


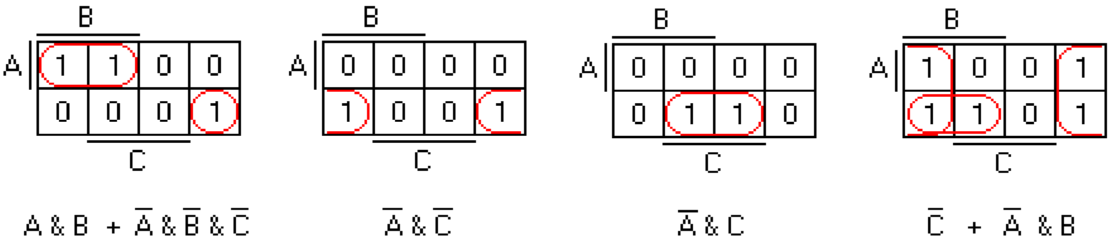
Рис. 5.10. Зони обмеження

Бачите яку зону охоплює змінна ***A*** (вона зелена)? У двійкових записах чисел 6=110, 7=111, 5=101 і 4=100 перша двійкова цифра (а це і є ***A***) рівна 1. Так от вся таблиця ділиться на зони. На малюнку перша таблиця для ***A***, друга для *B*, а третя для *C*.

Далі Ви складаєте таблицю істинності і заносите нулі і одиниці в клітки з номерами, десяткові значення яких рівні двійковому значенню набору змінних.

Осередок	A B C
0	0 0 0
1	0 0 1
2	0 1 0
3	0 1 1
4	1 0 0
5	1 0 1
6	1 1 0
7	1 1 1

Далі наступає ще складніша операція – це знаходження контурів. Контуром тут називається область в таблиці з одиниць. При цьому чим більше одиниць потрапили в один контур, тим краще. Кількість одиниць в одному контурі може бути тільки кратна двом, тобто 1 2 4 8 ... Ось дивитеся приклад знаходження контурів (рис. 4.3).

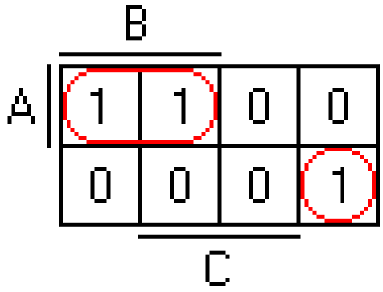


1 2 3 4

Рис. 5.11. Принцип знаходження контурів

Існують цілі контури, як на 1 з рис. 4.3. А є також розірвані як на 2 і на 4 з рис. 4.3. Але розірвані вони тільки з вигляду, а якщо в думках склеїти протилежні краї таблиці, то контури будуть цілими. Вся ідея проста: Вам потрібно обвести якомога більше одиниць одночасно, і при цьому зробити стільки різних контурів, щоб всі одиниці були покриті. Одиниці можуть розташовуватися тільки в стовпець, рядок або декілька стовпців і рядків, тобто по діагоналі контури будувати не можна.

Це запис логічного виразу. Ви бачите контур вгорі і контур на один осередок внизу справа. Давайте запишемо формулу для верхнього контуру. Для цього дивимося в яку область контур повністю потрапляє. В даному випадку контур повністю потрапляє в область ***A*** і ***B***, тому для нього буде формула ***A&B***. Нижній контур не потрапляє ні в одну з відомих нам областей. Всі такі області називаються протилежними і виходять операцією НЕ.



$$A \& B + \overline{A} \& \overline{B} \& \overline{C}$$

Рис. 5.12. Карта Карно, що відповідає певному логічному виразу

5.7. Індивідуальні завдання № 9. Знайдення оптимального рішення економічних задач

Завдання: користуючись знаннями, набутими після вивчення матеріалу розділу, провести розрахунки оптимальних значень параметрів для соціально-економічних систем.

Порядок виконання: для визначення свого варіанту студент використовує номер за списком навчальної групи *Nг*. Кожен студент вирішує всі задачі цього завдання.

Методичні вказівки: 1) провести визначення, яким методом вирішується поставлена задача: математичного програмування, теорії ігор чи нечітких множин?

2) скласти системи нерівностей та функціонала, чи матриці гри або функції приналежності;

3) вирішення провести із застосуванням можливостей або .

Задача 1

Підприємство випускає три виду продукції А, Б і С (табл. 5.1) Для виробництва цієї продукції потрібні такі ресурси, як матеріали, праця робочих та ІТР. Для прийняття рішення оптимального випуску продукції, треба: визначити параметри оптимізації задачі та скласти якісну та математичну моделі задачі на основі операційної методології. Виконати формалізацію задачі, описати методи її рішення і методику дослідження отриманої моделі.

Таблиця 5.1

Вхідні данні

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими потужностями
		А	Б	С	
1	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	1	2	1	100
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	1	0,4	0,45	75

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими потужностями
		А	Б	С	
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	2	7	295
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	95	60	300	
2	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	1	1	100
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	1	0,35	0,45	75
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	1	2	7	280
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	95	65	300	
3	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	1	2	120
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	1	0,4	0,45	75
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	1	2	6	275
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	90	65	290	
4	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	1	2	110
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	1	0,4	0,4	70
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	1	2	5	260
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	90	65	290	
5	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	1	2	100
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	0,45	0,4	80
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	2	6	260
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	90	65	270	
6	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	1	2	95
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	2	0,5	85
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	2	7	260

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими потужностями
		А	Б	С	
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	90	60	265	
7	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	1	1	2	95
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	0,5	120
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	2	7	260
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	90	110	265	
8	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	1	1	2	95
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	0,5	120
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	3	3	7	310
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	90	125	265	
9	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	1	2	2	105
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	0,5	120
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	3	6	310
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	190	125	75	
10	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	1	2	2	125
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	1	1	130
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	1	5	300
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	190	120	170	
11	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	3	2	2	120
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	3	135
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	4	5	300
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	185	125	170	

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими потужностями
		А	Б	С	
12	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	3	5	4	125
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	3	3	130
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	4	5	190
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	180	135	175	
13	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	3	5	4	130
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	6	7	135
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	5	4	5	195
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	190	140	180	
14	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	6	5	4	140
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	6	7	155
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	5	7	3	205
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	200	150	210	
15	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	6	4	3	145
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	7	6	7	160
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	5	7	6	210
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	205	155	215	
16	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	6	4	4	150
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	7	3	5	165
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	4	7	6	215
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	225	160	220	
17	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	3	4	7	155

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими потужностями
		А	Б	С	
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	7	3	5	170
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	4	5	6	230
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	215	165	210	
18	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	2	1	90
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	3	115
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	1	1	2	300
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	270	120	260	
19	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	2	2	100
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	3	125
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	3	4	2	250
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	260	180	270	
20	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	1	2	2	105
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	1	135
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	3	1	2	265
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	255	195	260	
21	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	3	2	2	110
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	1	145
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	1	1	2	245
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	245	275	255	
22	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	3	3	2	115
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	1	2	3	135

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими потужностями
		А	Б	С	
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	1	1	180
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	255	285	270	
23	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	1	2	120
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	1	2	3	130
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	1	1	190
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	245	265	275	
24	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	4	1	125
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	2	2	135
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	1	3	195
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	255	275	285	
25	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	4	4	135
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	2	2	140
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	3	3	3	200
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	265	280	285	
26	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	5	4	4	155
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	5	6	165
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	3	3	3	210
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	275	290	280	
27	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	4	4	165
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	2	2	170
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	3	3	3	205

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими потужностями
		А	Б	С	
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	255	260	245	
28	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	5	4	4	160
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	4	5	175
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	3	3	190
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	275	250	260	
29	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	6	4	6	170
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	6	5	180
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	5	5	3	190
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	240	250	255	
30	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	4	7	4	160
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	7	3	5	175
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	5	5	3	185
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	200	210	195	

Задача 2

Для прийняття оптимального рішення по розподілу робітників комерційної галузі за операціями треба надати постановку задачі, визначити цільову функцію та розробити математичну модель згідно табл. 5.2.

Таблиця 5.2

Хронометраж по витратам часу

Варіант	Комерсанти	Витрати часу t_{ij} на виконання операцій, годин		
		1 – закупка	2 – збут	3 – перевезення
1	*2*	*3*	*4*	*5*
1	Іванов	$t_{11} = 3$	$t_{12} = 6$	$t_{13} = 5$
	Сидоров	$t_{21} = 3$	$t_{22} = 3$	$t_{23} = 2$
	Петров	$t_{31} = 7$	$t_{32} = 2$	$t_{33} = 5$
2	Іванов	$t_{11} = 3$	$t_{12} = 5$	$t_{13} = 6$
	Сидоров	$t_{21} = 2$	$t_{22} = 4$	$t_{23} = 3$
	Петров	$t_{31} = 6$	$t_{32} = 1$	$t_{33} = 5$
3	Іванов	$t_{11} = 1$	$t_{12} = 2$	$t_{13} = 3$

Варіант	Комер-санти	Витрати часу t_{ij} на виконання операцій, годин		
		1 – закупка	2 – збут	3 – перевезення
	Сидоров	$t_{21} = 2$	$t_{22} = 4$	$t_{23} = 4$
	Петров	$t_{31} = 4$	$t_{32} = 1$	$t_{33} = 5$
4	Іванов	$t_{11} = 5$	$t_{12} = 5$	$t_{13} = 7$
	Сидоров	$t_{21} = 3$	$t_{22} = 6$	$t_{23} = 4$
	Петров	$t_{31} = 7$	$t_{32} = 3$	$t_{33} = 5$
5	Іванов	$t_{11} = 5$	$t_{12} = 5$	$t_{13} = 6$
	Сидоров	$t_{21} = 7$	$t_{22} = 6$	$t_{23} = 4$
	Петров	$t_{31} = 6$	$t_{32} = 4$	$t_{33} = 5$
6	Іванов	$t_{11} = 9$	$t_{12} = 10$	$t_{13} = 6$
	Сидоров	$t_{21} = 7$	$t_{22} = 6$	$t_{23} = 4$
	Петров	$t_{31} = 8$	$t_{32} = 9$	$t_{33} = 7$
7	Іванов	$t_{11} = 15$	$t_{12} = 14$	$t_{13} = 9$
	Сидоров	$t_{21} = 17$	$t_{22} = 16$	$t_{23} = 10$
	Петров	$t_{31} = 16$	$t_{32} = 14$	$t_{33} = 8$
8	Іванов	$t_{11} = 13$	$t_{12} = 15$	$t_{13} = 19$
	Сидоров	$t_{21} = 15$	$t_{22} = 17$	$t_{23} = 20$
	Петров	$t_{31} = 16$	$t_{32} = 14$	$t_{33} = 18$
9	Іванов	$t_{11} = 23$	$t_{12} = 16$	$t_{13} = 29$
	Сидоров	$t_{21} = 25$	$t_{22} = 17$	$t_{23} = 25$
	Петров	$t_{31} = 26$	$t_{32} = 15$	$t_{33} = 28$
10	Іванов	$t_{11} = 18$	$t_{12} = 12$	$t_{13} = 19$
	Сидоров	$t_{21} = 15$	$t_{22} = 16$	$t_{23} = 21$
	Петров	$t_{31} = 19$	$t_{32} = 14$	$t_{33} = 17$
11	Іванов	$t_{11} = 17$	$t_{12} = 25$	$t_{13} = 29$
	Сидоров	$t_{21} = 14$	$t_{22} = 27$	$t_{23} = 27$
	Петров	$t_{31} = 18$	$t_{32} = 24$	$t_{33} = 28$
12	Іванов	$t_{11} = 33$	$t_{12} = 25$	$t_{13} = 19$
	Сидоров	$t_{21} = 35$	$t_{22} = 27$	$t_{23} = 22$
	Петров	$t_{31} = 34$	$t_{32} = 24$	$t_{33} = 20$
13	Іванов	$t_{11} = 32$	$t_{12} = 27$	$t_{13} = 29$
	Сидоров	$t_{21} = 33$	$t_{22} = 28$	$t_{23} = 26$
	Петров	$t_{31} = 34$	$t_{32} = 25$	$t_{33} = 28$
14	Іванов	$t_{11} = 43$	$t_{12} = 25$	$t_{13} = 19$
	Сидоров	$t_{21} = 39$	$t_{22} = 24$	$t_{23} = 16$
	Петров	$t_{31} = 38$	$t_{32} = 22$	$t_{33} = 18$
15	Іванов	$t_{11} = 53$	$t_{12} = 35$	$t_{13} = 29$
	Сидоров	$t_{21} = 49$	$t_{22} = 37$	$t_{23} = 27$
	Петров	$t_{31} = 50$	$t_{32} = 38$	$t_{33} = 28$
16	Іванов	$t_{11} = 55$	$t_{12} = 45$	$t_{13} = 37$
	Сидоров	$t_{21} = 57$	$t_{22} = 47$	$t_{23} = 36$
	Петров	$t_{31} = 53$	$t_{32} = 44$	$t_{33} = 38$
17	Іванов	$t_{11} = 51$	$t_{12} = 35$	$t_{13} = 27$
	Сидоров	$t_{21} = 53$	$t_{22} = 37$	$t_{23} = 29$
	Петров	$t_{31} = 55$	$t_{32} = 38$	$t_{33} = 28$
18	Іванов	$t_{11} = 57$	$t_{12} = 45$	$t_{13} = 37$
	Сидоров	$t_{21} = 54$	$t_{22} = 46$	$t_{23} = 39$
	Петров	$t_{31} = 55$	$t_{32} = 48$	$t_{33} = 38$
19	Іванов	$t_{11} = 54$	$t_{12} = 31$	$t_{13} = 26$

Варіант	Комер-санти	Витрати часу t_{ij} на виконання операцій, годин		
		1 – закупка	2 – збут	3 – перевезення
	Сидоров	$t_{21} = 55$	$t_{22} = 36$	$t_{23} = 29$
	Петров	$t_{31} = 56$	$t_{32} = 35$	$t_{33} = 28$
20	Іванов	$t_{11} = 64$	$t_{12} = 51$	$t_{13} = 46$
	Сидоров	$t_{21} = 65$	$t_{22} = 56$	$t_{23} = 49$
	Петров	$t_{31} = 66$	$t_{32} = 55$	$t_{33} = 48$
21	Іванов	$t_{11} = 73$	$t_{12} = 55$	$t_{13} = 39$
	Сидоров	$t_{21} = 75$	$t_{22} = 57$	$t_{23} = 32$
	Петров	$t_{31} = 74$	$t_{32} = 54$	$t_{33} = 30$
22	Іванов	$t_{11} = 72$	$t_{12} = 47$	$t_{13} = 59$
	Сидоров	$t_{21} = 83$	$t_{22} = 48$	$t_{23} = 56$
	Петров	$t_{31} = 84$	$t_{32} = 45$	$t_{33} = 58$
23	Іванов	$t_{11} = 93$	$t_{12} = 55$	$t_{13} = 69$
	Сидоров	$t_{21} = 99$	$t_{22} = 57$	$t_{23} = 67$
	Петров	$t_{31} = 90$	$t_{32} = 58$	$t_{33} = 68$
24	Іванов	$t_{11} = 34$	$t_{12} = 71$	$t_{13} = 86$
	Сидоров	$t_{21} = 35$	$t_{22} = 76$	$t_{23} = 89$
	Петров	$t_{31} = 36$	$t_{32} = 75$	$t_{33} = 88$
25	Іванов	$t_{11} = 73$	$t_{12} = 85$	$t_{13} = 96$
	Сидоров	$t_{21} = 72$	$t_{22} = 84$	$t_{23} = 93$
	Петров	$t_{31} = 76$	$t_{32} = 81$	$t_{33} = 95$
26	Іванов	$t_{11} = 93$	$t_{12} = 75$	$t_{13} = 86$
	Сидоров	$t_{21} = 90$	$t_{22} = 74$	$t_{23} = 84$
	Петров	$t_{31} = 92$	$t_{32} = 77$	$t_{33} = 85$
27	Іванов	$t_{11} = 43$	$t_{12} = 67$	$t_{13} = 77$
	Сидоров	$t_{21} = 40$	$t_{22} = 68$	$t_{23} = 79$
	Петров	$t_{31} = 42$	$t_{32} = 65$	$t_{33} = 75$
28	Іванов	$t_{11} = 95$	$t_{12} = 83$	$t_{13} = 76$
	Сидоров	$t_{21} = 92$	$t_{22} = 84$	$t_{23} = 71$
	Петров	$t_{31} = 94$	$t_{32} = 85$	$t_{33} = 75$
29	Іванов	$t_{11} = 63$	$t_{12} = 45$	$t_{13} = 55$
	Сидоров	$t_{21} = 67$	$t_{22} = 44$	$t_{23} = 57$
	Петров	$t_{31} = 60$	$t_{32} = 46$	$t_{33} = 51$
30	Іванов	$t_{11} = 52$	$t_{12} = 47$	$t_{13} = 78$
	Сидоров	$t_{21} = 49$	$t_{22} = 45$	$t_{23} = 80$
	Петров	$t_{31} = 53$	$t_{32} = 42$	$t_{33} = 79$

Задача 3

Підприємство випускає продукцію (продукція може бути швидко псуватися), яку можна: зразу відправити споживачу (стратегія A_1); відправити на склад для зберігання (стратегія A_2); підвергнути додатковій обробці для тривалого зберігання (стратегія A_3). Варіанти завдань обирати за табл.. 5.3

Споживач може купувати продукцію: негайно (стратегія B_1); у термін невеликого часу (стратегія B_2); після тривалого періоду часу (стратегія B_3).

У випадку стратегій A_2 та A_3, підприємство несе додаткові витрати на зберігання та обробку продукції, які не потрібні для A_1. Але, при вибору стратегії A_2, слід взяти до уваги можливі збитки із-за псування продукції.

Визначити оптимальні пропорції продукції для застосовування стратегій A_1, A_2 та A_3. Рекомендовано використовувати мінімаксний критерій (гарантований середній рівень збитку) при матриці витрат.

Таблиця 5.3

Вхідні данні

Варіант № 1				Варіант № 2				Варіант № 3			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	8	7	11	A_1	6	8	9	A_1	8	10	11
A_2	11	10	8	A_2	7	11	12	A_2	12	9	14
A_3	5	4	3	A_3	12	9	10	A_3	7	8	9
Варіант № 4				Варіант № 5				Варіант № 6			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	12	9	11	A_1	11	9	10	A_1	10	9	11
A_2	13	12	8	A_2	14	13	8	A_2	13	14	15
A_3	9	7	6	A_3	10	8	7	A_3	9	8	10
Варіант № 7				Варіант № 8				Варіант № 9			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	10	8	11	A_1	11	10	7	A_1	11	7	12
A_2	12	14	15	A_2	14	12	13	A_2	13	14	15
A_3	8	7	9	A_3	10	9	6	A_3	10	6	11
Варіант № 10				Варіант № 11				Варіант № 12			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	12	11	8	A_1	11	9	12	A_1	10	9	11
A_2	13	12	14	A_2	12	13	14	A_2	11	13	15
A_3	11	9	7	A_3	9	8	10	A_3	9	7	10
Варіант № 13				Варіант № 14				Варіант № 15			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	10	9	12	A_1	10	9	8	A_1	11	9	8
A_2	12	13	15	A_2	14	12	13	A_2	16	13	15
A_3	9	8	10	A_3	9	8	7	A_3	10	8	7
Варіант № 16				Варіант № 17				Варіант № 18			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	10	7	12	A_1	12	8	14	A_1	12	11	10
A_2	14	15	16	A_2	15	16	17	A_2	16	14	15
A_3	9	6	11	A_3	10	7	12	A_3	11	10	9
Варіант № 19				Варіант № 20				Варіант № 21			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	12	11	13	A_1	13	12	14	A_1	12	10	14
A_2	14	15	16	A_2	14	15	16	A_2	13	14	15
A_3	11	10	11	A_3	11	10	13	A_3	10	9	12
Варіант № 22				Варіант № 23				Варіант № 24			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	13	11	14	A_1	14	13	12	A_1	13	11	14

A_2	14	16	17	A_2	18	14	17	A_2	15	17	18
A_3	11	10	12	A_3	12	11	10	A_3	12	10	13
Варіант № 25				Варіант № 26				Варіант № 27			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	14	12	15	A_1	14	13	15	A_1	16	15	14
A_2	15	17	18	A_2	15	18	19	A_2	18	16	19
A_3	11	10	13	A_3	11	10	12	A_3	15	13	12
Варіант № 28				Варіант № 29				Варіант № 30			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	15	13	16	A_1	15	14	16	A_1	17	16	14
A_2	17	19	20	A_2	16	19	20	A_2	20	17	19
A_3	14	12	15	A_3	13	12	14	A_3	15	14	12

Задача 4

Підприємство може випускати три виду продукції (A_1, A_2 та A_3), при цьому отримує прибуток, який залежить від попиту. Попит може бути в одному з чотирьох станів (B_1, B_2, B_3 або B_4). Дана матриця (табл.. 5.4), її елементи a_{ij} характеризують прибуток, який отримає підприємство при випуску i-ої продукції з j-м змістом попиту.

Розробити математичну модель для визначення оптимальних пропорцій випуску продукції, які гарантують середню величину прибутку при різноманітному стані попиту. Зробіть висновки щодо прийняття оптимального рішення.

Таблиця 5.4

Вхідні данні

Варіант № 1					Варіант № 2				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	5	7	9	A_1	4	6	7	10
A_2	10	11	5	3	A_2	11	13	6	4
A_3	8	9	5	4	A_3	10	11	7	6
Варіант № 3					Варіант № 4				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	8	7	9	A_1	4	6	7	8
A_2	9	12	6	2	A_2	9	10	6	3
A_3	8	9	5	4	A_3	7	9	5	4
Варіант № 5					Варіант № 6				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	6	5	7	9	A_1	7	8	7	10
A_2	11	10	8	3	A_2	11	10	9	3
A_3	10	9	6	5	A_3	10	9	5	5
Варіант № 7					Варіант № 8				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	7	9	8	A_1	8	7	10	9
A_2	11	10	6	4	A_2	11	10	4	5
A_3	10	9	5	6	A_3	12	11	5	6
Варіант № 9					Варіант № 10				

	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	7	8	9	10	A_1	7	8	9	10
A_2	8	4	5	8	A_2	6	5	7	8
A_3	9	5	6	9	A_3	9	6	6	9
Варіант № 11					Варіант № 12				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	6	7	8	10	A_1	9	7	10	11
A_2	7	5	7	8	A_2	5	6	8	9
A_3	8	4	6	9	A_3	8	10	9	10
Варіант № 13					Варіант № 14				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	10	5	8	11	A_1	7	6	9	11
A_2	6	8	7	9	A_2	6	9	7	9
A_3	8	10	9	10	A_3	9	8	8	10
Варіант № 15					Варіант № 16				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	10	6	11	12	A_1	10	6	11	12
A_2	8	10	9	11	A_2	8	9	10	13
A_3	7	9	8	10	A_3	11	11	9	11
Варіант № 17					Варіант № 18				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	9	10	11	12	A_1	11	7	10	11
A_2	10	9	12	13	A_2	10	8	12	13
A_3	11	8	9	11	A_3	7	10	9	10
Варіант № 19					Варіант № 20				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	11	9	11	12	A_1	11	9	12	14
A_2	10	8	9	13	A_2	10	12	9	13
A_3	7	11	10	11	A_3	8	11	13	15
Варіант № 21					Варіант № 22				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	14	13	12	14	A_1	14	11	13	14
A_2	9	12	14	17	A_2	11	12	15	17
A_3	8	14	11	15	A_3	15	14	11	15
Варіант № 23					Варіант № 24				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	10	11	13	14	A_1	10	11	12	14
A_2	11	9	7	10	A_2	11	9	8	10
A_3	15	14	12	15	A_3	12	7	12	15
Варіант № 25					Варіант № 26				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	12	11	12	10	A_1	12	11	12	10
A_2	11	9	8	7	A_2	11	10	8	9
A_3	9	7	12	11	A_3	10	8	13	11
Варіант № 27					Варіант № 28				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	12	11	10	8	A_1	12	11	10	9
A_2	11	7	8	9	A_2	11	8	7	6
A_3	10	8	11	11	A_3	10	9	11	10
Варіант № 29					Варіант № 30				

	B$_1$	B$_2$	B$_3$	B$_4$		B$_1$	B$_2$	B$_3$	B$_4$
A$_1$	12	10	11	8	A$_1$	12	10	11	9
A$_2$	11	9	7	6	A$_2$	13	11	8	6
A$_3$	10	7	8	11	A$_3$	11	9	10	11

Задача 5.

Задано наступну базу з трьох лінгвістичних правил:

R_1: ЯКЩО x_1 це A_{11} . І . x_2 це A_{12}, І . x_3 це A_{13}, ТО y це B_1.

R_2: ЯКЩО x_2 це A_{21} . І . x_2 це A_{22}, І . x_3 це A_{23}, ТО y це B_2.

R_3: ЯКЩО x_1 це A_{31} . І . x_2 це A_{32}, І . x_3 це A_{33}, ТО y це B_3.

На вхід системи надійшло три чітких сигнали $x_1 = 0{,}7N + i$, $x_2 = 1{,}2N + 3i$, $x_3 = 1{,}7N_г + 0.2i$. Знайти чіткий вихід системи y^* методом Мамдані.

Тут $N_г$ – номер студента за списком групи, i – номер групи.

Рішення знаходити графічно. Нечіткі множини задані наступними функціями приналежності, числові значення яких розраховуються за даним з табл. 5.5.

Таблиця 5.5

Варіанти завдань нечітких множин

X	$0{,}1N_г$	$0{,}9N_г+i$	$1{,}5N+i$	$2{,}1N+i$
A_{11}	0	$0{,}75+0{,}15i$	0	0
A_{12}	0	$0{,}3-0{,}08i$	0,6	0,9
A_{13}	0	0,1	0,5	1,0
A_{21}	0,2	0,4	0	0
A_{22}	0,8	$0{,}7+0{,}05i$	$0{,}3+0{,}22i$	0
A_{23}	0	0,3	0,8	0
A_{31}	0,2	0	0	0
A_{32}	0,1	0,3	$0{,}7+0{,}1i$	0,2
A_{32}	1,0	1,0	0,3	0
B_1	0	$0{,}5-0{,}3i$	0,5	0
B_2	0	0,7	$0{,}7-0{,}2i$	0
B_3	0	$0{,}8-0{,}15i$	0,8	0

4.7. Індивідуальне завдання №10
Мінімізація булевих функцій.

1. Побудувати ДСНФ і КСНФ по відповідному варіанту завдання, представленому в таблиці завдань.
2. Знайти мінімальну форму булевої функції всіма методами, описаними вище.

Таблиця варіантів завдань.

№№ п/п змінні	1	2	3	4	5	6	7	8
X1	0	0	0	0	1	1	1	1
X2	0	0	1	1	0	0	1	1
X3	0	1	0	1	0	1	0	1

Варіан-ти	Варіанти наборів значень Y							
1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	0	1	1	1	0	0	0	0
3	0	0	1	1	1	0	0	0
4	0	0	0	1	1	1	0	0
5	0	0	0	0	1	1	1	0
6	0	0	0	0	0	1	1	1
7	1	0	1	1	0	0	0	0
8	1	0	0	1	1	0	0	0
9	1	0	0	0	1	1	0	0
10	1	0	0	0	0	1	1	0
11	1	0	0	0	0	0	1	1
12	0	1	0	0	0	0	1	1
13	0	0	1	0	0	0	1	1
14	0	0	0	1	0	0	1	1
15	0	0	0	0	1	0	1	1
16	0	0	0	1	0	1	1	1
17	1	1	0	0	0	0	1	0
18	0	1	1	0	0	0	1	0
19	0	0	1	1	0	0	1	0
20	0	0	0	1	1	0	1	0
21	0	0	1	0	1	1	1	0
22	1	1	0	1	0	0	0	0
23	1	0	1	1	0	0	0	0
24	0	1	1	1	0	0	0	0
25	0	0	1	1	1	0	0	5
26	1	0	1	1	1	0	0	0
27	1	0	0	1	0	0	0	1
28	0	1	0	0	1	0	0	1
29	0	0	1	0	0	1	0	1
30	0	0	0	1	0	1	0	1
31	0	0	0	0	1	1	0	1
32	1	1	0	0	0	0	0	0
33	0	1	1	0	0	0	0	0

Варіан-ти	Варіанти наборів значень Y							
34	0	0	1	1	0	0	0	0
35	0	0	0	1	1	0	0	0
36	0	0	0	0	1	1	0	0
37	0	0	0	0	0	1	1	0
38	0	0	0	0	0	0	1	1
39	1	0	0	0	0	0	0	1
40	0	1	0	0	0	0	1	0
41	0	0	1	0	0	1	0	0
42	0	0	0	1	1	0	0	0
43	0	1	0	1	0	1	0	0
44	1	1	1	1	0	0	0	0
45	1	1	1	0	1	0	0	0
46	1	1	1	0	0	1	0	0
47	1	1	1	0	0	0	1	0
48	1	1	0	0	0	1	1	0
49	0	1	1	1	1	0	0	0
50	1	0	1	1	0	0	0	0
51	0	1	1	1	1	0	0	0
52	0	0	1	1	1	1	0	0
53	0	0	0	1	1	1	1	0
54	0	0	0	0	1	1	1	1
55	1	1	1	0	0	0	0	1
56	1	1	0	0	0	0	1	1
57	1	1	0	0	0	1	1	0
58	1	1	0	0	1	1	0	0
59	1	1	0	1	1	0	0	0
60	0	1	1	1	1	0	0	0

Контрольні запитання

1. Чому теорія ігор відповідає процесу прийняття рішень в економіці?
2. Що таке платіжна матриця гри?
3. Що таке чиста і змішана стратегії?
4. Як знайти змішану стратегію за допомогою лінійного програмування?
5. Що таке „гра з природою”?
6. Назвіть критерії вибору стратегії при повній невизначеності.
7. Як уточнити імовірності настання станів природи?
8. Чому векторний спосіб постановки транспортної задачі більш економний, аніж матричний?

9. Наведіть основні принципи формулювання багатокритеріальної задачі, як задачі математичного програмування.
10. Що таке цілочслове програмування?
11. Що є біматрична гра?
12. Що таке рівноважна ситуація?
13. Як представляється умова рівноваги?
14. Як знаходиться оптимальна змішана стратегія в біматричній грі?
15. Чим задача комівояжера відрізняється від транспортної?
16. Як виконується мінімізація булевих функцій методом Карно?
17. Для чого потрібен чіткий висновок у нечіткій моделі соціально-економічної системи?

В розділі розглянуто , основні принципи формулювання задач оптимізації, застосування теорії ігор до прийняття економічних рішень, визначено платіжну матрицю гри подальшого їх вирішення на комп'ютері.

6. ЗАВДАННЯ І ТЕМИ КУРСОВИХ РОБІТ

Курсова робота з економічної кібернетики виконується з метою поглиблення знань студентів з цього предмету.

6.1. Теми курсових робіт

Для вибору теми студент використовує останню цифру у номері залікової книжки, за якою обирається галузь економіки. Варіанти галузі економіки України наведено у табл.. 6.1.

Таблиця 6.1.

Варіанти галузі економіки

Варіант	**Галузь економіки**
0.	Вугільна промисловість
1.	Видобуток залізної руди
2.	Металургія
3.	Хімічна промисловість
4.	Менеджмент фінансів
5.	Торгово-закупівельна діяльність
6.	Банківська справа
7.	Транспорт
8.	Будівництво
9.	Туризм

Для вибору одного з методів економічної кібернетики, які треба застосувати до обраної галузі, потрібно використати номер студента за списком студентської групи, у якій він навчається згідно переліку тем, поданих у табл.. 6.2.

Таблиця 6.2.

Теми курсових робіт

Варіант	Тема
1	Розробка і дослідження економіко-математичних моделей лінійного програмування.
2	Розробка і дослідження економіко-математичних моделей динамічного програмування.
3	Розробка і дослідження економіко-математичних моделей управління запасами.
4	Розробка і дослідження статистичних детермінованих моделей управління запасами.
5	Розробка і дослідження стохастичних моделей управління

	запасами.
6	Розробка і дослідження економіко-математичних моделей планування і управління виробництвом.
7	Розробка і дослідження економіко-математичних моделей оптимізації використання ресурсів.
8	Розробка і дослідження економіко-математичних моделей систем масового обслуговування.
9	Розробка і дослідження імовірнісних моделей економічних систем.
10	Розробка і дослідження статистичних моделей економічних систем.
11	Розробка і дослідження економіко-математичних моделей в умовах конфліктних ситуацій.
12	Розробка і дослідження нейромережних моделей економічних систем.
13	Розробка і дослідження економіко-математичних моделей з використанням теорії нечітких множин.
14	Розробка і дослідження економіко-математичних моделей з використанням непараметричних методів статистичних досліджень.
15	Розробка і дослідження динамічних економіко-математичних моделей.
16	Розробка і дослідження економіко-математичних моделей фінансово-економічних процесів.
17	Розробка і дослідження економіко-кібернетичної моделі розвитку народного господарства в територіальному аспекті.
18	Розробка і дослідження економіко-математичних моделей інвестиційно-фінансових процесів.
19	Розробка і дослідження економіко-математичних моделей з використанням кореляційно-регресійних методів.
20	Розробка і дослідження економіко-математичних моделей для прогнозування і стратегічного розвитку виробництва.
21	Розробка і дослідження економіко-математичних моделей з використанням марківських випадкових процесів.
22	Розробка і дослідження економіко-математичних моделей з використанням теорії ігор.
23	Розробка і дослідження економіко-математичних моделей системи продуктивності праці.
24	Розробка і дослідження економіко-математичних моделей, що враховують зв'язки між продуктивністю праці і основними фондами.
25	Розробка економіко-математичних моделей і дослідження міжгалузевих зв'язків.

.

6.2. Порядок виконання курсових робіт

Курсова робота виконується в час, призначений для індивідуальної роботи студентів. Для цього студент може скористатися як власним комп'ютером, так і комп'ютерами в лабораторіях кафедри.

Виконання курсової роботи починається з дослідження з літературних джерел у бібліотеках та Інтернеті. Це дозволяє визначити теоретичні напрямки подальших досліджень.

Не обов'язково використовувати всю галузь цілком, достатньо який напрямок цієї галузі, наприклад з галузі «Транспорт» можна взяти тільки напрямок «Трубопровідний транспорт для постачання нафти».

Далі потрібно описати обраний вами об'єкт словесно, далі подати його математичну модель у загальному вигляді та створити систему оптимізації об'єкта у вигляді цільової функції, і обмежень – рівнянь та нерівностей.

Останнім етапом роботи є знайдення оптимального рішення.

Для спрощення, рекомендується знайти чисельні значення всіх параметрів та факторів об'єкта за допомогою датчика випадкових чисел, який в Open Office Calc називається RANDOM, а в Micrisoft Office Excel – СЛУЧМЕЖДУ.

Для цього потрібно створити допоміжний рядок даних, розміром у 40 клітинок, які містять наступну формулу

=СЛУЧМЕЖДУ((номер вашої залікової книжки – 50)*(ваш номер за списком групи); (номер вашої залікової книжки)*(ваш номер за списком групи+30))/100).

Відмітити цей допоміжний рядок і занести в пам'ять комп'ютера, натиснувши кнопку „Копировать" або сполучення кнопок "CTRL"+"C".

Перенести курсор на вільний рядок і через головне меню „Правка-Специальная вставка-Только значения" занести туди числові значення, які і будуть чисельними значеннями параметрів та факторів об'єкта.

У вступі потрібно охарактеризувати можливі напрямки оптимізації діяльності обраної галузі, а у висновках – які результати було отримано при моделюванні та оптимізації.

6.3. Порядок оформлення курсових робіт

Курсова робота оформляється як документ, який подається в електронному або паперовому вигляді. Формат електронного документу має відповідати текстовому редактору Open Office або Microsoft Office.

Титульний лист оформлюється згідно прикладу на рис. 6.1.

Далі йде зміст, вступ, теоретична, частина, розрахунки, висновки та список літератури.

Береги листа – скрізь 2 см. Шрифт – Times New Ronan, кегль – 14, інтервал – 1,5, нумерація сторінок – угорі праворуч, абзацний відступ – 1 см.

При використанні літератури, потрібно подавати посилання на номер цього джерела у списку літератури, поданому у квадратних дужках, наприклад

«…Але рідкі мастила вимагають складної системи мастильного обладнання на кожному механізмі [50, 132-133, 160-161, 211]….».

Міністерство освіти і науки України
Національний гірничий університет
Кафедра економічної кібернетики та інформаційних технологій

КУРСОВА РОБОТА З ЕКОНОМІЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ
на тему «Розробка економіко-математичних моделей і дослідження міжгалузевих зв'язків в металургії»

Розробив ст. гр. ЕК-13-1Косач-Квітка Л.П.
Прийняв проф., д.т.н. Пістунов І.М.

Дніпропетровськ
2013

Рис. 6.1. Приклад оформлення титульного листа курсової роботи

Розрахунки, проведені із застосуванням окремих програм ілюструвати фрагмебнтами активних вікон цих програм, наприклад, так, як показано праворуч на рис. 6.2.

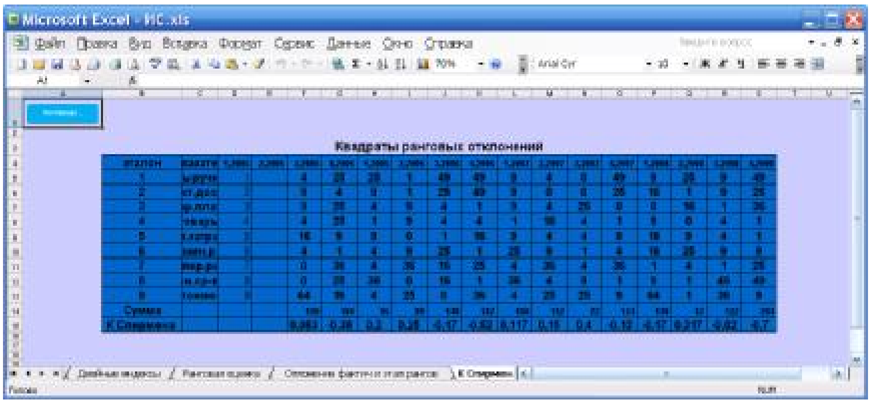


Рис. 6.2. Приклад зображення активного вікна

Список літератури потрібно оформляти за правилом : Автор, Назва роботи, видавництво, рік, кількість сторінок.

Наприклад, для:

– книги

Пістунов І.М., Пістунова К.І. Оптимальні рішення в інвестиційному проектуванні : Навч. посібник. – Д.: НГУ, 2007.– 108 с.

– статті

Пістунов І.М., Кощєєв А.С. Застосування інформаційних технологій для визначення оптимального складу банківських послуг/ Науковий вісник НГУ. – №3, 2007. – С. 93-97.

– посилання в Інтернеті

Пістунов І.М., Антонюк О.П, Турчанінова І.Ю. Кластерний аналіз в економіці: Навч. посібник – http://www/pistunovi.googlepages.com/train-aids.html/Ka.rar

ПІДСУМКИ

У навчальному посібнику детально розглянуто матеріали з дисципліни «Економічна кібернетика» призначеного для бакалаврів з економічної кібернетики, які становлять основу знать з аналізу, синтезу моделей соціально-економічних систем та розрахунку оптимальних параметрів вхідних факторів для досягнення потрібних значень вихідних факторів.

В першому розділі розглянуто предмет, методи і понятійний апарат економічної кібернетики, подано поняття об'єкту і його параметрів і факторів, класифікацію систем і виділено особливості соціально-економічної системи, як об'єкту управління, подано поняття про зворотній зв'язок та інформацію, окреслено основні закони та принципи кібернетики.

У другому розділі детально подано інформацію про моделювання соціально-економічних систем, наведено приклади моделей нарахування відсотків, фінансових розрахунків, теорії корисності, виробничої, Моделі Кобба-Дугласа та Лоренца, обміну в міжнародній торгівлі, динамічних моделей та моделі банкрутства.

У розділі 3 ви ознайомилися з аналізом як категорією пізнання та його застосування в дослідженнях соціально-економічних систем. Було виділено такі напрямки аналізу як статистичний, дисперсійний, методом експертних висновків, запізнювання впливу вхідних факторів на вихідні, спектральний та кластерний.

У розділі 4 представлено опис значної кількості методів синтезу моделей соціально-економічних систем з розділенням їх по таким категоріям як статистичні, лінійні та квазілінійні, авторегресійні, динамічні, періодичні моделі та моделі, розроблені на формальній мові. Окремо виділено синтез статистичних моделей методом нейронних сіток. Визначена проблема оцінки адекватності апроксимації та якості прогнозування

У п'ятому, найбільшому, розділі детально описано принципи і прийоми оптимізації процесів управління в економіці, такі як лінійне, цілочислове, нелінійне та динамічне програмування і транспортна задача. Подано прийоми, які дозволяють знайти оптимальне рішення багатокритеріальних задач зведенням до задачі математичного програмування, методом гарантованого результату та згортки часткових критеріїв. Розглянуто оптимізацію конфліктних ситуацій в економіці через такі теми як антагоністична та кооперативна гра, ігри з природою. Для соціально-економічних систем, заданих нечіткою моделлю, окреслено прийоми їх оптимального управління.

Шостий розділ призначений для завдання на розробку курсової роботи з використанням навичок і прийомів, здобутих при вивченні предмету «Економічна кібернетика».

Кожен розділ мав індивідуальні завданнями, які можна використати як лабораторні роботи, або виконувати їх самостійно для поглиблення знань в області економічної кібернетики.

ЛІТЕРАТУРА

1. Cordon O., Herrera F., A General study on genetic fuzzy systems // Genetic Algorithms in engineering and computer science, 1995. – P. 33-57.
2. Kosko B. Fuzzy systems as universal approximators // IEEE Transactions on Computers, vol. 43, No. 11, November 1994. – P. 1329-1333.
3. Акимов О.Е.Алгебра логики. – http://www.sceptic-ratio/narod.ru/ma.htm.
4. Алдохин И. П., Кулиш С. А. Экономическая кибернетика. – Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1983. – 224 с.
5. Ареф`єва О.В. Суперечності розвитку як основне джерело загрози безпеці рівноваги економічних систем/ О.В.Ареф`єва, О.С.Шнипко// Актуальні проблеми економіки.- 2006.- №3.- С. 57-64.
6. Бицок П. І., Половцев О. В. Аналіз та математичне моделювання економічних процесів перехідного перюду. - К.: ПЛАБ-75, 1999. - 209 с.
7. Бібліотека економічної кібернетики – http://cyber-library.org.ua/
8. Бойко Є. Про становлення загальної теорії економічних систем// Економіка України.- 2001.- №6.- С.88-90.
9. Болибрух А. А. , Проблемы Гильберта (100 лет спустя), Глава 2 Первая проблема Гильберта: континуум-гипотеза, Библиотека «Математическое просвещение», Выпуск 2
10. Большие системы: моделирование организационных механизмов/ В.Н. Бурков и др. – М.: Наука, 1989. – 332 с.
11. Браславец М. Е., Гуревич Т. Ф. Кибернетика.– К.: Вища школа, 1977.– 325 с.
12. Веников В. А. Теория подобия и моделирование применительно к задачам электроэнергетики.– М.: Высш. школа, 1966.– 487с.
13. ВерещагинН. К. , ШеньА.. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1. Начала теории множеств.
14. Вікіпедія: Економічна_кібернетика – http : //uk.wikipedia.org/wiki/
15. Генцен Г., Исследования логических выводов, пер. с. нем., в кн.: Математическая теория логического вывода, М., 1967;
16. Глушков В. М. Введение в кибернетику. – К.: Изд-во АН УССР , 1964. – 323 с.
17. Гринченко С. Н. История человечества с кибернетических позиций // История и Математика: Проблемы периодизации исторических макропроцессов.– М.: КомКнига, 2006. – С. 38-52.
18. Гусєв В.В. Інноваційна реструктуризація регіональних економічних систем як фактор забезпечення економічної безпеки України в регіональному вимірі// Економіка та підприємництво. Держава та регіони.- 2006.- №4.- С. 109-113.
19. Джеймс Джонсон, Дональд Вуд, Дэниел Вордлоу, Поль Мерфи. Современная логистика. – М: Издательский дом «Вильямс», 2002. – 624 с.

20. Диба М. Теоретико-методологічні основи господарського регулювання в сучасній економічній системі/ М.Диба, А.Ягодка, Л.Дзюбенко// Економіка України. – 2005.- №10.- С. 42-48.
21. Економіко-математичне моделювання соціально-економічних систем: Збірник наукових праць. Вип.3/ Відп. ред. Бакаєв О.О. – К.: МННЦ ІТІС, 2002. – 127 с.
22. Економіко-математичне моделювання соціально-економічних систем: Збірник наукових праць. Вип. 7/ Відп. ред. Бакаєв О.О. – К., 2003.– 158 с.
23. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика: Учебное пособие. – 3-е, стереотип. изд. – СПб.: «Лань», 2004 – 336 с.
24. Захарченко Є. Вплив соціально-економічних умов життя на сім`ю як соціальний інститут/ Є.Захарченко, К.Захарченко, Е.Підлубна// Економіка України.- 2006.- №9.- С. 26-33.
25. Зятковський І.В. Концептуалізація суб`єктної структури економічної системи// Вісник Хмельницького національного університету.Економічні науки.- 2005.- №6,Т.2.- С. 48-55.
26. Інституційні засади формування економічної системи України: теорія і практика/ Ватаманюк, С.Панчишин, О.Дорош, Н.Гнатюк; За ред. З. Ватаманюка. – Львів: Новий Світ, 2000, 2005. – 648 с.
27. Карри Х. Б., Основания математической логики, пер. с англ., М., 1969.
28. Касьяненко В.О. Моделювання та прогнозування економічних процесів: Конспект лекцій: Навч. посібник/ В.О.Касьяненко, Л.В.Старченко. – Суми: Університетська книга, 2006. – 185 с.
29. Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957, §§ 20, 23;
30. Кобринский Н. Е. Введение в экономическую кибернетику. Учеб. пособие./ Н.Е. Кобринский, Е.З. Майминас, А.Д. Смирнов. – М., «Экономика», 1975. – 343 с.
31. Кобринский Н. Е., Майминас Е. 3., Смирнов А. Д. Экономическая кибернетика.– М.: Экономика, 1982.– 408 с.
32. Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г. Математическая логика. – М.: УРСС, 2005. – 240 с.
33. Концепції економічних систем та проблеми їх структурної трансформації// Вища школа.– 2003.- №2-3.– С.44-65.
34. Коршунов Ю. М. Математические основы кибернетики. – М: Энергоатомиздат, 1987. – 494 с.
35. Кочура Е. В. Экономическая кибернетика. – Днепропетровск: ДУЕП, 2002. -138 с.
36. Круглов В.В., Дли М.И. Интеллектуальные информационные системы: компьютерная поддержка систем нечеткой логики и нечеткого вывода. – М.: Физматлит, 2002. – 350 с.
37. Кузин Л. Т. Основы кибернетики (в 2-х томах). – М.: Энергия, 1973
38. Кульчицький Б. Сучасні економічні системи: Навчальний посібник.– Львів: Афіша, 2004.– 279 с.
39. Курант Р., Роббинс Г., Что такое математика? Глава II, § 4.

40.Леоленков А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. – СПб., 2003. – 350 с.
41.Лиходій В.Г. Формування багатосуб`єктивної економічної системи - нова тема курсу економічної теорії// Актуальні проблеми економіки.- 2004.- №6.- С. 220-224.
42.Лысенко Ю. Г. Экономическая кибернетика. – Донецк, Дон ГУ, 1999. – 397 с.
43.Любимцева С. Законы структурной эволюции экономических систем// Экономист. – 2003. – №10. – С. 29-40.
44.Майкл Р. Линдерс, Харольд Е. Фирон. Управление снабжением и запасами. Логистика. - СПб.: ООО «Издательство Полигон», 1999. – 768 с.Poli, R., Langdon, W. B., McPhee, N. F. (2008). *A Field Guide to Genetic Programming*. Lulu.com, freely available from the internet.ISBN 978-1-4092-0073-4.
45.Масалович А. Нечеткая логика в бизнесе и финансах. – www.tora-centre.ru/library/fuzzy/fuzzy-.htm
46.Неруш Ю.М. Коммерческая логистика: Учебник для вузов. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 271 с.
47.Пістунов І.М., Чухлєбова М.Л. Розробка моделей банкрутства для підприємств оптово-роздрібної торгівлі Дніпропетровського регіону/ Науковий вісник НГУ. - №2, 2007. - С. 85-87.
48.Пістунов І.М. Застосування нейроних сіток до моделювання економічних процесів/ / Економічний вісник НГУ. -№2. - 2005. - С. 120-126.
49.Пістунов І.М. Корпоративна функція корисності/ Економіка: проблеми теорії та практики. - Вип.. 186, том. ІІІ.- Д.: ДНУ: 2003. - С.751-756.
50.Пістунов І.М. Обґрунтування критерію вибору інвестиційного проекту в умовах ризикованої економічної ситуації/ Держава та регіони. - №3. - ЗІДМУ: 2003. - С.31-34.
51.Пістунов І.М. Побудова оптимального балансу на підставі фінансових коефіцієнтів/ Економіка: проблеми теорії та практики. - Вип.. 185, том.ІІІ.- ДНУ: 2003. - С.593-599.
52.Пістунов І.М. Стохастична К-модель управління підприємством з високим рівнем природного ризику/ Економіка: проблеми теорії та практики. - Вип.. 189, том.У.- Д.: ДНУ: 2004. - С.1530-1535.
53.Пістунов І.М., Авраменко С.В. Оптимальний вибір маркетингових заходів/ Науковий вісник НГУ. - №7, 2007. - С. 88-91.
54.Пістунов І.М., Грицюк В.О. Оптимальний перерозподіл об'єктів оренди / Науковий вісник НГУ. - №6, 2007. - С. 89-92.
55.Пістунов І.М., Кощеєв А.С. Застосування інформаційних технологій для визначення оптимального складу банківських послуг/ Науковий вісник НГУ. - №3, 2007. - С. 93-97.
56.Пістунов І.М., Мазуренко Д. С. Оптимальний перерозподіл виробничих обов'язків співробітників обслуговуючого підприємства / Науковий вісник НГУ. - №5, 2007. - С. 90-93.
57.Пістунов І.М., Плінська О.В. Оптимізація міжбанківських трансакцій/

Науковий вісник НГУ. - №5, 2007. - С. 90-93.
58. Пістунов І.М., Ручаєвський Д.О. Обгрунтування факторів формування заробітної плати логістиків методами експертних оцінок// Вісник академії митної служби України. – №3(39), 2008. – 32-41.
59. Пістунов І.М., Ситников В.В. Дослідження межі існування оптимальних рішень для портфеля Марковіца/ Економічний вісник НГУ. - №4. - 2003. С.114-119.
60. Пістунов І.М., Чорнобаєв В.В. Багатофакторна модель управління інновіційною діяльністю//Вісник Дніпропетровської державної фінансової академії. – №1(19), 2008. – С.157-163.
61. Пономаренко Л. А. Основи економічної кібернетики: Підручник. – К.: Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2002. – 432 с.
62. Принципи і методи пізнання економічного життя суспільства// Економічна теорія /Під.ред. Є.М. Воробйова.- К., 2001.- С.47-55.
63. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. – М., 2004.
64. Саридис Дж. Самоорганизующиеся стохастические системы управления.– М.: Наука, 1989. – 112 с.
65. Сергеев В.И. Логистика в бизнесе: Учебник. – М.: ИНФРА-М, 2001. – 608 с.
66. Субботін С.О., Олійник А.О., Олійник О.О. Неітеративні, еволюційні та мультиагентні методи синтезу нечітклогічних і нейромережних моделей: Монографія / Під заг. ред. С.О. Субботіна. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2009. – 375 с.
67. Теслер Г. С. Новая кибернетика.– Киев: Логос, 2004. – 401 с.
68. Френкель А. А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. — М.: Мир, 1966. – 556 с.
69. Шарапов О. Д., Дербенцев В. Д., Семьонов Д. Є. Економічна кібернетика: Навч. посібник. – К.: КНЕУ, 2004. – 231 с.
70. Экономическая кибернетика: Учебное пособие / В.М. Косарев, Е.А. Паршина, Ю.И. Паршин – ДУЭП, 2005. – 104 с. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Навчальне видання

Пістунов Ігор Миколайович

ЕКОНОМІЧНА КІБЕРНЕТИКА

Навчальний посібник

Видано за редакцією автора

Підписано до видання 10.01.2014.
Електронний ресурс. Авт. арк. 9,59.

Підготовлено й видано
в Державному вищому навчальному закладі
«Національний гірничий університет».
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842, від 11.06.2004 р.
49600, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19.