

Кафедра механічної та  
біомедичної інженерії



# Теоретична та прикладна механіка

---

## Конспект лекцій

Онищенко С.В., Колосов Д.Л., Долгов О.М.

[btpm.nmu.org.ua](http://btpm.nmu.org.ua)

Email: [onyshchenko.s.v@nmu.one](mailto:onyshchenko.s.v@nmu.one)

Дніпро - 2022



## **Онищенко С.В.**

Конспект лекцій з дисципліни «Теоретична та прикладна механіка» для здобувачів першого рівня вищої освіти спеціальності 151 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології [Електронний ресурс] / С.В. Онищенко, Д.Л. Колосов, О.М. Долгов ; Міністерство освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2022. – 81 с.

Автори

**Онищенко** Сергій Валерійович, к.т.н., доц. каф. МБМІ

**Колосов** Дмитро Леонідович, д.т.н., доц., зав. каф. МБМІ

**Долгов** Олександр Михайлович, к.т.н., доц., проф. каф. МБМІ

Розглянуто на засіданні кафедри механічної та біомедичної інженерії №8 від 09 вересня 2022 р.

Погоджено рішенням науково-методичної комісії спеціальності 151 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології (протокол №2 від 04.11.2022 р.).

Затверджено до видання редакційною радою НТУ «ДП» (протокол №12 від 27.12.2022 р.) за поданням науково-методичної комісії спеціальності 151 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології (протокол №2 від 04.11.2022 р.).

Розглянуто розділи «статика», «кінематика», «динаміка» та «опір матеріалів» дисципліни «Теоретична та прикладна механіка» для здобувачів першого рівня вищої освіти спеціальності 151 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології.

Відповідальний за випуск заступник завідувача кафедри механічної та біомедичної інженерії С.В. Онищенко, к.т.н.



# ЗМІСТ



## РОЗДІЛ «СТАТИКА»

- ❖ **Тема 1.** Вступ. Основні поняття механіки. Аксиоми статички. В'язі та реакції в'язей.
- ❖ **Тема 2.** Система збіжних сил. Теорема про три сили. Аналітичне визначення рівнодіючих збіжних сил. Рівняння рівноваги.
- ❖ **Тема 3.** Довільна плоска система сил. Момент сили відносно точки. Пара сил. Теореми про пари. Метод Пуансо. Головний вектор та головний момент. Рівняння рівноваги. Три форми рівнянь рівноваги. Теорема Варіньйона.
- ❖ **Тема 4.** Тертя ковзання. Основні закони. Способи визначення коефіцієнта тертя. Кут тертя. Конус тертя. Урахування сил тертя під час розв'язання задач на рівновагу. Опір під час кочення.
- ❖ **Тема 5.** Довільна просторова система сил. Момент сили відносно центру та осі. Зв'язок моменту сили відносно точки та моменту сили відносно осі. Теореми про пари.

## РОЗДІЛ «КІНЕМАТИКА»

- ❖ **Тема 1.** Кінематика точки. Способи задання руху. Рівняння руху. Траєкторія. Закон руху точки. Зв'язок між трьома способами завдання руху. Швидкість точки.
- ❖ **Тема 2.** Прискорення точки. Рівнозмінний рух точки. Класифікація руху точки. Приклад розв'язання завдань визначення кінематичних характеристик руху точки. Кінематика твердого тіла. Види рухів. Поступальний рух.
- ❖ **Тема 3.** Обертальний рух. Кутова швидкість та кутове прискорення. Рівнозмінне обертання. Швидкість та прискорення точки тіла при обертальному русі.
- ❖ **Тема 4.** Плоскопаралельний рух твердого тіла. Розкладання плоского руху на поступальний та обертальний рух. Рівняння руху. Теорема про складання швидкостей. Наслідки з теореми. Миттєвий центр швидкостей (МЦШ).



# ЗМІСТ



## РОЗДІЛ «ДИНАМІКА»

- ❖ **Тема 1.** Введення у динаміку. Закони та аксіоми динаміки матеріальної точки. Основне рівняння динаміки. Диференціальні та природні рівняння руху. Дві основні задачі динаміки. Приклади розв'язання прямої задачі динаміки.
- ❖ **Тема 2.** Розв'язання оберненої задачі динаміки. Загальні вказівки до розв'язання оберненої задачі динаміки. Приклади розв'язання оберненої задачі динаміки. Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту, без урахування опору повітря.
- ❖ **Тема 3.** Динаміка механічної системи. Зовнішні та внутрішні сили. Центр мас системи. Теорема про рух центру мас. Закони збереження. Приклад розв'язання задачі на використання теореми про рух центру мас. Імпульс сили. Кількість руху. Теорема про зміну кількості руху. Закони збереження. Приклад розв'язання задачі використання теореми про зміну кількості руху.
- ❖ **Тема 4.** Елементи теорії моментів інерції.
- ❖ **Тема 5.** Робота сили, потужність сили. Кінетична енергія. Теореми про зміну кінетичної енергії для матеріальної точки та системи. Приклад розв'язання задач на використання теореми про зміну кінетичної енергії матеріальної точки.

## РОЗДІЛ «ОПІР МАТЕРІАЛІВ»

- ❖ **Тема 1.** Основні гіпотези, припущення. Метод перерізів. Завдання опору матеріалів.
- ❖ **Тема 2.** Розтяг і стискання. Метод перерізів. Побудова епюр поздовжніх сил. Умови міцності та жорсткості при розтягу-стисканні.
- ❖ **Тема 3.** Зсув. Поняття про чистий зсув. Напруження та деформації при зсуві. Закон Гука при зсуві. Умови міцності при зсуві.
- ❖ **Тема 4.** Кручення. Крутний момент. Приклади побудови епюр крутних моментів. Умови міцності та жорсткості при крученні.
- ❖ **Тема 5.** Прямий згин. Поперечна сила та згинальний момент. Епюри поперечних сил і згинальних моментів. Диференціальні залежності Журавського при згині.

## ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ





# РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА



1. Колосов Д.Л. Опір матеріалів у прикладах та завданнях: навч. посіб. / Д.Л. Колосов, В.Я. Кіба ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т “Дніпровська політехніка”. – Дніпро : НТУ “ДП”, 2021. – 106 с. – Режим доступу : <https://ir.nmu.org.ua/handle/123456789/159120>
2. Матисіна Н.В. Конспект лекцій з дисципліни «Технічна механіка» розділ «Опір матеріалів» [Електронний ресурс] / Н.В. Матисіна, С.В. Онищенко – Дніпро: НТУ «Дніпровська політехніка», 2020 – 75 с. – Режим доступу : <https://ir.nmu.org.ua/handle/123456789/155384>
3. Онищенко С.В., Колосов Д.Л. Розв’язання задач на рівновагу збіжної системи сил в середовищі MathCAD. Методичні рекомендації до самопідготовки студентів (практикум) з тем «Моделювання взаємозв’язків об’єктів» та «Система збіжних сил» дисципліни «Теоретична механіка» для бакалаврів спеціальностей 131 «Прикладна механіка», 132 «Матеріалознавство» [Електронний ресурс] / С.В. Онищенко, Д.Л. Колосов ; Міністерство освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2022. – 55 с. – Режим доступу : <https://ir.nmu.org.ua/handle/123456789/162051>
4. Онищенко С.В., Колосов Д.Л. Розв’язання задач статички в середовищі MathCAD. Методичні рекомендації до самопідготовки студентів (практикум) з розділу «Статика» дисципліни «Теоретична механіка» для бакалаврів спеціальностей 131 «Прикладна механіка», 132 «Матеріалознавство» [Електронний ресурс] / С.В. Онищенко, Д.Л. Колосов ; Міністерство освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2022. – 208 с. – Режим доступу : <https://ir.nmu.org.ua/handle/123456789/162050>
5. Методичні рекомендації до проведення практичних занять (практикум) з теоретичної механіки для студентів спеціальності 132 Матеріалознавство [Електронний ресурс] / Д.Л. Колосов, О.М. Долгов, С.В., Онищенко, В.Я. Кіба, О.Г. Науменко ; Міністерство освіти і науки України, Нац. тех. ун-т “Дніпровська політехніка”, 2022. – 81 с. – Режим доступу : <https://ir.nmu.org.ua/handle/123456789/162167>
6. Павловський М.А. Теоретична механіка: Підручник.- К.: Техніка, 2002. – 512 с.
7. Смерека І.П., Барвінський А.Ф., Білоус Б.Д., Кузьо І.В., Зінко Я.А. Короткий довідник з теоретичної механіки. – Львів, Інтелект - Захід, 2001. – 240 с.
8. Кільчевський М.О. Курс теоретичної механіки. т.1,2. К.: Вища школа, - 1972, 2010
9. Писаренко Г.С. Опір матеріалів: Підручник / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський; За ред. Г.С. Писаренка. – 2-ге вид., допов. і переробл. – К.: Вища шк., 2004. – 655 с.: іл. – ISBN 966-642-056-2
10. Теоретична механіка [Текст] : підруч. для студ. вищ. навч. закл. / М. А. Павловський. - К. : Техніка, 2002. - 512 с. ISBN 966-575-184-0
11. Теоретична механіка [Текст] : збірник задач: навч. посібник для студ. вищих навч. закл. / О. С. Апостолук [та ін.] ; ред. М. А. Павловський. - К. : Техніка, 2007. - 400 с. ISBN 966-575-059-3
12. Методика розв’язування і збірник задач з теоретичної механіки [Текст] : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В. В. Божидарнік, Л. Д. Величко ; Луцький держ. технічний ун-т, Львівський держ. ун-т безпеки життєдіяльності. - Вид. 2-е, допов., переробл. - Луцьк : Надстир'я, 2007. - 504 с. - Бібліогр.: с. 500-501. ISBN 978-966-517-585-8





# ВСТУП



**Мета дисципліни** – набуття здобувачами вищої освіти здатності використання основних понять, методів і законів класичної та прикладної механіки для формування компетентностей за освітньо-професійною програмою «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»

## ОЧІКУВАНІ ДИСЦИПЛІНАРНІ РЕЗУЛЬТАТИ НАВЧАННЯ

- ❖ Будувати й аналізувати механіко-математичні моделі елементів і систем автоматизації з використанням основ лінійної й векторної алгебри, диференціального та інтегрального числення, методів розв'язку звичайних диференціальних рівнянь.
- ❖ Застосовувати методи теоретичної механіки для дослідження рівноваги й руху об'єктів автоматизації.
- ❖ Виконувати розрахунки на міцність, жорсткість і стійкість елементів та систем автоматизації.
- ❖ Застосовувати прикладні методи теорії механізмів і машин в об'єктах і системах автоматизації.
- ❖ Вміти застосовувати методи аналітичної і прикладної механіки для оцінки електромеханічних параметрів елементів та систем автоматизації, якості їх функціонування із використанням сучасних комп'ютерних технологій.



↑ Теоретична та прикладна механіка.  
Конспект лекцій



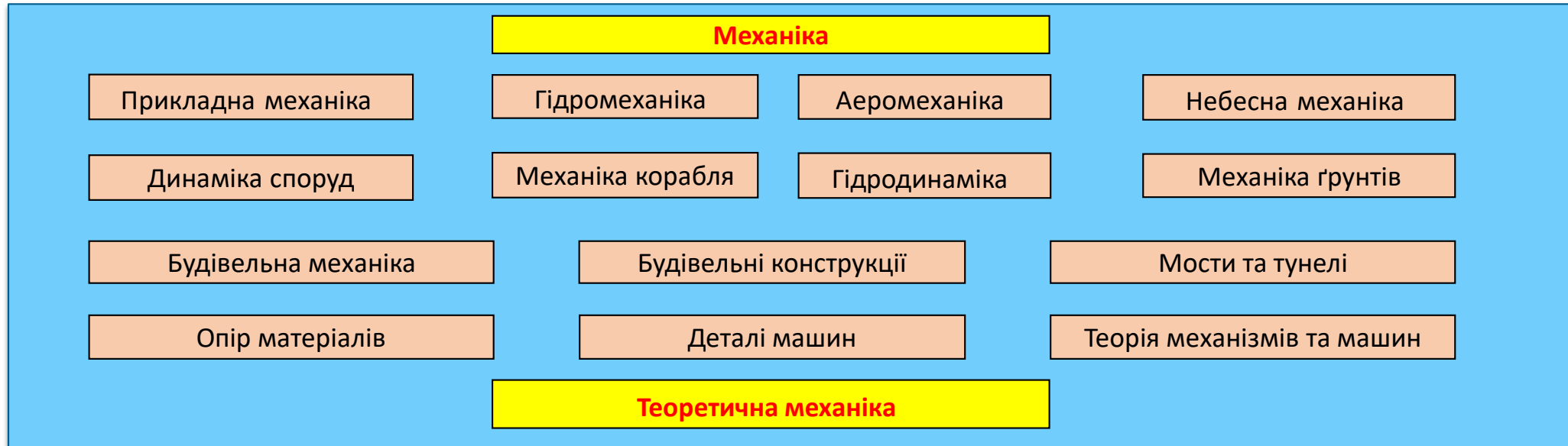
## РОЗДІЛ «СТАТИКА»





## Вступ

Під назвою “механіка” об’єднується ряд наук, які **вивчають механічний рух та механічну взаємодію** твердих та деформованих тіл, а також рідких та газоподібних середовищ.



**Механічний рух** – один із видів руху матерії, що полягає у **зміні в часі взаємних положень тіл** або частин тіл.

**Механічна взаємодія** – одна із видів взаємодії матерії, який викликає зміну механічного руху тіл чи його частин, і навіть **перешкоджає зміні їхніх** взаємних положень.

**Теоретична механіка** вивчає **закони механічного руху та механічної взаємодії**, які є загальними для будь-яких тіл.

*Спільність законів, придатність для будь-яких тіл і систем, досягається абстрагуванням від несуттєвих особливостей розглянутого тіла та виділенням найважливіших особливостей. Саме тому теоретична механіка є базовою наукою, на основі якої вивчаються інші прикладні технічні дисципліни.*

Основні абстрактні образи (моделі) матеріальних тіл та систем:

**Матеріальна точка (МТ)** – об’єкт, який **не має розмірів**, але на відміну від геометричної точки **має масу**, рівну масі того тіла, яке зображується даною матеріальною точкою.

**Абсолютно тверде тіло (АТТ)** – система МТ, у якій **відстань між ними не змінюється** за жодних впливів.

**Механічна система (МС)** – **сукупність МТ чи АТТ**, пов’язаних між собою загальними законами руху чи взаємодії.

Залежно від умови задання та вибору об’єкта вивчення одне й те саме фізичне тіло може бути прийняте за МТ, АТТ або МС.

Наприклад, Земля у випадку її руху навколо Сонця приймається за МТ, а під час її обертання навколо власної осі – за АТТ. При вивченні явищ, що відбуваються на Землі (припливи та відливи, переміщення кори тощо), Земля сприймається як МС.





Теоретична механіка складається з трьох розділів:



- ❖ **Статика** вивчає **умови відносної рівноваги** механічних систем. Для рівноваги необхідне певне співвідношення сил, тому у статистиці вивчаються загальні властивості сил, правила заміни сил іншими силами, еквівалентними з погляду рівноваги.
- ❖ **Кінематика** вивчає **механічний рух без урахування сил**, що викликають цей рух або впливають на нього. Таким чином, встановлюються деякі кількісні заходи з чисто геометричної точки зору.
- ❖ **Динаміка** вивчає **механічний рух у зв'язку з діючими силами на об'єкт руху**. Таким чином, вивчається зв'язок між рухом та діючими силами.

### ❖ Основні поняття теоретичної механіки

**Сила** – міра механічної взаємодії. Сила моделюється **вектором**, що характеризується **напрямом та величиною** (модулем).

**Кінематичний стан тіла** – стан спокою чи руху із постійними параметрами.

**Система сил** – сукупність сил, прикладених до об'єкта, який розглядається.

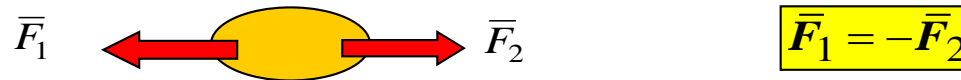
**Рівнодіюча** – сила, яка своєю дією замінює систему сил, тобто є еквівалентною системі сил.

**Еквівалентна система сил** – система, яка замінює існуючу систему сил без зміни кінематичного стану об'єкта.

**Взаємно врівноважена система сил** – система сил, під дією якої об'єкт перебуває у рівновазі.

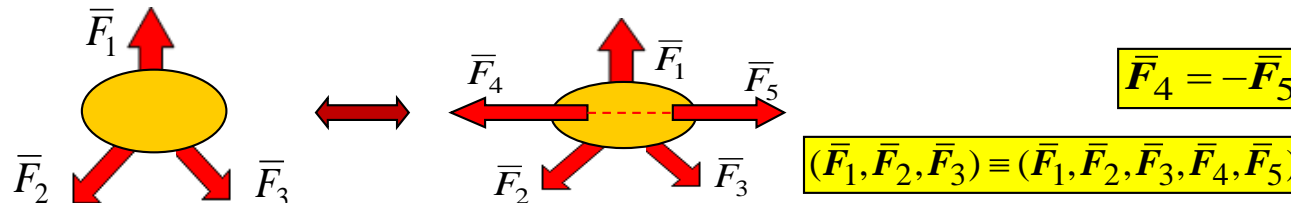
### ❖ Аксиоми статички

1. **Аксиома інерції** – Під дією взаємно врівноваженої системи сил тіло перебуває у стані спокою чи рівномірного прямолінійного руху.
2. **Аксиома двох сил** – Якщо тіло під дією двох сил знаходиться в рівновазі, то ці сили рівні за модулем і спрямовані вздовж однієї прямої у протилежні сторони. Такі дві сили є найпростішою взаємно врівноваженою системою сил.



$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

3. **Аксиома приєднання** – Якщо до заданої системи сил приєднати (або видалити) взаємно врівноважену систему сил, то кінематичний стан тіла не зміниться.



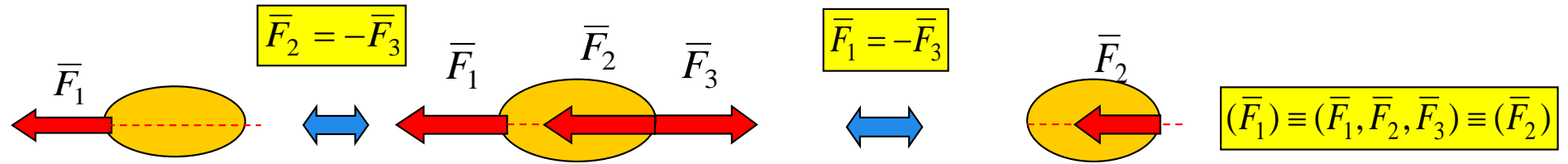
$$\vec{F}_4 = -\vec{F}_5$$

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \equiv (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5)$$

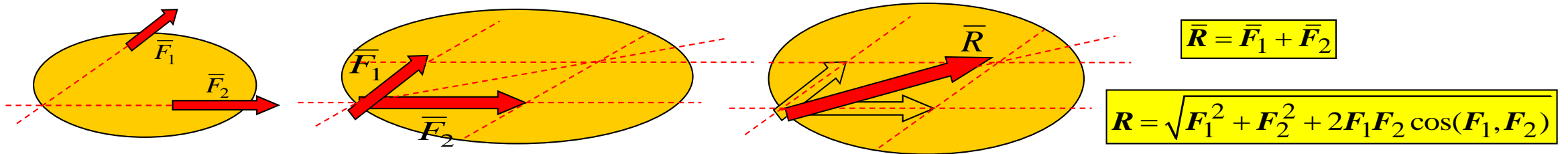


Аксиоми статки (продовження)

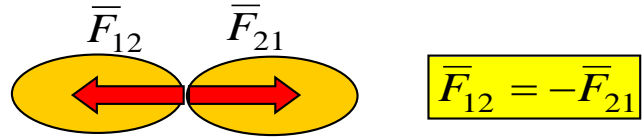
**Наслідок із аксіоми приєднання** – Кінематичний стан тіла не зміниться, якщо силу перенести вздовж лінії її дії.



4. **Аксиома про паралелограм сил** – рівнодіюча двох сил, що перетинаються, дорівнює діагоналі паралелограма, побудованого на цих силах як на сторонах.



5. **Аксиома дії та протидії** – Будь-якій дії відповідає рівна за величиною та протилежна за напрямком протидія (III закон Ньютона).



6. **Аксиома затвердіння** - Рівновага деформованого тіла зберігається у разі його затвердіння (обернене твердження справедливе не завжди).

**В'язі та реакції в'язей**

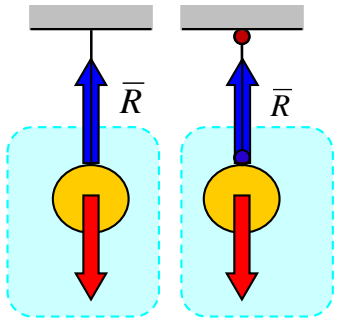
- ❖ **Вільне тіло** – це тіло, свобода переміщень якого не обмежується жодними іншими тілами.
- ❖ **Невільне тіло** – це тіло, рух якого обмежений іншими тілами.
- ❖ **В'язь** – тіло, що обмежує свободу переміщень об'єкта.
- ❖ **Реакція в'язі** – сила, що діє на об'єкт із боку в'язі.
- ❖ **Принцип звільнення від в'язей** – невільне тіло можна розглядати як вільне, якщо відкинути в'язі і замінити їхню дію відповідними реакціями.



### В'язі та реакції в'язей (продовження)

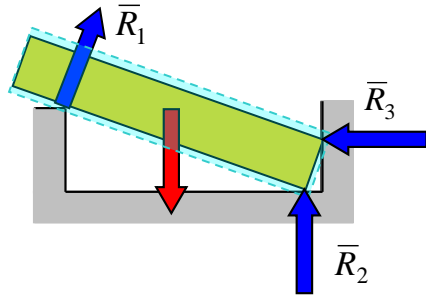
❖ Види в'язей та їхніх реакції:

#### 1. Нитка, шарнірний стрижень:



Реакція нитки (стрижня) спрямована вздовж нитки (стрижня).

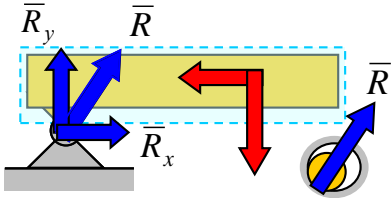
#### 2. Абсолютно гладенька поверхня:



Реакція гладенької поверхні спрямована перпендикулярно загальній дотичній площині, проведеній до дотичних поверхонь тіла і в'язі.

Загальне правило для в'язей будь-якого виду: Якщо в'язь перешкоджає одному або декільком переміщенням (максимальна кількість переміщень – шість – три поступальні і три обертальні), то за напрямом цих і тільки цих переміщень виникають відповідні реакції (сили і моменти).

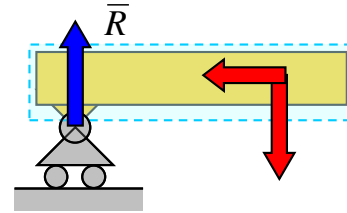
#### 3. Нерухомий циліндричний шарнір:



Реакція нерухомого шарніра проходить через центр шарніра перпендикулярно до осі шарніра і має довільний напрямок.

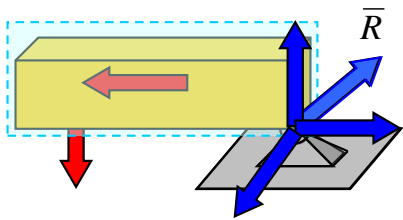
Реакцію нерухомого шарніра можна розкласти на дві складові, наприклад,  $R_x$  і  $R_y$ , які паралельні координатним осям.

#### 4. Рухомий циліндричний шарнір:



Реакція рухомого шарніра проходить через центр шарніра перпендикулярно осі шарніра та площині опори.

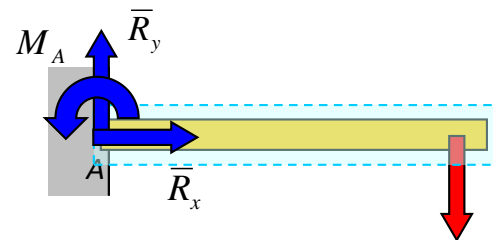
#### 5. Нерухомий сферичний шарнір:



Реакція нерухомого сферичного шарніра проходить через центр шарніра і має довільний напрямок у просторі.

Реакцію нерухомого сферичного шарніра можна розкласти на три складові, наприклад,  $R_x$ ,  $R_y$ ,  $R_z$ , які паралельні координатним осям.

#### 6. Жорстке плоске затиснення:



У жорсткому плоскому затисненні виникає три реактивні зусилля: дві складові реактивні сили  $R_x$  і  $R_y$ , а також реактивний момент (пара сил)  $M_A$ .





Система збіжних сил – система, у якій лінії дії сил перетинаються в одній точці.

План дослідження будь-якої системи сил відповідає послідовному розв'язанні трьох питань:

1. Як спростити систему?
2. Який найпростіший вигляд системи?
3. Які умови рівноваги системи?

1. **Перенесемо всі сили** вздовж лінії їхньої дії в точку перетину (кінематичний стан тіла за цього не зміниться - слідство з аксіоми приєднання).

Складемо перші дві сили  $F_1$  і  $F_2$  (аксіома про паралелограм сил).

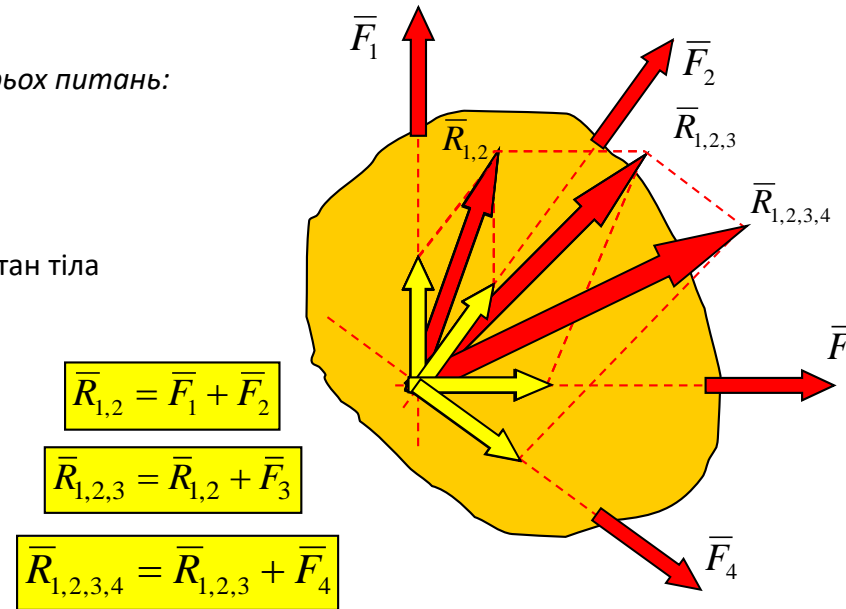
Кількість сил зменшилась на одиницю.

Складемо отриману рівнодіючу  $R_{12}$  з наступною силою  $F_3$ .

Кількість сил знову зменшилась на одиницю.

Повторимо цю операцію з наступною силою  $F_4$ .

Залишилась лише одна сила, еквівалентна вихідній системі сил.



**Складання сил** побудовою паралелограмів можна замінити побудовою **силового трикутника (багатокутника)** – обирається одна з сил або зображується паралельно самій собі з початком у будь-якій довільній точці, **всі інші сили зображуються паралельними самим собі з початком, що збігається з кінцем попередньої сили.**

Результатом такого складання є вектор, спрямований з початку першої сили до кінця останньої.

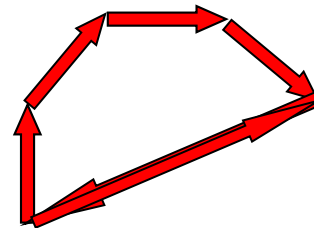
2. **Найпростіший вигляд системи** – сила, прикладена у точці перетину вихідних сил. Таким чином, схожа система сил приводиться до однієї сили – **рівнодіючої (сили, еквівалентної вихідній системі сил), що дорівнює геометричній сумі сил системи.**

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4 + \dots = \sum \bar{F}_i$$

3. **Якщо рівнодіюча система виявляється не рівною нулю**, то під дією такої системи сил тіло буде рухатися в напрямку рівнодіючої (система сил не врівноважена). Для того, щоб урівноважити систему, достатньо прикласти силу, рівну отриманій рівнодіючій і спрямованій у протилежний бік (аксіома про дві сили). Таким чином, **умовою рівноваги збіжної системи сил є рівність рівнодіючої нулю.**

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_i = 0$$

Ця умова є еквівалентною замкнутості силового багатокутника певним чином, а саме, **напрямок всіх сил при обході за контуром не змінюється за напрямком:**

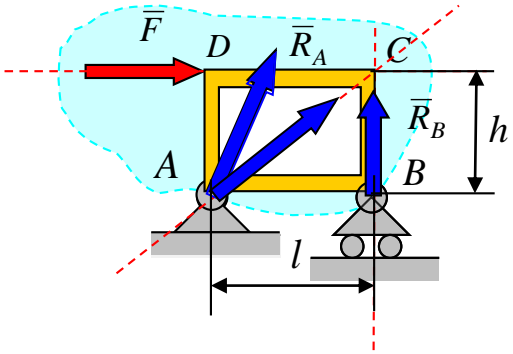




❖ **Теорема про три сили** – Якщо під дією трьох непаралельних сил тіло знаходиться в рівновазі, то лінії дії цих сил перетинаються в одній точці.

1. Перенесемо дві сили вздовж лінії їхньої дії в точку їх перетину (кінематичний стан тіла при цьому не зміниться - слідство з аксіоми приєднання).
2. Складемо ці сили (аксіома про паралелограм сил). Тепер система складається з двох сил. А така система перебуває у рівновазі, якщо ці сили рівні між собою і спрямовані вздовж однієї лінії у протилежні сторони. Таким чином, усі три сили перетинаються в одній точці.

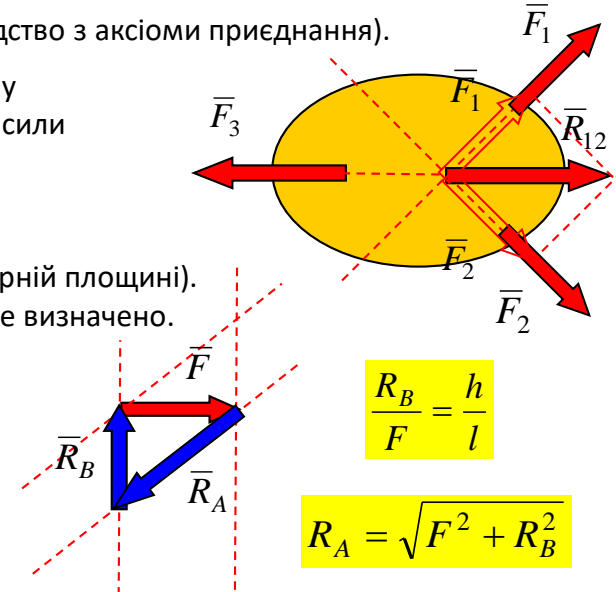
**Теорема про три сили** може ефективно застосовуватися для визначення напрямку однієї з двох реакцій тіл:



Реакція рухомого шарніра  $R_B$  спрямована вертикально (перпендикулярно опорній площині). Напрямок (кут нахилу до горизонту) реакції нерухомого шарніра  $R_A$  поки що не визначено.

Якщо тіло під дією трьох сил  $F$ ,  $R_A$  і  $R_B$  знаходиться в рівновазі, то всі три сили повинні перетинатися в одній точці (у точці  $C$ ):

Дійсні напрямки та величини реакцій легко визначаються побудовою силового трикутника та використанням подібності трикутників:



❖ **Аналітичне визначення рівнодіючої** – Кожна із сил, геометрична сума яких дає рівнодіючу, може бути представлена через її проекції на координатні вісі та одиничні вектори (орти):

$$\vec{F}_i = X_i \vec{i} + Y_i \vec{j} + Z_i \vec{k}$$

Тоді рівнодіюча виражається через проекції сил наступним чином:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = X_1 \vec{i} + Y_1 \vec{j} + Z_1 \vec{k} + X_2 \vec{i} + Y_2 \vec{j} + Z_2 \vec{k} + \dots$$

Групування за ортами дає вирази для проекцій рівнодіючої:

$$\vec{R} = (X_1 + X_2 + \dots) \vec{i} + (Y_1 + Y_2 + \dots) \vec{j} + (Z_1 + Z_2 + \dots) \vec{k} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}$$

Звідси проекції рівнодіючої:

$$\begin{aligned} R_x &= \sum X_i; \\ R_y &= \sum Y_i; \\ R_z &= \sum Z_i; \end{aligned}$$

Напрявні косинуси рівнодіючої:

$$\begin{aligned} \cos(\vec{R}, x) &= \frac{R_x}{R}; \\ \cos(\vec{R}, y) &= \frac{R_y}{R}; \\ \cos(\vec{R}, z) &= \frac{R_z}{R}. \end{aligned}$$

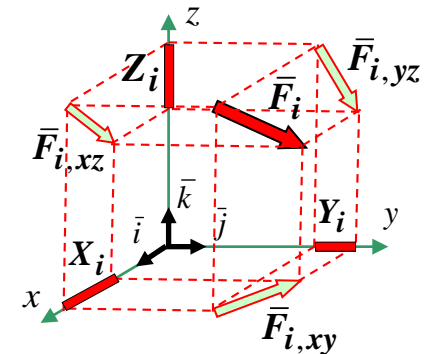
Модуль рівнодіючої:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

Звідси рівняння рівноваги:

$$\vec{R} = 0$$

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; \\ \sum Z_i &= 0. \end{aligned}$$





❖ **Плоска довільна система сил** – система, в якій сили лежать в одній площині та їхні лінії дії не перетинаються в одній точці.

Для розгляду такої системи сил необхідно ввести нові поняття:

1. Момент сили відносно точки на площині.
2. Пара сил. Момент пари сил.

❖ **Момент сили відносно точки на площині** – алгебраїчна величина, що дорівнює добутку модуля сили на плече, взята зі знаком «+» (плюс), якщо обертання площини під дією сили відбувається проти годинникової стрілки, і зі знаком «-» (мінус) в протилежному випадку.

❖ **Плече сили** – довжина перпендикуляра, проведеного з точки на лінію дії сили.

❖ **Пара сил** – сукупність двох паралельних одна одній сил, рівних за величиною та спрямованих у протилежні сторони. Пара сил не може бути спрощена (не може бути замінена однією силою) і є новою силовою характеристикою механічної взаємодії.

❖ **Момент пари сил на площині (теорема про момент пари сил)** не залежить від вибору центру приведення (полюса) і дорівнює добутку модуля будь-якої з сил пари на плече пари, взятим зі знаком «+» (плюс), якщо обертання площини під дією пари сил відбувається проти годинникової стрілки, і зі знаком «-» (мінус) в протилежному випадку.

❖ **Плече пари сил** – довжина перпендикуляра, проведеного з будь-якої точки на лінії дії однієї із сил пари на лінію дії іншої сили цієї пари.

У незалежності моменту пари та від вибору полюса можна переконатися обчисленням суми моментів від кожної з сил відносно будь-якого центру.

$$M_A(\bar{F}, \bar{F}') = F \cdot (a + b) - F'a = Fb = Fd$$

**Теореми про пари :**

❖ **Про перенесення пари сил у площині її дії** – Пару сил можна перенести у будь-яке місце у площині її дії.

Кінематичний стан тіла не зміниться.

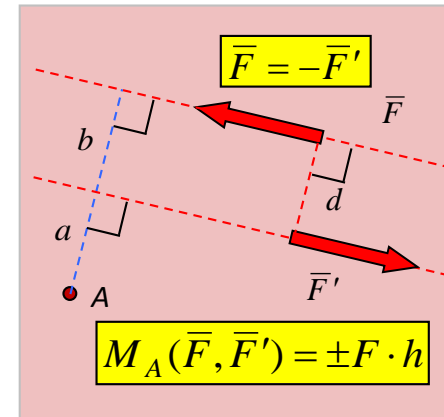
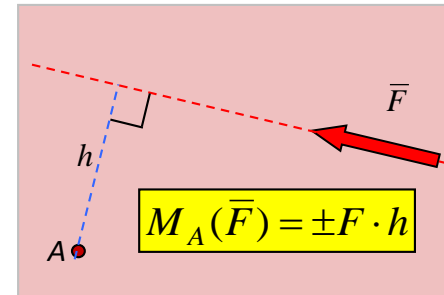
$$M(\bar{F}_1, \bar{F}_1') = F_1 d_1, \quad M(\bar{F}_2, \bar{F}_2') = F_2 d_2; \quad F_1 d_1 = F_2 d_2 \Rightarrow (\bar{F}_1, \bar{F}_1') \equiv (\bar{F}_2, \bar{F}_2')$$

❖ **Про еквівалентність пар сил** – Пару сил можна замінити іншою парою сил, якщо їхні моменти алгебраїчно рівні. Кінематичний стан тіла не зміниться.

❖ **Про складання пар сил на площині** – Систему пар сил на площині можна замінити однією парою, момент якої дорівнює алгебраїчній сумі моментів вихідних пар. Кінематичний стан тіла не зміниться.

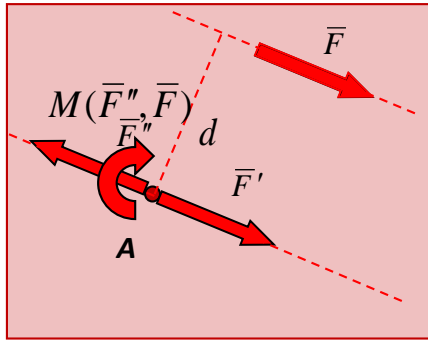
❖ **Умова рівноваги системи пар сил**

$$M = \sum M_i = 0$$





- ❖ **Приведення сили до заданого центру (метод Пуансо)** – силу можна перенести паралельно самій собі в будь-яку точку площини, якщо додати відповідну пару сил, момент якої дорівнює моменту цієї сили відносно точки, що розглядається.



Додамо до системи в **точці А** дві сили, рівні за величиною між собою та з величиною заданої сили, спрямовані вздовж однієї прямої у протилежні сторони та паралельні заданій силі:  $\bar{F}'' = -\bar{F}' = -\bar{F}$   
Кінематичний стан не змінився (аксіома про приєднання).

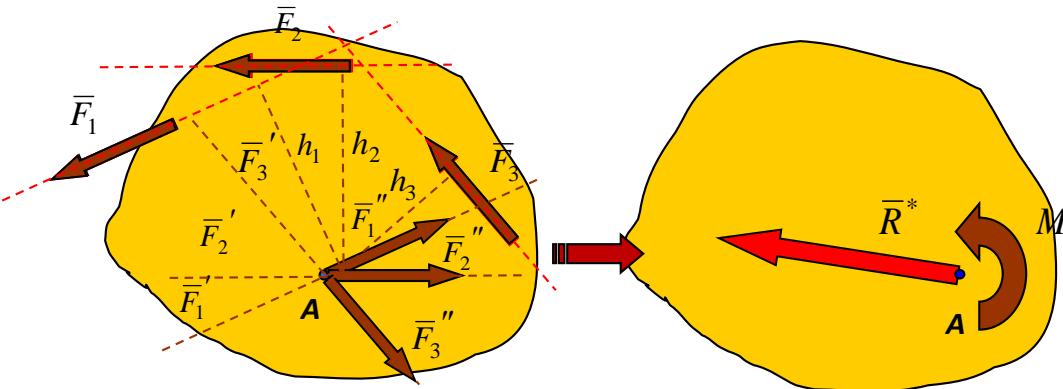
Вихідна сила та одна з доданих сил утворюють пару сил.

**Момент цієї пари чисельно дорівнює моменту вихідної сили відносно центру приведення.**

$$M(\bar{F}'', \bar{F}) - F \cdot d = -F \cdot h = M_A(\bar{F})$$

У багатьох випадках пару сил зручно зображати дуговою стрілкою.

- ❖ **Приведення плоскої довільної системи сил до заданого центру.** Вибираємо довільну точку на площині і кожен з сил переносимо методом Пуансо в цю точку. Замість вихідної довільної системи отримуємо схожу систему сил і систему пар.



Збіжна система сил приводиться до однієї сили, прикладеної в центрі приведення, яка раніше називалася рівнодіючою, але тепер ця сила не замінює вихідну систему сил, оскільки після приведення виникла система пар. Система пар приводиться до однієї пари (теорема про складання пар), момент якої дорівнює алгебраїчній сумі моментів вихідних сил відносно центру приведення.

**У загальному випадку плоска довільна система сил приводиться до однієї сили, яка називається головним вектором і до пари з моментом, рівним головному моменту всіх сил системи відносно центру приведення:**

$$\bar{R}^* = \sum \bar{F}_i \quad \text{- головний вектор,}$$

$$M = M_A = \sum M_{iA} \quad \text{- головний момент.}$$

- ❖ **Умовою рівноваги плоскої довільної системи сил** є одночасна рівність головного вектора та головного моменту системи нулю:

$$\bar{R}^* = \sum \bar{F}_i = 0$$

$$M = M_A = \sum M_{iA} = 0$$

Існують ще дві форми рівнянь рівноваги (II та III форми) :

- ❖ **Рівняння рівноваги (I форма)** маємо у вигляді системи трьох рівнянь із умов рівноваги з використанням виразів для проєкцій головного вектора:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; \\ \sum M_{iA} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; & x \\ \sum M_{iB} &= 0; & \perp \\ \sum M_{iA} &= 0 & AB \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_{iC} &= 0; & C \\ \sum M_{iB} &= 0; & \notin \\ \sum M_{iA} &= 0 & AB \end{aligned}$$



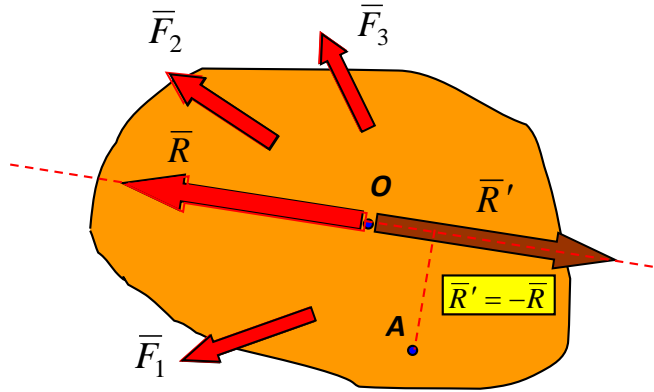


Слід звернути увагу на те, що II та III форми рівнянь рівноваги мають обмеження, пов'язані з вибором однієї з осей, наприклад, осі  $x$  і точки  $C$  відносно положення точок  $A$  і  $B$ .

Обмеження, що накладаються на вибір осі  $x$  (не перпендикулярно  $AB$ ) та точки  $C$  (не лежить на  $AB$ ), гарантують, що жодне з рівнянь не є тотожністю при виконанні двох інших рівнянь.

$\sum X_i = 0;$	$x$	$\sum M_{iC} = 0;$	$C$
$\sum M_{iB} = 0;$	$\perp$	$\sum M_{iB} = 0;$	$\notin$
$\sum M_{iA} = 0$	$AB$	$\sum M_{iA} = 0$	$AB$

❖ **Теорема Варіньона про момент рівнодіючої.** Якщо система сил має рівнодіючу, то момент цієї рівнодіючої відносно будь-якого центру дорівнює алгебраїчній сумі моментів сил системи відносно того ж центру.



Доказ: Нехай система сил  $F_1, F_2, F_3 \dots$  приводиться до рівнодіючої, прикладеної у точці  $O$ .

Така система не перебуває у рівновазі ( $R \neq 0$ ). Урівноважимо цю систему силою  $R'$ , рівною рівнодіючій  $R$ , спрямованій вздовж лінії її дії у протилежний бік (аксіома про дві сили).

Таким чином, система вихідних сил  $F_1, F_2, F_3 \dots$  та врівноважуюча сила  $R'$  знаходиться в рівновазі і повинна задовольняти рівнянням рівноваги, наприклад:

$$\sum M_{iA} + M_A(R') = 0$$

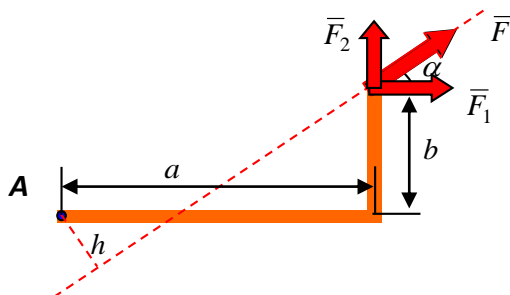
Оскільки сила  $R'$ , дорівнює рівнодіючій  $R$  та спрямована вздовж лінії її дії у протилежний бік, то  $M_A(R') = -M_A(R)$ . Підстановка цієї рівності до рівняння рівноваги дає :

$$\sum M_{iA} - M_A(R) = 0$$

$$M_A(R) = \sum M_{iA}$$

Приклади використання теореми про момент рівнодіючої:

1. Визначення моменту сили відносно точки, коли складно обчислювати плече сили. Наприклад:



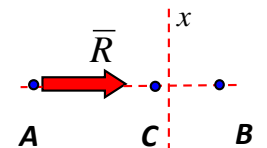
Силу  $F$  розкладемо на складові  $F_1$  і  $F_2$ . Тоді момент сили  $F$  відносно точки  $A$  можна обчислити як суму моментів кожної із сил відносно цієї точки:  $M_A(F) = -F_1b + F_2a = -(F \cos \alpha)b + (F \sin \alpha)a$

2. Доказ необхідності обмежень для II та III форм рівнянь рівноваги:

Якщо  $\sum M_{iA} = 0$ , то система приводиться до рівнодіючої, при цьому вона проходить через точку  $A$ , через те, що її момент відносно цієї точки має дорівнювати нулю (теорема Варіньона).

Якщо при цьому  $\sum M_{iB} = 0$ , то рівнодіюча повинна також проходити через точку  $B$ .

Тоді проекція рівнодіючої на вісь, перпендикулярну  $AB$ , і момент рівнодіючої відносно точки, що лежить на  $AB$ , будуть тотожно рівні нулю за будь-якого значення рівнодіючої.







❖ **Тертя ковзання.** Під дією зсувної сили, прикладеної до тіла, що лежить на шорсткій поверхні, виникає сила, яка протидіє можливому зсуву тіла (**сила тертя зчеплення**) з положення рівноваги або його дійсному переміщенню (**сила тертя ковзання**) у випадку, коли рух справді відбувається.

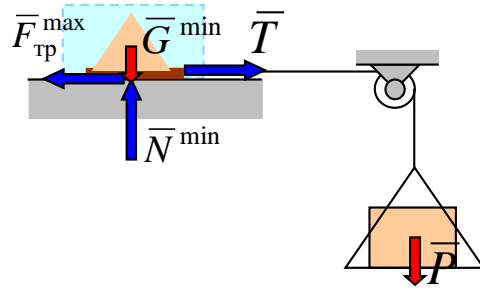
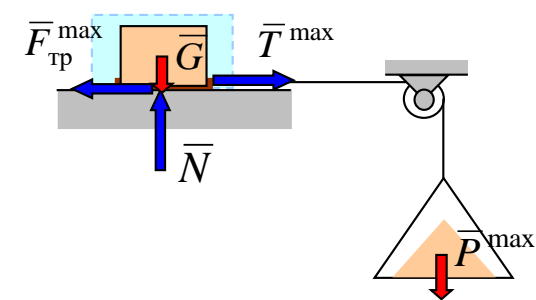
**Основні закони тертя (Амонтона – Кулона) :**

1. Сила тертя лежить у дотичній площині до контактуючих поверхонь і спрямована в бік, протилежний до напрямку, в якому прикладені до тіла сили, які прагнуть його зрушити або дійсно зрушують (реактивний характер).
2. Сила тертя змінюється від нуля до максимального значення  $0 \leq F_{\text{тр}} \leq F_{\text{тр}}^{\text{max}}$ . Максимальна сила тертя пропорційна коефіцієнту тертя та силі нормального тиску.  $F_{\text{тр}}^{\text{max}} = fN$ .
3. Коефіцієнт тертя є величиною постійною для даного виду та стану контактуючих поверхонь ( $f = \text{const}$ ).
4. Сила тертя в широких межах не залежить від площі контактуючих поверхонь.

❖ **Способи визначення коефіцієнта тертя.**

1. Зсувна сила змінюється від нуля до максимального значення –  $0 \leq T \leq T^{\text{max}}$ , ( $0 \leq P \leq P^{\text{max}}$ ).

2. Сила нормального тиску змінюється від початкового значення до мінімального значення –  $N_0 \geq N \geq N^{\text{min}}$  ( $G_0 \geq G \geq G^{\text{min}}$ ).



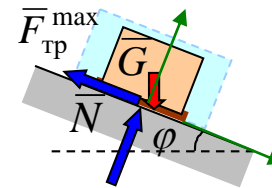
$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; \\ T^{\text{max}} - F_{\text{тр}}^{\text{max}} &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; \\ N - G &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^{\text{max}} &= fN; \\ N &= G; \\ f &= \frac{T^{\text{max}}}{N} = \frac{P^{\text{max}}}{G}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; \\ T - F_{\text{тр}}^{\text{max}} &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; \\ N^{\text{min}} - G^{\text{min}} &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= fN^{\text{min}}; \\ N^{\text{min}} &= G^{\text{min}}; \\ f &= \frac{T}{N^{\text{min}}} = \frac{P}{G^{\text{min}}}. \end{aligned}$$

3. Зсувна сила і сила нормального тиску змінюються при зміні кута нахилу площини ковзання від нуля до максимального значення –  $0 \leq \varphi \leq \varphi^{\text{max}}$ .



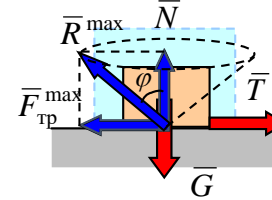
$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; \\ G \sin \varphi^{\text{max}} - F_{\text{тр}}^{\text{max}} &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; \\ N - G \cos \varphi^{\text{max}} &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G \sin \varphi^{\text{max}} &= fN; \\ N &= G \cos \varphi^{\text{max}}; \\ f &= \frac{G \sin \varphi^{\text{max}}}{N} = \frac{G \sin \varphi^{\text{max}}}{G \cos \varphi^{\text{max}}} = \text{tg} \varphi^{\text{max}}. \end{aligned}$$

❖ **Кут тертя**

З урахуванням сили тертя, що виникає при контакті з шорсткою поверхнею повна реакція такої поверхні може розглядатися як геометрична сума нормальної реакції абсолютно гладенької поверхні та сили тертя:

$$\bar{R}^{\text{max}} = \bar{N} + \bar{F}_{\text{тр}}^{\text{max}}$$



Кут відхилення повної реакції шорсткої поверхні – це **кут тертя**, що дорівнює:

$$\varphi = \arctg \left( \frac{F_{\text{тр}}^{\text{max}}}{N} \right) = \arctg(f)$$

При зміні напрямку зсувної сили  $T$  на опорній поверхні поворотом відносно нормалі до площини повна максимальна реакція шорсткої поверхні описує **конус тертя**.

Активні сили ( $G$ ,  $T$  та ін.) можна замінити рівнодіючою силою  $P$ , яка має кут відхилення від вертикалі  $\alpha$ . Можна показати, що **рівновага можлива лише у тому випадку, коли ця сила залишається всередині простору конуса тертя:**

Умова рівноваги вздовж осі  $x$ :  $P \cdot \sin \alpha \leq F_{\text{тр}}^{\text{max}}$ .

З рівняння рівноваги вздовж осі  $y$ :  $N = P \cdot \cos \alpha$ .

Максимальна сила тертя  $F_{\text{тр}}^{\text{max}} = f \cdot N = \text{tg} \varphi \cdot P \cdot \cos \alpha = \text{tg} \varphi \cdot P \cdot \cos \alpha$ .

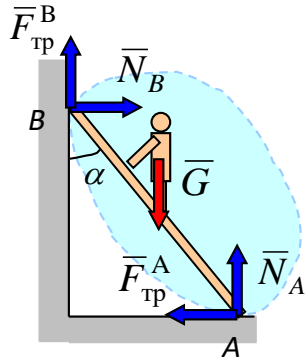
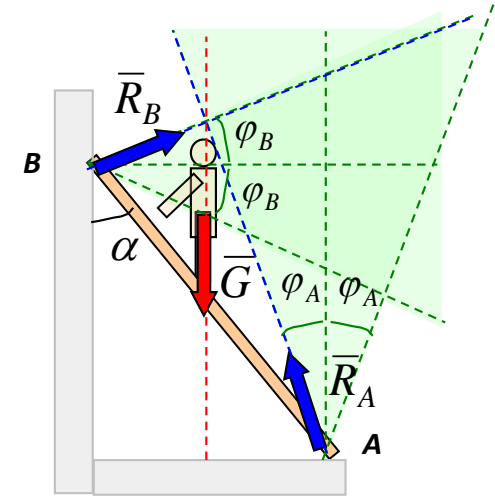
Тоді  $P \cdot \sin \alpha \leq \text{tg} \varphi \cdot P \cdot \cos \alpha$ , звідки  $\text{tg} \alpha \leq \text{tg} \varphi$  і  $\alpha \leq \varphi$ .



❖ **Урахування сил тертя під час розв'язання задач на рівновагу.** За наявності сил тертя:

1. До діючих на об'єкт активних сил і реакцій абсолютно гладеньких поверхонь **додаються відповідні сили тертя**, спрямовані вздовж загальної дотичної до контактуючих поверхонь у бік, протилежний можливому зміщенню точки торкання об'єкта відносно опорної шорсткої площини.
2. До рівнянь рівноваги, складених для об'єкта, **додаються вирази для максимальних сил тертя** в кількості, що дорівнює кількості сил тертя.

❖ **Приклад розв'язання задачі на рівновагу з урахуванням сил тертя.** Людина вагою  $G$  збирається встановити легку драбину під кутом  $\alpha$  до вертикалі (стіни) і піднятися на половину довжини драбини для виконання роботи. Коефіцієнти тертя в точках контакту драбини із підлогою ( $A$ ) та зі стіною ( $B$ ) рівні  $f_A$  і  $f_B$  відповідно. Визначити граничне значення кута нахилу, у якому драбина з людиною можуть зберігати рівновагу. Вагою драбини знехтувати.



1. Вибираємо об'єкт (людина та драбина), відкидаємо в'язі та замінюємо їхню дію реакціями гладенької поверхні.
2. Додаємо активні сили (силу тяжіння  $G$ ). Драбина легка, її вагою нехтуємо.
3. Додаємо сили тертя, спрямовані у бік, протилежний до можливого переміщення контактних точок  $A$  і  $B$  драбини під дією доданої активної сили.

4. Складаємо рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \sum X_i = 0; & N_B - F_{тр}^A = 0; \\ \sum Y_i = 0; & F_{тр}^B - G + N_A = 0; \\ \sum M_{iA} = 0; & G \frac{AB}{2} \sin \alpha - F_{тр}^B AB \sin \alpha - N_B AB \cos \alpha = 0. \end{cases}$$

5. Додаємо вирази для сил тертя:

$$\begin{cases} F_{тр}^A = f_A N_A; \\ F_{тр}^B = f_B N_B; \end{cases}$$

6. Підстановка виразів з пункту 5 в рівняння рівноваги з простими перетвореннями третього рівняння дає:

$$\begin{cases} \sum X_i = 0; & N_B - f_A N_A = 0; \\ \sum Y_i = 0; & f_B N_B - G + N_A = 0; \\ \sum M_{iA} = 0; & G \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha - f_B N_B \operatorname{tg} \alpha - N_B = 0. \end{cases}$$

7. Розв'язання перших двох рівнянь дає вирази для нормальних реакцій:

$$\begin{cases} N_A = \frac{G}{1 + f_A f_B}; \\ N_B = \frac{f_A G}{1 + f_A f_B}. \end{cases}$$

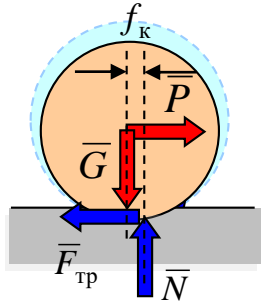
8. Підстановка виразів для нормальних реакцій у третє рівняння рівноваги призводить до можливості визначення граничного кута нахилу  $\alpha$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2f_A}{1 - f_A f_B}$$

**Визначення області рівноваги.** Задачу розв'язано для конкретного положення людини, а **кут нахилу** відповідає **граничній рівновазі** (використані максимальні значення сил тертя). За допомогою поняття **конуса тертя**, що утворюється повною реакцією шорсткої поверхні, та **теорему про три сили** можна визначити **область можливих рівноважних положень** людини на драбині. Для цього достатньо за заданими коефіцієнтами тертя **визначити кути тертя**, що задають граничні положення повної реакції та **побудувати конуси тертя**. Спільна область конусів дає **область рівноважних положень** людини. Добре видно, що для більш високого положення людини треба **зменшувати кут нахилу**.



❖ **Опір під час кочення.** Під дією сили зсуву, прикладеної до котка, що лежить на шорсткій поверхні, виникає сила, яка протидіє можливому зміщенню тіла (**сила тертя зчеплення**) з рівноважного положення або його дійсному переміщенню (**сила тертя ковзання**) за його руху і пара сил, момент якої перешкоджає повороту котка (**момент опору коченню**). Виникнення пари сил, яка перешкоджає коченню, пов'язано з деформацією опорної площини, внаслідок якої рівнодіюча нормальних реактивних сил вздовж площадки контакту зміщена від лінії дії сили тяжіння у бік можливого або дійсного руху.



#### Основні закони тертя кочення:

1. Момент опору коченню завжди спрямований у протилежний бік до того напрямку, в якому прикладені до тіла сили, що прагнуть його повернути, або дійсному повороту під дією цих сил (реактивний характер).
2. Момент опору коченню змінюється від нуля до максимального значення. Максимальний момент опору коченню пропорційний коефіцієнту тертя кочення та силі нормального тиску.
3. Коефіцієнт тертя кочення – це постійна величина для даного виду та стану контактуючих поверхонь ( $f_k = \text{const}$ ).
4. Момент опору коченню у широких межах не залежить від радіуса котка.

$$0 \leq M_k \leq M_k^{\max}$$

$$M_k^{\max} = f_k N$$

Якщо коефіцієнт тертя ковзання є безрозмірною величиною, то коефіцієнт тертя кочення вимірюється одиницями довжини та дорівнює за величиною зазначеному зміщенню рівнодіючої нормального тиску. Внаслідок деформації коефіцієнт тертя кочення має дуже малу величину і становить, наприклад, для сталевого колеса на сталевій рейці 0,0005 м.





❖ **Просторова довільна система сил** – система, в якій сили не лежать у одній площині та його лінії дії не перетинаються відносно однієї точки.

Для розгляду такої системи сил необхідно ввести нові поняття:

1. Момент сили відносно центру у просторі.
2. Момент сили відносно вісі.
3. Момент пари сил у просторі.

❖ **Момент сили відносно центру у просторі** – це векторна величина, яка дорівнює **векторному добутку радіус-вектора, проведеного з центру до точки прикладання сили, та вектора сили.**

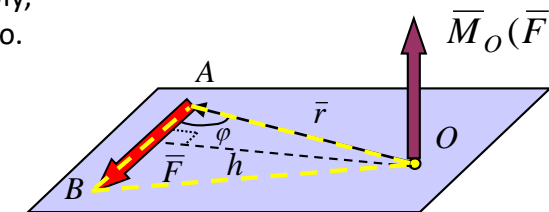
$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

За визначенням векторного добутку вектор моменту сили спрямований перпендикулярно до площини, проведеної через центр і силу, у той бік, звідки поворот радіус-вектора до вектора сили на найменший кут видно таким, що відбувається за годинниковою стрілкою.

Модуль вектора моменту сили відносно центру дорівнює :

$$M_O(\vec{F}) = rF \sin(\vec{r}, \vec{F}) = Fh$$

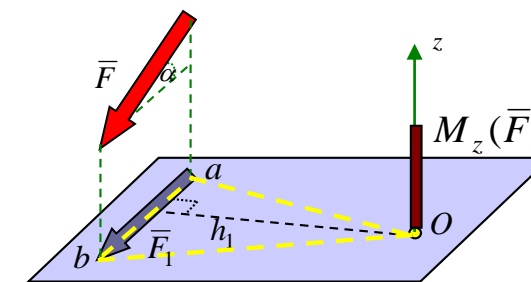
Модуль вектора моменту сили відносно центру чисельно дорівнює подвоєній площі трикутника  $\Delta OAB$ .



❖ **Момент сили відносно вісі** – алгебраїчна величина, яка дорівнює **добутку проекції вектора сили** на площину, перпендикулярну до осі, **на плече цієї проекції** відносно точки перетину вісі з площиною, взята зі знаком «+» (плюс), якщо обертання площини під дією сили видно при погляді назустріч осі таким, що відбувається проти годинникової стрілки, і зі знаком «-» (мінус) в протилежному випадку.

$$M_z(\vec{F}) = \pm F_1 h_1$$

Момент сили відносно вісі чисельно дорівнює подвоєній площі трикутника  $\Delta Oab$ .



❖ **Зв'язок моменту сили відносно центру та відносно вісі.**

Модуль вектора моменту сили відносно центру, що лежить на вісі z, дорівнює подвоєній площі трикутника  $OAB$ :

$$M_O(\vec{F}) = Fh = 2S_{OAB}$$

Момент сили відносно вісі z, дорівнює подвоєній площі трикутника  $Oab$ :

$$M_z(\vec{F}) = F_1 h_1 = 2S_{Oab}$$

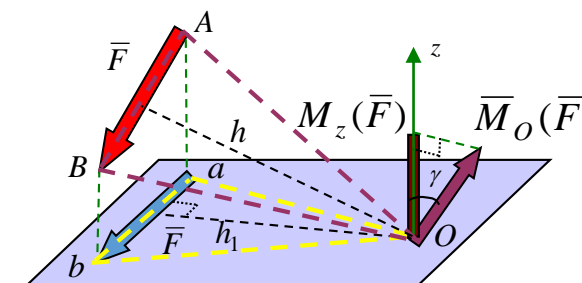
Трикутник  $Oab$  отримано проекцією трикутника  $OAB$  на площину, перпендикулярну вісі z, та його площа пов'язана з площею трикутника  $OAB$  співвідношенням:

$$S_{Oab} = S_{OAB} \cos \gamma$$

де  $\gamma$  - двогранний кут між площинами трикутників.

Оскільки вектор моменту сили відносно точки перпендикулярний площині трикутника  $OAB$ , то кут між вектором і віссю дорівнює куту  $\gamma$ . Таким чином, **момент сили відносно вісі є проекція вектора моменту сили відносно центру на цю вісь :**

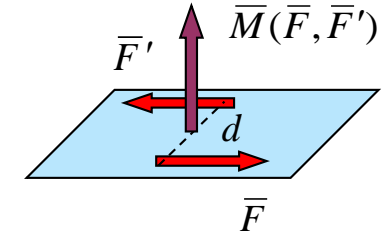
$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}) \cos \gamma$$





- ❖ **Момент пари сил у просторі** – вектор, перпендикулярний площині дії пари, спрямований у той бік, звідки обертання площини під дією пари видно таким, що відбувається проти годинникової стрілки.

- ❖ Модуль вектора моменту пари дорівнює добутку однієї з сил пари на плече пари :  $M = Fd = F'd$



- ❖ **Теореми про пари:** (Теореми наводяться без доказів)

- ❖ **Про перенесення пари сил у площину, паралельну площині її дії** – Пару сил можна перенести у будь-яку площину, паралельну площині її дії. Кінематичний стан тіла не зміниться.

- ❖ **Про еквівалентність пар сил** – Пару сил можна замінити іншою парою сил, якщо їхні моменти геометрично (векторно) рівні. Кінематичний стан тіла не зміниться.

- ❖ **Про складання пар сил на площині** – Систему пар сил на площині можна замінити однією парою, момент якої дорівнює геометричній (векторній) сумі моментів вихідних пар. Кінематичний стан тіла не зміниться.

- ❖ **Умова рівноваги системи пар сил**

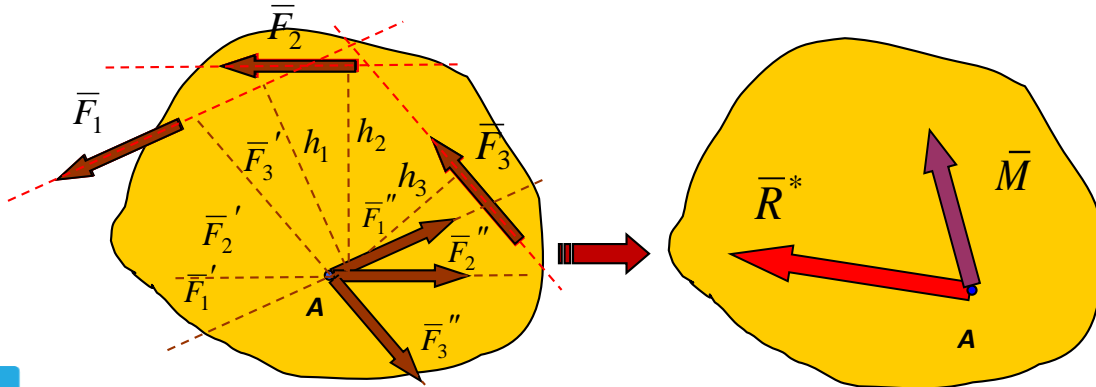
$$\bar{M} = \sum \bar{M}_i = 0$$

Далі будемо дотримуватися загального плану дослідження системи сил, послідовно вирішуючи три питання :

1. Як спростити систему?
2. Який найпростіший вигляд системи?
3. Які умови рівноваги системи?

- ❖ **Приведення плоскої довільної системи сил до заданого центру** – вибираємо довільну точку на площині і кожну з сил переносимо методом Пуансо в цю точку. Замість вихідної довільної системи отримуємо схожу систему сил і систему пар.

На відміну від раніше розглянутої плоскої довільної системи сил, тепер при використанні методу Пуансо приєднані пари сил характеризуються векторами.



Збіжна система сил приводиться до однієї сили, прикладеної в центрі приведення. Система пар приводиться до одної пари (теорема про складання пар), момент якої дорівнює векторній сумі моментів вихідних сил відносно центру приведення.

У загальному випадку плоска довільна система сил приводиться до однієї сили, яка називається головним вектором і до пари з моментом, рівним головному моменту всіх сил системи відносно центру приведення. :

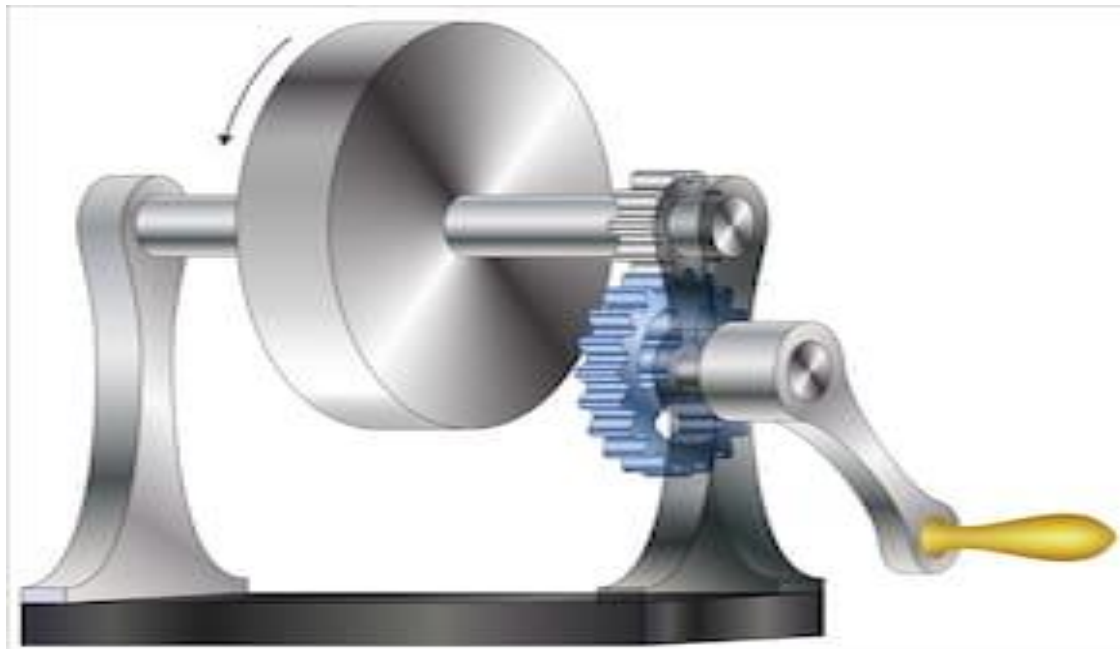
$$\bar{R}^* = \sum \bar{F}_i$$
 - головний вектор,  

$$\bar{M} = \bar{M}_A = \sum \bar{M}_{iA}$$
 - головний момент.


↑ Теоретична та прикладна механіка.  
Конспект лекцій



**РОЗДІЛ «КІНЕМАТИКА»**





Кінематика – розділ теоретичної механіки, який вивчає механічний рух без урахування сил, які спричиняють цей рух, та складається з двох підрозділів:

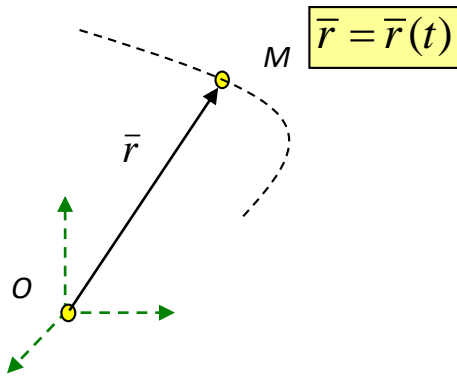
- ❖ **Кінематика точки** – вивчає рух матеріальної точки та є основою вивчення руху точок твердого тіла.
- ❖ **Задання руху точки** – необхідно мати можливість визначення положення точки у просторі у будь-який момент часу (завдяки рівнянню, геометрії механізму та відомому закону руху провідної ланки).
- ❖ **Траєкторія руху точки** – сукупність положень точки у просторі під час її руху.



Три способи задання руху точки:

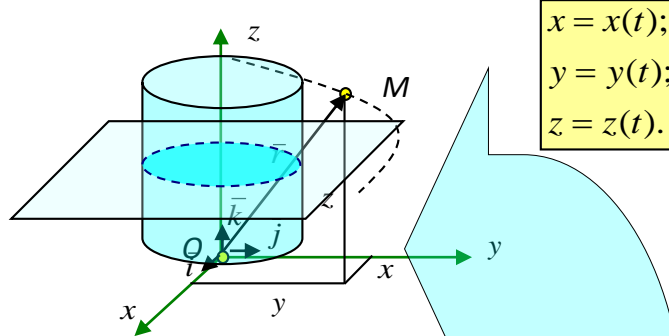
**Векторний спосіб:**

Задається величина та напрямок радіус-вектора.



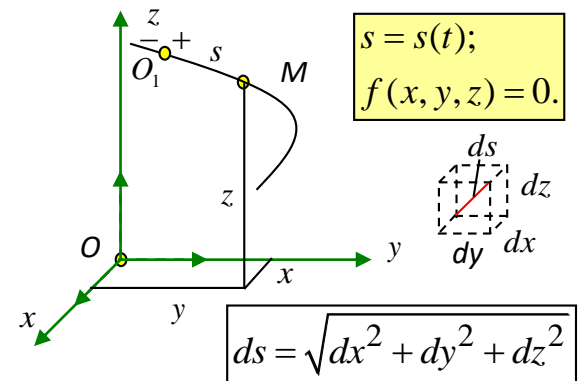
**Координатний спосіб:**

Визначаються координати положення точки.



**Природний спосіб:**

Задаються закон руху точки та траєкторія



Всі три способи задання еквівалентні та пов'язані між собою:

1. Векторний та координатний – співвідношенням:  $\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$

3. Для отримання рівняння траєкторії руху необхідно із рівнянь руху координатного способу виключити час, через те, що траєкторія не залежить від часу:

$$\begin{aligned} x = x(t) &\Rightarrow t = t(x); \\ y = y(t) &\Rightarrow y[t(x)] = y(x); \\ z = z(t) &\Rightarrow z[t(x)] = z(x). \end{aligned}$$

Наприклад:

$$\begin{aligned} x = t &\Rightarrow t = x \\ y = \sqrt{R^2 - t^2} &\Rightarrow \sqrt{R^2 - x^2} \text{ або } x^2 + y^2 = R^2; \\ z = c. & \end{aligned}$$

Останні два рівняння є рівняннями лінійних поверхонь, лінія перетину яких є траєкторією руху точки

$$\begin{cases} y = y(x); \\ z = z(x). \end{cases}$$

Останні два рівняння є рівняннями **циліндричної поверхні** радіуса  $R$  з твірною, паралельною вісі  $z$ , та **плоскої поверхні**, паралельної координатній площині  $Oxy$  та зміщеної вздовж вісі  $z$  на величину  $c$ . Лінія перетину цих поверхонь (коло радіуса  $R$ ) – траєкторія руху точки.

2. Координатний та природний – співвідношенням:

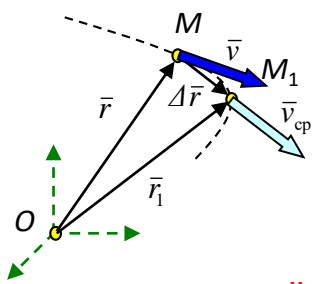
$$s(t) = \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$



**Швидкість точки** – це величина, яка характеризує швидкість зміни положення точки у просторі.

Три способи задання руху точки визначають способи визначення швидкості точки :

**Векторний спосіб:** Порівняємо два положення точки в моменти часу  $t$  та  $t_1 = t + \Delta t$ :



$$\begin{aligned} t &\Rightarrow \vec{r}; \\ t_1 = t + \Delta t &\Rightarrow \vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta \vec{r}; \end{aligned} \quad \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}_{cp}$$

- вектор середньої швидкості в інтервалі часу  $\Delta t$ , спрямований у напрямку вектора переміщення (хорда  $MM_1$ ).

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{v} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}$$

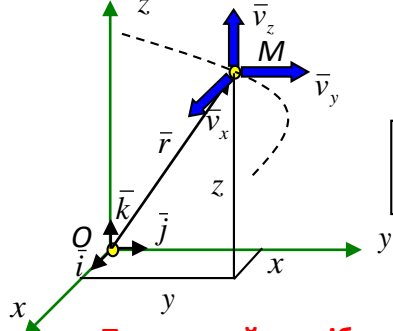
Призначимо  $\Delta t \rightarrow 0$  і перейдемо до границі:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

- вектор істинної швидкості точки в момент часу  $t$ , спрямований вздовж дотичної до траєкторії (при наближенні  $M_1$  до  $M$  хорда займає положення дотичної).

**Координатний спосіб :**

Зв'язок радіус-вектора з координатами визначається виразом :  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$



Використовуємо векторну форму визначення швидкості :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}] = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

**Компоненти (складові) вектора швидкості:**

$$\begin{aligned} \vec{v}_x &= \dot{x}(t)\vec{i}; \\ \vec{v}_y &= \dot{y}(t)\vec{j}; \\ \vec{v}_z &= \dot{z}(t)\vec{k}. \end{aligned}$$

**Проекції швидкості на вісі координат:**

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x}; \\ v_y &= \dot{y}; \\ v_z &= \dot{z}. \end{aligned}$$

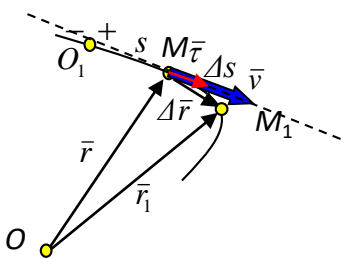
$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}; \\ \cos(\vec{v}, x) &= \frac{\dot{x}}{v}; \\ \cos(\vec{v}, y) &= \frac{\dot{y}}{v}; \\ \cos(\vec{v}, z) &= \frac{\dot{z}}{v}. \end{aligned}$$

**Природний спосіб :**

Представимо радіус-вектор як складну функцію :  $\vec{r}(t) = \vec{r}[s(t)]$ .

Використаємо векторну форму визначення швидкості:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \dot{s}$$



Представимо похідну радіус-вектора як границю:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \Delta s \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}$$

Вектор збільшення радіус-вектора, направлений вздовж хорди  $MM_1$  і в границі займає дотичне положення.

$$\left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = \Delta s \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right| = \Delta \varphi \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{2\rho \sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\rho \Delta \varphi} = 1.$$

Якщо  $\Delta s \rightarrow 0$  радіус кривизни  $\rho_1 \rightarrow \rho$ , кут між радіусами кривизни  $\Delta \varphi \rightarrow 0$ , чисельник – основа рівнобедреного трикутника, знаменник – довжина кругової дуги радіуса  $\rho$ .

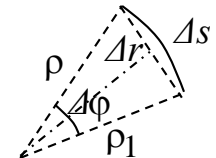
Величина похідної радіус-вектора по дуговій координаті дорівнює 1 :

Таким чином, похідна радіус-вектора по дуговій координаті є одиничним вектором, спрямованим по траєкторії.

Вектор швидкості дорівнює:  $\vec{v} = \dot{s}\vec{\tau}$ .

Проекція швидкості на дотичну:  $v_\tau = \dot{s}$ .

За  $\dot{s} > 0$  вектор швидкості спрямовано у бік збільшення дугової координати, інакше – у зворотний бік.







❖ **Прискорення точки** – це величина, яка характеризує швидкість зміни швидкості точки.

Три способи задання руху точки визначають способи визначення прискорення точки:

**Векторний спосіб:** Порівнюємо швидкості точки у двох її положеннях у моменти часу  $t$  та  $t_1 = t + \Delta t$ :

$$t \Rightarrow \vec{v};$$

$$t_1 = t + \Delta t \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v} + \Delta \vec{v};$$

$$\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \vec{a}_{\text{ср}}$$

- вектор середнього прискорення в інтервалі часу  $\Delta t$ , спрямований у бік увігнутості траєкторії.

Переходячи до границі отримаємо:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \vec{a}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

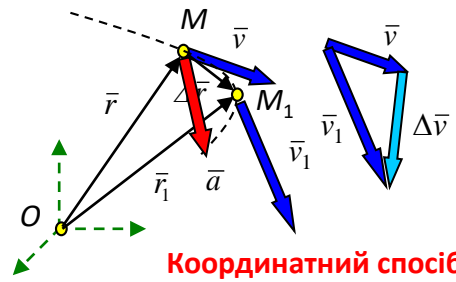
- **вектор істинного прискорення точки у момент часу  $t$** , лежить у дотичній площині (граничне положення площини, проведеної через дотичну в точці  $M$  і пряму, паралельну дотичній у точці  $M_1$ , при прагненні  $M_1$  до  $M$ ) і спрямований у бік увігнутості траєкторії.

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2};$$

$$\cos(\vec{a}, x) = \frac{\ddot{x}}{a};$$

$$\cos(\vec{a}, y) = \frac{\ddot{y}}{a};$$

$$\cos(\vec{a}, z) = \frac{\ddot{z}}{a}.$$



**Координатний спосіб:** Використаємо отриманий векторний вираз і зв'язок радіус-вектора з координатами

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} [x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}] = \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{k} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

**Компоненти (складові) вектора прискорення:**

$$\vec{a}_x = \ddot{x};$$

$$\vec{a}_y = \ddot{y};$$

$$\vec{a}_z = \ddot{z}.$$

**Проекції прискорення на вісі координат:**

$$a_x = \ddot{x};$$

$$a_y = \ddot{y};$$

$$a_z = \ddot{z}.$$

**Природний спосіб:** Використовуємо векторний вираз для прискорення та вираз для швидкості при природному способі задання руху:  $\vec{v} = \dot{s}\vec{\tau}$ .

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\vec{\tau}) = \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s}\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

Представимо одиничний дотичний вектор як складну функцію:

$$\vec{\tau}(t) = \vec{\tau}[s(t)].$$

Похідна одиничного дотичного вектора:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \frac{d\vec{\tau}}{ds}$$

Величина похідної одиничного дотичного вектора по дуговій координаті:

$$\left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{\tau}|}{\Delta s} = \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\rho \Delta \varphi} = \frac{1}{\rho}$$

**Компоненти (складові) вектора прискорення:**

$$\vec{a}_\tau = \ddot{s}\vec{\tau};$$

$$\vec{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n}.$$

**Проекції прискорення на вісі  $\tau$  та  $n$ :**

$$a_\tau = \ddot{s};$$

$$a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}.$$

Якщо  $\Delta s \rightarrow 0$ , то радіус кривизни  $\rho_1 \rightarrow \rho$ , кут між радіусами кривизни  $\Delta \varphi \rightarrow 0$ , чисельник - основа рівнобедреного трикутника, побудованого одиничними векторами  $\vec{\tau}_1$  і  $\vec{\tau}$ , знаменник - довжина кругової дуги радіуса  $\rho$ .

Таким чином, похідна одиничного дотичного вектора по дуговій координаті є вектор, спрямований перпендикулярно дотичній до траєкторії. Введемо одиничний вектор  $\vec{n}$ , нормальний (перпендикулярний) до дотичної, та спрямований до центру кривизни.

Таким чином, **повне прискорення точки є векторною сумою двох прискорень: дотичного**, спрямованого за дотичною до траєкторії у бік збільшення дугової координати,  $\ddot{s} > 0$  якщо (інакше – у протилежну) та **нормального прискорення**, спрямованого за нормаллю до дотичної до центру кривизни (увігнутості траєкторії):

Кут між збільшенням диничного вектора  $\Delta \tau$  та самого вектора  $\tau$  За  $\Delta \varphi \rightarrow 0$ , прагне до  $90^\circ$

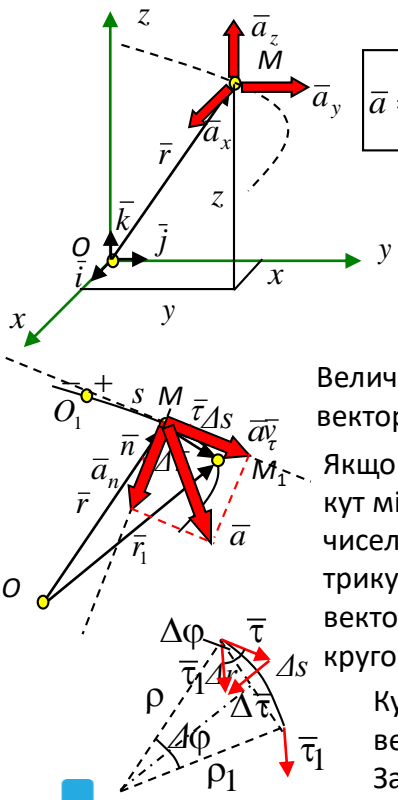
З використанням вектора  $\vec{n}$  і раніше визначених величин прискорення точки можна представити як суму векторів:

$$\vec{a} = \ddot{s}\vec{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n}.$$

Модуль повного прискорення:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2};$$





❖ **Рівнозмінний рух точки** - рух точки за траєкторією, під час якого дотичне прискорення не змінюється за величиною.

$$a_{\tau\tau} = \ddot{s} = \text{const.}$$

Запишемо вираз для дотичного прискорення через проекцію швидкості:  $a_{\tau\tau} = \ddot{s} = \frac{d}{dt} \dot{s} = \frac{dv_{\tau}}{dt}$

Отриманий вираз є диференціальним рівнянням, яке легко розв'язується поділом змінних та інтегруванням лівої та правої частин:

$$dv_{\tau} = a_{\tau\tau} dt \quad \int_{v_{\tau 0}}^{v_{\tau}} dv_{\tau} = a_{\tau\tau} \int_0^t dt; \quad v_{\tau} \Big|_{v_{\tau 0}}^{v_{\tau}} = a_{\tau\tau} t \Big|_0^t; \quad v_{\tau} - v_{\tau 0} = a_{\tau\tau} t$$

$$v_{\tau} = v_{\tau 0} + a_{\tau\tau} t$$

- швидкість точки при рівнозмінному русі

У свою чергу швидкість точки також зв'язується із дуговою координатою диференціальною залежністю:  $v_{\tau} = \frac{ds}{dt}$  або  $ds = v_{\tau} dt$ .

Після підстановки виразу для швидкості та інтегрування отримуємо:  $\int_{s_0}^s ds = \int_0^t (v_{\tau 0} + a_{\tau\tau} t) dt; \quad s \Big|_{s_0}^s = (v_{\tau 0} t + a_{\tau\tau} \frac{t^2}{2}) \Big|_0^t; \quad s - s_0 = v_{\tau 0} t + a_{\tau\tau} \frac{t^2}{2}$

$$s = s_0 + v_{\tau 0} t + a_{\tau\tau} \frac{t^2}{2}$$

- дугова координата точки при рівнозмінному русі

❖ **Класифікація рухів точки.**

№ з/п	$\bar{a}_{\tau}$	$\bar{a}_n$	Вид руху	
			Закон руху	Траєкторія
1	= 0 [t, t <sub>1</sub> ]	= 0 [t, t <sub>1</sub> ]	рівномірний (v = const)	прямолінійна (ρ = ∞)
2	= 0 [t, t <sub>1</sub> ]	≠ 0 [t, t <sub>1</sub> ]	рівномірний (v = const)	криволінійна (ρ ≠ ∞)
2.1	= 0	= 0 [t, t <sub>1</sub> ]	нерівномірний (v ≠ const), у момент часу t v = max	прямолінійна (ρ = ∞)
2.2	у момент часу t	≠ 0 [t, t <sub>1</sub> ]		криволінійна (ρ ≠ ∞)
3	≠ 0 [t, t <sub>1</sub> ]	= 0 [t, t <sub>1</sub> ]	нерівномірний (v ≠ const)	прямолінійна (ρ = ∞)
3.1		= 0	зміна напрямку руху (v = 0 при t=t)	будь-яка траєкторія
3.2		в момент часу t	нерівномірний (v ≠ const)	перегин траєкторії (ρ = ∞ при t=t)
4	≠ 0 [t, t <sub>1</sub> ]	≠ 0 [t, t <sub>1</sub> ]	нерівномірний (v ≠ const)	криволінійна (ρ ≠ ∞)
5	= const [t, t <sub>1</sub> ]	будь-яке	рівнозмінний	будь-яка траєкторія





❖ **Кінематика твердого тіла** вивчає рух твердого тіла та окремих його точок.

Існує п'ять видів руху твердого тіла:

1. **Поступальний** (повзун, поршень насоса, спарник коліс паровоза, що рухається прямолінійним шляхом, кабіна ліфта, двері купе, кабіна оглядового колеса).
2. **Обертальний** (маховик, кривошип, коромисло, оглядове колесо, звичайні двері).
3. **Плоскопаралельний або плоский** (шатун, колесо локомотива під час кочення по прямолінійній рейці, шліфувальне коло).
4. **Сферичний** (гіроскоп, кульова стійка).
5. **Загальний випадок руху** або вільний політ (куля, камінь, небесне тіло)

❖ **Поступальний рух твердого тіла** – такий рух, при якому будь-яка пряма, жорстко пов'язана з тілом, залишається паралельною до самої себе протягом усього руху. Зазвичай поступальний рух ототожнюється з прямолінійним рухом його точок, але це не так. Точки та саме тіло (центр мас тіла) можуть рухатися за криволінійними траєкторіями, як, наприклад, рух кабіни оглядового колеса.

❖ **Теорема про поступальний рух твердого тіла** – При поступальному русі твердого тіла всі його точки описують тотожні траєкторії та мають у кожний момент часу геометрично рівні швидкості та прискорення.

Проведемо радіус-вектори до двох точок **A** і **B**, а також з'єднаємо ці точки вектором  $r_{BA}$ .

У будь-який момент часу виконується векторна рівність:  $\bar{r}_A(t) = \bar{r}_B(t) + \bar{r}_{BA}$ .

У будь-який момент часу вектор  $r_{BA}$  **залишається постійним за напрямком** (за визначенням поступального руху) **і за величиною** (відстань між точками не змінюється). Звідси:

$$\bar{r}_A(t) = \bar{r}_B(t) + \overline{const},$$

Це означає, що в кожний момент часу положення точки **A** відрізняється від положення точки **B** на ту саму величину  $r_{BA} = \mathit{const}$ , тобто **траєкторії** цих двох точок **тотожні** (збігаються одна з одною при накладенні).

$$\frac{d\bar{r}_A(t)}{dt} = \frac{d\bar{r}_B(t)}{dt}$$

Продиференціюємо за часом ліву та праву частину співвідношення: і це означає, що **у кожний момент часу швидкість точки A дорівнює геометрично** (тобто векторно) **швидкості точки B**.

$$\bar{v}_A(t) = \bar{v}_B(t).$$

Друге диференціювання за часом призводить до співвідношення:

$$\frac{d\bar{r}_A^2(t)}{dt^2} = \frac{d\bar{r}_B^2(t)}{dt^2}$$

і це означає, що **у кожний момент часу прискорення точки A дорівнює геометрично** (тобто векторно) **прискоренню точки B**.

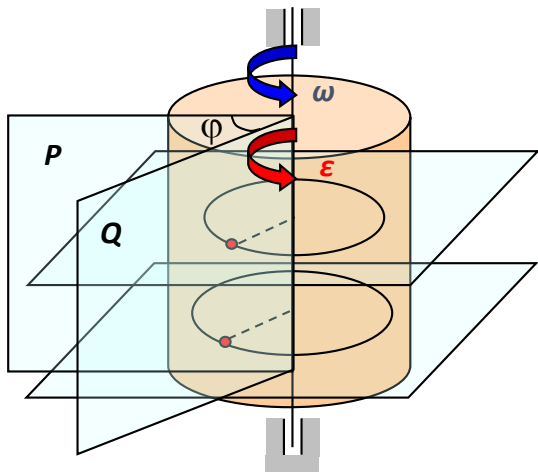
$$\bar{a}_A(t) = \bar{a}_B(t).$$

Таким чином, поступальний рух твердого тіла повністю визначається рухом однієї точки, що належить цьому тілу та обраної довільним чином.

Усі параметри руху цієї точки (траєкторія, швидкість та прискорення) описуються рівняннями та співвідношеннями кінематики точки.



❖ **Обертальний рух твердого тіла** – рух, при якому всі його точки рухаються в площинах, перпендикулярних деякій нерухомій прямій, і описують коло з центрами, що лежать на цій прямій, що є **віссю обертання**.



❖ **Задання обертального руху** – рух визначається законом зміни двогранного кута  $\phi$  (кута повороту), утвореного нерухомою площиною  $P$ , що проходить через вісь обертання, і площиною  $Q$ , жорстко пов'язаною з тілом:

$$\phi = \phi(t) \text{ - рівняння обертального руху}$$

❖ **Кутова швидкість** - величина, яка характеризує швидкість зміни кута повороту.

$$\begin{matrix} t & \Rightarrow & \phi; \\ t_1 = t + \Delta t & \Rightarrow & \phi_1 = \phi + \Delta\phi; \end{matrix} \quad \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \omega_{\text{ср}} \text{ - середня кутова швидкість в інтервалі часу } \Delta t,$$

Спрямуємо  $\Delta t \rightarrow 0$  та перейдемо до границі:  $\Delta t \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \omega$   $\omega = \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}$  - істинна кутова швидкість у момент часу  $t$

Якщо  $d\phi/dt > 0$ , то обертання відбувається у бік збільшення кута повороту, якщо  $d\phi/dt < 0$ , то обертання відбувається у бік зменшення кута повороту.

Кутова швидкість зображується дуговою стрілкою у бік обертання.

❖ **Кутове прискорення** - величина, що характеризує швидкість зміни кутової швидкості.

$$\begin{matrix} t & \Rightarrow & \omega; \\ t_1 = t + \Delta t & \Rightarrow & \omega_1 = \omega + \Delta\omega; \end{matrix} \quad \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \varepsilon_{\text{ср}} \text{ - середнє кутове прискорення в інтервалі часу } \Delta t,$$

Призначимо  $\Delta t \rightarrow 0$  та перейдемо до границі:

$$\Delta t \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \varepsilon \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\phi} \text{ - істинне кутове прискорення в момент часу } t$$

Кутове прискорення зображується дуговою стрілкою у бік збільшення кута повороту при  $\ddot{\phi} > 0$

Якщо  $d^2\phi/dt^2$  та  $d\phi/dt$  одного знака, швидкість збільшується по модулю і обертання є прискореним (дугові стрілки кутової швидкості і кутового прискорення спрямовані в один бік),

якщо  $d^2\phi/dt^2$  та  $d\phi/dt$  різного знака, швидкість зменшується по модулю і обертання є уповільненим (дугові стрілки кутової швидкості і кутового прискорення спрямовані в протилежні сторони)

❖ **Рівномірне обертання** – кутова швидкість не змінюється за величиною.

$$\omega = const.$$

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}; \quad \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi = \omega \int_0^t dt;$$

$$\phi = \phi_0 + \omega t.$$

❖ **Рівнозмінне обертання** – кутове прискорення не змінюється за величиною

$$\varepsilon = const.$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}; \quad \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \varepsilon \int_0^t dt;$$

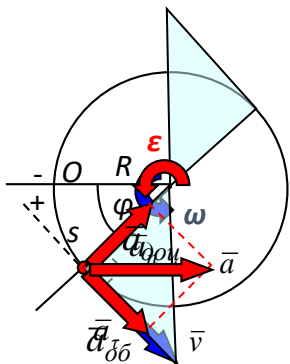
$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}; \quad \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi = \int_0^t (\omega_0 + \varepsilon t) dt;$$

$$\phi = \phi_0 + \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}.$$



- ❖ Швидкість точки при обертальному русі твердого тіла - траєкторія точки відома (коло радіуса  $R$  - відстань точки до вісі обертання), можна застосувати формулу для визначення швидкості точки при природному заданні руху:  $v_\tau = \dot{s}$ .



Дугова координата пов'язана з радіусом кола:  $s = \varphi R$ .

Тоді проекція швидкості на дотичну до кола:  $v_\tau = \frac{d}{dt}(\varphi R) = \frac{d\varphi}{dt} R = \omega R$ .

Оскільки далі працюють із модулем кутової швидкості

після зображення її у вигляді дугової стрілки розрахунковою формулою є вираз для модуля швидкості:  $v = \omega \cdot R$

Вектор швидкості спрямовують **перпендикулярно радіусу у бік дугової стрілки кутової швидкості**.

Як впливає з формули, швидкість точки пропорційна відстані її до вісі обертання (радіусу обертання).

Тоді проекції прискорення на дотичну до кола та нормаль:

$$a_\tau = \frac{d^2}{dt^2}(\varphi R) = \frac{d^2\varphi}{dt^2} R = \varepsilon R. \quad a_n = \frac{1}{R} \left[ \frac{d}{dt}(\varphi R) \right]^2 = \frac{1}{R} \left[ \frac{d\varphi}{dt} R \right]^2 = \omega^2 R.$$

$$a_{\tau\tau} = \ddot{s}; \quad a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}.$$

Оскільки далі працюють із модулем кутового прискорення

після зображення його у вигляді дугової стрілки розрахунковою формулою є вираз для дотичного прискорення:  $a_{o\bar{o}} = \varepsilon \cdot R$

**і вектор цього прискорення, що називається обертальним прискоренням**, спрямовують **перпендикулярно радіусу у бік дугової стрілки кутового прискорення**.

Нормальне прискорення є **доцентровим прискоренням**, його спрямовують **вздовж радіуса до вісі обертання**

незалежно від напрямку стрілки дуги кутової швидкості, не кажучи вже про напрям дугової стрілки кутового прискорення.

$$a_{\partial o\bar{o}} = \omega^2 \cdot R$$

Як впливає з формул, обидва прискорення точки пропорційні відстані до вісі обертання (радіусу обертання).

**Повне прискорення точки, як і раніше, є векторною сумою** цих прискорень:

$$\bar{a} = \bar{a}_{o\bar{o}} + \bar{a}_{\partial o\bar{o}}.$$

$$\beta = \arctg \left( \frac{a_{o\bar{o}}}{a_{\partial o\bar{o}}} \right) = \arctg \left( \frac{\varepsilon}{\omega^2} \right).$$

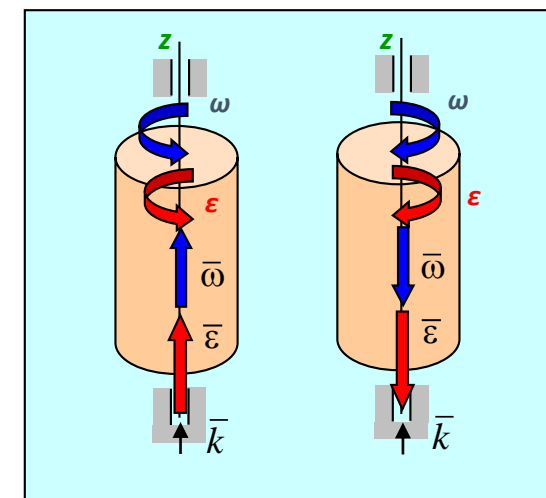
- ❖ Швидкість та прискорення точки при обертальному русі як векторні добутки.

Представимо кутову швидкість і кутове прискорення як вектори, спрямовані на вісі обертання у той бік, звідки дугові стрілки цих величин вказують обертання проти годинникової стрілки.

Позитивний напрямок вісі  $z$  можна задати за допомогою одиничного вектора  $\bar{k}$ , тоді вектори кутової швидкості та кутового прискорення можна представити як:

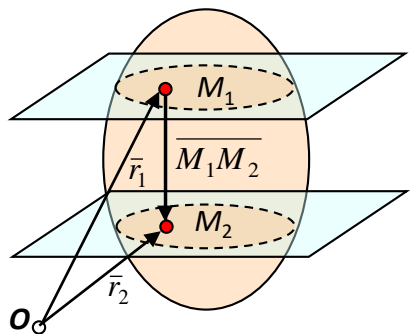
$$\bar{\omega} = \omega_z \bar{k} \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon_z \bar{k}$$

де  $\omega_z, \varepsilon_z$  - проекції відповідних векторів на вісі  $z$ .





❖ **Плоскопаралельний рух твердого тіла** – рух, під час якого кожна точка тіла рухається в площині паралельній деякій нерухомій площині. Перетин тіла однією з таких площин є плоскою фігурою, що залишається в цій площині протягом руху тіла.



❖ **Теорема про плоскопаралельний рух твердого тіла** – плоскопаралельний рух твердого тіла однозначно визначається рухом плоскої фігури, утвореної перетином тіла однією з паралельних площин.

Виберемо дві точки на довільних двох перерізах тіла, що знаходяться на одному перпендикулярі до цих площин:

Проведемо до кожної точки радіус-вектори з нерухомої точки  $O$  і зв'яжемо їх між собою вектором  $M_1M_2$ :  $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \overline{M_1M_2}$

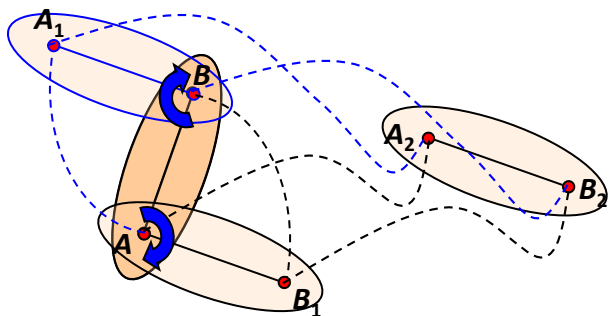
При плоскому русі тіла вектор  $M_1M_2$  не змінюється за величиною, залишається паралельним самому собі (рухається поступально) і, отже, точки цього вектора описують тотожні траєкторії та мають у кожний момент часу однакові швидкості та прискорення:

$$\frac{d\vec{r}_2}{dt} = \frac{d\vec{r}_1}{dt}; \quad (\overline{M_1M_2} = const); \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_1, \quad ma \quad \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2}; \quad \vec{a}_2 = \vec{a}_1.$$

Таким чином, під час плоского руху тіла рух кожної точки однієї з плоских фігур визначає рух відповідних точок, що знаходяться у всіх інших суміжних паралельних площинах.

**Наслідок:** Оскільки положення плоскої фігури однозначно визначається положенням її двох точок або відрізка прямої, проведеної через ці точки, **то плоскопаралельний рух твердого тіла визначається рухом прямолінійного відрізка, що належить одному з перерізів тіла за допомогою паралельних площин.**

❖ **Розкладання плоскопаралельного руху плоскої фігури на поступальний та обертальний рухи** – Плоску фігуру або відрізок прямої можна перевести з одного положення в інше незліченною кількістю способів, змінюючи послідовність виконання поступального та обертального руху між собою, а також вибираючи різні траєкторії та точки як полюси:



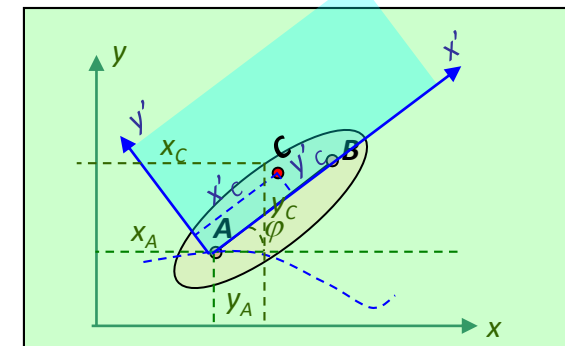
❖ Таким чином, **плоскопаралельний рух складається з двох рухів: поступальний та обертальний, і його завжди можна розкласти на ці два рухи.** При цьому поступальний рух залежить від вибору полюса та траєкторії руху, а обертальний, що характеризується поворотом навколо обраного полюса, не залежить від вибору полюса (для будь-якого полюса величина кута повороту та напрямок обертання – однакові).

❖ **Рівняння руху плоскої фігури:** Вибираючи як полюс будь-яку точку, наприклад,  $A$ , поступальна частина руху описуватиметься рівняннями руху цієї точки. Обертальна частина руху описується рівнянням зміни кута повороту навколо полюса:

$$\begin{aligned} x_A &= x_A(t); \\ y_A &= y_A(t); \\ \varphi &= \varphi(t). \end{aligned}$$

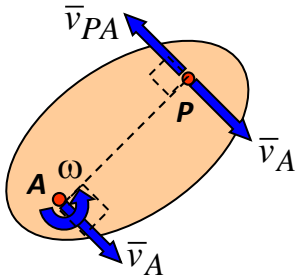
$$\begin{aligned} x_C &= x_A(t) + x'_C \cos \varphi(t) - y'_C \sin \varphi(t); \\ y_C &= y_A(t) + x'_C \sin \varphi(t) + y'_C \cos \varphi(t). \end{aligned}$$

Рівняння руху будь-якої точки плоскої фігури, положення якої задається координатами локальної системи відліку, пов'язаної з фігурою:





❖ **Миттєвий центр швидкостей (МЦШ)** – Під час руху плоскої фігури в кожний момент часу існує точка, яка жорстко пов'язана з плоскою фігурою, швидкість якої в цей момент дорівнює нулю.



Якщо відома швидкість однієї з точок фігури та кутова швидкість тіла навколо цієї точки:

Запишемо векторне співвідношення для швидкості деякої точки **P** відповідно до теореми про складання швидкостей:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP} = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA}.$$

Задамо значення швидкості цієї точки **P**, що дорівнює нулю:  $\vec{v}_P = 0.$

Тоді отримуємо :

$$\vec{v}_{PA} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP} = -\vec{v}_A.$$

Тобто оберտальна швидкість шуканої точки повинна дорівнювати модулю швидкості точки **A**, паралельна цій швидкості і спрямована в протилежний бік.

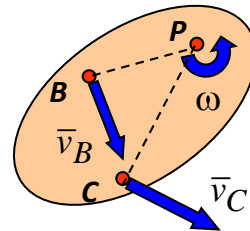
Це дозволяє знайти положення МЦШ (точки **P**), а саме: МЦШ повинен знаходитись на перпендикулярі до швидкості точки **A**, відкладеної у бік кутової швидкості, на відстані :

$$AP = \frac{v_A}{\omega}.$$

Якщо положення МЦШ знайдено, швидкість будь-якої точки плоскої фігури можна легко визначити за допомогою вибору полюса у МЦШ. В цьому випадку векторний вираз теореми про складання швидкостей вироджується у відому залежність швидкості від відстані до центру обертання :

$$\begin{aligned} \vec{v}_B &= \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{r}_{PB} = \vec{v}_{BP}; & (\vec{v}_P = 0); & & v_B &= \omega \cdot BP; \\ \vec{v}_C &= \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{r}_{PC} = \vec{v}_{CP}; & (\vec{v}_P = 0); & & v_C &= \omega \cdot CP; \end{aligned}$$

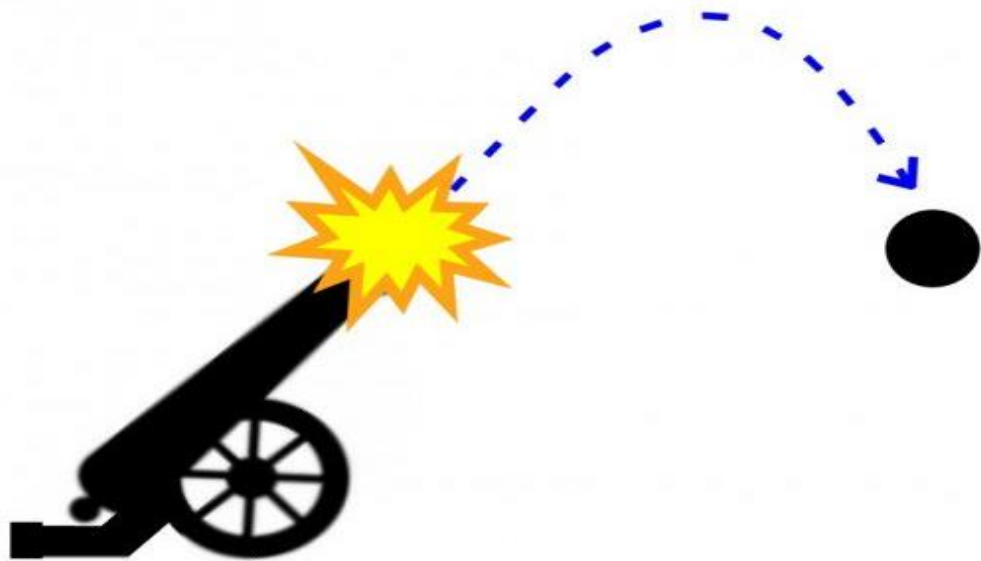
Іншими словами, можна стверджувати, що **будь-якої миті часу тіло не здійснює жодного іншого руху, крім оберտального руху навколо МЦШ.**



↑ Теоретична та прикладна механіка.  
Конспект лекцій



**РОЗДІЛ «ДИНАМІКА»**







**Динаміка** – розділ теоретичної механіки, який вивчає механічний рух із найзагальнішої точки зору. Рух розглядається у зв'язку із діючими на об'єкт силами. Розділ складається із **трьох підрозділів** :

❖ **Динаміка точки** – вивчає рух матеріальної точки з урахуванням сил, які викликають цей рух.

**Основний об'єкт** – матеріальна точка – матеріальне тіло, яке має масу, та розмірами якого можна знехтувати.

❖ **Динаміка механічної системи** – вивчає рух сукупності матеріальних точок та твердих тіл, які об'єднуються загальними законами взаємодії, з урахуванням сил, що викликають цей рух.

❖ **Аналітична механіка** – вивчає рух невільних механічних систем за допомогою загальних аналітичних методів.

#### Основні припущення

- існує **абсолютний простір** (має суто геометричні властивості, які не залежать від матерії та її руху);
- існує **абсолютний час** (не залежить від матерії та її руху).

Звідси випливає:

- існує **абсолютно нерухома система відліку**;
- **час не залежить від руху системи відліку**;
- **маси точок, що рухаються, не залежать від руху системи відліку**.

Ці припущення використовуються у класичній механіці, створеній Галілеєм та Ньютоном. Вона має і донині широку область застосування, оскільки механічні системи, що розглядаються в прикладних науках, не мають таких великих мас і швидкостей руху, для яких необхідно враховувати їхній вплив на геометрію простору та часу, як це робиться в релятивістській механіці (теорії відносності).

❖ **Основні закони динаміки** – вперше відкриті Галілеєм і сформульовані Ньютоном та становлять основу всіх методів опису та аналізу руху механічних систем та їхньої динамічної взаємодії під дією різних сил.

❖ **Закон інерції (закон Галілея-Ньютона)** – **Ізольована матеріальна точка тіла зберігає свій стан спокою або рівномірного прямолінійного руху доти, доки прикладені сили не змусять її змінити цей стан.** Звідси випливає еквівалентність стану спокою та руху за інерцією (закон відносності Галілея). Система відліку, відносно якої виконується закон інерції, називається **інерційною**. Властивість матеріальної точки прагнути зберегти незмінною швидкість свого руху (свій кінематичний стан) називається **інертністю**.

❖ **Закон пропорційності сили та прискорення (Основне рівняння динаміки - II закон Ньютона)** – Прискорення, що надається матеріальній точці силою, є прямо пропорційним силі та обернено пропорційним масі цієї точки :

$$\bar{a} = \frac{1}{m} \bar{F} \quad \text{або} \quad m\bar{a} = \bar{F}.$$

Тут  $m$  - маса точки (міра інертності), вимірюється в кг, та чисельно дорівнює вазі, поділеній на прискорення вільного падіння:  $m = \frac{G}{g}$ .  
 $F$  – діюча сила, що вимірюється в ньютонах. (1 Н надає точці масою 1 кг прискорення 1 м/с<sup>2</sup>, 1 Н = 1/9.81 кг·с).





❖ **Закон рівності дії та протидії (III закон Ньютона)** – Будь-якій дії відповідає рівна за величиною та протилежно спрямована протидія:

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$$

Закон справедливий для будь-якого кінематичного стану тіл. Сили взаємодії, будучи прикладеними до різних точок (тіл), не врівноважуються.

❖ **Закон незалежності дії сил** – Прискорення матеріальної точки під дією кількох сил дорівнює геометричній сумі прискорень точки від дії кожної із сил окремо:

$$\vec{a}(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots) = \vec{a}_1(\vec{F}_1) + \vec{a}_2(\vec{F}_2) + \dots \quad \text{або} \quad \vec{a}(\vec{R}) = \vec{a}_1(\vec{F}_1) + \vec{a}_2(\vec{F}_2) + \dots$$

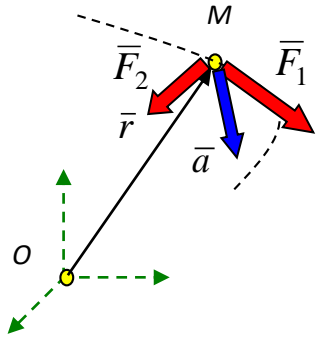
❖ **Основне рівняння динаміки** :  $m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$  - відповідає векторному способу задання руху точки

**Диференціальні рівняння руху матеріальної точки:**

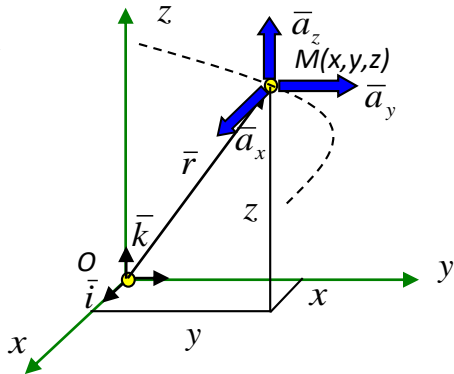
Підставимо прискорення точки за векторного задання руху

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad \text{в основне рівняння динаміки:} \quad m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum \vec{F}_i \quad (1)$$

- диференціальне рівняння руху точки у векторному вигляді.



**За координатного способу задання руху:** Використовуємо зв'язок радіус-вектора з координатами та вектора сили з проекціями:



$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\vec{F}_i = X_i\vec{i} + Y_i\vec{j} + Z_i\vec{k}$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \sum (X_i\vec{i} + Y_i\vec{j} + Z_i\vec{k})$$

Після згрупування векторне співвідношення розпадається на три скалярні рівняння:

$$(x) : m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum X_i;$$

$$(y) : m \frac{d^2y}{dt^2} = \sum Y_i;$$

$$(z) : m \frac{d^2z}{dt^2} = \sum Z_i.$$

$$\text{або:} \quad \begin{cases} m\ddot{x} = \sum X_i; \\ m\ddot{y} = \sum Y_i; \\ m\ddot{z} = \sum Z_i. \end{cases}$$

- диференціальні рівняння руху точки в координатному вигляді.

Цей результат може бути отриманий формальним проектуванням диференціального векторного рівняння (1).

❖ **Природні рівняння руху матеріальної точки**

можна отримати проектуванням векторного диференціального рівняння руху на природні (рухливі) осі координат:

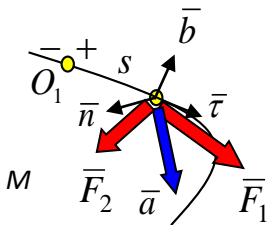
$$(\tau) : ma_\tau = \sum F_{i\tau};$$

$$(n) : ma_n = \sum F_{in};$$

$$(b) : m \cdot 0 = \sum F_{ib}.$$

$$\text{або} \quad \begin{cases} m\dot{s} = \sum F_{i\tau}; \\ m \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \sum F_{in}. \end{cases}$$

- природні рівняння руху точки





❖ Дві основні задачі динаміки:

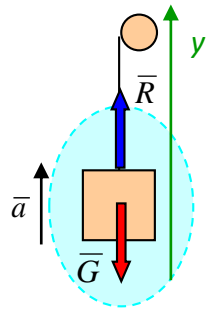
1. **Пряма задача:** Задано рух (рівняння руху, траєкторія). Потрібно визначити сили, під впливом яких відбувається заданий рух.

2. **Обернена задача:** Задано сили, під дією яких відбувається рух. Потрібно знайти параметри руху (рівняння руху, траєкторію руху).

Обидві задачі розв'язуються за допомогою **основного рівняння динаміки** та проекції його на координатні осі. Якщо розглядається рух невідомої точки, то як і в статиці, використовується **принцип звільнення від в'язей**. Внаслідок реакції в'язей включаються до складу сил, які діють на матеріальну точку. Розв'язання першої задачі пов'язане з операціями диференціювання. Розв'язання оберненої задачі вимагає інтегрування відповідних диференціальних рівнянь і це значно складніше, ніж диференціювання. Обернена задача складніше за пряму задачу.

❖ Розв'язання прямої задачі динаміки. Розглянемо на прикладах:

**Приклад 1.** Кабіна ліфта вагою  $G$  піднімається тросом із прискоренням  $a$ . Визначити натяг троса.



1. Вибираємо об'єкт (кабіна ліфта рухається поступально та її можна розглядати як матеріальну точку).

2. Відкидаємо зв'язок (трос) та замінюємо реакцією  $R$ .

3. Складаємо основне рівняння динаміки:  $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{R}$ .

4. Проектуємо основне рівняння динаміки на вісь  $y$ :  $(y): ma_y = R - G$ .

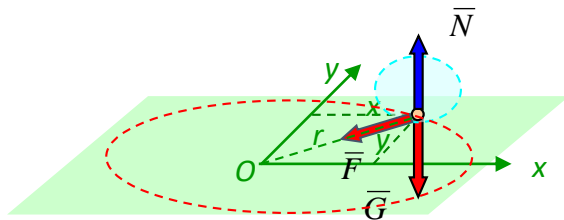
Визначаємо реакцію троса:  $R = G + ma_y = G + \frac{G}{g}a_y = G(1 + \frac{a_y}{g})$ .

Визначаємо натяг троса:  $\bar{T} = -\bar{R}; T = R = G(1 + \frac{a_y}{g})$ .

У випадку рівномірного руху кабіни  $a_y = 0$  натяг троса дорівнює вазі кабіни:  $T = G$ .

У разі обрива троса  $T = 0$ , і прискорення кабіни дорівнює прискоренню вільного падіння:  $a_y = -g$ .

**Приклад 2.** Точка масою  $m$  рухається горизонтальною поверхнею (площина  $Oxy$ ) відповідно до рівнянь:  $x = a \cdot \cos kt, y = b \cdot \sin kt$ . Визначити силу, яка діє на точку.



1. Вибираємо об'єкт (матеріальну точку).

2. Відкидаємо зв'язок (площину) та замінюємо реакцією  $N$ .

3. Додаємо до системи сил невідому силу  $F$ .

4. Складаємо основне рівняння динаміки:  $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{N} + \bar{F}$ .

5. Проектуємо основне рівняння динаміки на осі  $x, y$ :  $(x): m\ddot{x} = F_x;$

$(y): m\ddot{y} = F_y.$

Визначаємо проекції сили:

$F_x = m\ddot{x} = -mak^2 \cos kt = -mk^2 x;$

$F_y = m\ddot{y} = -mak^2 \sin kt = -mk^2 y.$

Модуль сили:  $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} =$

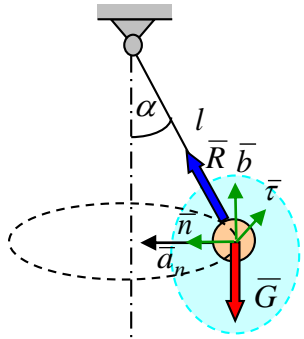
$= mk^2 \sqrt{x^2 + y^2} = mk^2 r.$

Напрявні косинуси:

$\cos(\bar{F}, x) = \frac{F_x}{F} = -\frac{x}{r}; \cos(\bar{F}, y) = \frac{F_y}{F} = -\frac{y}{r}.$

Таким чином, величина сили пропорційна відстані точки до центру координат і спрямована до центру лінії, що з'єднує точку з центром. Траєкторія руху точки є еліпс з центром у початку координат:

$x^2 = a^2 \cos^2 kt;$   
 $y^2 = b^2 \sin^2 kt.$   $\longrightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$



**Приклад 3:** Вантаж вагою  $G$  підвішений на тросі довжиною  $l$  і рухається за круговою траєкторії в горизонтальній площині з певною швидкістю. Кут відхилення троса від вертикалі дорівнює  $\alpha$ . Визначити натяг троса та швидкість вантажу.

1. Вибираємо об'єкт (вантаж).
2. Відкидаємо в'язь (трос) та замінюємо її реакцією  $R$ .
3. Складаємо основне рівняння динаміки :  $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{R}$ .
4. Проектуємо основне рівняння динаміки на вісь  $\tau, n, b$ :  $(\tau): ma_\tau = 0;$

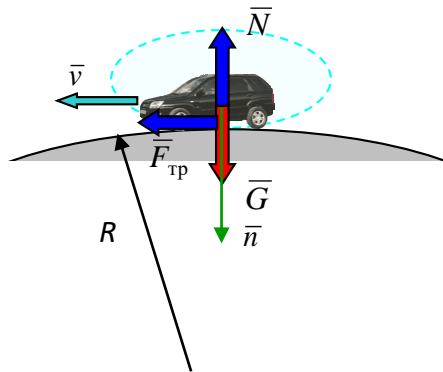
З третього рівняння визначаємо реакцію троса :  $R = \frac{G}{\cos \alpha}.$

$(n): ma_n = R \sin \alpha;$   
 $(b): 0 = R \cos \alpha - G.$

Визначаємо натяг троса :  $\bar{T} = -\bar{R}; T = R = \frac{G}{\cos \alpha}.$  Підставляємо значення реакції троса, нормального прискорення у друге рівняння та визначаємо швидкість вантажу :  $\frac{G}{g} \frac{v^2}{l \sin \alpha} = \frac{G}{\cos \alpha} \sin \alpha.$

$$v = \sqrt{\frac{gl \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}}.$$

**Приклад 4:** Автомобіль вагою  $G$  рухається опуклим мостом (радіус кривизни дорівнює  $R$ ) зі швидкістю  $v$ . Визначити тиск автомобіля на міст.



1. Вибираємо об'єкт (автомашина, розмірами нехтуємо та розглядаємо як точку).
2. Відкидаємо зв'язок (шорстку поверхню) і замінюємо реакціями  $N$  та силою тертя  $F_{тр}$ .
3. Складаємо основне рівняння динаміки :  $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{N} + \bar{F}_{тр}.$
4. Проектуємо основне рівняння динаміки на вісь  $n$ :  $(n): ma_n = G - N.$

Звідси визначаємо нормальну реакцію :  $N = G - ma_n = G - m \frac{v^2}{R} = G(1 - \frac{v^2}{gR}).$

Визначаємо тиск автомобіля на міст :  $\bar{Q} = -\bar{N}; Q = G(1 - \frac{v^2}{gR}).$

Звідси можна визначити швидкість, що відповідає нульовому тиску на міст ( $Q = 0$ ):  $v = \sqrt{gR}.$





❖ **Розв'язання оберненої задачі динаміки.** У загальному випадку рух точки сили, що діють на точку, є змінними, що залежать від часу, координат та швидкості. Рух точки описується системою трьох диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum X_i; \\ m\ddot{y} &= \sum Y_i; \\ m\ddot{z} &= \sum Z_i. \end{aligned}$$

Після інтегрування кожного з них буде **шість постійних**  $C_1, C_2, \dots, C_6$ :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(t, C_1, C_2, C_3); \\ \dot{y} &= f_2(t, C_1, C_2, C_3); \\ \dot{z} &= f_3(t, C_1, C_2, C_3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= f_4(t, C_1, C_2, \dots, C_6); \\ y &= f_5(t, C_1, C_2, \dots, C_6); \\ z &= f_6(t, C_1, C_2, \dots, C_6). \end{aligned}$$

Значення постійних  $C_1, C_2, \dots, C_6$  знаходяться з шести початкових умов при  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} x &= x_0; & y &= y_0; & z &= z_0; \\ \dot{x} &= \dot{x}_0; & \dot{y} &= \dot{y}_0; & \dot{z} &= \dot{z}_0. \end{aligned}$$

Після підстановки знайдених значень постійних отримуємо :

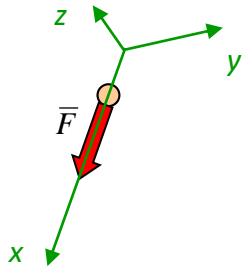
Таким чином, **під дією однієї і тієї ж системи сил матеріальна точка може здійснювати цілий клас рухів, що визначаються початковими умовами.**

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ \dot{y} &= f_2(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ \dot{z} &= f_3(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= f_4(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, x_0, y_0, z_0); \\ y &= f_5(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, x_0, y_0, z_0); \\ z &= f_6(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

Початкові координати враховують вихідне положення точки. Початкова швидкість, що задається проекціями, враховує вплив на її рух вздовж ділянки траєкторії тих сил, що діяли на точку до приходу на цю ділянку, тобто початковий кінематичний стан.

**Приклад 1 розв'язання оберненої задачі :** Вільна матеріальна точка масою  $m$  рухається під дією **сили  $F$ , постійною за модулем та напрямком.** У початковий момент швидкість точки становила  $v_0$  і збігалася у напрямку із силою. Визначити рівняння руху точки.



1. Складаємо основне рівняння динаміки :  $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{F} = \overline{const}$ .

2. Виберемо декартову систему відліку, спрямовуючи вісь  $x$  уздовж напрямку сили і спроекуємо основне рівняння динаміки на цю вісь:

$$(x): ma_x = F_x = F. \quad \text{або} \quad m\ddot{x} = F.$$

3. Знижуємо порядок похідної :  $m \frac{dv_x}{dt} = F$ .

5. Обчислюємо інтеграли від обох частин рівняння :  $\int dv_x = \int \frac{F}{m} dt$ .

$$\boxed{v_x = \frac{F}{m}t + C_1}$$

6. Представимо проекцію швидкості як похідну координати за часом :  $\frac{dx}{dt} = \frac{F}{m}t + C_1$ .

7. Розділяємо змінні:  $dx = \left( \frac{F}{m}t + C_1 \right) dt$ .

8. Обчислюємо інтеграли від обох частин рівняння :

$$\int dx = \int \left( \frac{F}{m}t + C_1 \right) dt. \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{F}{m} \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2}$$

9. Для визначення значень постійних  $C_1$  та  $C_2$  використовуємо початкові умови  $t = 0, v_x = v_0, x = x_0$  :

$$v_x|_{t=0} = \frac{F}{m} \cdot 0 + C_1 = v_0. \quad x|_{t=0} = \frac{F}{m} \frac{0^2}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2 = x_0. \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_1 = v_0; \quad C_2 = x_0}$$

У результаті отримуємо рівняння рівнозмінного руху (вздовж вісі  $x$ ):

$$\boxed{x = \frac{F}{m} \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0}$$

❖ **Загальні вказівки до розв'язання прямої та оберненої задачі. Порядок розв'язання:****1. Складання диференціального рівняння руху:**

1.1. **Вибрати систему координат** - прямокутну (нерухому) за невідомої траєкторії руху, природну (рухливу) за відомої траєкторії, наприклад, коло або пряма лінія. У останньому випадку можна використовувати одну прямолінійну координату. Початок відліку поєднати з початковим положенням точки (при  $t = 0$ ) або з рівноважним положенням точки, якщо воно існує, наприклад, коливання точки.

1.2. **Зобразити точку** в положенні, яке відповідає довільному моменту часу (при  $t > 0$ ) так, щоб координати були позитивними ( $s > 0$ ,  $x > 0$ ). При цьому вважаємо також, що проєкція швидкості у цьому положенні також позитивна. У разі коливань проєкція швидкості змінює знак, наприклад, у випадку повернення до положення рівноваги. Тут слід прийняти, що в даний момент часу точка віддаляється від положення рівноваги. Виконання цієї рекомендації важливо в подальшому під час роботи з силами опору, що залежать від швидкості.

1.3. **Звільнити матеріальну точку від в'язей, замінити** їхню дію реакціями, **додати** активні сили.

1.4. **Записати основний закон динаміки** у векторному вигляді, **спроєктувати** на вибрані вісі, **виразити** сили або реактивні сили, що задаються через змінні: час, координати чи швидкості, якщо вони від них залежать.

**2. Розв'язання диференціальних рівнянь:**

2.1. **Зменшити похідну**, якщо рівняння не приводиться до канонічного (стандартного) вигляду.

Наприклад:  $\ddot{x} = \frac{dv_x}{dt}$ , або  $\ddot{s} = \frac{dv_\tau}{dt}$ .

2.2 Розділити змінні, наприклад:  $\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{m}kv_x$ ,  $\implies \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{1}{m}kdt$  або  $\frac{dv_\tau}{dt} = g - \frac{k}{m}v_\tau^2$ ,  $\implies \frac{dv_\tau}{g - \frac{k}{m}v_\tau^2} = dt$ .

2.3. Якщо в рівнянні три змінні, то  $\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{m}cx$ ,  $\implies \frac{dv_x dx}{dt dx} = \frac{v_x dv_x}{dx} = -\frac{1}{m}cx$  і потім розділити змінні.

2.4. **Обчислити невизначені інтеграли** в лівій та правій частинах рівняння, наприклад:  $\int \frac{dv_x}{v_x} = -\int \frac{1}{m}kdt \implies \ln v_x = -\frac{1}{m}kt + C_1$

Використовуючи початкові умови, наприклад,  $t = 0$ ,  $v_x = v_{x0}$ , **визначити постійні інтегрування**:  $\ln v_x|_{v_{x0}} = -\frac{1}{m}kt|_0 + C_1$ ;  $C_1 = \ln v_{x0}$ .

**Зауваження.** Замість обчислення невизначених інтегралів можна **обчислити певні інтеграли зі змінною верхньою** межею. Нижні межі є початковими значеннями змінних (початкові умови). Тоді не потрібно окремого визначення постійної, яка автоматично включається до рішення, наприклад:

$$\int_{v_{\tau 0}}^{v_\tau} \frac{dv_\tau}{v_\tau} = -\int_0^t \frac{1}{m}kdt. \implies \ln v_\tau|_{v_{\tau 0}} = -\frac{1}{m}kt|_0^t; \implies \ln v_\tau - \ln v_{\tau 0} = -\frac{1}{m}kt - 0; \ln v_\tau = -\frac{1}{m}kt + \ln v_{\tau 0}.$$

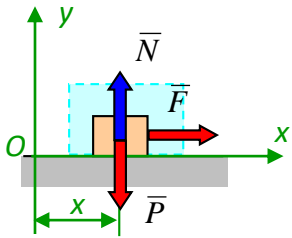
2.5. **Виразити швидкість** через похідну координати за часом, наприклад,  $v_\tau = \frac{ds}{dt} = e^{-\frac{1}{m}kt + \ln v_{\tau 0}}$  та повторити пункти 2.2 - 2.4

**Зауваження.** Якщо рівняння приводиться до канонічного вигляду, який має стандартне рішення, тоді використовується це готове рішення.

Постійні інтегрування визначаються як і раніше з початкових умов.



**Приклад 2 розв'язання оберненої задачі: Сила залежить від часу.** Вантаж вагою  $P$  починає рухатися вздовж гладенької горизонтальної поверхні під дією сили  $F$ , величина якої пропорційна часу ( $F = kt$ ). Визначити відстань, пройдену вантажем за час  $t$ .



1. Вибираємо систему відліку (декартові координати) так, щоб тіло мало позитивну координату.

2. Приймаємо об'єкт руху за матеріальну точку (тіло рухається поступально), звільняємо від в'язей (опорної площини) та замінюємо реакцією (нормальною реакцією гладенької поверхні):

3. Складаємо основне рівняння динаміки:  $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{F} + \bar{P} + \bar{N}$ .

4. Проектуємо основне рівняння динаміки на вісь  $x$ : ( $x$ ):  $ma_x = F = kt$  або  $\ddot{x} = \frac{k}{m}t$ .

5. Знижуємо порядок похідної:  $m \frac{dv_x}{dt} = kt$ .

6. Розділяємо змінні:  $dv_x = \frac{k}{m}t dt$ .

7. Обчислюємо інтеграл від обох частин рівняння:  $\int dv_x = \int \frac{k}{m}t dt$   $\Rightarrow$   $v_x = \frac{k}{m} \frac{t^2}{2} + C_1$ .

8. Визначимо постійну  $C_1$  з початкової умови  $t = 0, v_x = v_0 = 0$ :  $v_x|_{t=0} = \frac{k}{m} \cdot \frac{0^2}{2} + C_1 = v_0 = 0$   $\Rightarrow$   $C_1 = 0$ .

9. Представимо проекцію швидкості як похідну координати за часом:  $\frac{dx}{dt} = \frac{k}{m} \frac{t^2}{2}$ .

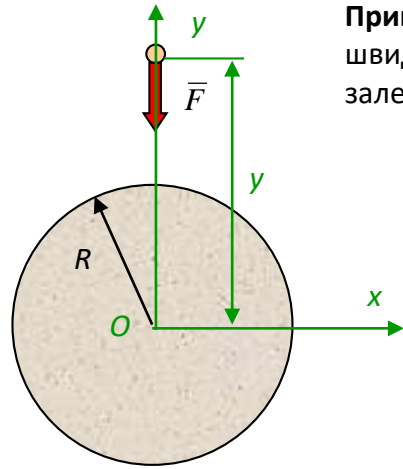
10. Розділяємо змінні:  $dx = \frac{k}{m} \frac{t^2}{2} dt$ .

11. Обчислюємо інтеграл від обох частин рівняння:  $\int dx = \int \frac{k}{m} \frac{t^2}{2} dt$   $\Rightarrow$   $x = \frac{k}{m} \frac{t^3}{6} + C_2$ .

12. Визначимо постійну  $C_2$  з початкової умови  $t = 0, x = x_0 = 0$ :  $x|_{t=0} = \frac{k}{m} \frac{0^3}{6} + C_2 = x_0 = 0$   $\Rightarrow$   $C_2 = 0$ .

У результаті отримуємо рівняння руху (вздовж осі  $x$ ), що дає значення пройденого шляху за час  $t$ :

$$x = S = \frac{k}{m} \frac{t^3}{6} = \frac{kg}{P} \frac{t^3}{6}$$



**Приклад 3 розв'язання оберненої задачі : Сила залежить від координати.** Матеріальна точка масою  $m$  кинута вгору із Землі зі швидкістю  $v_0$ . Сила тяжіння Землі обернено пропорційна квадрату відстані від точки до центру тяжіння (центру Землі). Визначити залежність швидкості від відстані до центру Землі.

1. Вибираємо систему відліку (декартові координати) так, щоб тіло мало позитивну координату :

2. Складаємо основне рівняння динаміки :  $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{F}$ .

3. Проектуємо основне рівняння динаміки на вісь  $y$  :  $(y)$  :  $ma_y = -F = -\frac{k}{y^2}$  або  $m\ddot{y} = -\frac{k}{y^2}$ .

Коефіцієнт пропорційності можна знайти, використовуючи вагу точки на поверхні Землі :  $F = P$  коли  $y = R$ .

$$\frac{k}{R^2} = mg. \quad \Rightarrow \quad k = mgR^2. \quad \text{Звідси диференціальне рівняння має вигляд :} \quad m\ddot{y} = -\frac{mgR^2}{y^2} \quad \text{або} \quad \boxed{\ddot{y} = -\frac{gR^2}{y^2}}.$$

4. Знижуємо порядок похідної :  $\frac{dv_y}{dt} = -\frac{gR^2}{y^2}$ .

5. Робимо заміну змінної:  $\frac{dv_y}{dt} = \frac{dv_y dy}{dy dt} = \frac{v_y dv_y}{dy}$ .

6. Розділяємо змінні :  $\frac{v_y dv_y}{dy} = -\frac{gR^2}{y^2}. \quad \Rightarrow \quad v_y dv_y = -\frac{gR^2}{y^2} dy$ .

7. Обчислюємо інтеграли від обох частин рівняння :  $\int_{v_{y0}}^{v_y} v_y dv_y = -\int_R^y \frac{gR^2}{y^2} dy. \quad \Rightarrow \quad \frac{v_y^2}{2} \Big|_{v_{y0}}^{v_y} = -gR^2 \left(-\frac{1}{y}\right) \Big|_R^y$ .

8. Підставляємо границі:  $\frac{v_y^2}{2} - \frac{v_{y0}^2}{2} = gR^2 \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{R}\right)$ .

У результаті отримуємо вираз для швидкості функції від координати  $y$  :

$$v_y = \sqrt{v_{y0}^2 + 2gR^2 \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{R}\right)}.$$

Максимальну висоту польоту можна знайти прирівнюючи швидкість нулю :

$$\frac{v_{y0}^2}{2gR^2} = -\left(\frac{1}{H_{\max}} - \frac{1}{R}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{H_{\max}} = \frac{1}{R} - \frac{v_{y0}^2}{2gR^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_{\max} = \frac{2gR^2}{2gR - v_{y0}^2}}.$$

Максимальна висота польоту  $\rightarrow \infty$  коли знаменник дорівнює нулю:

$$\boxed{2gR = v_{y0}^2}$$

Звідси при постановці радіусу Землі та прискорення вільного падіння виходить II космічна швидкість:

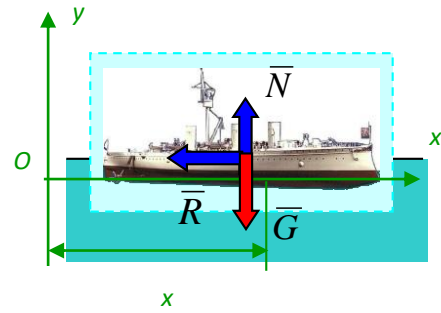
$$\boxed{v_{y0} = \sqrt{2gR} = 11.2 \text{ км/с}}$$







**Приклад 4 розв'язання оберненої задачі : Сила залежить від швидкості.** Судно масою  $m$  мало швидкість  $v_0$ . Опір води руху судна пропорційний швидкості. Визначити час, за який швидкість судна зменшиться вдвічі після вимкнення двигуна, а також відстань, пройдену судном до повної зупинки.



1. Вибираємо систему відліку (декартові координати) так, щоб тіло мало позитивну координату :
2. Приймаємо об'єкт руху за матеріальну точку (судно рухається поступально), звільняємо від в'язей (води) та замінюємо реакцією (силою Архімеда), а також силою опору руху.
3. Додаємо активну силу (силу тяжіння).
4. Складаємо основне рівняння динаміки :  $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{R} + \bar{N}$ .
5. Проектуємо основне рівняння динаміки на вісь  $x$  :  $(x)$  :  $ma_x = -R = -\mu v_x$  або  $\ddot{x} = -\frac{\mu}{m} v_x$ .
6. Знижуємо порядок похідної :  $\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\mu}{m} v_x$ .

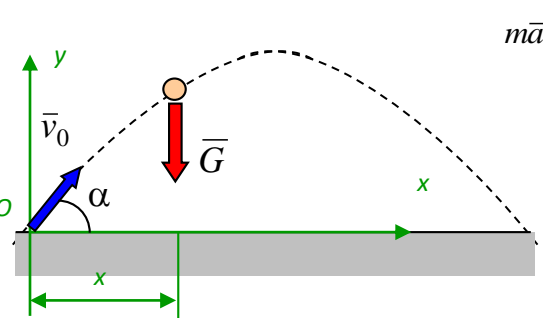
7. Розділяємо змінні :  $\frac{dv_x}{v_x} = -\frac{\mu}{m} dt$ .
8. Обчислюємо інтеграл від обох частин рівняння  $\int_{v_{x0}}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = -\int_0^t \frac{\mu}{m} dt$   $\Rightarrow \ln v_x \Big|_{v_{x0}}^{v_x} = -\frac{\mu}{m} t \Big|_0^t$ .
9. Підставляємо границі :  $\ln v_x - \ln v_{x0} = -\frac{\mu}{m} t$ .

Отримано вираз, що зв'яже швидкість та час  $t$ , звідки можна визначити час руху:  $t = \frac{m}{\mu} \ln \frac{v_{x0}}{v_x}$ . Час руху, за який швидкість впаде вдвічі:  $t = \frac{m}{\mu} \ln 2$ .

Цікаво зазначити, що за наближення швидкості до нуля час руху прагне нескінченності, тобто кінцева швидкість не може дорівнювати нулю. Чим не "вічний рух"? Однак при цьому пройдений шлях до зупинки є кінцевою величиною. Для визначення пройденого шляху звернемося до виразу, отриманого після зниження порядку похідної, та зробимо заміну змінної:  $\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\mu}{m} v_x \Rightarrow \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x dx}{dx dt} = \frac{v_x dv_x}{dx}$ .  $\Rightarrow \frac{v_x dv_x}{dx} = -\frac{\mu}{m} v_x \Rightarrow dv_x = -\frac{\mu}{m} dx$ .  $\Rightarrow \int_{v_{x0}}^{v_x} dv_x = -\int_0^x \frac{\mu}{m} dx$ .

Після інтегрування та підстановки границь отримаємо :  $x = \frac{m}{\mu} (v_{x0} - v_x)$ . Пройдений шлях до зупинки:  $x = \frac{m}{\mu} v_{x0}$ .

**Рух точки, кинутої під кутом до горизонту, в однорідному полі сили тяжіння без урахування опору повітря**



$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} \Rightarrow \begin{aligned} (x): \quad m\ddot{x} &= 0; & \Rightarrow \frac{dv_x}{dt} &= 0; & \frac{dv_y}{dt} &= -g; & \Rightarrow dv_x &= 0; & dv_y &= -gdt; \\ (y): \quad m\ddot{y} &= -G = -mg; \end{aligned}$$

$$\int_{v_{x0}}^{v_x} dv_x = 0; \quad \int_{v_{y0}}^{v_y} dv_y = -\int_0^t gdt; \Rightarrow \begin{aligned} v_x &= v_{x0} = v_0 \cos \alpha; & v_y &= v_{y0} - gt = v_0 \sin \alpha - gt; \\ \frac{dx}{dt} &= v_0 \cos \alpha; & \frac{dy}{dt} &= v_0 \sin \alpha - gt; \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x &= v_0 \cos \alpha \cdot t; & y &= v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}; \end{aligned}$$

Виключивши час з рівняння руху отримуємо рівняння траєкторії:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

Час польоту визначаємо прирівнюванням координати  $y$  до нуля :  $y = v_0 \sin \alpha \cdot T - \frac{gT^2}{2} = 0; \quad T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$  Дальність польоту визначаємо підстановкою часу польоту:

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot T = v_0 \cos \alpha \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = L;$$





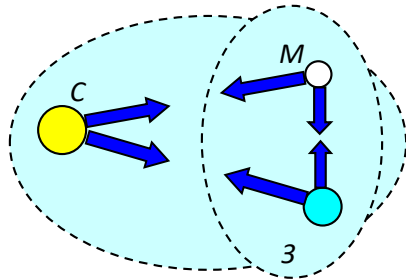
## Динаміка механічної системи

- ❖ Система матеріальних точок або механічна система – Сукупність матеріальних точок або матеріальних тіл, які об'єднуються загальними законами взаємодії (положення або рух кожної з точок або тіла залежить від положення та руху всіх інших)
- ❖ Система вільних точок – система точок, рух яких не обмежується жодними в'язями (наприклад, планетна система, у якій планети розглядаються як матеріальні точки).
- ❖ Система невільних точок або невільна механічна система – система, рух матеріальних точок або тіл якої обмежується накладеними на систему в'язями (наприклад, механізм, машина тощо).

**Сили, що діють на систему.** На додаток до раніше існуючої класифікації сил (активні та реактивні сили) вводиться нова класифікація сил:

1. **Зовнішні сили (e)** – діють на точки та тіла системи з боку точок або тіл, що не входять до складу цієї системи.
2. **Внутрішні сили (i)** – сили взаємодії між матеріальними точками чи тілами, які входять у цю систему.

Одна і та сама сила може бути як зовнішньою, так і внутрішньою силою. Усе залежить від того, яка механічна система розглядається. Наприклад: У системі Сонце, Земля та Місяць всі сили тяжіння між ними є внутрішніми. При розгляді системи Земля та Місяць сили тяжіння, прикладені з боку Сонця – зовнішні:



На основі закону дії та протидії кожній внутрішній силі  $F_k$  відповідає інша внутрішня сила  $F_k'$ , рівна за модулем і протилежна за напрямом

З цього випливають **дві властивості внутрішніх сил**:

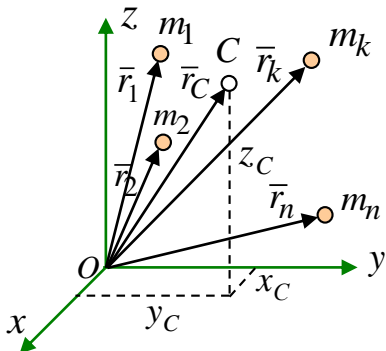
1. **Головний вектор усіх внутрішніх сил системи дорівнює нулю:**  $\bar{R}^i = \sum \bar{F}_k^i = 0.$
2. **Головний момент усіх внутрішніх сил системи відносно будь-якого центру дорівнює нулю:**  $\bar{M}_O^i = \sum \bar{M}_{kO}^i = 0.$

Або у проекціях на координатні вісі:

$$\sum X_k^i = 0; \quad \sum Y_k^i = 0; \quad \sum Z_k^i = 0.$$

$$\sum M_{kx}^i = 0; \quad \sum M_{ky}^i = 0; \quad \sum M_{kz}^i = 0.$$

**Зауваження.** Хоча ці рівняння схожі на рівняння рівноваги, вони не є такими, оскільки внутрішні сили є прикладеними до різних точок або тіл системи і можуть викликати рух цих точок (тіл) відносно один одного. З цих рівнянь випливає, що внутрішні сили не впливають на рух системи, що розглядається як одне ціле.



- ❖ **Центр мас системи матеріальних точок.** Для опису руху системи в цілому вводиться геометрична точка, яка називається **центром мас**, радіус-вектор якої визначається виразом  $\bar{r}_C = \frac{\sum m_k \bar{r}_k}{M},$  де  $M$  – маса всієї системи:  $M = \sum m_k.$

Або у проекціях на координатні вісі:

$$x_C = \frac{\sum m_k x_k}{M}, \quad y_C = \frac{\sum m_k y_k}{M}, \quad z_C = \frac{\sum m_k z_k}{M}.$$

Формули для центру мас аналогічні формулам для центру тяжіння. Проте, поняття центру мас більш загальне, оскільки воно не пов'язане із силами тяжіння.



❖ **Теорема про рух центру мас системи.** Розглянемо систему з  $n$  матеріальних точок. Прикладені до кожної точки сили розділимо на зовнішні і внутрішні та замінимо їх на відповідні рівнодіючі  $F_k^e$  і  $F_k^i$ . Запишемо для кожної точки основне рівняння динаміки:

$$m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i \quad \text{або} \quad m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i.$$

У лівій частині рівняння внесемо маси під знак похідної та замінимо суму похідних на похідну суми:  $\frac{d^2}{dt^2} (\sum m_k \bar{r}_k) = \bar{R}^e$ .

Після винесення маси системи за знак похідної отримуємо  $M \frac{d^2 \bar{r}_C}{dt^2} = \bar{R}^e$  або:  $M \bar{a}_C = \bar{R}^e$

$$\begin{aligned} M \ddot{x}_C &= R_x^e = \sum X_k^e; \\ M \ddot{y}_C &= R_y^e = \sum Y_k^e; \\ M \ddot{z}_C &= R_z^e = \sum Z_k^e. \end{aligned}$$

У проекціях на координатні вісі :

❖ **Наслідки з теореми про рух центру мас системи (закони збереження) :**

1. Якщо в інтервалі часу  $[t_1, t_2]$  головний вектор зовнішніх сил системи дорівнює нулю,  $R^e = 0$ , то швидкість центру мас постійна,  $v_C = \text{const}$  (центр мас рухається рівномірно прямолінійно – **закон збереження руху центру мас**).

2. Якщо в інтервалі часу  $[t_1, t_2]$  проекція головного вектора зовнішніх сил системи на вісь  $x$  дорівнює нулю,  $R_x^e = 0$ , то швидкість центру мас по вісі  $x$  є постійною,  $v_{Cx} = \text{const}$  (центр мас рухається вздовж вісі  $x$  поступально).

*Аналогічні твердження справедливі для осей  $y$  і  $z$ .*

3. Якщо в інтервалі часу  $[t_1, t_2]$  головний вектор зовнішніх сил системи дорівнює нулю,  $R^e = 0$ , і в початковий момент швидкість центра мас дорівнює нулю,  $v_C = 0$ , то радіус-вектор центру мас залишається постійним,  $r_C = \text{const}$  (центр мас перебуває у спокої – **закон збереження положення центру мас**).

4. Якщо в інтервалі часу  $[t_1, t_2]$  проекція головного вектора зовнішніх сил системи на вісь  $x$  дорівнює нулю,  $R_x^e = 0$ , і в початковий момент швидкість центру мас вздовж цієї вісі дорівнює нулю,  $v_{Cx} = 0$ , то координата центру мас вздовж вісі  $x$  залишається постійною,  $x_C = \text{const}$  (центр мас не рухається вздовж цієї вісі).

*Аналогічні твердження справедливі для осей  $y$  і  $z$ .*

Підсумовуємо ці рівняння за усіма точками:

З визначення центру мас :  $M \bar{r}_C = \sum m_k \bar{r}_k$

Підставимо в отримане рівняння :  $\frac{d^2}{dt^2} (M \bar{r}_C) = \bar{R}^e$ .

$$\sum m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i$$

$\downarrow$                        $\downarrow$   
 $\bar{R}^e$                        $\bar{R}^i = 0$

**Добуток маси системи на прискорення її центру маси дорівнює головному вектору зовнішніх сил.**

Центр мас системи рухається як матеріальна точка з масою, що дорівнює масі всієї системи, до якої прикладені всі зовнішні сили, що діють на систему.

**Приклад :** Дві людини масами  $m_1$  та  $m_2$  перебувають у човні масою  $m_3$ . У початковий момент часу човен з людьми перебував у спокої. Визначити переміщення човна, якщо людина масою  $m_2$  перемістилася до носу човна на відстань  $a$ .

1. Об'єкт руху (човен з людьми) :
2. Відкидаємо в'язі (воду) :
3. Замінюємо в'язі реакціями :
4. Додаємо активні сили :
5. Записуємо теорему про рух центру мас :

$$M \bar{a}_C = \bar{R}^e = \bar{G}_1 + \bar{G}_2 + \bar{G}_3 + \bar{R}$$

Проектуємо на вісь  $x$  :

$$M \ddot{x}_C = 0 \Rightarrow \dot{x}_C = \text{const} = 0 \Rightarrow x_C = \text{const} \Rightarrow \sum m_k x_{k0} = \sum m_k x_k$$

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = m_1 (x_1) + l + m_2 (x_2) + l + a + m_3 (x_3) + l$$

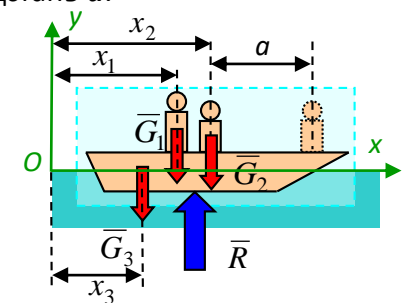
$$0 = m_1 l + m_2 (l + a) + m_3 l \Rightarrow l = -\frac{m_2 a}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Човен переміститься на відстань  $l$  у протилежний бік.

Визначимо, на яку відстань треба переміститись людині з масою  $m_1$ , щоб човен залишився на місці:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = m_1 (x_1) + b + m_2 (x_2) + a + m_3 x_3$$

$$0 = m_1 b + m_2 a \Rightarrow b = -\frac{m_2}{m_1} a$$





$$\bar{S} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt$$



❖ **Імпульс сили** – це міра механічної взаємодії, яка характеризує передачу механічного руху з боку сил, що діють на точку, за даний проміжок часу:

У проєкціях на координатні вісі :

$$(x) : S_x = \int_{t_1}^{t_2} X dt; \quad (y) : S_y = \int_{t_1}^{t_2} Y dt; \quad (z) : S_z = \int_{t_1}^{t_2} Z dt.$$

У разі постійної сили :

$$\bar{S} = \bar{F}(t_2 - t_1).$$

У проєкціях на координатні вісі :

$$S_x = X(t_2 - t_1); \quad S_y = Y(t_2 - t_1); \quad S_z = Z(t_2 - t_1).$$

❖ **Імпульс рівнодіючої** – це величина, яка дорівнює геометричній сумі імпульсів сил, прикладених до точки, за один і той самий проміжок часу:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n.$$

Помножимо на  $dt$ :  $\bar{R} dt = \bar{F}_1 dt + \bar{F}_2 dt + \dots + \bar{F}_n dt.$

Проінтегруємо на даному проміжку часу :

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{R} dt = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_1 dt + \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_2 dt + \dots + \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_n dt. \quad \Rightarrow \quad \bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \dots + \bar{S}_n.$$

❖ **Кількість руху точки** – це міра механічного руху, яка визначається вектором, рівним добутку маси точки на вектор її швидкості:

$$\bar{Q} = m\bar{v}.$$

❖ **Кількість руху системи матеріальних точок** – геометрична сума кількостей руху матеріальних точок:

$$\bar{Q} = \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 + \dots + \bar{Q}_n = \sum \bar{Q}_k. \quad \bar{Q} = \sum \bar{Q}_k = \sum m_k \bar{v}_k = \sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt} (\sum m_k \bar{r}_k).$$

За визначенням центру мас :

$$M\bar{r}_C = \sum m_k \bar{r}_k.$$

Тоді:

$$\bar{Q} = \frac{d}{dt} (M\bar{r}_C) = M \frac{d\bar{r}_C}{dt} = M\bar{v}_C.$$

$$\bar{Q} = M\bar{v}_C.$$

Вектор кількості руху системи дорівнює добутку маси усієї системи на вектор швидкості центру мас системи.

У проєкціях на координатні вісі :

$$Q_x = M\dot{x}_C; \quad Q_y = M\dot{y}_C; \quad Q_z = M\dot{z}_C.$$

❖ **Теорема про зміну кількості руху системи.** Розглянемо систему з  $n$  матеріальних точок. Розділимо сили, прикладені до кожної точки, на зовнішні та внутрішні. Замінімо їх на відповідні рівнодіючі  $\bar{F}_k^e$  та  $\bar{F}_k^i$ . Запишемо для кожної точки основне рівняння динаміки :

$$m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i \quad \text{або} \quad m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i.$$

У лівій частині рівняння внесемо маси під знак похідної та замінімо суму похідних на похідну суми:

$$\frac{d}{dt} (\sum m_k \bar{v}_k) = \bar{R}^e.$$

Підсумовуємо ці рівняння по всіх точках :

$$\sum m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i.$$

З визначення кількості руху системи :

$$\sum m_k \bar{v}_k = \bar{Q}. \quad \Rightarrow \quad \sum m_k \bar{v}_k = \bar{Q}.$$

$$\bar{R}^e \quad \bar{R}^i = 0$$

Похідна вектора кількості руху системи за часом дорівнює головному вектору зовнішніх сил системи.

У проєкціях на координатні вісі :

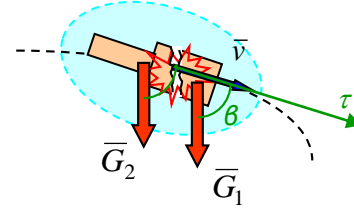
$$\frac{dQ_x}{dt} = R_x^e = \sum X_k^e; \quad \frac{dQ_y}{dt} = R_y^e = \sum Y_k^e; \quad \frac{dQ_z}{dt} = R_z^e = \sum Z_k^e.$$



**Наслідки з теореми про зміну кількості руху системи (закони збереження):**

1. Якщо в інтервалі часу  $[t_1, t_2]$  головний вектор зовнішніх сил системи дорівнює нулю,  $R^e = 0$ , то вектор кількості руху постійний,  $Q = \text{const}$  – закон збереження кількості руху системи).
  2. Якщо в інтервалі часу  $[t_1, t_2]$  проекція головного вектора зовнішніх сил системи на вісь  $x$  дорівнює нулю,  $R_x^e = 0$ , то проекція кількості руху системи на вісь  $x$  постійна,  $Q_x = \text{const}$ .
- Аналогічні твердження справедливі для осей  $y$  та  $z$ .

**Приклад :** Об'єкт масою  $M$ , що летів зі швидкістю  $v$ , розірвався на дві частини. Швидкість одного з уламків маси  $m_1$  зростає у напрямку руху до величини  $v_1$ . Визначити швидкість другого уламка.



1. Виділимо об'єкт руху :

2. Об'єкт - вільна система, в'язі та їхні реакції відсутні.

3. Додаємо активні сили:

4. Записуємо теорему про зміну кількості руху :

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}^e = \bar{G}_1 + \bar{G}_2.$$

Проектуємо на вісь  $\tau$  :  $\frac{dQ_\tau}{dt} = m_1 g \cos \beta + m_2 g \cos \beta \neq 0$ .

Розділяємо змінні та інтегруємо :  $\int_{Q_0}^Q dQ_\tau = \int_0^t (m_1 g \cos \beta + m_2 g \cos \beta) dt \approx 0$ .

Правий інтеграл майже дорівнює нулю, через те, що час розриву об'єкта  $t \ll 1$ .

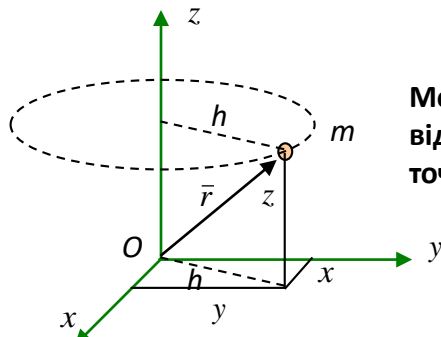
Звідси закон збереження :  $Q_\tau - Q_{\tau 0} \approx 0$  або  $Q_{\tau 0} \approx Q_\tau$ .  $\Rightarrow Mv \approx m_1 v_1 + m_2 v_2$ .  $\Rightarrow v_2 = \frac{Mv - m_1 v_1}{m_2}$ .





❖ **Елементи теорії моментів інерції.** При обертальному русі твердого тіла мірою інерції (опір зміни руху) є момент інерції відносно вісі обертання. Розглянемо основні поняття визначення та способи обчислення моментів інерції.

**1. Момент інерції матеріальної точки відносно вісі:**

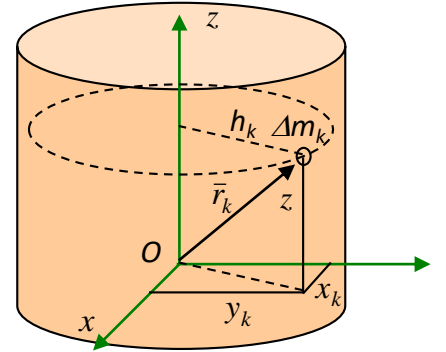


$$I_z = mh^2 = m(x^2 + y^2)$$

Момент інерції матеріальної точки відносно вісі дорівнює добутку маси точки на квадрат відстані точки до вісі.

Крім осьового моменту інерції твердого тіла існують інші види моментів інерції:

$$I_{xy} = \int xy dm$$
 - відцентровий момент інерції твердого тіла



$$I_z = \sum \Delta m_k h_k^2 = \sum \Delta m_k (x_k^2 + y_k^2)$$

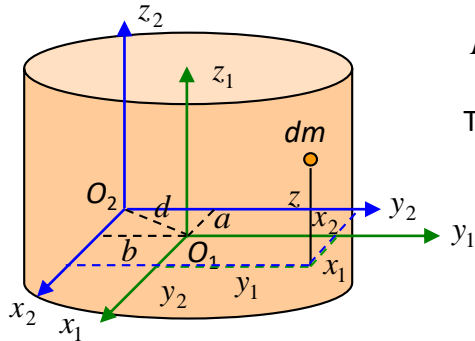
Момент інерції твердого тіла відносно вісі дорівнює сумі добутків маси кожної точки на квадрат відстані цієї точки до вісі.

За переходу від дискретної малої маси до нескінченно малої маси точки границя такої суми визначається інтегралом.

$$I_z = \int h^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm$$
 - осьовий момент інерції твердого тіла.

$$I_O = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2 + z^2) dm$$
 - полярний момент інерції твердого тіла.

**3. Теорема про моменти інерції твердого тіла відносно паралельних вісей – формула переходу до паралельних вісей:**



$$I_{z2} = \int (x_2^2 + y_2^2) dm = \int ((x_1 + a)^2 + (y_1 + b)^2) dm = \int (x_1^2 + y_1^2) dm + 2a \int x_1 dm + 2b \int y_1 dm + (a^2 + b^2) \int dm$$

Таким чином:  $I_{z2} = I_{z1} + 2aS_{y1} + 2bS_{x1} + d^2M.$

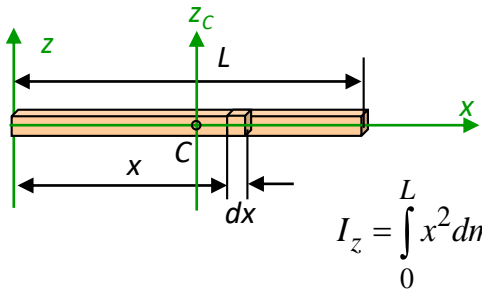
Якщо вісь  $z_1$  проходить через центр мас, то статичні моменти дорівнюють нулю:

$$I_{z2} = I_{zC} + d^2M.$$





**4. Момент інерції однорідного стрижня постійного перерізу відносно вісі :**



Виділимо елементарний об'єм  $dV = Adx$  на відстані  $x$ :

Елементарна маса:  $dm = \rho Adx$

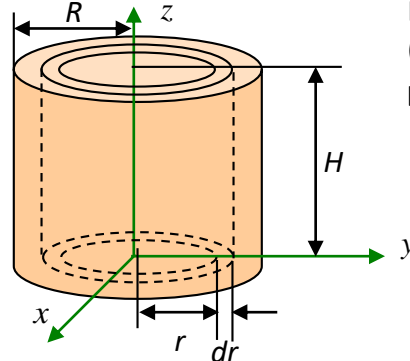
$$I_z = \int_0^L x^2 dm = \int_0^L x^2 \rho A dx = \rho A \frac{x^3}{3} \Big|_0^L = \rho A \frac{L^3}{3} = \frac{ML^2}{3}$$

Для обчислення моменту інерції відносно центральної вісі (що проходить через центр тяжіння) достатньо змінити розташування вісі та задати межі інтегрування  $(-L/2, L/2)$ . Тут продемонструємо формулу переходу до паралельних осей:

$$I_z = I_{zC} + d^2 M. \quad \Rightarrow \quad \frac{ML^2}{3} = I_{zC} + \left(\frac{L}{2}\right)^2 M.$$

$$I_{zC} = \frac{ML^2}{3} - \left(\frac{L}{2}\right)^2 M = \frac{ML^2}{12}$$

**5. Момент інерції однорідного суцільного циліндра відносно вісі симетрії :**



Виділимо елементарний об'єм  $dV = 2\pi r dr H$  (тонкий циліндр радіусу  $r$ ):

Елементарна маса:  $dm = \rho 2\pi r dr H$

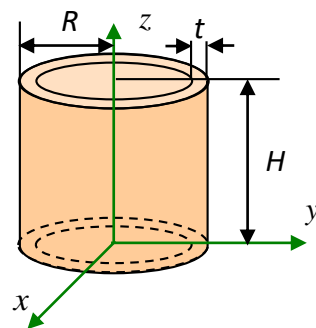
$$I_z = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r dr H = \rho 2\pi H \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \rho 2\pi H \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

Тут використано формулу об'єму циліндра  $V = \pi R^2 H$ .

Для обчислення моменту інерції порожнистого (товстого) циліндра достатньо задати границі інтегрування від  $R_1$  до  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ):

$$I_z = \rho 2\pi H \frac{r^4}{4} \Big|_{R_1}^{R_2} = \rho 2\pi H \left( \frac{R_2^4}{4} - \frac{R_1^4}{4} \right) = \frac{M(R_2^2 + R_1^2)}{2}$$

**6. Момент інерції тонкого циліндра відносно вісі симетрії ( $t \ll R$ ):**



В силу малості товщини циліндра вважаємо, що всі точки знаходяться на однаковій відстані  $R$  до вісі та інтегрування не потрібно. Об'єм  $V = 2\pi R t H$ . (тонкий циліндр радіуса  $R$  із товщиною стінки  $t$ )

$$I_z = R^2 \rho 2\pi R t H = MR^2$$

Те ж саме можна отримати з використанням формули для товстостінного циліндра, враховуючи малість  $t$ :

$$I_z = \frac{M((R^2 + (R-t)^2))}{2} = \frac{M(2R^2 - 2Rt + t^2)}{2} \ll 2R^2$$

*Оскільки висота циліндрів в результаті не входить у формули моментів інерції, то вони залишаються справедливими для суцільного диска і обода колеса (тонкого кільця).*





**Робота, потужність сили. Кінетична та потенціальна енергія.** Механічний рух може переноситися з однієї механічної системи на іншу внаслідок взаємодії механічних систем:

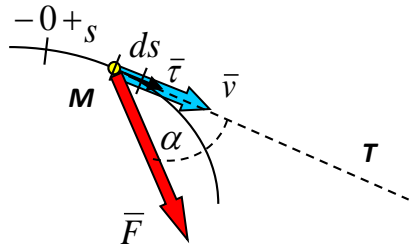
- без перетворень на іншу форму руху, тобто перехід у той самий механічний рух,
- з перетворенням на іншу форму руху матерії (потенціальну енергію, теплоту, електричну енергію та ін.)

Кожен з цих випадків має свої міри механічного руху та механічної взаємодії, які свого часу відстоювали Декарт та Лейбніц (див. таблицю):

	Міра механічного руху	Міра механічної взаємодії
Декарт	Кількість руху $\bar{Q} = m\bar{v}$	Імпульс сили $\bar{S} = \int \bar{F}dt$
Лейбніц	Кінетична енергія $T = \frac{mv^2}{2}$	Робота сили $A = \int F_\tau ds$

Імпульс сили є мірою дії сили при зміні механічного руху. Робота є кількісною мірою перетворення механічного руху в будь-яку іншу форму руху матерії.

❖ **Робота сили, що прикладається до матеріальної точки.** Нехай точка прикладання сили, змінної за величиною та напрямком, переміщується за деякою довільною траєкторією. На малому (елементарному) переміщенні силу можна вважати постійною і **елементарна робота сили дорівнює проекції сили на напрямок переміщення (відносно траєкторії руху), помноженої на елементарне переміщення:**



$$dA = F_\tau ds = F \cos \alpha \cdot ds$$

Знак елементарної роботи визначається величиною кута  $\alpha$  та знаком  $\cos \alpha$  :

Оскільки зазвичай зручніше працювати з гострими кутами, то в цьому випадку використовують гострий кут і знак надають за наступним простим правилом: **якщо сила та переміщення збігаються у напрямку, то надається знак «+», якщо протилежні за напрямком, то знак «-»** .

$$\alpha < \frac{\pi}{2} \quad dA > 0;$$

$$\alpha > \frac{\pi}{2} \quad dA < 0.$$

Елементарна робота може бути записана у вигляді **скалярного добутку:**  $dA = \bar{F} \cdot d\bar{r}$  та в проекціях  $dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ .

Роботу на скінченному переміщенні  $MM_1$  можна отримати за допомогою підсумовування або інтегрування:

$$A = \sum dA \quad \boxed{A = \int_M^{M_1} F_\tau ds} \quad \boxed{A = \int_M^{M_1} \bar{F} \cdot d\bar{r}} \quad \boxed{A = \int_M^{M_1} F_x dx + F_y dy + F_z dz}$$

**Окремі випадки:** 1. Сила постійна за величиною ( $F = \text{const}$ ) і напрямком ( $\alpha = \text{const}$ ):

$$A = \int_M^{M_1} F \cos \alpha \cdot ds = F \cos \alpha \int_M^{M_1} ds = Fs \cos \alpha.$$

2. Сила постійна за величиною ( $F = \text{const}$ ) і паралельна переміщенню ( $\alpha = 0$ ):

$$\boxed{A = \pm Fs}$$

3. Сила перпендикулярна до переміщення:

$$\boxed{A = 0}$$





Можна довести такі теореми та твердження :  $A = \int_M \bar{R} \cdot d\bar{r} = \int_M (\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots) \cdot d\bar{r} = \int_M \bar{F}_1 \cdot d\bar{r} + \int_M \bar{F}_2 \cdot d\bar{r} + \dots = A_1 + A_2 + \dots = \sum A_i$

❖ Робота рівнодіючої на деякому переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт складових сил на тому ж переміщенні:  $A = \sum A_i$

❖ Робота постійної сили за величиною та напрямом на складеному переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт цієї сили на кожному із складових переміщень :

$$A = \sum A_{si} \quad A = \bar{F} \cdot \bar{s} = \bar{F} \cdot (\bar{s}_1 + \bar{s}_2 + \dots) = \bar{F} \cdot \bar{s}_1 + \bar{F} \cdot \bar{s}_2 + \dots = A_{s1} + A_{s2} + \dots = \sum A_{si}$$

❖ Робота внутрішніх сил незмінюваної системи дорівнює нулю :  $A^i = 0$

$$A^i = \int_M (\bar{R} + \bar{R}') \cdot d\bar{r} = \int_M (\bar{R} - \bar{R}) \cdot d\bar{r} = 0; \quad (\bar{R}' = -\bar{R}).$$

❖ Робота сили тяжіння не залежить від виду траєкторії та дорівнює добутку сили тяжіння на різницю висот :

$$A = -G(z_1 - z) \quad A = \int_M G_x dx + G_y dy + G_z dz = \int_M (-G) dz = -Gz|_z^z_1 = -G(z_1 - z); \quad (G_x = G_y = 0, G_z = -G)$$

❖ Робота лінійної сили пружності (реакції пружини) за переміщення зі стану рівноваги:

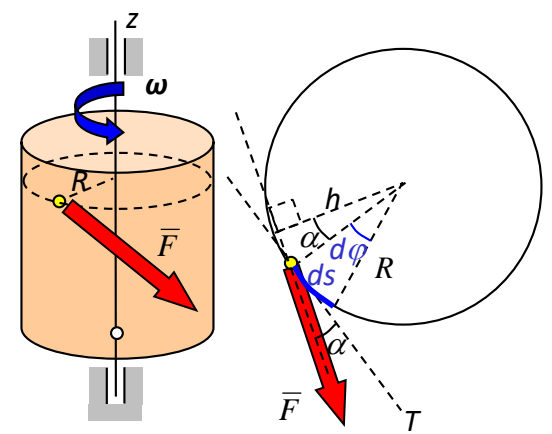
$$A = -c \frac{\Delta x^2}{2} \quad A = \int_M R_x dx = \int_M (-cx) dx = -c \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x_1} = -c \frac{x_1^2}{2}; \quad (R_x = -cx)$$

❖ Робота сили, прикладеної до твердого тіла, що обертається навколо нерухокої осі.

Запишемо вираз для елементарної роботи сили, яка прикладена до точки, і виразимо елементарне переміщення через кут повороту тіла:

$$dA = F_\tau ds = F \cos \alpha \cdot ds = F \cos \alpha \cdot R \cdot d\varphi; \quad dA = Fh \cdot d\varphi = M_z(\bar{F}) d\varphi.$$

- робота сили, прикладеної до твердого тіла, що обертається, виражається через момент сили відносно осі.



Робота сили, прикладеної до твердого тіла, що обертається, для скінченного кута повороту:

$$A = \int_\varphi^{\varphi_1} M_z(\bar{F}) d\varphi.$$

В окремому випадку постійного значення моменту сили відносно осі робота

дорівнює добутку моменту сили на кут повороту:

$$A = M_z(\bar{F})(\varphi_1 - \varphi).$$

**Потужність** – величина, яка характеризується кількістю роботи, виконаної в одиницю часу:

$$N = \frac{\delta A}{dt}.$$

Потужність сили, прикладеної до точки:

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{F_\tau ds}{dt} = F_\tau v_\tau = \bar{F} \cdot \bar{v}.$$

Потужність сили, прикладеної до твердого тіла, що обертається:

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{M_z d\varphi}{dt} = M_z \omega_z = \bar{M} \cdot \bar{\omega}.$$



❖ **Кінетична енергія** – величина, яка характеризує здатність механічного руху перетворюватися на еквівалентну кількість іншого руху

Кінетична енергія матеріальної точки:

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

Кінетична енергія твердого тіла за поступального руху:

$$T = \frac{Mv_C^2}{2}$$

Кінетична енергія твердого тіла за обертального руху:

$$T = \frac{I_z \omega_z^2}{2}$$

Кінетична енергія твердого тіла за плоского руху:

$$T = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{I_{zC} \omega_z^2}{2}$$

Кінетична енергія системи матеріальних точок:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}$$

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum m_k = \frac{v^2}{2} M = \frac{Mv_C^2}{2}; \quad (v_1 = v_2 = \dots = v = v_C)$$

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum \frac{m_k (\omega_z h_k)^2}{2} = \frac{\omega_z^2}{2} \sum m_k h_k^2 = \frac{I_z \omega_z^2}{2}; \quad (I_z = \sum m_k h_k^2)$$

$$T = \sum \frac{m_k \bar{v}_k \cdot \bar{v}_k}{2} = \sum \frac{m_k (\bar{v}_C + \bar{v}_{kC}) \cdot (\bar{v}_C + \bar{v}_{kC})}{2} = \frac{Mv_C^2}{2} + \bar{v}_C \cdot \sum m_k \bar{v}_{kC} + \sum \frac{m_k v_{kC}^2}{2}$$

$$\bar{v}_C \cdot \sum m_k \frac{d\bar{r}_{kC}}{dt} = \bar{v}_C \cdot \frac{d}{dt} (\sum m_k \bar{r}_{kC}) = 0; \quad (\sum m_k \bar{r}_{kC} = 0) \quad \frac{I_{zC} \omega_z^2}{2}$$

❖ **Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки.** Зміна кінетичної енергії точки дорівнює роботі сил, які діють на точку на тому ж переміщенні:

Запишемо основний закон динаміки точки:  $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{R}$

Виразимо прискорення через швидкість і помножимо ліву та праву частини співвідношення скалярно на диференціал радіус-вектора:

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot d\bar{r} = \bar{R} \cdot d\bar{r} \quad \text{або} \quad m\bar{v} \cdot d\bar{v} = \bar{R} \cdot d\bar{r}$$

Проінтегруємо отримане співвідношення:

$$\int d \left( \frac{mv^2}{2} \right) = \int_{M_0}^M dA; \quad \left. \frac{mv^2}{2} \right|_{v_0}^v = A$$

Після підстановки границь отримаємо:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A$$

$$md \left( \frac{\bar{v} \cdot \bar{v}}{2} \right) = d \left( \frac{mv^2}{2} \right) \quad dA$$

❖ **Теорема про зміну кінетичної енергії систем.** Зміна кінетичної енергії системи дорівнює роботі сил, які діють на систему на відповідних переміщеннях точок системи:

Запишемо теорему про зміну кінетичної енергії для довільної точки системи, при цьому виділимо роботу зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до цієї точки:

$$\frac{m_k v_k^2}{2} - \frac{m_k v_{k0}^2}{2} = A_k^i + A_k^e$$

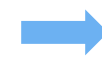
Підсумовуємо ліві та праві частини співвідношень:  $\sum \frac{m_k v_k^2}{2} - \sum \frac{m_k v_{k0}^2}{2} = \sum A_k^i + \sum A_k^e$

У лівій частині отримали різницю кінетичних енергій системи:

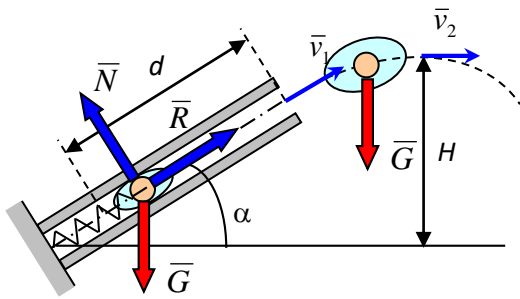
$$T - T_0 = \sum A_k^i + \sum A_k^e$$

Для незмінюваної системи:

$$T - T_0 = \sum A_k^e; \quad \sum A_k^i = 0$$



❖ **Приклад розв'язання задачі із застосуванням теореми про зміну кінетичної енергії для матеріальної точки** – Снаряд маси  $m$  викидається пружинним пристроєм із каналу під кутом  $\alpha$  до горизонту. Довжина нерозтягнутої пружини з жорсткістю  $c$  дорівнює довжині каналу  $l_0$ . Перед пострілом пружина стискається на величину  $d$ . Визначити швидкість снаряда при вильоті з каналу, а також максимальну висоту польоту.



Дано:  $\alpha, c, d, m, l_0$

Знайти:  $v_1, H$

1. Вибираємо об'єкт – снаряд
2. Відкидаємо в'язі – канал ствола, пружину
3. Замінюємо в'язі реакціями –  $N, R$
4. Додаємо активні сили –  $G$

5. Записуємо теорему про зміну кінетичної енергії для точки:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A$$

Початкова швидкість снаряда дорівнює нулю:  $v_0 = 0$ .

Робота сил, прикладених до об'єкту, дорівнює:  $A = A_N + A_G + A_R$ .

Робота нормальної реакції дорівнює нулю (напрямок реакції перпендикулярний до переміщення):  $A_N = 0$

Робота сили тяжіння:  $A_G = -G\Delta h = -mgd \sin \alpha$ .

Робота пружної реакції пружини (напрямок реакції збігається з переміщенням):  $A_R = c \frac{d^2}{2}$ .

Підставляємо визначені величини до теореми:  $\frac{mv_1^2}{2} - 0 = -mgd \sin \alpha + c \frac{d^2}{2}$ .

Визначаємо максимальну висоту польоту (повторюємо кроки 1-5):

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A$$

Звідси величина швидкості вильоту снаряда:

$$v_1 = \sqrt{\frac{cd^2}{m} - 2gd \sin \alpha}$$

Вертикальна швидкість снаряда в найвищій точці траєкторії дорівнює нулю:  $v_{2y} = 0$ .

Горизонтальна швидкість снаряда постійна (із закону збереження проекції на вісь  $x$  кількості руху точки) і дорівнює:  $v_{2x} = v_{1x} = \sqrt{\frac{cd^2}{m} - 2gd \sin \alpha} \cos \alpha$ .

Робота сили тяжіння:  $A_G = -G\Delta h = -mg(H - l_0 \sin \alpha)$ .

Підставляємо визначені величини до теореми:

$$\frac{m \left( \frac{cd^2}{m} - 2gd \sin \alpha \right) \cos^2 \alpha}{2} - \frac{m \left( \frac{cd^2}{m} - 2gd \sin \alpha \right)}{2} = -mg(H - l_0 \sin \alpha)$$

Після скорочень та перетворень  $\left( \frac{cd^2}{2m} - gd \sin \alpha \right) \sin^2 \alpha = g(H - l_0 \sin \alpha)$ . Звідси максимальна висота польоту

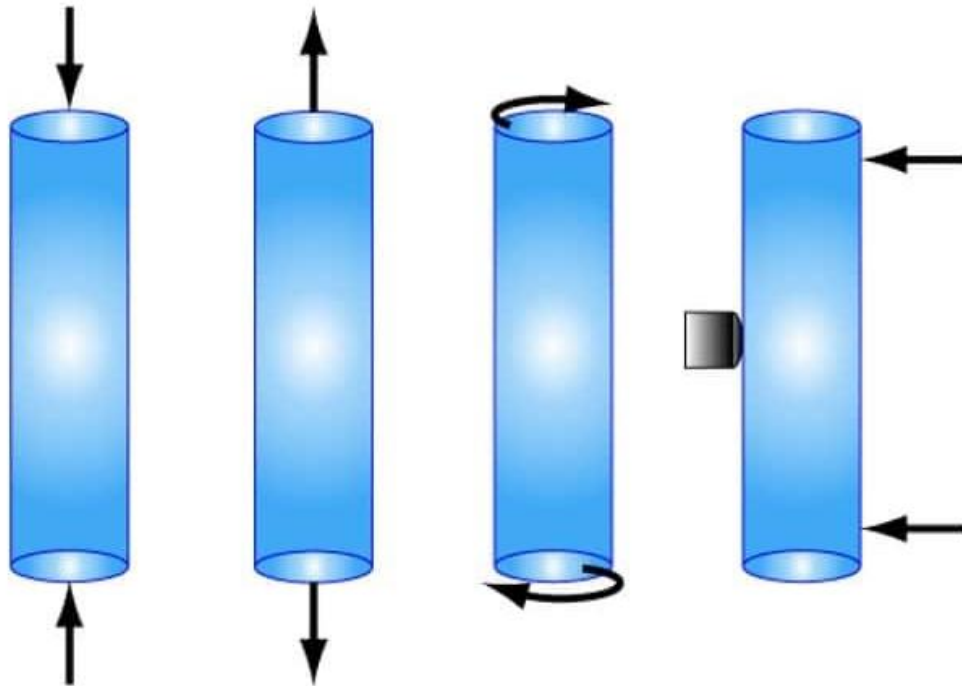
$$H = \left( \frac{cd^2}{2mg} - d \sin \alpha \right) \sin^2 \alpha + l_0 \sin \alpha$$

Зауважимо, що попередній вираз можна швидше отримати, записуючи теорему про зміну кінетичної енергії тільки для вертикальної швидкості руху точки, оскільки горизонтальні сили відсутні і горизонтальна швидкість не змінюється.

↑ Теоретична та прикладна механіка.  
Конспект лекцій



**РОЗДІЛ «ОПІР МАТЕРІАЛІВ»**





Основні гіпотези, припущення. Метод перерізів. Завдання опору матеріалів

**Опором матеріалів називають науку про інженерні методи розрахунку елементів машин та споруд на міцність, жорсткість і стійкість.**

В процесі експлуатації машин і споруд їх елементи (стрижні, балки, пластини, болти, заклепки та ін.) в тій чи іншій мірі приймають участь у роботі конструкції і зазнають дії різних сил – навантажень.

Наука про опір матеріалів вивчає поведінку різних матеріалів під дією на них сил і вказує, як підібрати для кожного елемента конструкції належний матеріал та поперечні розміри за умови повної надійності роботи і найбільшої дешевизни споруди.

Іноді опору матеріалів доводиться вирішувати видозмінену задачу – перевіряти достатність розмірів конструкції, що існує або вже запроектованої. Вимога надійності і найбільшої економії суперечать одна іншій. Перша веде, зазвичай, до збільшення витрат матеріалу, друга вимагає зниження витрат. Це протиріччя – найважливіший елемент наукової методики, що обумовлює розвиток опору матеріалів. Опір матеріалів обслуговує будівельну справу, машино-та суднобудування.

Для забезпечення роботи конструкції вона повинна задовольняти необхідним умовам міцності, жорсткості та стійкості.

**Міцність** – здатність конструкції та її елементів витримувати певне навантаження без руйнування.

**Жорсткість** – здатність конструкції, її частин та деталей протидіяти зовнішнім навантаженням у відношенні деформації (зміни форми і розмірів). При заданих навантаженнях деформації не повинні перевищувати певної величини, яка встановлюється відповідно до вимог, що висуваються до конструкції.

**Стійкість** – це здатність конструкції та її елементів зберігати певну початкову форму пружної рівноваги.

#### Задачі міцності

**Пряма:** визначення міцних розмірів елементів таким чином, щоб вони при мінімальній вартості витримували задане навантаження протягом певного терміну.

**Зворотна:** перевірка на міцність елементів споруд та вузлів, що вже існують.

#### Об'єкти, що вивчаються в опорі матеріалів

При всьому різноманітті видів конструктивних елементів, що зустрічаються в машинах та спорудах, їх можна звести до невеликого числа основних форм. Це:

**1. Стрижні (бруси)** – тіла, у яких один розмір (довжина) значно більше двох інших (поперечних).

Стрижні можуть бути прямолінійними (вал, вісь, балка) та криволінійними (ланка ланцюга, гак), тонкостінними, а також мати круглий, призматичний чи змінний переріз (рисунок 1.1).

Вісь стрижня – це сукупність точок, рівновіддалених від його поверхні

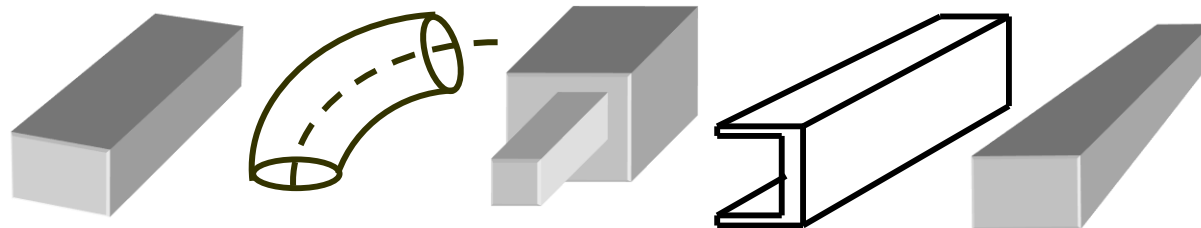


Рисунок 1.1 – Стрижні



Об'єкти, що вивчаються в опорі матеріалів

**2. Оболонки** – тіла, обмежені криволінійними поверхнями, що розташовані близько одна від одної. У техніці зустрічаються оболонки циліндричної, конічної та сферичної конфігурації (рисунок 1.2). До оболонок відносяться купола будівель, корпуси підводних човнів, неплоскі стінки резервуарів.

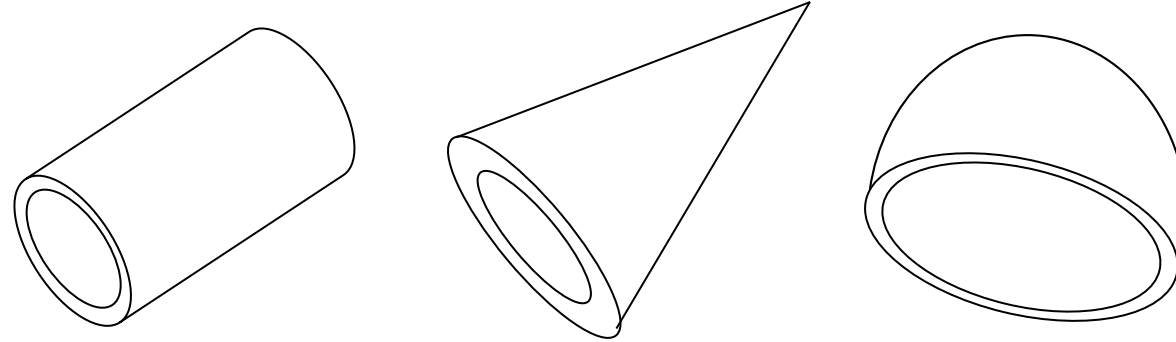


Рисунок 1.2 – Оболонки

**3. Пластини** – оболонки, у яких поверхня є площиною. Існують пластини круглої, прямокутної та іншої форми. До пластин відносяться плоскі днища та кришки резервуарів, диски турбомашин, перекриття інженерних споруд.

**4. Масивні тіла** – тіла, у яких всі три розміри мають однаковий порядок. До них відносяться фундаменти, підпірні стінки та ін.

### Поняття про деформації

У теоретичній механіці (статика) вивчається рівновага абсолютно твердого тіла. Цього уявлення про матеріал достатньо для вирішення сформульованої у статиці задачі – визначити умови рівноваги прикладених до тіла сил.

При вивченні опору матеріалів необхідно врахувати, що **реальні тіла можуть змінювати свої розміри та форму під дією зовнішніх сил і, врешті-решт, – руйнуватися**. Ця зміна називається **деформацією**. Вперше на цю властивість було вказано Галілеєм у 1638 році.

**Деформації бувають пружні** (які зникають після припинення дії сил, що їх спричинили) **та пластичні, залишкові** (які не зникають після зняття навантажень).

### Основні види простих деформацій:

- розтяг–стискання;
- зсув або зріз;
- кручення;
- згин.

Більш складні деформації – це сума простих видів.



**Метод перерізів**

Для вирішення задачі міцності необхідно знати зовнішні сили, механічні властивості матеріалів, а також уміти визначати внутрішні сили.

**Внутрішні сили** – це сили міжатомної взаємодії між окремими частинами елемента споруди, що виникають під дією зовнішніх зусиль.

Щоби чисельно характеризувати ступінь впливу зовнішніх зусиль на деформований елемент, необхідно навчитися вимірювати та обчислювати величину внутрішніх міжатомних сил, що виникають як результат деформації. Для цієї мети існує метод перерізів.

Для визначення внутрішніх зусиль в будь-якому перетині елемента потрібно подумки провести переріз (розріз) у цьому місці, відкинувши одну частину, і розглянути рівновагу іншої, замінивши дію відкинутої частини силами (рисунок 1.3).

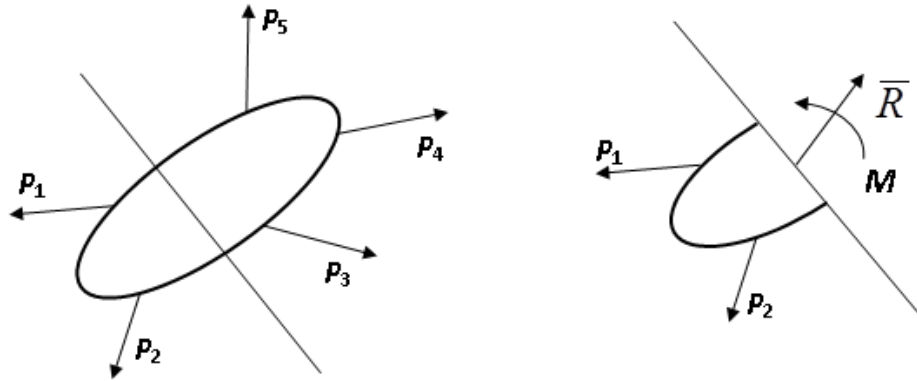


Рисунок 1.3 – Метод перерізів

Величину внутрішніх зусиль (**головний вектор  $R$**  і **головний момент  $M$** ) у загальному випадку можна визначити з умов рівноваги (рівнянь рівноваги).

Однак необхідно також знати **характер розподілу по перетину внутрішніх зусиль** – міру їхньої дії. Такою мірою є **напруження**.

**Напруження** є векторна величина, що характеризує інтенсивність внутрішніх зусиль в даній точці по даному перерізу.

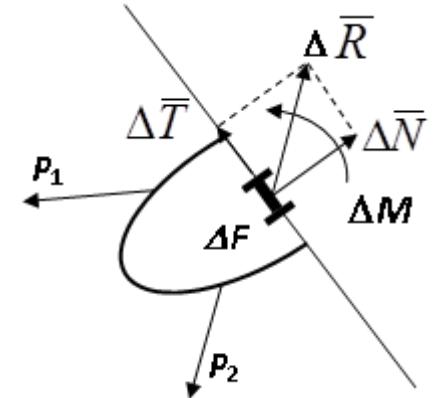


Рисунок 1.4 – Головний вектор та момент

Виділимо навколо точки, що нас цікавить, **елементарну площу  $\Delta F$** . Внутрішні зусилля в ній зводяться до **головного вектору  $\Delta R$**  та **головного моменту  $\Delta M$**  (рисунок 1.4). Через те, що  $\Delta M$  – нескінченно мала величина більш вищого порядку, ніж  $\Delta R$ , то **можемо нею знехтувати**. Тоді напруження – це

$$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta F} = \bar{\rho} \quad (1.1)$$

Напрямок вектора  $\bar{\rho}$  співпадає з напрямком  $\Delta R$ , якщо  $\Delta F \rightarrow 0$ .

Розмірність напруження – [Н/м<sup>2</sup>], [кг/см<sup>2</sup>].

Абсолютна величина напруження дорівнює  $\rho = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$  (1.2)

де  $\sigma$  та  $\tau$  – відповідно нормальна і дотична складова напруження у даній точці по даному перерізу (рисунок 1.5).

Якщо внутрішні зусилля розподілені вздовж перерізу рівномірно, то величина напруження дорівнює

$$\sigma = \frac{N}{F}; \quad \tau = \frac{T}{F}; \quad \rho = \frac{R}{F} \quad (1.3)$$

де  $N$  та  $T$  – нормальна і дотична складова **головного вектора внутрішніх зусиль  $R$**  по перерізу  $F$ .

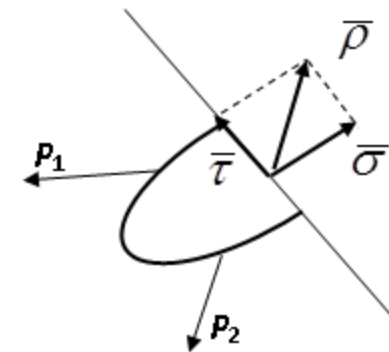


Рисунок 1.5 – Напруження





**Основні гіпотези опору матеріалів**

Для побудови теорії опору матеріалів приймають деякі гіпотези щодо структури та властивостей матеріалів, а також характеру деформацій.

I. Гіпотеза про суцільність матеріалу. Передбачається, що матеріал суцільно (без порот) заповнює форму тіла.

II. Гіпотеза про однорідність та ізотропність. Передбачається, що в будь-якому напрямку механічні властивості матеріалу однакові (рисунок 1.6). Однак, іноді ця гіпотеза є неприйнятною. Наприклад, деревина та армовані матеріали є анізотропними.

III. Гіпотеза про малість деформацій. Припускається, що деформації нескінченно малі у порівнянні з розмірами тіла. Це дозволяє знехтувати зміною в розташуванні зовнішніх сил відносно частин тіла і скласти рівняння рівноваги як для недеформованого тіла.

IV. Гіпотеза про ідеальну пружність матеріалу. Всі тіла в опорі матеріалів передбачаються абсолютно пружними. Відхилення точок прикладення зусиль при навантаженні реальних тіл несуттєві. Ними можна знехтувати до певних меж.

V. Гіпотеза про пропорційність напружень і деформацій матеріалу. Деформації матеріалу конструкції в кожній його точці прямо пропорційні напруженням в цій точці. Виконується закон Гука (лінійна деформованість матеріалу).

VI. Принцип суперпозиції. Принцип незалежності дії сил і додавання навантажень. Результат дії на конструкцію системи навантажень дорівнює сумі результатів впливу на неї кожного навантаження окремо (рисунок 1.7).

$$f = f_1 + f_2 + f_3 \quad (1.4)$$

VII. Гіпотеза плоских перерізів (гіпотеза Бернуллі). Поперечні перерізи бруса, що були плоскими та перпендикулярними осі бруса до його навантаження, залишаються плоскими і нормальними до його осі і під дією навантаження (рисунок 1.8). Дану гіпотезу використовують при виведенні більшості формул для розрахунку брусів.

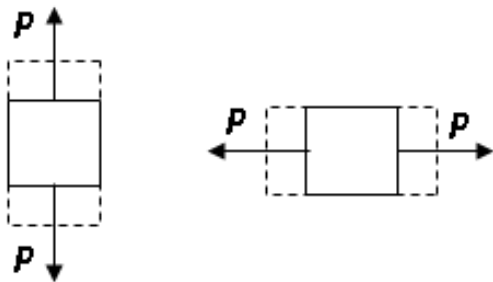


Рисунок 1.6 – Гіпотеза II

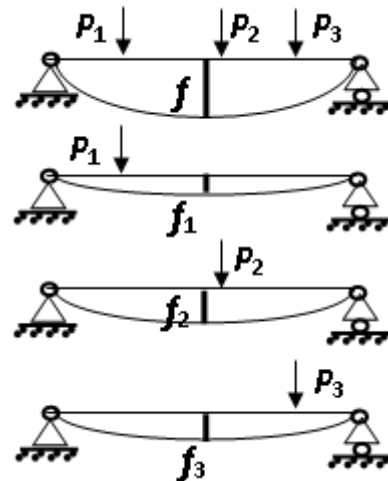


Рисунок 1.7 – Гіпотеза VI



Рисунок 1.8 – Гіпотеза VII







Осьовий розтяг та стискання

Центральним (осьовим) розтягом або стисканням є такий вид деформації, при якому в поперечних перерізах бруса виникають тільки поздовжні зусилля (паралельні осі бруса).

Зазвичай, поздовжні зусилля, що розтягують, вважають позитивними, а що стискають – негативними (рисунок 2.1).

Напруження та деформації. Закон Гука

Розглянемо прямий брус постійного поперечного перерізу  $F$ , затиснений одним кінцем і навантажений на вільному кінці силою  $P$  (рисунок 2.2). Скористаємося методом перерізів. Подумки відокремлюємо від нього дану частину перерізом, розташованим на довільній відстані  $y$  від вільного кінця стрижня. Дію відкинутої затисненої частини можна замінити внутрішнім поздовжнім зусиллям  $N$ , спрямованим від перерізу. З умови рівноваги розглянутої частини отримаємо невідоме зусилля.

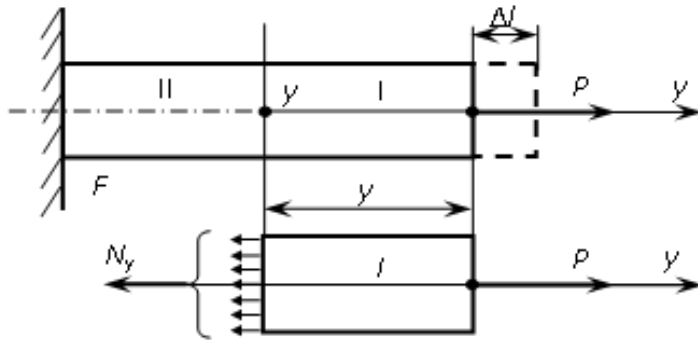


Рисунок 2.2 – Визначення поздовжніх зусиль

$$\sum F_Y = 0: \quad N_Y - P = 0$$

звідки маємо  $N_Y = P$  при  $0 \leq y \leq l$ , де  $l$  – довжина бруса.

Досліди з розтягуванням стрижнів показують, що при центральному розтягу стрижня внутрішні зусилля (і напруження) розподіляються по перерізу рівномірно, виключаючи лише перерізи досить близькі до тих, в яких прикладені зовнішні зусилля.

Цей висновок був сформульований французьким вченим Барі де Сен-Венаном (1797–1886) як **Принцип Сен-Венана**.

Тому нормальні напруження, що виникають в поперечних перерізах бруса при розтягу-стисканні визначаються рівністю

$$\sigma = \frac{N_Y}{F} = \frac{P}{F} \quad (2.1)$$

Під дією зовнішнього навантаження **початкова довжина бруса**  $l$  збільшиться на деяку величину  $\Delta l$ , що називається **абсолютною поздовжньою деформацією (подовженням) бруса**.

Відношення **абсолютного подовження бруса**  $\Delta l$  до його **початкової довжини**  $l$  є **відносною поздовжньою деформацією** (відносним подовженням) бруса

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (2.2)$$

Чим більше величина діючої сили, що розтягує, тим більше подовження бруса. Чим більше площа поперечного перерізу бруса, тим подовження бруса менше. Подовження бруса також залежить від властивостей матеріалу

$$\varepsilon = \frac{N_Y}{EF} \quad (2.3)$$

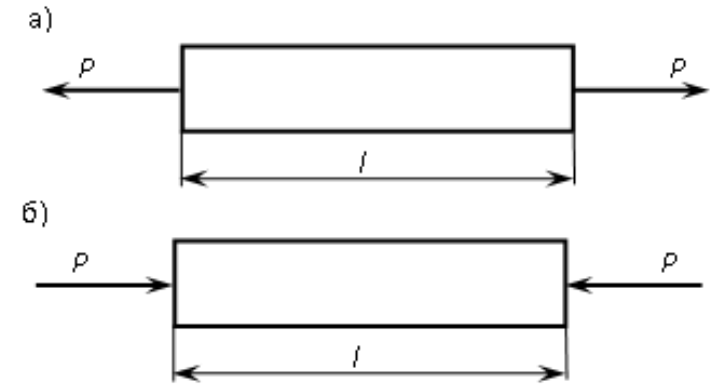


Рисунок 2.1 – Осьовий розтяг-стискання



### Модуль Юнга

У виразі (2.3) величина  $E$  – коефіцієнт, що залежить від фізичних властивостей матеріалу, характеризує опірність матеріалу пружній деформації при розтягу (стисканні) і називається **модулем пружності I роду (модуль Юнга)**. Його розмірність  $[Н/м^2]$ ,  $[кг/см^2]$ ,  $[Па]$ :

- ❖ для легваної сталі  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$ ,
- ❖ для сірого чавуна  $E = 1 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$ ,
- ❖ для дерева (вздовж волокон)  $E = 1 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ .

Враховуючи (1), отримаємо  $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$  або  $\sigma = E\varepsilon$  (2.4)

### Коефіцієнт поперечної деформації. Коефіцієнт Пуассона

При дії на брус сили, що розтягує або стискає, крім поздовжньої, виникає також поперечна деформація. При стисканні бруса поперечні розміри його збільшуються, а при розтягуванні – зменшуються. Якщо поперечний розмір бруса до прикладання до нього сили, що розтягує  $P$ , позначити  $b$ , то зміна його під дією сили  $P$  називається **абсолютною поперечною деформацією бруса** (рисунок 2.3).

Величина  $\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b}$  є **відносною поперечною деформацією**. Досвід показує, що в межах застосування закону Гука при осьовому розтягу-стисканні поперечна деформація пропорційна поздовжній деформації, але має зворотний знак:

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon \quad (2.6)$$

Коефіцієнт пропорційності залежить від властивостей матеріалу та є **коефіцієнтом поперечної деформації або коефіцієнтом Пуассона**, та являє собою відношення поперечної деформації до поздовжньої, узятє по модулю.

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| \quad (2.7)$$

Для сталі коефіцієнт Пуассона  $\mu = 0,25 \dots 0,3$ , для пробки  $\mu = 0$ , для гуми  $\mu = 0,5$ , для ряду інших матеріалів (чавуну, цинку, бронзи, міді)  $\mu = 0,23 \dots 0,36$ .

Знаючи  $\mu$ , можна обчислити зміну **об'єму бруса**  $V$  при розтягу-стисканні. Довжина бруса під навантаженням дорівнює  $l + \Delta l = l(1 + \varepsilon)$ , площа поперечного перерізу відповідно дорівнює  $F(1 - \varepsilon\mu^2)$

Абсолютне подовження бруса виражається формулою  $\Delta l = \varepsilon l = \frac{Nl}{EF}$  (2.5)

Добуток  $EF$  є **жорсткістю поперечного перерізу** бруса при розтягу і стисканні. Формули (2.3) – (2.5) є математичним виразом **закону Гука** (1678).

Закон Гука виконується в певних межах (межах пропорційності матеріалу).

Якщо на розтягнутій ділянці бруса поздовжня сила і поперечний переріз змінні, то абсолютне подовження ділянки довжиною  $l$  визначається як

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(y)dy}{EF(y)}$$

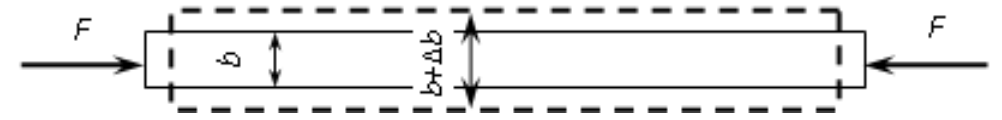


Рисунок 2.3 – Поперечна деформація бруса

Об'єм бруса під дією навантаження стає рівним

$$V' = Fl(1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon\mu^2) = V(1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon\mu^2)$$

Через те, що в межах пропорційності  $\varepsilon$  – мала величина, то величиною  $\varepsilon^2$  можна знехтувати. Тоді  $V' = V[1 + \varepsilon(1 - 2\mu)]$

Відносна зміна об'єму бруса дорівнює  $\frac{\Delta V}{V} = \frac{V' - V}{V} = \varepsilon(1 - 2\mu)$

Для більшості матеріалів  $\mu \leq 0,5$  ( $1 - 2\mu \geq 0$ ), тобто при розтягуванні об'єм бруса збільшується, а при стисканні – зменшується.



### Епюри поздовжніх зусиль

*Епюрою є графік, що показує зміну внутрішніх силових факторів, що діють в поперечному перерізі бруса, уздовж його поздовжньої осі.*

Основні правила побудови епюр:

- 1) вісь епюри паралельна поздовжній осі бруса;
- 2) значення внутрішнього зусилля, що діє в даному поперечному перерізі бруса, відкладається в масштабі по нормалі до осі епюри, в точці осі епюри, що відповідає даному перерізу;
- 3) епюри забезпечуються:
  - назвою внутрішнього силового фактора;
  - одиницями його вимірювання;
  - знаками;
  - цифровими значеннями в характерних точках.

### Приклади побудови епюр поздовжніх сил

**Приклад 1.** Розглянемо випадок центрального розтягування бруса силою  $P$  (рисунок 2.4)

У всіх його поперечних перерізах виникають тільки поздовжні зусилля

Будуємо епюру  $N_Y$ , тобто графічно представляємо залежність (2.9).

$$N_Y = P \quad (2.9)$$

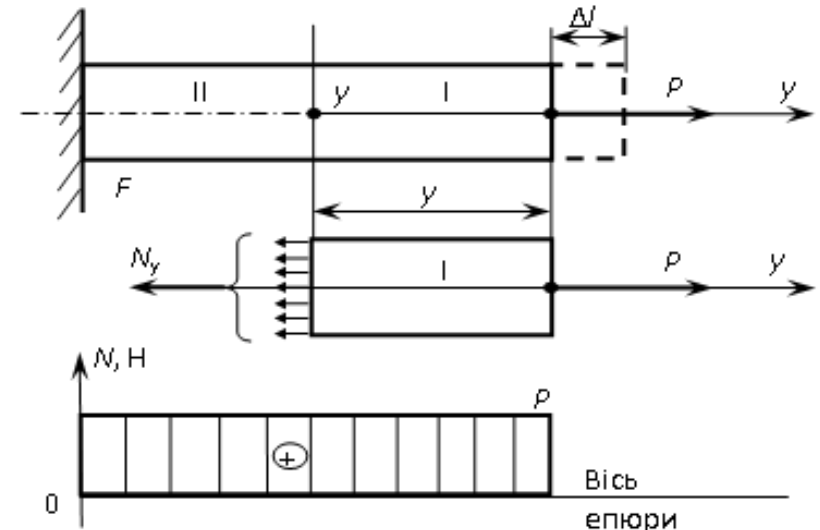


Рисунок 2.4 – Побудова епюри поздовжніх сил





Приклади побудови епюр поздовжніх сил

**Приклад 2.** Стрижень навантажений зовнішніми силами  $2P$ ,  $P$ ,  $5P$  (рисунок 2.5).  
Якщо до бруса докладено кілька зовнішніх сил, то його необхідно розбити на ділянки.  
Межами ділянок є:

- 1) перерізи, в яких прикладені зосереджені зовнішні зусилля (в тому числі і опорні реакції);
- 2) перерізи, в яких стрибком змінюється площа поперечного перерізу бруса.

Номери ділянок позначимо римськими цифрами. У довільному перерізі кожної ділянки визначаємо значення поздовжньої сили, складаючи умови рівноваги:

$$N_1 + 2P = 0; \text{ відповідно } N_1 = -2P \text{ при } 0 \leq y \leq a;$$

$$N_2 + P + 2P = 0; \text{ відповідно } N_2 = -3P \text{ при } a \leq y \leq (a + b);$$

$$N_3 - 5P + P + 2P = 0; \text{ відповідно } N_3 = 2P \text{ при } (a + b) \leq y \leq (a + b + c).$$

По значеннях  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  будуюмо епюру поздовжніх зусиль.  
Епюру штрихують перпендикулярно її осі. Довжина штрихування в кожному перерізі бруса дорівнює величині поздовжньої сили в цьому перерізі.

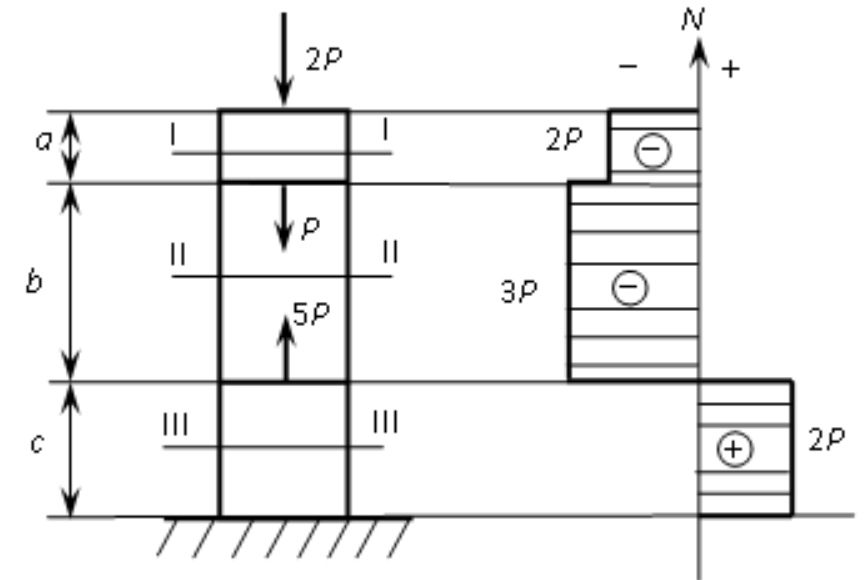


Рисунок 2.5 – Побудова епюри поздовжніх сил

**Висновки:**

- 1) на епюрі поздовжніх сил є **стрибки** в тих перерізах, де прикладені зовнішні зосереджені сили, і рівні за величиною цим силам;
- 2) **внутрішні зусилля  $N$**  в перерізі рівні алгебраїчній сумі зовнішніх сил, розташованих з однієї сторони від перерізу.

Для прикладу 2 визначимо загальне подовження стрижня як алгебраїчну суму подовжень всіх його ділянок:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF} = \frac{-2Pa}{EF}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF} = \frac{-3Pb}{EF}$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EF} = \frac{2Pc}{EF}$$

$$\Delta l_{заг} = \sum \Delta l_i = \frac{-2Pa - 3Pb + 2Pc}{EF}$$





**Зсув. Поняття про чистий зсув**

Під зсувом розуміють такий вид деформації, коли в поперечних перерізах стрижня діють тільки поперечні (такі, що перерізають) сили, дотичні до цих перерізів. Таке навантаження відповідає дії на стрижень двох рівних протилежно спрямованих та близько розташованих сил (рисунок 3.1), що викликають зріз по площині, розташованій між силами (як при розрізанні ножицями прутів, листів та ін.).

В цілому ж на практиці зсув у чистому вигляді отримати складно, через те, що зазвичай деформація зсуву супроводжується іншими видами деформацій та найчастіше згином.

При розрахунку ряду елементів конструкцій зустрічається особливий вид напруженого стану, коли на чотирьох гранях прямокутного елемента, виділеного навколо деякої точки, діють тільки дотичні напруження. Цей стан є чистим зсувом.

Типовим прикладом тіла, у всіх точках якого має місце чистий зсув, є скручувана тонкостінна труба, зображена на рисунку 3.2, а. Внаслідок відносного повороту кінцевих перерізів твірні труби нахилиються та її стінки відчують деформацію зсуву.

Якщо розрізати умовно трубу уздовж твірної А-А та розгорнути її, то можна побачити що труба є пластиною, що зазнає деформацію чистого зсуву (рисунок 3.2, б).

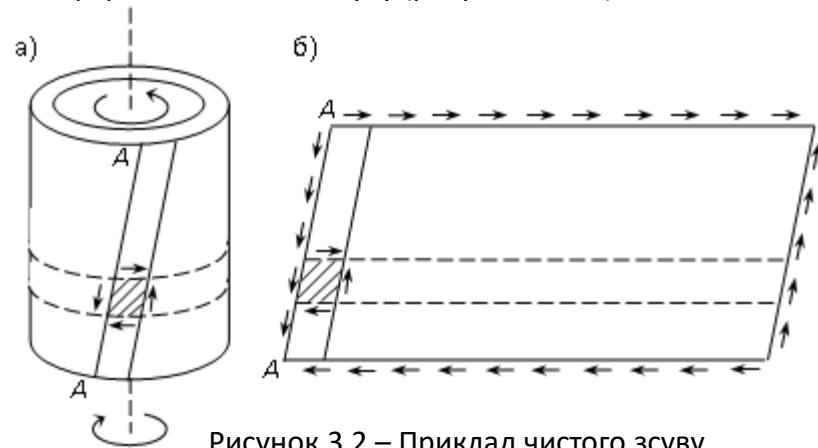


Рисунок 3.2 – Приклад чистого зсуву

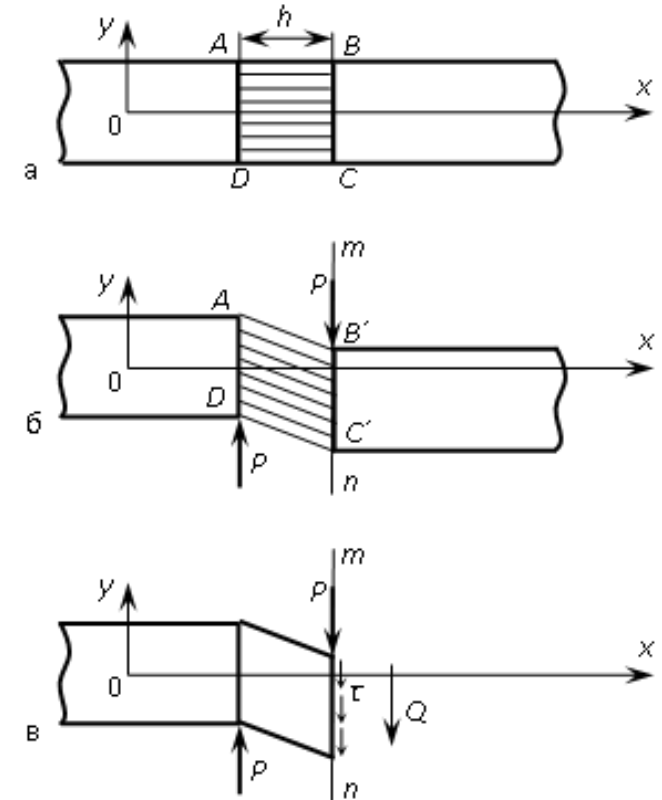


Рисунок 3.1 – Зсув прямолінійного стрижня



**Напруження та деформації при зсуві. Закон Гука при зсуві**

Нехай на стрижень **поперечним перерізом**  $F$  (рисунок 3.1, а) діють **зсувні сили**  $P$ . Скористаємося методом перерізів. Відкинемо частину стрижня, розташовану праворуч від перерізу  $m-n$  (рисунок 3.1, б), замінюючи відповідною **силою**  $Q$  її дію на решту. Ця поперечна (до осі стрижня) сила є рівнодіючою **дотичних напружень**  $\tau$  в даному поперечному перерізі. Умова рівноваги розглянутої частини стрижня має вигляд:

$$\sum F_y = P - Q = 0 \quad \text{звідки маємо} \quad Q = P$$

Вважаючи, що **дотичні напруження рівномірно розподілені** по поперечному перерізу, отримаємо 
$$\tau = \frac{Q}{F} = \frac{P}{F} \quad (3.1)$$

Допущення про рівномірність розподілу дотичних напружень по перерізу досить умовне. Однак це припущення в багатьох випадках себе виправдовує, а тому в інженерній практиці його широко використовують при розрахунках болтових та клепаних з'єднань, шпонок, зварних з'єднань та ін.

**Розглянемо плоский елемент**  $ABCD$  (рисунок 3.3) стрижня, взятий з рисунка 3.1, б. **Дотичні напруження**  $\tau$  викликають в ньому лінійні та кутові деформації, так звані зсуви. **Абсолютний зсув** елемента, що розглядається  $ABCD$ , це відстань  $CC'$ , на яку **елементарний відрізок**  $BC$  зміщується відносно **відрізка**  $AD$ .

$$CC' = a$$

**Відносним зсувом** є відношення абсолютного зсуву  $a$  до товщини виділеного елемента  $h$ . Через те, що деформації малі та практично не змінюють початкових розмірів тіла, то

$$\frac{a}{h} = \operatorname{tg} \gamma = \gamma \quad (3.2) \quad \text{де } \gamma - \text{кут зсуву.}$$

Експериментально встановлено, що в певних межах **деформація зсуву протікає пружно**, а величина її **пропорційна дотичним напруженням**  $\tau$

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (3.3)$$

Це співвідношення є **законом Гука при зсуві**.

**Коефіцієнт пропорційності**  $G$  є **модулем пружності при зсуві** або **модулем пружності другого роду** (розмірність Н/м<sup>2</sup>, кг/см<sup>2</sup> або Па).

У загальному вигляді співвідношення між **модулем пружності**  $G$ , **модулем Юнга**  $E$  та **коефіцієнтом Пуассона**  $\mu$  виражається формулою

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (3.4)$$

Враховуючи співвідношення (3.1) та (3.2) закон Гука при зсуві можна записати у вигляді: 
$$a = \frac{Q \cdot h}{G \cdot F} \quad (3.5)$$

Формула (3.5) виражає **закон Гука для абсолютного зсуву**.

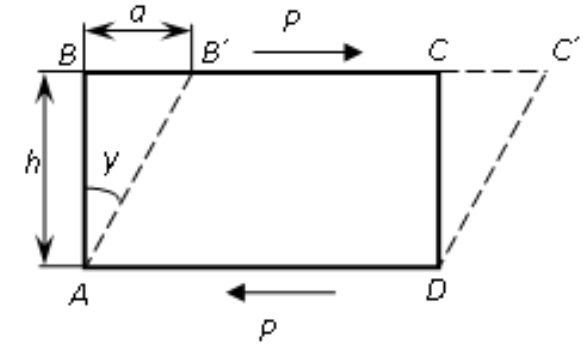


Рисунок 3.3 – Деформації зсуву





Графічно закон Гука при зсуві показаний на рисунку 3.4.

Розглянемо випадок плоского напруженого стану елемента (рисунок 3.5), коли по його гранях діють головні напруження

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \sigma, \quad (\sigma_2 = 0).$$

Раніше вже було отримано, що найбільші дотичні напруження  $\tau_{\max}$  діють на площадках, розташованих під кутом  $\alpha = 45^\circ$  по відношенню до головних площадок та дорівнюють

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \sigma$$

Нормальні напруження на цих площадках дорівнюють нулю:

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2 45^\circ + \sigma_3 \sin^2 45^\circ = \frac{\sigma_1}{2} + \frac{\sigma_3}{2} = 0$$

Аналогічно  $\sigma_y = 0$

Таким чином, на отриманих площадках відсутні нормальні напруження, а дотичні напруження приймають максимальні значення. **Ці площадки є площадками чистого зсуву.**

#### Умови міцності при зсуві

У деяких конструкціях по окремих перерізах діють значні дотичні напруження. У цих же перерізах, зазвичай, діють і нормальні напруження, а тому вони не є площадками чистого зсуву.

Однак, якщо нормальні напруження в них значно менші ніж дотичні, то в наближених розрахунках враховуються тільки дотичні напруження, а зазначені перерізи при цьому розглядаються як площадки чистого зсуву.

В цьому випадку при розрахунках на зсув (зріз) умова міцності має вигляд:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max}}{F} \leq [\tau_c] \quad (3.5)$$

де  $[\tau_c]$  – допустиме напруження на зріз, яке визначається найчастіше через допустиме напруження на розтяг  $[\sigma]$

Для пластичних матеріалів приймають зазвичай  $[\tau_c] = (0,5 \dots 0,6) \cdot [\sigma]$ , для крихких матеріалів  $[\tau_c] = (0,7 \dots 1,0) \cdot [\sigma]$ .

ОНИЩЕНКО С.В., КОЛОСОВ Д.Л., ДОЛГОВ О.М. ТЕОРЕТИЧНА ТА ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА. КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

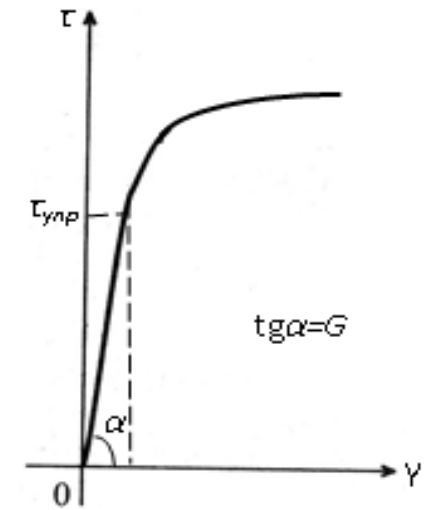


Рисунок 3.4 – Діаграма зсуву

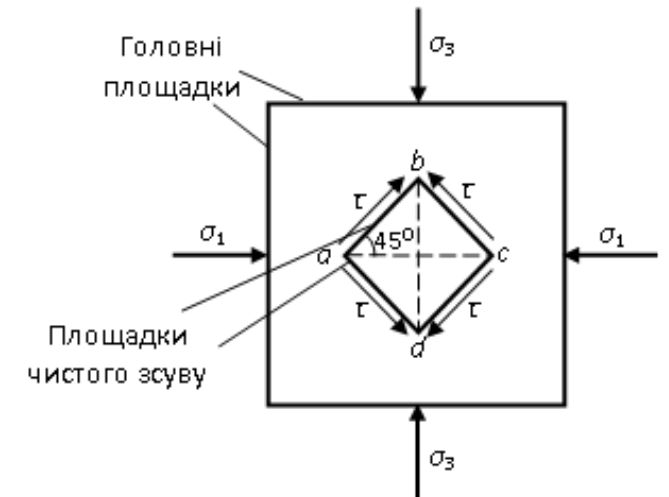


Рисунок 3.5 – Площадки чистого зсуву





Кручення

Кручення – це такий вид деформації стрижня, коли в його поперечних перерізах виникають лише тільки крутні моменти.

Стрижень, який зазнає деформацію кручення, називають валом.

Крученню піддаються багато деталей машин та споруд: вали двигунів та верстатів, осі моторних вагонів та локомотивів, гвинтові пружини, елементи просторових конструкцій та ін.

Дослідження показали, що характер деформації багато в чому залежить від форми поперечного перерізу. Найбільш поширені вали круглого та трубчастого перерізу.

Крутний момент.

Розглянемо випадок, коли прямий стрижень (вал) знаходиться в стані спокою або рівномірного обертання під дією зовнішніх крутних моментів (рисунок 4.1).

Умовою його рівноваги буде  $\sum M_k = 0$  тобто  $M_1 - M_2 + M_3 + M_4 = 0$

Визначимо величини внутрішніх крутних моментів  $M_{кр}$  для довільно обраного поперечного перерізу.

Для цього скористаємося методом перерізів.

Проведемо на деякій відстані  $x$  від лівого кінця вала поперечний переріз  $m-n$  та розглянемо рівновагу однієї з частин вала.

При цьому дію відкинутої частини замінимо відповідним силовим фактором – крутним моментом  $M_{кр}$ .

З умови рівноваги лівої частини вала  $\sum M_i^{лев} = M_1 - M_2 + M_{кр} = 0$  маємо  $M_{кр}^{лев} = M_2 - M_1$

Умови рівноваги правої частини  $\sum M_i^{пр} = M_{кр} - M_3 - M_4 = 0$  дають  $M_{кр}^{пр} = M_3 + M_4$

Порівнюючи отримані значення  $M_{кр}$  в перерізі зліва та справа з умовою рівноваги всього вала, приходимо до висновку, що

$$M_{кр}^{лев} = M_{кр}^{пр}$$

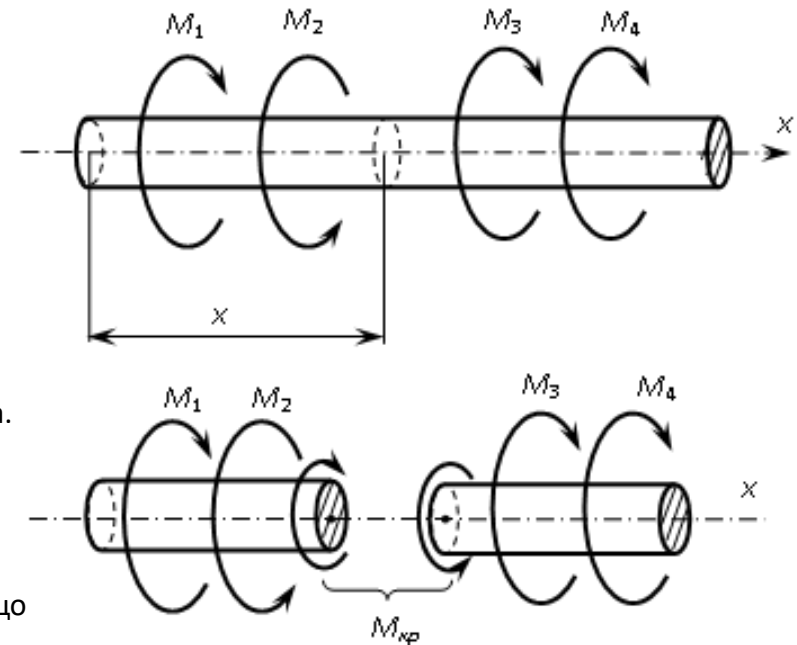


Рисунок 4.1 – Крутний момент вала

Таким чином, крутний момент в довільному перерізі стрижня чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх моментів, що скручують, прикладених по одну сторону від перерізу. При складанні умов рівноваги було використано таке правило знаків  $M_{кр}$ .

Якщо дивитися на поперечний переріз з боку зовнішньої нормалі, то крутний момент  $M_{кр}$  вважається позитивним, якщо його видно спрямованим проти годинникової стрілки. Зміну крутних моментів по довжині вала зручно зображувати графічно на епюрі крутних моментів.





Приклади побудови епюр крутних моментів

**Приклад 1.** Прямий стрижень навантажений трьома крутними моментами та затиснений зліва (рисунок 4.2).

Якщо до вала докладено кілька зовнішніх моментів, то його необхідно розбити на ділянки. Межами ділянок є перерізи, в яких прикладені зосереджені зовнішні моменти (в тому числі й реактивні).

У довільному перерізі кожної ділянки визначаємо значення крутного моменту, складаючи умови рівноваги:

$$M_{кр1} = 0 \text{ при } (0 \leq x \leq a);$$

$$M_{кр2} = 30 \text{ Н}\cdot\text{м при } (a \leq x \leq a + b);$$

$$M_{кр3} = -10 \text{ Н}\cdot\text{м при } (a + b \leq x \leq a + b + c);$$

$$M_{кр4} = 10 \text{ Н}\cdot\text{м при } (a + b + c \leq x \leq a + b + c + d).$$

За отриманими значеннями  $M_{кр}$  будуємо епюру крутних моментів згідно з правилами. В усіх перерізах кожної ділянки крутний момент залишається постійним та змінюється стрибкоподібно тільки при переході через кордони ділянок – в місцях прикладання зовнішніх зосереджених моментів.

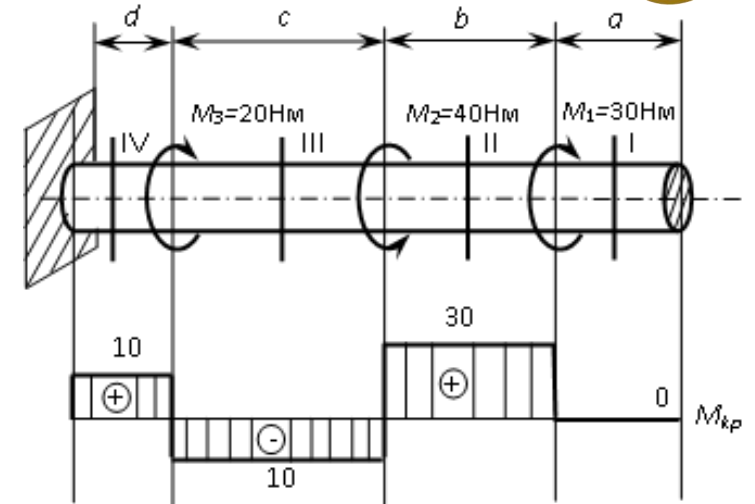


Рисунок 4.2 – Побудова епюри  $M_{кр}$

**Приклад 2.** Прямий стрижень навантажений розподіленим крутним моментом інтенсивністю  $m$  та зосередженим  $M_1$ , та затиснений зліва (рисунок 4.3).

У разі розподіленого моменту значення  $M_{кр}$  на першій ділянці довжиною  $a$  дорівнює

$$M_{кр1} = m \cdot x \text{ при } (0 \leq x \leq a);$$

Тоді при  $x = 0$   $M_{кр1} = 0$ , а при  $x = a$   $M_{кр1} = m \cdot a$ .

Відповідно  $M_{кр2} = m \cdot a$  при  $(a \leq x \leq a + b)$ .

$$M_{кр3} = M_1 + m \cdot a \text{ при } (a + b \leq x \leq a + b + c).$$

Будуємо епюру крутних моментів.

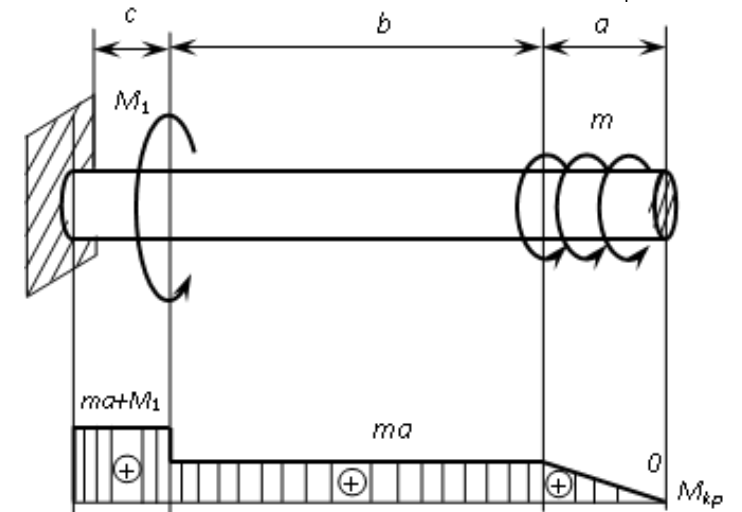


Рисунок 4.3 – Епюра  $M_{кр}$





### Визначення деформацій та напружень при крученні

Спостерігаючи за характером викривлення прямокутної сітки, нанесеної на бічну поверхню циліндричного стрижня, під дією моментів, що скручують, (рисунок 4.4) можна помітити, що

- 1) контри поперечних перерізів в процесі деформації залишаються плоскими, тобто виконується гіпотеза Бернуллі,
- 2) відстані між поперечними перерізами (уздовж осі вала) не змінюються,
- 3) радіуси поперечних перерізів не викривляються (залишаються прямолінійними) та зберігають свою довжину,
- 4) поперечні перерізи, залишаючись плоскими, повертаються навколо осі відносно один одного на деякий кут, що є кутом закручування.

**Висновок:** На підставі цих фактів кручення циліндричного стрижня можна уявити як результат послідовних зсувів, викликаних взаємним поворотом поперечних перерізів, внаслідок чого в останніх виникають тільки дотичні напруження, а нормальні дорівнюють нулю.

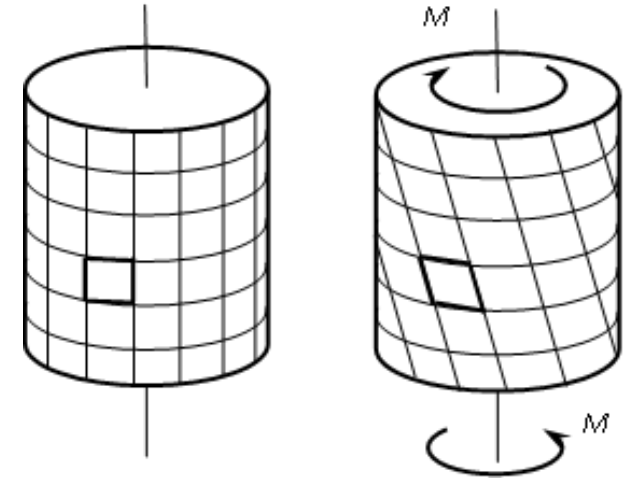


Рисунок 4.4 – Деформації при крученні

Розглянемо вал **радіусом  $r$** , що затиснений одним кінцем (рисунок 4.5), на вільному кінці якого прикладена **пара сил з моментом  $M$** .

На бічній поверхні вала проведемо **твірну  $KE$** , яка після закручування займе положення  $KE_1$ .

Внаслідок кручення вала **переріз I–I**, взятий на відстані  $x$  від защемлення, повернеться на кут  $\varphi$ , а сусідній з ним переріз II–II – на кут  $\varphi + d\varphi$ . Таким чином, переріз II–II по відношенню до перерізу I–I повернеться на кут  $d\varphi$ .

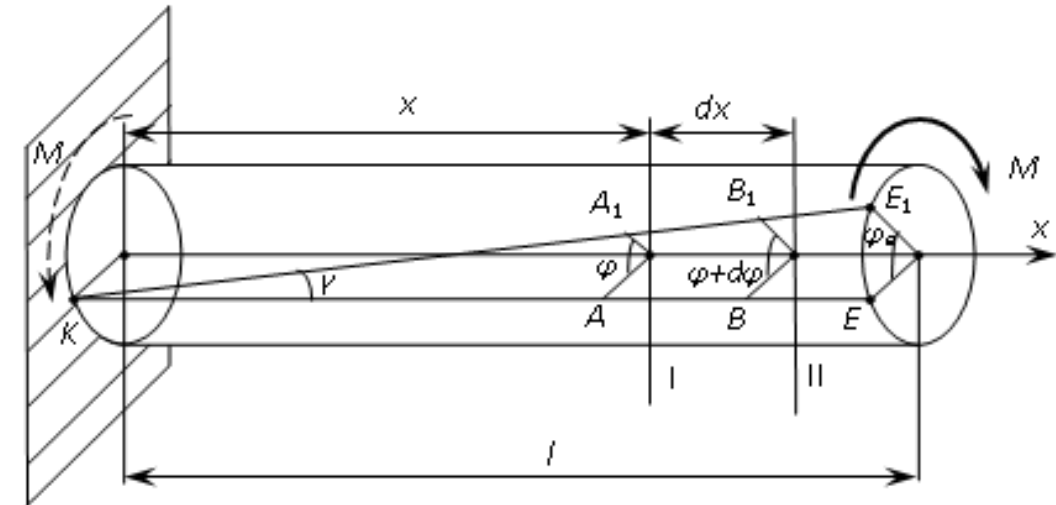


Рисунок 4.5 – Деформації вала при крученні



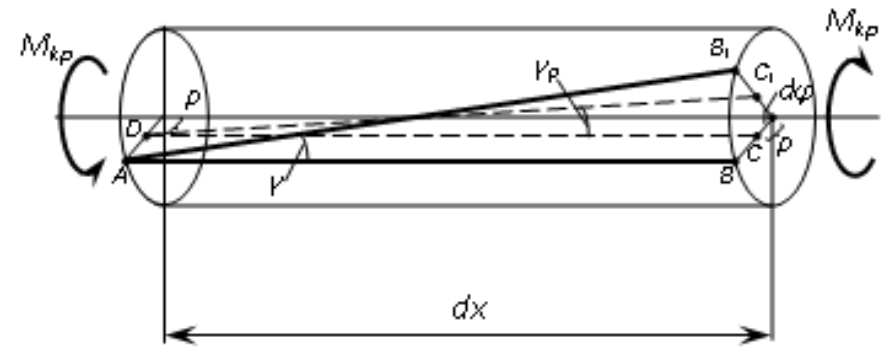


Рисунок 4.6 – Кути зсуву та закручування

**Визначення деформацій та напружень при крученні**

Розглянемо окремо елемент вала довжиною  $dx$ . Для зручності будемо вважати його лівий переріз нерухомим (рисунок 4.6).

Твірна  $AB$  відхилиться на нескінченно малий кут  $\gamma$  та займе **положення  $AB_1$** . Кут зсуву поздовжнього волокна, що лежить на поверхні вала, визначається рівністю:

$$\gamma = \frac{BB_1}{AB} = \frac{r \cdot d\varphi}{dx}$$

Для довільного волокна, що лежить на відстані  $\rho$  від осі, матимемо

$$\gamma_\rho = \frac{CC_1}{DC} = \frac{\rho \cdot d\varphi}{dx}$$

Відношення  $\frac{d\varphi}{dx} = \Theta$  є **відносним кутом закручування**,

а елементарний кут  $d\varphi$  – **абсолютним кутом закручування** вала.

На підставі закону Гука при зсуві можна записати

$$\tau_\rho = \gamma_\rho \cdot G = G \cdot \rho \frac{d\varphi}{dx} \quad (4.1)$$

Із (4.1) витікає, що значення дотичних напружень в точках поперечного перерізу пропорційні їх відстаням від осі вала. Максимальні напруження діють у найбільш віддалених від осі точках поблизу зовнішньої поверхні вала.

Закон розподілу (**епюра**) **дотичних напружень** показано на рисунку 4.7.

$$\tau_{\max} = \gamma \cdot G = G \cdot r \frac{d\varphi}{dx} \quad (4.2)$$

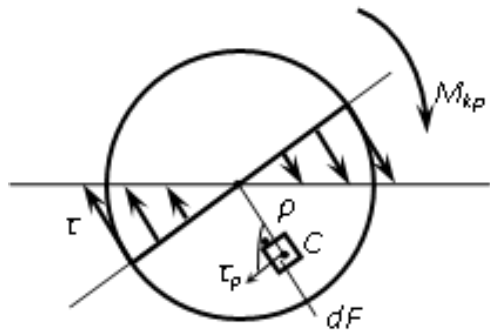


Рисунок 4.7 – Епюра  $\tau$

Величину відносного кута закручування  $\frac{d\varphi}{dx}$  визначимо з тієї умови, що діючі в поперечному перерізі вала дотичні напруження приводяться до пари сил, момент якої дорівнює крутному моменту в перерізі  $M_{кр}$

Виділимо навколо **довільної точки C** перерізу **елементарну площадку  $dF$** , на якій діє елементарна сила  $\tau_\rho dF$ .

Елементарний момент цієї сили відносно осі  $x$  буде дорівнювати

$$dM_{кр} = \tau_\rho dF \cdot \rho.$$

Крутний момент у перерізі знайдемо, сумуючи всі елементарні моменти

$$M_{кр} = \int_F \tau_\rho dF \rho. \quad (4.3)$$

Оскільки добуток  $G \frac{d\varphi}{dx}$

постійний для всіх точок перерізу, то з урахуванням (4.1) маємо

$$M_{кр} = G \frac{d\varphi}{dx} \int_F \rho^2 dF = G \cdot I_\rho \frac{d\varphi}{dx}. \quad (4.4)$$

де  $I_\rho$  – полярний момент інерції поперечного перерізу вала. Тоді

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_{кр}}{G \cdot I_\rho} \quad (4.5)$$



Визначення деформацій та напружень при крученні

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_{kp}}{G \cdot I_{\rho}} \quad (4.5)$$

Добуток  $G \cdot I_{\rho}$  - жорсткість стрижня при крученні. Підставивши (4.5) в (4.1), отримаємо вираз для дотичних напружень

$$\tau_{\rho} = \frac{M_{kp} \rho}{I_{\rho}} \quad (4.6)$$

Максимальні дотичні напруження  $\tau_{\max} = \frac{M_{kp} r}{I_{\rho}} \quad (4.7)$

Величина  $\frac{I_{\rho}}{r} = W_{\rho}$  – полярний момент опору перерізу.

Для суцільного круглого перерізу полярний момент інерції  $I_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32}$ .

Тоді момент опору  $W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16}$

Для кільцевого перерізу  $I_{\rho}$  та момент опору  $W_{\rho}$  (рисунок 4.8)

$$I_{\rho} = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4); \quad W_{\rho} = \frac{\pi D^3}{16} \left( 1 - \frac{d^4}{D^4} \right).$$

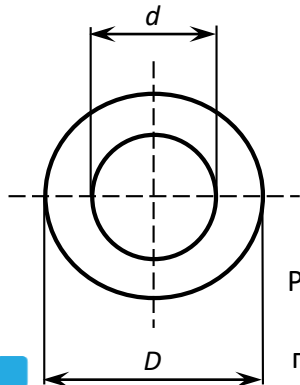


Рисунок 4.8 – Кільцевий переріз вала

Умови міцності та жорсткості при крученні. Підбір перерізу вала

З урахуванням вищевикладеного рівняння (4.7) набуде вигляду  $\tau_{\max} = \frac{M_{kp}}{W_{\rho}}$   
Тоді умова міцності при крученні матиме вигляд:  $\tau_{\max} = \frac{M_{kp}}{W_{\rho}} \leq [\tau] \quad (4.8)$

де  $[\tau]$  - допустиме напруження при крученні (чистому зсуві), зазвичай  $[\tau] = (0,5...0,6) \cdot [\sigma]$ .

При проектуванні елемента конструкції (наприклад, вала), зазвичай, необхідно визначити міцні розміри його перерізу (діаметр, та ін.).

Тоді з умов міцності за відомим значенням **крутного моменту**  $M_{kp}$  в небезпечному перерізі та заданому матеріалі діаметр суцільного перерізу вала визначається

$$d \geq 3 \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{kp}}{\pi \cdot [\tau]}} \cong 1,72 \sqrt[3]{\frac{M_{kp}}{[\tau]}}$$

Іноді при розрахунку вала відома **потужність на шківях**  $N$  (кВт), передана йому, та **частота обертання**  $n$  (об/хв.). У цьому випадку крутний момент  $M_{kp}$  в розрахункових формулах можна виразити через  $N$  та  $n$  наступним чином:

$$M_{kp} = \frac{30N}{\pi \cdot n} \cong 9,55 \frac{N}{n} \text{ (кН} \cdot \text{м)}.$$

Крім розрахунку на міцність вали розраховують і на жорсткість.

Із (8.5) можна визначити повний кут закручування вала **довжиною**  $l$ .  $\varphi_l = \int_0^l d\varphi = \int_0^l \frac{M_{kp}}{G \cdot I_{\rho}} dx$ .

Якщо діаметр по всій довжині вала та момент  $M_{kp}$  не змінюються, то кут закручування  $\varphi_l = \frac{M_{kp} l}{G \cdot I_{\rho}} \quad (4.9)$

Якщо стрижень ступінчастий або крутний момент змінюється по довжині стрибкоподібно, то  $\varphi_l$  визначають як суму кутів закручування на окремих ділянках

$$\varphi_l = \sum \frac{M_{kpi} \cdot l_i}{G \cdot I_{\rho i}}$$

**Відносний (погонний) кут закручування стрижня** – це відношення абсолютного кута закручування до довжини стрижня  $\Theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_{kp}}{G \cdot I_{\rho}}$ .

**Умова жорсткості** вала при крученні, яка обмежує відносні кути закручування має вигляд  $\Theta_{\max} = \frac{M_{kp}}{G \cdot I_{\rho}} \leq [\Theta] \quad (4.10)$

де  $[\Theta]$  – **допустимий відносний кут закручування** при статичному навантаженні. Зазвичай  $[\Theta] = 0,3$  градуси на кожен погонний метр довжини вала. Для того, щоб вал одночасно задовольняв умовам міцності та жорсткості, його треба розрахувати за обома умовами та з двох отриманих значень діаметра вибрати більший.



## Згин прямих стрижнів

Згином називають такий вид деформації, коли під дією зовнішніх сил в поперечних перерізах стрижня виникають згинальні моменти.

Якщо згинальний момент в перерізі є єдиним силовим фактором, а поздовжні та поперечні сили відсутні, то згин є **чистим**.

Якщо в поперечних перерізах стрижня разом із згинальними моментами діють і поперечні сили, то згин є **плоским поперечним**. В цьому випадку всі зовнішні сили перпендикулярні осі стрижня та разом із зовнішніми парами сил лежать в одній з **головних плоскостей**, утворених віссю стрижня та головною віссю його поперечного перерізу (рисунок 5.1).

Прямолінійний стрижень, що працює на згин, є **балкою**. З точки зору розрахунку на міцність, жорсткість та стійкість балкою є не тільки будівельна балка, але й вал, болт, вісь залізничного вагона та ін.

## Опори та опорні реакції.

Зазвичай, балки мають ті чи інші опори. Конструктивні форми опор дуже різні. Для розрахунків їх систематизують у вигляді трьох основних типів опор:

- ❖ **шарнірно-рухома опора**, в якій може виникати тільки **одна складова реакції** –  $R_y$ , спрямована перпендикулярно поверхні, на якій знаходиться опора (рисунок 5.2, а);
- ❖ **шарнірно-нерухома опора**, в якій можуть виникати дві взаємно перпендикулярні складові реакції –  $R_x$  та  $R_y$  (рисунок 5.2, б);
- ❖ **жорстке затиснення (закріплення)**, в якому можуть бути три складові – дві взаємно перпендикулярні **реакції** –  $R_x$  та  $R_y$  та **реактивний момент**  $M_c$  (рисунок 5.2, в)

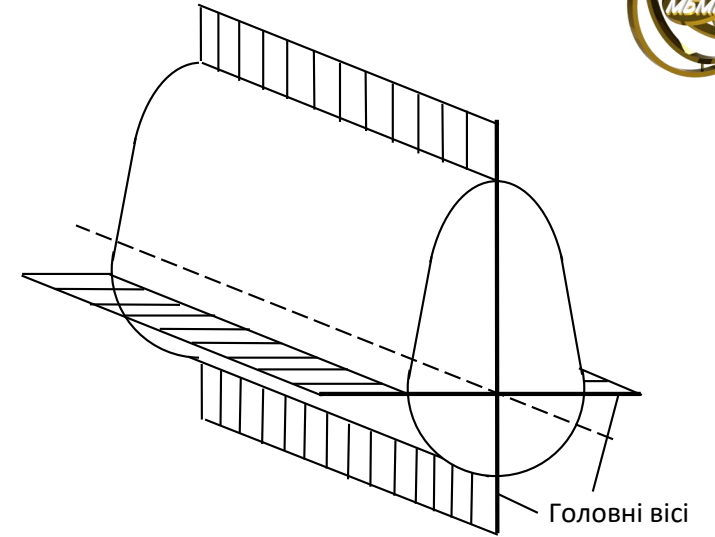


Рисунок 5.1 – Головні вісі балки

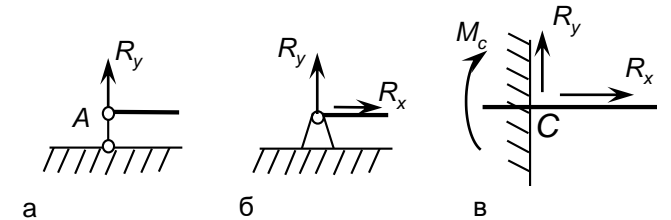


Рисунок 5.2 – Основні види опор

Для того, щоб балка не переміщувалася під дією навантаження, вона повинна бути **геометрично незмінюваною** (нерухомою). Це можливо при накладенні на неї трьох зовнішніх в'язей. Тоді вона є ще й **статично визначуваною**. При більшій кількості в'язей маємо статично невизначувану балку, при меншому – балка змінювана.

Для визначення опорних реакцій в статично визначуваних балках досить скласти три рівняння статки. При знаходженні опорних реакцій розподілене навантаження замінюють зосередженою силою. Для визначення опорних реакцій в статично невизначуваних балках додатково до рівнянь статки складають рівняння **сумісності** деформацій.





Балка на рисунку 5.3, а є **простою, однопрогоною**, або **двохопornoю**, а відстань між опорами називається прогоном.

**Консолю** є балка, затиснена одним кінцем та не має інших опор (рисунку 5.3, б) або частина балки, що звисає за опорою (рисунку 5.3, в).

Шарнірно оперта балка, що має консолі, є **консольною балкою** (рисунку 5.3, в). Балка на рисунку 5.3, г є **нерозрізною** та **статично невизначуваною**.

**Внутрішні силові фактори. Поперечна сила та згинальний момент.**

Розглянемо просту балку **AB** (рисунку 5.4), на яку діють **зосереджені сили  $P_1$  та  $P_2$** .

Для визначення внутрішніх зусиль скористаємося **методом перерізів**. Подумки розріжемо балку **перерізом  $m-n$**  на відстані  **$x$**  від лівого кінця та розглянемо рівновагу лівої її частини. Відкинувши зовнішні опори, замінимо їх реакціями лівої та правої опор – відповідно  **$R_A$  та  $R_B$** . Для збереження рівноваги розглянутої частини дію відкинутої правої частини замінимо внутрішніми зусиллями: **поперечною силою  $Q_y$**  та **згинальним моментом  $M_z$** .

Складемо умови рівноваги лівої частини балки:

$$\sum F_y = 0: R_A - P_1 - Q_y = 0;$$

$$\sum M_c = 0: R_A \cdot x - P_1(x - a) - M_z = 0.$$

З рівнянь рівноваги отримаємо

$$Q_y = R_A - P_1;$$

$$M_z = R_A \cdot x - P_1(x - a).$$

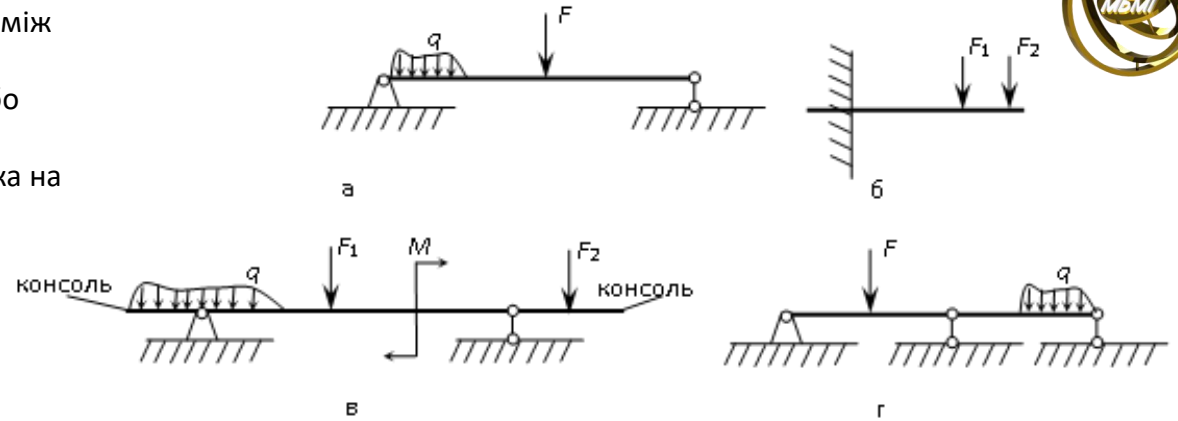


Рисунок 5.3 – Основні види балок

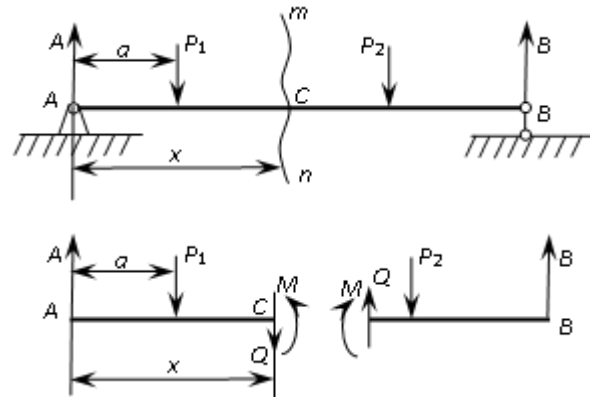


Рисунок 5.4 – Поперечна сила та згинальний момент

Тут  **$Q_y$**  – **головний вектор внутрішніх сил** є **поперечною** або **перерізуючою силою** в перерізі та чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, прикладених до балки по одну сторону від перерізу.

**$M_z$**  – **головний момент внутрішніх сил** є **згинальним моментом** в перерізі, дорівнює алгебраїчній сумі моментів зовнішніх сил, прикладених до балки по одну сторону від перерізу, відносно точки, що лежить в перерізі. Оскільки балка знаходиться в рівновазі, то значення  **$Q_y$**  та  **$M_z$**  для лівої та правої частини балки однакові по модулю.





**Правило знаків** для побудови епюр  $Q_y$  та  $M_z$

Встановимо наступне **правило знаків** для  $Q_y$  та  $M_z$  (рисунок 5.5):.

- ❖ **поперечна сила  $Q_y$**  в перерізі вважається позитивною, якщо її вектори прагнуть повернути частини розсіченої балки за годинниковою стрілкою, негативною – проти.
- ❖ **згинальний момент  $M_z$**  в перерізі вважається позитивним, якщо він згинає балку опуклістю вниз, а негативний – вгору.

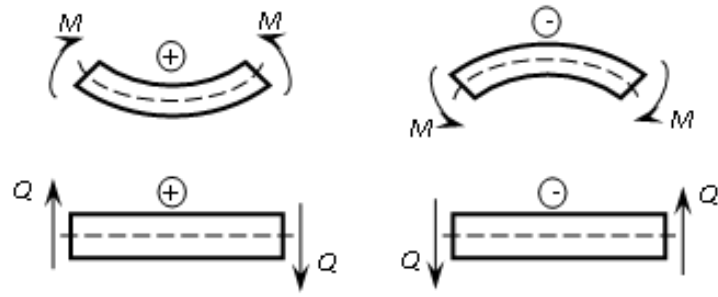


Рисунок 5.5 – Правило знаків при згині

**Побудова епюр Q та M**

Розглянемо побудову епюр поперечних сил та згинальних моментів на кількох простих прикладах

**Приклад 1.** Жорстко затиснена балка довжиною  $l$  (консоль) знаходиться під дією сили  $P$ , прикладеної до її вільного кінця (рисунок 5.6).

Проводимо переріз на відстані  $x$  від вільного кінця та розглянемо рівновагу її вільної частини.

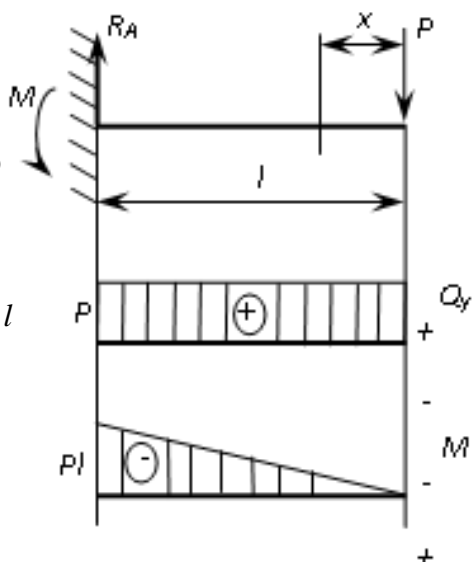


Рисунок 5.6 – Епюри  $Q_y$  та  $M_z$

Отримаємо  $Q_y = P; M_z = -P \cdot x$ ; при  $0 \leq x \leq l$

Тоді для  $x = 0$   $Q_y = P; M_z = 0$ ;

а для  $x = l$   $Q_y = P; M_z = -P \cdot l$

Будуємо епюри  $Q_y$  та  $M_z$  з урахуванням знаків. При цьому позитивні значення  $M_z$  відкладаємо вниз від осі епюри.

**Приклад 2.** Проста балка довжиною  $l$  навантажена посередині силою  $P$  (рисунок 5.7). Якщо до балки прикладено декілька зовнішніх сил, то її необхідно розбити на ділянки.

**Межами ділянок є:**

- ❖ перерізи, в яких прикладено зосереджені зовнішні зусилля (в тому числі і опорні реакції);
- ❖ перерізи, в яких прикладено зосереджені зовнішні моменти (в тому числі й опорні).

З умов рівноваги балки маємо  $R_A = R_B = \frac{P}{2}$

Дана балка має **дві ділянки довжиною  $l/2$** . Номери ділянок позначимо римськими цифрами. У довільному перерізі кожної ділянки визначаємо значення поперечної сили та згинального моменту, складаючи умови рівноваги.

I переріз: ( $0 \leq x \leq l/2$ ):  $Q_y = R_A = \frac{P}{2}; M_z = R_A \cdot x = \frac{P}{2} x$ ;

II переріз: ( $l/2 \leq x \leq l$ ):  $Q_y = R_A - P = -\frac{P}{2}; M_z = R_A \cdot x - P(x - \frac{l}{2}) = \frac{P}{2} l - \frac{P}{2} x$ ;

Тоді для  $x = 0$   $M_z = 0$ ; для  $x = \frac{l}{2}; M_z = \frac{Pl}{4}$ ; для  $x = l$   $M_z = 0$ ;

Отримані результати показуємо на епюрах.

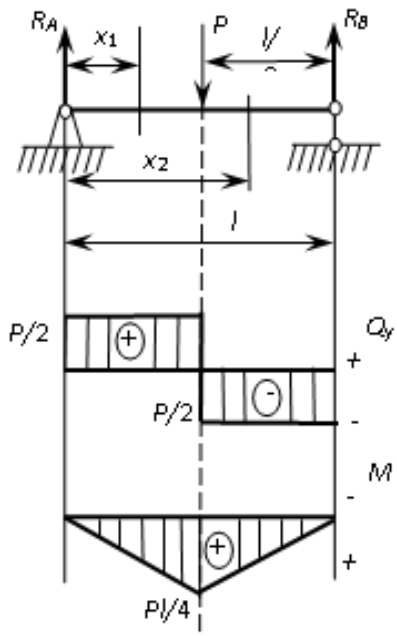


Рисунок 5.7 – Епюри  $Q_y$  та  $M_z$





**Диференціальні залежності Журавського при згині**

Встановимо деякі характерні особливості **епюр Q та M**, знання яких полегшать побудову епюр та дасть можливість в деякій мірі контролювати їх правильність.

Розглянемо довільну балку, що згинається деякими силами (рисунок 9.8). Розподілене навантаження будемо вважати позитивним, якщо воно спрямоване вгору.

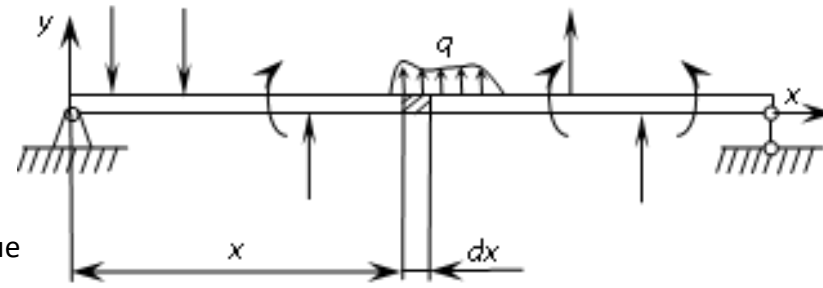


Рисунок 5.8 – Балка під довільним навантаженням

**Приклад 3.** Балка на двох опорах згинається під **рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю q** (рисунок 5.10). Оскільки балка симетрична, із рівнянь рівноваги маємо

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}$$

Розглянемо **переріз I-I** на **відстані x** від лівої опори. Для ділянки зліва від перерізу складаємо рівняння рівноваги та отримуємо з них необхідні значення внутрішніх зусиль.

$$\begin{cases} Q = R_A - q \cdot x = \frac{ql}{2} - qx; \\ M = R_A \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}; \end{cases} \text{ при } 0 \leq x \leq l$$

Тоді

$$Q(0) = \frac{ql}{2}; \quad M(0) = 0;$$

$$Q(l/2) = 0; \quad M(l/2) = \frac{ql^2}{8};$$

$$Q(l) = -\frac{ql}{2}; \quad M(l) = 0.$$

При побудові епюри згинального моменту необхідно враховувати диференційні залежності Журавського.

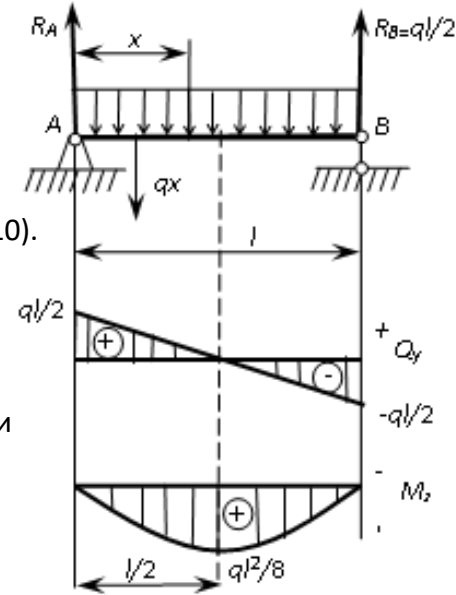


Рисунок 5.10 – Епюри  $Q_y$  та  $M_z$

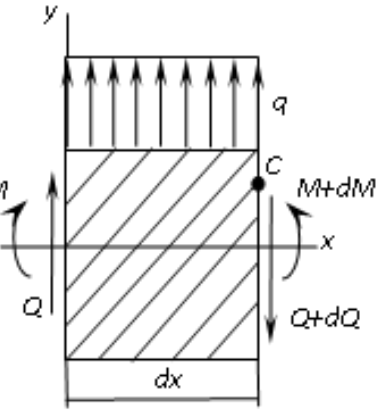


Рисунок 5.9 – Внутрішні зусилля

Двома поперечними перерізами, віддаленими один від одного на елементарну відстань dx, виділимо з балки елемент, до якого не прикладені зосереджені сили та моменти. Зліва в перерізі елемента діють **внутрішні зусилля Q та M**, а справа **Q + dQ та M + dM**.

Для виведення формул внутрішні зусилля в перерізах зображують спрямованими позитивно (рисунок 5.9).

Величини **dQ та dM** це збільшення внутрішніх зусиль на ділянці **dx** балки. Крім того, на елемент діє розподілене навантаження, перпендикулярне вісі балки, інтенсивність якого на ділянці dx можна вважати постійним через малість **dx**.

Рівняння рівноваги виділеного елемента мають вигляд:

$$\sum F_y = 0: \quad Q + q \cdot x - (Q + dQ) = 0;$$

$$\sum M_c = 0:$$

$$M + Q \cdot dx + q \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} - M - dM = 0$$

З першого рівняння отримаємо

$$\frac{dQ}{dx} = q \quad (5.1)$$

Із другого рівняння, нехтуючи складовими вищого порядку малості, маємо

$$\frac{dM}{dx} = Q \quad (5.2)$$

З (5.1) та (5.2)

$$\frac{d^2M}{dx^2} = q \quad (5.3)$$

Співвідношення (5.1) – (5.3) є

**диференційними залежностями Журавського при згині.**



# ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ

Сертифікація досягнень студентів здійснюється за допомогою прозорих процедур, що ґрунтуються на об'єктивних критеріях відповідно до «Положення про оцінювання результатів навчання здобувачів вищої освіти». Досягнутий рівень компетентностей відносно очікуваних, що ідентифікований під час контрольних заходів, відображає реальний результат навчання студента за дисципліною.

## Шкали

Оцінювання навчальних досягнень студентів НТУ «ДП» здійснюється за рейтинговою (100-бальною) та інституційною шкалами. Остання необхідна (за офіційною відсутністю національної шкали) для конвертації (переведення) оцінок мобільних студентів.

## Шкали оцінювання навчальних досягнень студентів НТУ «ДП»

Рейтингова	Інституційна
90...100	відмінно / Excellent
74...89	добре / Good
60...73	задовільно / Satisfactory
0...59	незадовільно / Fail

Кредити навчальної дисципліни зараховуються, якщо студент отримав підсумкову оцінку не менше 60-ти балів. Нижча оцінка вважається академічною заборгованістю, що підлягає ліквідації відповідно до Положення про організацію освітнього процесу НТУ «ДП».

# ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ

## Засоби та процедури

Зміст засобів діагностики спрямовано на контроль рівня сформованості знань, умінь, комунікації, автономності та відповідальності студента за вимогами НРК до 6-го кваліфікаційного рівня під час демонстрації регламентованих робочою програмою результатів навчання.

Студент на контрольних заходах має виконувати завдання, орієнтовані виключно на демонстрацію дисциплінарних результатів навчання.

Засоби діагностики, що надаються студентам на контрольних заходах у вигляді завдань для поточного та підсумкового контролю, формуються шляхом конкретизації вихідних даних та способу демонстрації дисциплінарних результатів навчання.

Засоби діагностики (контрольні завдання) для поточного та підсумкового контролю дисципліни затверджуються кафедрою.

Види засобів діагностики та процедур оцінювання для поточного та підсумкового контролю дисципліни подано нижче.

Під час поточного контролю лекційні заняття оцінюються шляхом визначення якості виконання контрольних конкретизованих завдань. Практичні заняття оцінюються якістю виконання контрольного або індивідуального завдання.

Якщо зміст певного виду занять підпорядковано декільком дескрипторам, то інтегральне значення оцінки може визначатися з урахуванням вагових коефіцієнтів, що встановлюються викладачем.



# ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ

## Засоби діагностики та процедури оцінювання

ПОТОЧНИЙ КОНТРОЛЬ			ПІДСУМКОВИЙ КОНТРОЛЬ	
навчальне заняття	засоби діагностики	процедури	засоби діагностики	процедури
лекції	контрольні завдання за кожною темою	виконання завдання під час лекцій	комплексна контрольна робота (ККР)	визначення середньозваженого результату поточних контролів; виконання ККР під час заліку за бажанням студента
практичні	контрольні завдання за кожною темою	виконання завдань під час практичних занять		
	або індивідуальне завдання	виконання завдань під час самостійної роботи		

За наявності рівня результатів поточних контролів з усіх видів навчальних занять не менше 60 балів, підсумковий контроль здійснюється без участі студента шляхом визначення середньозваженого значення поточних оцінок.

Незалежно від результатів поточного контролю кожен студент під час заліку має право виконувати ККР, яка містить завдання, що охоплюють ключові дисциплінарні результати навчання.

Кількість конкретизованих завдань ККР повинна відповідати відведеному часу на виконання. Кількість варіантів ККР має забезпечити індивідуалізацію завдання.

Значення оцінки за виконання ККР визначається середньою оцінкою складових (конкретизованих завдань) і є остаточним.

Інтегральне значення оцінки виконання ККР може визначатися з урахуванням вагових коефіцієнтів, що встановлюється кафедрою для кожного дескриптора НРК.



# ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ

## Критерії

Реальні результати навчання студента ідентифікуються та вимірюються відносно очікуваних під час контрольних заходів за допомогою критеріїв, що описують дії студента для демонстрації досягнення результатів навчання.

Для оцінювання виконання контрольних завдань під час поточного контролю лекційних і практичних занять в якості критерію використовується коефіцієнт засвоєння, що автоматично адаптує показник оцінки до рейтингової шкали:

$$O_i = 100 a/m,$$

де  $a$  – число правильних відповідей або виконаних суттєвих операцій відповідно до еталону рішення;  $m$  – загальна кількість запитань або суттєвих операцій еталону.

Індивідуальні завдання та комплексні контрольні роботи оцінюються експертно за допомогою критеріїв, що характеризують співвідношення вимог до рівня компетентностей і показників оцінки за рейтинговою шкалою.

Зміст критеріїв спирається на компетентнісні характеристики, визначені НРК для бакалаврського рівня вищої освіти (подано нижче).



# ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ

## Загальні критерії досягнення результатів навчання для 6-го кваліфікаційного рівня за НРК

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
<b>Знання</b>		
<ul style="list-style-type: none"> <li>концептуальні наукові та практичні знання, критичне осмислення теорій, принципів, методів і понять у сфері професійної діяльності та/або навчання</li> </ul>	Відповідь відмінна – правильна, обґрунтована, осмислена. Характеризує наявність: - концептуальних знань; - високого ступеню володіння станом питання; - критичного осмислення основних теорій, принципів, методів і понять у навчанні та професійній діяльності	95-100
	Відповідь містить негрубі помилки або описки	90-94
	Відповідь правильна, але має певні неточності	85-89
	Відповідь правильна, але має певні неточності й недостатньо обґрунтована	80-84
	Відповідь правильна, але має певні неточності, недостатньо обґрунтована та осмислена	74-79
	Відповідь фрагментарна	70-73
	Відповідь демонструє нечіткі уявлення студента про об'єкт вивчення	65-69
	Рівень знань мінімально задовільний	60-64
Рівень знань незадовільний	<60	



# ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ

## Загальні критерії досягнення результатів навчання для 6-го кваліфікаційного рівня за НРК

Уміння/навички		
♦ поглиблені когнітивні та практичні уміння/навички, майстерність та інноваційність на рівні, необхідному для розв'язання складних спеціалізованих задач і практичних проблем у сфері професійної діяльності або навчання	Відповідь характеризує уміння: - виявляти проблеми; - формулювати гіпотези; - розв'язувати проблеми; - обирати адекватні методи та інструментальні засоби; - збирати та логічно й зрозуміло інтерпретувати інформацію; - використовувати інноваційні підходи до розв'язання завдання	95-100
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності з негрубими помилками	90-94
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації однієї вимоги	85-89
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації двох вимог	80-84
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації трьох вимог	74-79
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації чотирьох вимог	70-73
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності при виконанні завдань за зразком	65-69
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання при виконанні завдань за зразком, але з неточностями	60-64
	Рівень умінь/навичок незадовільний	<60

# ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ

## Загальні критерії досягнення результатів навчання для 6-го кваліфікаційного рівня за НРК

Комунікація	
<p>Вільне володіння проблематикою галузі.</p> <p>Зрозумілість відповіді (доповіді). Мова:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- правильна; чиста; ясна; точна; логічна; виразна; лаконічна.</li> </ul> <p>Комунікаційна стратегія:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- послідовний і несуперечливий розвиток думки;</li> <li>- наявність логічних власних суджень;</li> <li>- доречна аргументації та її відповідність відстоюваним положенням;</li> <li>- правильна структура відповіді (доповіді);</li> <li>- правильність відповідей на запитання;</li> <li>- доречна техніка відповідей на запитання;</li> <li>- здатність робити висновки та формулювати пропозиції</li> </ul>	95-100
<p>Достатнє володіння проблематикою галузі з незначними хибами.</p> <p>Достатня зрозумілість відповіді (доповіді) з незначними хибами.</p> <p>Доречна комунікаційна стратегія з незначними хибами</p>	90-94
<p>Добре володіння проблематикою галузі.</p> <p>Добра зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано три вимоги)</p>	85-89
<p>Добре володіння проблематикою галузі.</p> <p>Добра зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано чотири вимоги)</p>	80-84
<p>Добре володіння проблематикою галузі.</p> <p>Добра зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано п'ять вимог)</p>	74-79
<p>Задовільне володіння проблематикою галузі.</p> <p>Задовільна зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано сім вимог)</p>	70-73
<p>Часткове володіння проблематикою галузі.</p> <p>Задовільна зрозумілість відповіді (доповіді) та комунікаційна стратегія з хибами (сумарно не реалізовано дев'ять вимог)</p>	65-69
<p>Фрагментарне володіння проблематикою галузі.</p> <p>Задовільна зрозумілість відповіді (доповіді) та комунікаційна стратегія з хибами (сумарно не реалізовано 10 вимог)</p>	60-64
Рівень комунікації незадовільний	<60

# ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ

## Загальні критерії досягнення результатів навчання для 6-го кваліфікаційного рівня за НРК

<ul style="list-style-type: none"> <li>♦ управління складною технічною або професійною діяльністю чи проектами;</li> <li>♦ спроможність нести відповідальність за вироблення та ухвалення рішень у непередбачуваних робочих та/або навчальних контекстах;</li> <li>♦ формування суджень, що враховують соціальні, наукові та етичні аспекти;</li> <li>♦ організація та керівництво професійним розвитком осіб та груп;</li> <li>♦ здатність продовжувати навчання із значним ступенем автономії</li> </ul>	<p>Відмінне володіння компетенціями менеджменту особистості, орієнтованих на:</p> <p>1) управління комплексними проектами, що передбачає:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- дослідницький характер навчальної діяльності, позначена вмінням самостійно оцінювати різноманітні життєві ситуації, явища, факти, виявляти і відстоювати особисту позицію;</li> <li>- здатність до роботи в команді;</li> <li>- контроль власних дій;</li> </ul> <p>2) відповідальність за прийняття рішень в непередбачуваних умовах, що включає:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- обґрунтування власних рішень положеннями нормативної бази галузевого та державного рівнів;</li> <li>- самостійність під час виконання поставлених завдань;</li> <li>- ініціативу в обговоренні проблем;</li> <li>- відповідальність за взаємовідносини;</li> </ul> <p>3) відповідальність за професійний розвиток окремих осіб та/або груп осіб, що передбачає:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- використання професійно-орієнтованих навичок;</li> <li>- використання доказів із самостійною і правильною аргументацією;</li> <li>- володіння всіма видами навчальної діяльності;</li> </ul> <p>4) здатність до подальшого навчання з високим рівнем автономності, що передбачає:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- ступінь володіння фундаментальними знаннями;</li> <li>- самостійність оцінних суджень;</li> <li>- високий рівень сформованості загальнонавчальних умінь і навичок;</li> <li>- самостійний пошук та аналіз джерел інформації</li> </ul>	<b>95-100</b>
	Упевнене володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано дві вимоги)	90-94
	Добре володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано три вимоги)	85-89
	Добре володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано чотири вимоги)	80-84
	Добре володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано шість вимог)	74-79
	Задовільне володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано сім вимог)	70-73
	Задовільне володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано вісім вимог)	65-69
	Рівень відповідальності і автономії фрагментарний	60-64
	Рівень відповідальності і автономії незадовільний	<60



**Онищенко** Сергій Валерійович  
**Колосов** Дмитро Леонідович  
**Долгов** Олександр Михайлович

Конспект лекцій з дисципліни «Теоретична та прикладна механіка» для здобувачів першого рівня вищої освіти спеціальності 151 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології

Видається в авторській редакції

Підписано до видання 09.09.2022

Електронний ресурс Авт. арк. 3,68

Розроблено і видано в  
Національному технічному університеті  
«Дніпровська політехніка»  
49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19.

