

© О.М. Коптовец<sup>1</sup>, Л.Н. Ширін<sup>1</sup>, В.В. Яворська<sup>1</sup>, А.О. Герасименко<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Національний технічний університет «Дніпровська політехніка», Дніпро, Україна

## ІДЕНТИФІКАЦІЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ФРИКЦІЙНИХ КОЛИВАНЬ У ГАЛЬМІ

© O. Koptovets<sup>1</sup>, L. Shyrin<sup>1</sup>, V. Yavorska<sup>1</sup>, A. Herasymenko<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Dnipro University of Technology, Dnipro, Ukraine

## IDENTIFICATION AND STUDY OF THE CHARACTERISTICS OF FRICTION OSCILLATIONS IN THE BRAKE

**Мета.** Дослідження режимів фрикційних коливань гальмівного механізму, що встановилися, полягає в знаходженні рішення вихідної динамічної задачі з тертям, яке задовольняє умовам періодичності. При цьому період руху динамічної системи заздалегідь не відомий. Ця динамічна система описується нелінійною диссипативною неавтономною системою диференціальних рівнянь.

**Методика.** Комплексна методика спектрального аналізу коливань гальмівного механізму ґрунтується на припущенні, що його рухи є періодичними. Якщо в аналізованій динамічній системі виникає детермінований хаос, то автокореляційна функція тимчасового ряду переміщень повинна мати кінцевий носій, тобто перетворюватися в нуль поза кінцевим інтервалом часу.

**Результати.** Дослідження характеристик коливальних процесів у гальмівних механізмах виконуються поетапно з використанням методу обчислювального експерименту. На першому етапі проводиться чисельне рішення динамічної задачі з тертям, що розглядається, за допомогою обчислювального алгоритму. В результаті обчислюються тимчасові ряди переміщень колодки гальмівного механізму. На другому етапі обчислювального експерименту проводиться дослідження одержаних часових рядів.

**Наукова новизна.** Для ідентифікації характеристик фрикційних коливань у гальмі шахтного локомотиву розроблено комплексний метод обчислювального експерименту, який базується на чисельному рішенні динамічної задачі з тертям, спектральному аналізі амплітуд переміщень, швидкостей і прискорень гальмівного механізму та дослідженнях їх фазових діаграм у змінних системи «переміщення-швидкість».

**Практична значимість.** Математична модель коливань гальмівного механізму та обчислювальний алгоритм для її чисельного дослідження реалізуються у вигляді комп'ютерної програми для персональних ЕОМ алгоритмічною мовою FORTRAN. Для компіляції програми можуть бути використані практично всі доступні комерційні компілятори, включаючи Compaq Visual Fortran 6.6 та Intel Visual Fortran 10, а також некомерційні компілятори, які розповсюджуються за ліцензією GNU.

**Ключові слова:** гальмо, трибологічна система, нелінійна динамічна задача з тертям, обчислювальний експеримент, автокореляційні функції, період коливань, спектральний аналіз, фазові діаграми, метод продовження за параметром.

**Вступ.** У світовій практиці гальмобудування фрикційні гальма не відносять до трибологічних систем. Рішення контактних задач з тертям та контактних фрикційних коливань, побудова моделей трибомеханіки в гальмобудівництві не

застосовується. Гальмування розглядається як задача в механіці твердого тіла у вигляді емпіричної науки про тертя.

В теорії тяги прийнято припущення, згідно з яким гальмівна передача є механізмом з жорсткими ланками. У зв'язку з цим умови виникнення фрикційних коливань при навантаженні гальм, можливість керувати тертям за рахунок їх демпфування та використання нових технічних рішень не розглядаються.

Гальмо з напруженим замкнутим кінематичним контуром є адаптивним механізмом змінної структури з ланками в якості адаптованих зв'язків для умов взаємодії колодки і колеса на відносному їх переміщенні в залежності від параметрів робочого процесу тертя.

Використовуючи методи коливань, динаміки машин і теорії тертя можливо з певним рівнем наближення скласти рівняння руху для гальмівного механізму. Аналітичне розв'язання подібних диференціальних рівнянь це складна задача, що потребує експериментальних досліджень для отримання параметрів руху та чисельного розв'язання рівнянь.

В якості динамічної моделі колодочно-колісного гальма шахтного локомотиву будемо розглядати коливальну систему з двома ступенями свободи (рис.), що складається з колодки масою  $m$ , що ковзає по колесу радіусом  $R$ , що обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$ , і упругодемфуючого елемента Фойхта, жорсткість та коефіцієнт в'язкості якого позначимо  $c$  і  $b$  відповідно. Кривизною поверхонь колодки та колеса нехтуватимемо. До колодки гальмівного механізму шахтного локомотиву прикладено зовнішнє постійне зусилля  $Q$ , що притискає її до колеса. Номінальна площинка контакту колодки та колеса має форму прямокутника зі сторонами  $2a$  та  $e$ . Область фактичної контактної взаємодії дискретна і складається із сукупності пятен контакту. Причиною виникнення дискретності контакту є шорсткість поверхонь, що контактують.

Упругодемфуючий елемент моделює конструктивний зв'язок гальмівного механізму, що діє у напрямку під кутом  $\alpha \leq 90^\circ$  до площини тертя. Зазначимо, що наявність у моделі такого зв'язку призводить до координатного взаємозв'язку нормальних і тангенціальних коливань колодки. Положення колодки визначається її координатами  $\{x(t), y(t)\}$ .

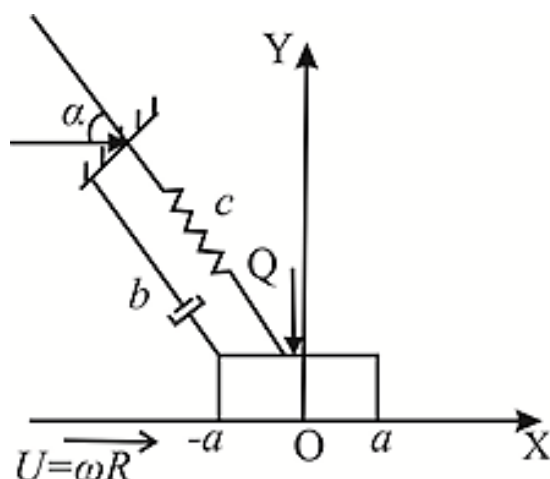


Рис. Розрахункова схема динамічної моделі гальмівного механізму

Застосування обчислювального алгоритму інтегрування рівнянь руху динамічної системи [1, 2], розробленої для колодочно-колісного гальма шахтного локомотива [3–5], дозволяє отримати тимчасові ряди переміщень гальмівної колодки  $\{x^n\}$  і  $\{y^n\}$ , що описують її переміщення в дискретні моменти часу  $t_n$ , які, як правило, беруться через рівні проміжки часу  $h$ , названі періодом дискретизації.

**Основна частина.** Відомо [6], що речовий періодичний тимчасовий ряд  $\{X^n\}$  з періодом  $K$  має періодичний дискретний спектр  $\{Y^k\}$ , що має властивість симетрії:

$$Y^{k+K} = Y^k, \text{ для будь-якого } k \quad (1)$$

$$Y^{k-K} = Y^k, 0 < k < K \quad (2)$$

Тому при виборі кроку інтегрування за часом можна використовувати евристичний підхід, заснований на теоремі Котельникова [6], відповідно до якої будь-який безперервний сигнал  $x(t)$ , спектр якого не містить складових із частотою вище частоти дискретизації  $\omega_d$  може бути без втрати інформації представлений своїми дискретними значеннями, взятими з інтервалом  $h$ , що задовольняє нерівності:

$$h = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (3)$$

Ця динамічна система є диссипативною, так як містить упругодемпфуючий елемент. Тому з часом рух системи встановлюється та стає періодичним. Завдання дослідження режимів гальмівного механізму, що встановилися, полягає в знаходженні рішення вихідної динамічної задачі з тертям, що задовольняє умовам періодичності:

$$x(t) = x(t + T), \dot{x}(t) = \dot{x}(t + T) \quad (4)$$

$$y(t) = y(t + T), \dot{y}(t) = \dot{y}(t + T) \quad (5)$$

при цьому період  $T$  руху динамічної системи, що розглядається, заздалегідь невідомий.

У цій роботі для визначення періоду коливань аналізованої динамічної системи на основі аналізу періодичності часового ряду переміщень  $\{x^n\}$  і  $\{y^n\}$  колодки використовується апарат автокореляційних функцій.

Нехай відомі значення дискретного сигналу (тимчасовий ряд)  $\{x^n\}$ ,  $n = \overline{1, N + M}$ . Тоді дискретна автокореляційна функція сигналу  $\{x^n\}$  обчислюється за формулою:

$$\psi_m = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^n x_n \times x_{n+m}, m = \overline{0, M} \quad (6)$$

де  $\psi_m$ ,  $m = \overline{0, M}$ , – дискретна автокореляційна функція;  $N$ ,  $M$  – цілі позитивні числа.

Автокореляційна функція служить мірою ступеня подібності сигналу із собою у минулому. Якщо тимчасовий ряд  $\{x^n\}$  періодичний з періодом  $K$ , то його автокореляційна функція також має періодичність:

$$\psi_m = \psi_{m+K}, m = \overline{0, M} \quad (7)$$

При цьому виконується нерівність:

$$\psi_0 > \psi_m, 0 < m < K \quad (8)$$

При практичних розрахунках зручно використовувати масштабовану автокореляційну функцію:

$$\widetilde{\psi}_m = \psi_m \div \psi_0, m = \overline{0, M} \quad (9)$$

Вочевидь, що

$$\widetilde{\psi}_0 = 1 \quad (10)$$

Враховуючи, що тимчасові ряди переміщень  $\{x^n\}$  і  $\{y^n\}$  колодки є наближеним рішенням вихідної задачі, умови періодичності (4) – (5) навіть для рухів динамічної системи, що встановилися, виконуються наближено. Тому для автокореляційної функції умова періодичності (7) також виконуватиметься приблизно. При використанні масштабованої автокореляційної функції вважатимемо, що її період дорівнює  $K$ , якщо:

$$\widetilde{\psi}_K > 1 - \varepsilon \quad (11)$$

$$\widetilde{\psi}_m < 1 - \varepsilon, 0 < m < K \quad (12)$$

де  $\varepsilon > 0$  – параметр, що характеризує точність виконання умов періодичності.

За підсумками аналізу результатів численних обчислювальних експериментів при практичних обчисленнях параметр  $\varepsilon$  слід вибирати у діапазоні 0,01 – 0,1. Слід зазначити, що зі збільшенням рівня демпфування в динамічній системі значення параметра  $\varepsilon$  можна зменшити.

Якщо тимчасовий ряд  $\{x^n\}$  є аперіодичним, то його автокореляційна функція повинна мати кінцевий носій, тобто перетворюватись в нуль поза кінцевим інтервалом часу. Для кінцевих відрізків часових рядів критерій аперіодичності можна сформулювати наступним чином: для кожного  $\varepsilon > 0$  існує  $M(\varepsilon)$  таке, що

$$|\psi_m| \leq \varepsilon, \text{ для будь-якого } m > M(\varepsilon) \quad (13)$$

Таким чином, обчислення автокореляційної функції для даного тимчасового ряду дозволяє не тільки встановити чи він є періодичним, але і визначити його період в цьому випадку.

Одним із найпоширеніших способів дослідження періодичних рухів динамічних систем є спектральний аналіз. З механічної точки зору, розкладання досліджуваного руху на ряд Фур'є відповідає його уявленню у вигляді сукупності простих гармонійних рухів.

Розкладання в ряд Фур'є застосовується як до безперервних функцій, так і до дискретних послідовностей. У цьому вони представляються як суми гармонійних функцій чи комплексних експонент із частотами, утворюючими арифметичну прогресію [6].

Нехай тимчасовий ряд  $\{x_n\}$  є періодичним із періодом  $K$ , тобто:

$$x_{n+K} > x_n, \text{ для будь-якого } n \quad (14)$$

Такий часовий ряд повністю описується кінцевим набором чисел, в якості якого можна взяти довільний фрагмент довжиною  $K$ , наприклад,  $\{x_n\}$ ,

$n = \overline{0, K-1}$ . Відомо [6], що речовий періодичний дискретний сигнал (тимчасовий ряд) має періодичний дискретний спектр  $\{X_n\}$ , що має властивість симетрії:

$$X_{n+K} = X_n, \text{ для будь-якого } n \quad (15)$$

$$X_{K-n} = X_n, \quad 0 < n < K \quad (16)$$

У цьому випадку тимчасовий ряд  $\{x_n\}$  можна представити у вигляді кінцевого ряду Фур'є в тригонометричній формі:

$$x_n = \sum_{k=0}^{K/2} A_k \cos \frac{2\pi kn}{K} + \sum_{k=0}^{K/2} B_k \sin \frac{2\pi kn}{K} \quad (17)$$

де  $A_k, B_k$  – коефіцієнти ряду Фур'є, що обчислюються за формулами:

$$A_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{K-1} x_n \cos \frac{2\pi kn}{K}, \quad k=1, \dots, \frac{K}{2} - 1 \quad (18)$$

$$A_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{K-1} x_n \cos \frac{2\pi kn}{K}, \quad k=0, \frac{K}{2} \quad (19)$$

$$B_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{K-1} x_n \sin \frac{2\pi kn}{K}, \quad k=1, \dots, \frac{K}{2} - 1 \quad (20)$$

Ряд Фур'є (17) можна також подати у вигляді:

$$x_n = \sum_{k=0}^{K/2} C_k \cos \left( \frac{2\pi kn}{K} + \varphi_k \right) \quad (21)$$

де  $C_k$  – амплітуда  $k$ -ої гармоніки, що обчислюється за формулою:

$$C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}, \quad k=0, \dots, \frac{K}{2} \quad (22)$$

де  $\varphi_k$  – фаза  $k$ -ої гармоніки, що обчислюється за формулою:

$$\varphi_k = \tan^{-1} \left( -\frac{B_k}{A_k} \right), \quad k=0, \dots, \frac{K}{2} \quad (23)$$

Обчислення спектрів швидкостей та прискорень може проводитись двома способами. Перший полягає у послідовному диференціюванні за часом ряду Фур'є для переміщень, що відповідає (21):

$$\dot{x}_n = \sum_{k=0}^{K/2} \widehat{C}_k \cos \left( \frac{2\pi kn}{K} + \varphi_k \right) \quad (24)$$

$$\ddot{x}_n = \sum_{k=0}^{K/2} \widehat{\widehat{C}}_k \cos \left( \frac{2\pi kn}{K} + \varphi_k \right) \quad (25)$$

де

$$\widehat{C}_k = -C_k \frac{2\pi k}{Kh} \quad (26)$$

$$\widehat{\widehat{C}}_k = -C_k \left( \frac{2\pi k}{Kh} \right)^2 \quad (27)$$

Другий спосіб полягає у обчисленні швидкостей та прискорень на підставі тимчасового ряду переміщень  $\{x^n\}$  за допомогою різницевих співвідношень:

$$\dot{x}_n = \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2h} \quad (28)$$

$$\ddot{x}_n = \frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{h^2} \quad (29)$$

та поданні тимчасових рядів швидкостей  $\{\dot{x}^n\}$  та прискорень  $\{\ddot{x}^n\}$  у вигляді кінцевих рядів Фур'є

$$\ddot{x}_n = \sum_{k=0}^{K/2} \widetilde{C}_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{K} + \widetilde{\varphi}_k\right) \quad (30)$$

$$\ddot{x}_n = \sum_{k=0}^{K/2} \widetilde{\widetilde{C}}_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{K} + \widetilde{\widetilde{\varphi}}_k\right) \quad (31)$$

де

$$\widetilde{C}_k = \sqrt{\widetilde{A}_k^2 + \widetilde{B}_k^2}, \quad k=0, \dots, \frac{K}{2} \quad (32)$$

$$\widetilde{\varphi}_k = \tan^{-1}\left(-\frac{\widetilde{B}_k}{\widetilde{A}_k}\right), \quad k=0, \dots, \frac{K}{2} \quad (33)$$

$$\widetilde{A}_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{K-1} \dot{x}_n \cos \frac{2\pi kn}{K}, \quad k=1, \dots, \frac{K}{2} - 1 \quad (34)$$

$$\widetilde{A}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{K-1} \dot{x}_n \cos \frac{2\pi kn}{K}, \quad k=0, \frac{K}{2} \quad (35)$$

$$\widetilde{B}_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{K-1} \dot{x}_n \sin \frac{2\pi kn}{K}, \quad k=1, \dots, \frac{K}{2} - 1 \quad (36)$$

$$\widetilde{\widetilde{C}}_k = \sqrt{\widetilde{\widetilde{A}}_k^2 + \widetilde{\widetilde{B}}_k^2}, \quad k=0, \dots, \frac{K}{2} \quad (37)$$

$$\widetilde{\widetilde{\varphi}}_k = \tan^{-1}\left(-\frac{\widetilde{\widetilde{B}}_k}{\widetilde{\widetilde{A}}_k}\right), \quad k=0, \dots, \frac{K}{2} \quad (38)$$

$$\widetilde{\widetilde{A}}_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{K-1} \ddot{x}_n \cos \frac{2\pi kn}{K}, \quad k=1, \dots, \frac{K}{2} - 1 \quad (39)$$

$$\widetilde{\widetilde{A}}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{K-1} \ddot{x}_n \cos \frac{2\pi kn}{K}, \quad k=0, \frac{K}{2} \quad (40)$$

$$\widetilde{\widetilde{B}}_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{K-1} \ddot{x}_n \sin \frac{2\pi kn}{K}, \quad k=1, \dots, \frac{K}{2} - 1 \quad (41)$$

Для апостеріорного аналізу точності одержуваних чисельних результатів у роботі проводиться порівняння спектрів прискорень обчислених двома способами.

Враховуючи властивості спектра дискретного періодичного часового ряду, у цій роботі використано наступну методику спектрального аналізу коливань гальмівного механізму.

1. Обчислюється крок інтегрування за часом:

$$h = \frac{T_1}{N}, \quad (42)$$

де  $N$  – кількість кроків за часом за період вільних коливань колодки  $T_1$ .

У обчислювальних експериментах належало  $N = 200$ .

2. Обчислюється тимчасовий ряд переміщень  $\{x^n\}$  мас аналізованої динамічної системи на тимчасовому відрізку  $[0, T_0]$ , де  $T_0 = MT_1$ . У обчислювальних експериментах належало  $M = 50$ .

3. Використовуючи кінцевий відрізок часових рядів  $\{x^n\}$  і  $\{y^n\}$ ,  $n = (M - K)N, MN$ , будуються автокореляційні функції переміщень колодки на відрізку  $[(M - K/2)N, MN]$ . У обчислювальних експериментах належало  $K = 32$ .

4. Використовуючи наближені умови періодичності автокореляційних функцій (11) – (12), визначається період коливань  $T$  аналізованої динамічної системи.

Якщо на розглянутому кінцевому відрізку  $[(M - K/2)N, MN]$  умови періодичності (11) – (12) не виконуються, необхідно збільшити параметр  $M$ , що визначає довжину відрізка  $[0, T_0]$ , на якому обчислюються тимчасові ряди переміщень  $\{x^n\}$

і  $\{y^n\}$  колодки, або збільшити параметр  $K$ , що визначає максимально допустимий період коливань.

5. Використовуючи кінцевий відрізок часових рядів  $\{x^n\}$  і  $\{y^n\}$ ,  $n = \overline{(M-K)N, MN}$ , обчислюється за формулами (18) – (20) спектр переміщень колодки. Якщо спектр має обмежену смугу частот, то виконується умова:

$$l < \frac{kN}{2} - s, \quad (43)$$

де  $s > 0$  – параметр, що визначає ширину спектра.

Якщо виконується умова (43), то дискретне перетворення Фур'є дозволяє відновлювати вихідні безперервні функції переміщень колодки. Інакше необхідно збільшити частоту дискретизації, тобто. зменшити величину кроку інтегрування за часом  $h$  і повернутися до п.2 методики.

Розроблена методика спектрального аналізу коливань гальмівного механізму ґрунтується на припущенні, що його рухи є періодичними. Якщо в аналізованій динамічній системі виникає детермінований хаос, то автокореляційна функція тимчасового ряду переміщень  $\{x^n\}$  повинна мати кінцевий носій, тобто обертатися в нуль поза кінцевим інтервалом часу. Для кінцевих відрізків часових рядів критерій аперіодичності можна сформулювати наступним чином: для кожного  $\varepsilon > 0$  існує  $M(\varepsilon)$  таке, що

$$|\psi_m| \leq \varepsilon, \text{ для будь-якого } m > M(\varepsilon) \quad (44)$$

Дана динамічна система описується нелінійною диссипативною неавтономною системою звичайних диференціальних рівнянь. Рухи диссипативних систем доцільно розділити на два класи: перехідних, нестационарних рухів, що відповідають процесу релаксації від початкового до граничної множини станів, і клас встановлених стаціонарних рухів, фазові траєкторії яких цілком належать граничним множинам. Важливими з фізичної точки зору є граничні множини, що притягають – атрактори. З часом довільний початковий стан з деякої області тяжіння  $G$ , що включає атрактор  $G_0$ , релаксує до  $G_0$ . Рух, якому відповідає фазова траєкторія у сфері тяжіння, є перехідний процес. Рух, що встановився, характеризується приналежністю фазових траєкторій інваріантній граничній множині, тобто атрактору  $G_0$ .

У цій роботі для аналізу процесу встановлення коливань гальмівного механізму та візуального виявлення атракторів використовуються фазові діаграми у змінних «переміщення-швидкість». При дослідженні залежностей амплітуд переміщень, швидкостей і прискорень аналізованої динамічної системи зміни її параметрів використовувався метод продовження за параметром при покроковій зміні параметрів системи [7–9]. Як початкове наближення рішення вибирається рішення, отримане на попередньому кроці.

При розрахунках параметри системи змінювалися з постійним кроком від початкового до кінцевого значень, заданих у вихідних даних, а потім у зворотному напрямку – від кінцевого значення до початкового. Такий підхід дозволяє отримати, зокрема, повні амплітудно-частотні залежності динамічної системи з урахуванням наявності нестійких гілок.

Розроблені математична модель коливань гальмівного механізму та обчислювальний алгоритм для її чисельного дослідження реалізовані у вигляді комп'ютерної програми для персональних ЕОМ алгоритмічною мовою FORTRAN. Для компіляції програми можуть бути використані практично всі доступні комерційні компілятори, включаючи Compaq Visual Fortran 6.6 та Intel Visual Fortran 10, а також некомерційні компілятори, які розповсюджуються за ліцензією GNU. Як операційна система можуть використовуватися всі версії ОС WINDOWS, а також некомерційні версії ОС Linux. Зазначимо, що для створення коду програми, що виконується, не потрібно використання бібліотек процедур і функцій сторонніх розробників. Запуск програми виконання може здійснюватися як з оболонки середовища розробки, так і у пакетному режимі.

Вихідні дані програми готуються в окремому файлі fort.1 з допомогою текстового редактора. Файл вихідних даних fort.1 має таку структуру. Значення кожної вхідної змінної записується в окремому рядку файлу. У позиціях з 1 до 30 наводиться найменування вхідного параметра. Далі слідує записане у певному форматі числове значення вхідного параметра, після якого до кінця рядка може розташовуватися додатковий коментар. Для введення дійсних чисел використовується формат алгоритмічної мови FORTRAN (30X, F15.5), а для введення цілих чисел – формат (30X, I10).

Після закінчення роботи програми видається протокол розрахунку в текстовому файлі fort.3. Результати чисельного моделювання перехідного та встановленого режимів руху гальмівного механізму зберігаються у вигляді таблиць у текстових файлах fort.10, fort.11 та fort.12.

Текстовий файл fort.10 містить такі стовпці:

1. номер періоду коливань;
2. номер кроку за періодом коливань;
3. номер точки на діаграмі;
4. час  $t$ ;
5. рух  $x$  колодки;
6. швидкість  $\dot{x}$  колодки;
7. прискорення  $\ddot{x}$  колодки;
8. рух  $u$  колодки;
9. швидкість  $\dot{u}$  колодки;
10. прискорення  $\ddot{u}$  колодки.

Текстовий файл fort.11 містить такі стовпці:

1. номер точки на діаграмі;
2. автокореляційна функція переміщення  $x$  колодки;
3. автокореляційна функція переміщення  $u$  колодки.

Текстовий файл fort.12 містить такі стовпці:

1. номер гармоніки;
2. частота гармоніки  $\omega$ ;
3. коефіцієнти  $A_k$  ряду Фур'є для переміщення  $x$  колодки, що обчислюються за формулами (18) – (19);



4. коефіцієнти  $B_k$  ряду Фур'є для переміщення  $x$  колодки, що обчислюються за формулою (20);

5. амплітуди  $C_k$  гармонік ряду Фур'є для переміщення  $x$  колодки, що обчислюються за формулою (22);

6. фази  $\varphi_k$  гармонік ряду Фур'є для переміщення  $x$  колодки, що обчислюються за формулою (23);

7. коефіцієнти  $A_k$  ряду Фур'є для переміщення  $y$  колодки, що обчислюються за формулами (18) – (19);

8. коефіцієнти  $B_k$  ряду Фур'є для переміщення  $y$  колодки, що обчислюються за формулою (20);

9. амплітуди  $C_k$  гармонік ряду Фур'є для переміщення  $y$  колодки, що обчислюються за формулою (22);

10. фази  $\varphi_k$  гармонік ряду Фур'є для переміщення  $y$  колодки, що обчислюються за формулою (23);

Текстовий файл fort.13 містить такі стовпці:

1. номер гармоніки;

2. частота гармоніки  $\omega$ ;

3. коефіцієнти  $\widetilde{A}_k$  ряду Фур'є для швидкості  $\dot{x}$  колодки, що обчислюються за формулами (34) – (35);

4. коефіцієнти  $\widetilde{B}_k$  ряду Фур'є для швидкості  $\dot{x}$  колодки, що обчислюються за формулою (36);

5. амплітуди  $\widetilde{C}_k$  гармонік ряду Фур'є для швидкості  $\dot{x}$  колодки, що обчислюються за формулою (32);

6. фази  $\widetilde{\varphi}_k$  гармонік ряду Фур'є для швидкості  $\dot{x}$  колодки, що обчислюються за формулою (33);

7. коефіцієнти  $\widetilde{A}_k$  ряду Фур'є для швидкості  $\dot{y}$  колодки, що обчислюються за формулами (34) - (35);

8. коефіцієнти  $\widetilde{B}_k$  ряду Фур'є для швидкості  $\dot{y}$  колодки, що обчислюються за формулою (36);

9. амплітуди  $\widetilde{C}_k$  гармонік ряду Фур'є для швидкості  $\dot{y}$  колодки, що обчислюються за формулою (32);

10. фази  $\widetilde{\varphi}_k$  гармонік ряду Фур'є для швидкості  $\dot{y}$  колодки, що обчислюються за формулою (33).

Текстовий файл fort.14 містить такі стовпці:

1. номер гармоніки;

2. частота гармоніки  $\omega$ ;

3. коефіцієнти  $\widetilde{\widetilde{A}}_k$  ряду Фур'є для прискорення  $\ddot{x}$  колодки, що обчислюються за формулами (39) – (40);

4. коефіцієнти  $\widetilde{\widetilde{B}}_k$  ряду Фур'є для прискорення  $\ddot{x}$  колодки, що обчислюються за формулою (41);

5. амплітуди  $\widetilde{\widetilde{C}}_k$  гармонік ряду Фур'є для прискорення  $\ddot{x}$  колодки, що обчислюються за формулою (37);

6. фази  $\widetilde{\varphi}_k$  гармонік ряду Фур'є для прискорення  $\ddot{x}$  колодки, що обчислюються за формулою (38);

7. коефіцієнти  $\widetilde{A}_k$  ряду Фур'є для прискорення  $\ddot{y}$  колодки, що обчислюються за формулами (39) – (40);

8. коефіцієнти  $\widetilde{B}_k$  ряду Фур'є для прискорення  $\ddot{y}$  колодки, що обчислюються за формулою (41);

9. амплітуди  $\widetilde{C}_k$  гармонік ряду Фур'є для прискорення  $\ddot{y}$  колодки, що обчислюються за формулою (37);

10. фази  $\widetilde{\varphi}_k$  гармонік ряду Фур'є для прискорення  $\ddot{y}$  колодки, що обчислюються за формулою (38).

Текстовий файл fort.15 містить такі стовпці:

1. номер гармоніки;

2. частота гармоніки  $\omega$ ;

3. амплітуди  $\widetilde{C}_k$  гармонік ряду Фур'є для прискорення  $\ddot{x}$  колодки, що обчислюються за формулою (37);

4. амплітуди  $\widehat{C}_k$  гармонік ряду Фур'є для прискорення  $\ddot{x}$  колодки, що обчислюються за формулою (27);

5. різниця амплітуд  $\widetilde{C}_k$  і  $\widehat{C}_k$  гармонік ряду Фур'є для прискорення  $\ddot{x}$  колодки, обчислених відповідно за формулами (37) та (27);

6. амплітуди  $\widetilde{C}_k$  гармонік ряду Фур'є для прискорення  $\ddot{y}$  колодки, що обчислюються за формулою (37);

7. амплітуди  $\widehat{C}_k$  гармоніки ряду Фур'є для прискорення  $\ddot{y}$  колодки, що обчислюються за формулою (27);

8. різниця амплітуд  $\widetilde{C}_k$  і  $\widehat{C}_k$  гармонік ряду Фур'є для прискорення  $\ddot{y}$  колодки, обчислених відповідно за формулами (37) та (27).

Текстовий файл fort.16 містить такі стовпці:

1. номер розрахунку;

2. максимальні значення переміщень  $x$  колодки;

3. мінімальні значення переміщень  $x$  колодки;

4. максимальні значення швидкості  $\dot{x}$  колодки;

5. мінімальні значення швидкості  $\dot{x}$  колодки;

6. максимальні значення прискорення  $\ddot{x}$  колодки;

7. мінімальні значення прискорення  $\ddot{x}$  колодки;

8. максимальні значення переміщень  $y$  колодки;

9. мінімальні значення переміщень  $y$  колодки;

10. максимальні значення швидкості  $\dot{y}$  колодки;

11. мінімальні значення швидкості  $\dot{y}$  колодки;

12. максимальні значення прискорення  $\ddot{y}$  колодки;

13. мінімальні значення прискорення  $\ddot{y}$  колодки.

Подальша обробка результатів розрахунків проводиться шляхом імпорту даних у табличний процесор, наприклад Microsoft Excel, та використання вбудованих можливостей візуалізації даних.

**Висновки.** У цій роботі для ідентифікації та дослідження характеристик коливальних процесів у гальмівних механізмах використовується метод обчислювального експерименту.

На першому етапі обчислювального експерименту проводиться чисельне рішення динамічної задачі з тертям, що розглядається, за допомогою обчислювального алгоритму. В результаті обчислюються тимчасові ряди переміщень колодки  $\{x^n\}$ ,  $\{y^n\}$ .

На другому етапі обчислювального експерименту проводиться дослідження одержаних часових рядів з використанням:

- автокореляційних функцій для визначення періоду коливань;
- спектрального аналізу переміщень, швидкостей та прискорень;
- фазових діаграм у змінних «переміщення-швидкість»;
- залежностей амплітуд переміщень, швидкостей і прискорень від зміни параметрів динамічної системи, що розглядається, одержуваних методом продовження за параметром.

Програмна реалізація математичної моделі коливань гальма представлена загальною характеристикою комп'ютерної програми, структурами підготовки вхідних даних та подання результатів розрахунку.

Розроблено обчислювальні алгоритми чисельного моделювання фрикційних коливань у гальмі методом встановлення, реалізовані у вигляді пакета прикладних програм.

#### Перелік посилань

1. Koptovets, A.N., Koroviaka, E.A., Samusia, S.V., Diachkov, P.A., & Yavorska, V.V. (2013). Modeling of the controlled motion of mine trains. *Mining electric engineering and automation: collection of scientific papers of the National Mining University*, 91, 105–110.
2. Shyrin, A., Rastsvetaev, V., & Morozova, T. (2012). Estimation of reliability and capacity of auxiliary vehicles while preparing coal reserves for stoping. *Geomechanical Processes During Underground Mining*. 105–108.
3. Shyrin, L.N., Rastsvetaev, V.A., Lebed, A.L., & Halushko, N.N. (2012). Prospects to improve schemes of auxiliary transport in the context of “Shakhta “1/3 Novogrodovskaia” UE. *Collection of scientific papers of the National Mining University*, 38, 79–83.
4. Koptovets, A.N., Bobyliv, A.A., & Diachkov, P.A. (2009). Generalizing the practices concerning the use of various frictional materials for brake shoes. *Hoisting and transportation facilities*, 3, 52–62.
5. Sviridenok, A.I., Chizhik, S.A., & Petropovets, M.I. (1990). *Mechanics of discrete frictional contact*. Nauka i Tekhnika.
6. Goriacheva, I.G. (2001). *Mechanics of frictional interaction*. Nauka.
7. Goriacheva, I.G., & Dobyichin, M.P. (1988). *Contact problems in tribology*. Mashinostroenie.
8. Barmin, Yu.I. (1964). A technique to compile empiric formula for friction coefficient of brake shoes on a slugger. *Proceedings of Khabarovsk Institute of Railway Transport*, 16, 186–195.
9. Grebeniuk P.T. (2004). *Regulations to calculate brakes*. Intext.

### ABSTRACT

**Purpose.** The task of researching modes of established frictional oscillations of the braking mechanism is to find a solution to the initial dynamic problem with friction that satisfies the periodicity conditions. At the same time, the period of motion of the dynamic system is not known in advance. This dynamic system is described by a non-linear dissipative non-autonomous system of differential equations.

**The methods.** The developed technique of spectral analysis of the braking mechanism's oscillations is based on the assumption that its movements are periodic. If deterministic chaos occurs in the analyzed dynamic system, then the autocorrelation function of the time series of movements must have a finite carrier, that is, vanish outside a finite time interval.

**Findings.** In the paper, the method of computational experiment is used to identify and study the characteristics of oscillatory processes in brake mechanisms. At the first stage of the computational experiment, a numerical solution of the considered dynamic problem with friction is carried out using a computational algorithm. As a result, the time series of block movements are calculated. At the second stage of the computational experiment, the obtained time series are studied.

**The originality.** The paper uses phase diagrams in the "displacement-velocity" variables to analyze the process of establishing the oscillations of the brake mechanism and visual detection of attractors. When studying the dependence of amplitudes of displacements, velocities and accelerations of the dynamic system under consideration on changes in its parameters, the method of continuation by parameter was used with a stepwise change in the parameters of the system.

**Practical implementation.** The developed mathematical model of vibrations of the braking mechanism and the computational algorithm for its numerical study are implemented in the form of a computer program for personal computers in the FORTRAN algorithmic language. Almost all available commercial compilers can be used to compile the program, including Compaq Visual Fortran 6.6 and Intel Visual Fortran 10, as well as non-commercial compilers distributed under the GNU license.

**Keywords:** *brake, tribological system, nonlinear dynamic problem with friction, computational experiment, autocorrelation functions, oscillation period, spectral analysis, phase diagrams, parameter continuation method.*