УДК 519.626;624.04:539.4

ОЦІНКА ЧАСТОТ КОЛИВАНЬ БАЛКИ

Бабак К.Є.
ДВНЗ «Національний гірничий університет», http://nmu.org.ua, katrin.babak@yandex.ua

В даній роботі розглядаються особливості коливання балки, що вільно спирається. Для досліджень коливань була використана тонка балка, її коливання порівнюють з коливанням скрипкової струни. Користуючись методом поділу змінних знаходять періодичні рішення.

Ключові слова – балка, що вільно спирається; частота коливання; скрипкова струна.

ВСТУП

Визначення частоти вільних коливань має велике значення для правильної експлуатації досліджуваної конструкції. Знаючи частоту власних коливань конструкції, можна вирішити питання про допустимість установки на досліджуваному об'єкті якогось агрегату, що створює при його русі обурює навантаження з певною частотою, або ж з'ясувати, який агрегат з раніше встановлених створює резонанс, і знайти можливі шляхи ліквідації цього явище.

ОСНОВНА ЧАСТИНА

Розглянемо балку, що вільно спирається. Не заглиблюючись до механіки тонких балок ми можемо прийняти, що врахування опору вигину призводить (замість хвильового рівняння) до рівняння четвертого порядку[1]:

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xxxx},$$

де u_{tt} – часткова похідна другого порядку за часом; u_{xxxx} – часткова похідна четвертого порядку за координатою;

$$\alpha^2 = K/\rho,$$

де K – модуль зсуву (чим більше K, тим жорсткіше балка, тим вище частота коливань), ρ – лінійна щільність балки (маса / од. довжини).

Введемо опис балки змішаною задачею:

- рівняння часткових похідних

$$u_{tt} = -u_{xxxx},\ 0 < x < 1,\ 0 < t < \infty;$$

- кінцеві умови

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u_{xx}(0,t) = 0, \qquad 0 < t < \infty, \\ u(1,t) = 0, \\ u_{xx}(1,t) = 0; \end{cases} \qquad (1)$$

- початкові умови

$$\begin{cases} u(x,0) = \sin(\pi x) + 0{,}5\sin(3\pi x), \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

Для вирішення цієї задачі скористаємося методом поділу змінних. Будемо шукати тільки періодичні рішення.

Фундаментальні рішення u_n (задовольняють рівнянню і граничним умовам (1)):

$$u_n(x,t) = \left[a_n \sin(n\pi)^2 t + b_n \cos(n\pi)^2 t\right]\sin(n\pi x).$$

Оскільки рівняння і граничні умови лінійні і однорідні, можна стверджувати, що сума (2) також задовольняє рівнянню і граничним умовам:

$$u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \sin(n\pi)^2 t + b_n \cos(n\pi)^2 t\right]\sin(n\pi x) \quad (2)$$

Підставляючи (2) в початкові умови (1) і скориставшись ортогональністю сімейства функції $\{\sin(n\pi x)\}$ на відрізку [0,1], знаходимо значення коефіцієнтів:

$a_n = 0$ (для всіх n=1,2,…), $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, $b_3 = 0{,}5$, $b_n = 0$ (для n=4,5,…).

Отже, рішення має вигляд

$$u(x,t) = \cos(\pi^2 t)\sin(\pi x) + 0{,}5\cos(9\pi^2 t)\sin(3\pi x).$$

Цікаво, що рішення для скрипкової струни за тих же початкових умов моє наступний вигляд:

$$u(x,t) = \cos(\pi t)\sin(\pi x) + 0{,}5\cos(3\pi t)\sin(3\pi x).$$

ВИСНОВКИ

Таким чином рішення змішаної задачі моє вигляд (2). Також ми бачимо, що балка, що вільно спирається коливається на більш високих частотах, ніж скрипкова струна.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. С. Фарлоу Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 384 с.: ил.