УДК 528.06

ОБҐРУНТУВАННЯ ПРИНЦИПУ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

В.А. Рябчій, В.В. Рябчій
Державний вищий навчальний заклад «Національний гірничий університет»

Ключові слова: принцип найменших квадратів.

Постановка проблеми

Принципу найменших квадратів присвячено багато наукових праць видатних вчених світу. В деяких роботах [1, 2] для обґрунтування принципу найменших квадратів пропонується формула обчислення ймовірності сукупності істинних похибок, яка має вигляд:

$$P_{\Delta_1,\Delta_2,...,\Delta_n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_1^2}{m_1^2}+\frac{\Delta_2^2}{m_2^2}+...+\frac{\Delta_n^2}{m_n^2}\right)}.$$

$$\cdot\frac{d\Delta_1}{m_1}\cdot\frac{d\Delta_2}{m_2}\cdot...\cdot\frac{d\Delta_n}{m_n}. \quad (1)$$

При цьому стверджується, що найбільше значення ймовірності сукупності істинних похибок $P_{\Delta_1,\Delta_2,...,\Delta_n}$ буде за умови, коли показник степеню буде мінімальним, тобто

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta_i^2}{m_i^2} = \min . \quad (2)$$

Приймаючи, що поправки до виміряних величин близькі до істинних похибок

$$V_i \cong \Delta_i , \quad (3)$$

можна записати, що

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{V_i^2}{m_i^2} = \min . \quad (4)$$

Звідси виходить відома умова принципу найменших квадратів для рівноточних і нерівноточних вимірів, а саме:

$$\sum_{i=1}^{n}V_i{}^2 = [VV] = \min , \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{n}p_iV_i{}^2 = [pVV] = \min , \quad (6)$$

де p_i – вага виміру.

Іноді відношення істинної похибки до середньої квадратичної похибки називають нормованою похибкою, тобто

$$t_i = \frac{\Delta_i}{m_i} . \quad (7)$$

Тоді показник степеню в (1) набуває вигляду

$$t_1^2 + t_2^2 + ... + t_n^2 = \min . \quad (8)$$

При цьому, нормовані похибки t_i – величини безрозмірні.

Зв'язок із важливими науковими і практичними завданнями

Метод найменших квадратів відіграє важливу роль при математичній обробці геодезичних вимірів. Тому уточнення обґрунтування методу найменших квадратів є важливою і актуальною задачею не тільки теоретичного, а й практичного плану.

Аналіз останніх досліджень та публікацій, які стосуються вирішення цієї проблеми

Починаючи з початку дев’ятнадцятого століття і до сьогодення методу найменших квадратів присвячені багато робіт [1-12], відомих вчених нашої країни та інших держав, зокрема: Большакова В.Д., Відуєва М.Г., Войтенка С.П., Гайдаева П.О., Гаусса К., Ідельсона М.І., Кондри Г.С., Маркузе Ю.І, Могільного С.Г., Папазова М.Г., Чеботарьова О.С. та багатьох інших, які добре знайомі читачеві.

У роботі Большакова В.Д. і Маркузе Ю.І. [2] відмічено: «що умова (6) не є обґрунтуванням методу найменших квадратів і фактично є довільним принципом».

Чеботарьов О.С. [12] вказував, що принцип найменших квадратів є принцип математичний і на його перевагу приводить доведення на основі загальної арифметичної середини.

Папазов М.Г. і Могильний С.Г. [9] стверджують, що «вероятнейшее значение измеренных величин, ошибки которых подчиняются нормальному распределению, должны определяться под условием $[PVV] = \min$ ». Для обґрунтування найкращого значення простої і загальної арифметичних середин використовується показних степеню формули обчислення ймовірності.

Войтенко С.П. [4] вказує, що «метою вирівнювання – визначити такі поправки, які не тільки ліквідують нев’язки математичних умов, але і за абсолютним значенням повинні бути близькими до істинних похибок вимірів».

Також у [1, 2, 5, 10 та ін.] використовується показник степеню для обґрунтування визначення простої та загальної арифметичної середини.

Ідельсон М.І. у [7] пише, що «Гарольд Джеффрис принципиально отвергает применяемость нормального закона случайных погрешностей на всем протяжении любых рядов наблюдений».

Мазмішвілі А.І. у [8] наводить «Если совокупность ошибок обнаруживает заметные уклонения от закона распределения Гаусса, то следует полагать, что данный ряд результатов содержит или промахи, или систематические ошибки, совокупность которых находится вне предела данного распределения случайных ошибок». Незалежно від способу суворого урівнювання знайдені поправки повинні бути такими, щоб всі геометричні умови або це можна назвати і так – всі функціональні зв’язки виміряних величин повинні виконуватись.

Невирішені частини загальної проблеми

Сама умова принципу найменших квадратів не визиває сумнівів. Її можна прийняти виходячи з простих міркувань. Якщо похибка одна, то ймовірність її появи буде тим більша чим менша буде сама похибка. Але вважати, що при мінімальному значенні показника степеню у (1) буде максимальне значення ймовірності для сукупності істинних похибок не зовсім вірно. Тому виникає питання: «Чому все таки дорівнює показник степеню (1) і може він бути мінімальним або максимальним для сукупності похибок?»

Постановка завдання проблеми

Мета статті полягає у визначенні показника степеню у формулі (1) та властивостей нормованих похибок.

Виклад основного матеріалу проблеми

Проаналізуємо показник степеню *e* у формулі (1). Постійне число мінус одна друга розглядати не будемо. Розглянемо вираз у дужках. У чисельниках стоять квадрати істинних похибок, а у знаменниках – квадрати середніх квадратичних похибок. Спочатку будемо вважати, що істинні похибки рівноточні і виконується така умова вимірів:

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m\,. \quad (9)$$

Квадрат середньої квадратичної похибки виміру обчислюється за формулою Гаусса, тобто:

$$m^2 = \frac{[\Delta\Delta]}{n}. \quad (10)$$

Приймаючи, що виміри рівноточні (9), можна вважати, що з урахуванням (10) вираз у дужках показника степеню буде дорівнювати

$$\frac{\Delta_1^2}{m^2} + \frac{\Delta_2^2}{m^2} + \ldots + \frac{\Delta_n^2}{m^2} = n\,. \quad (11)$$

Тепер розглянемо випадок, коли виміри нерівноточні і, відповідно, нерівноточні істинні похибки. У цьому випадку квадрати середніх квадратичних похибок вимірів будуть обчислюватись за формулою:

$$m_i^2 = \frac{\mu^2}{p_i}\,, \quad (12)$$

де μ – середня квадратична похибка одиниці ваги, квадрат якої обчислюється за такою формулою:

$$\mu^2 = \frac{[p\Delta\Delta]}{n}\,. \quad (13)$$

З урахуванням (13) рівняння (12) набуває такого вигляду:

$$m_i^2 = \frac{[p\Delta\Delta]}{p_i n}\,. \quad (14)$$

Підставивши (14) у вираз у дужках отримаємо

$$\frac{\Delta_1^2}{m_1^2} + \frac{\Delta_2^2}{m_2^2} + \ldots + \frac{\Delta_n^2}{m_n^2} =$$

$$= \frac{np_1\Delta_1^2}{[p\Delta\Delta]} + \frac{np_2\Delta_2^2}{[p\Delta\Delta]} + \ldots + \frac{np_n\Delta_n^2}{[p\Delta\Delta]} = n\,. \quad (15)$$

Таким чином, вираз у дужках показника степеню (1) буде дорівнювати кількості вимірів n, як при рівноточних так і при нерівноточних вимірах.

Стосовно величини значення нормованої похибки. У деяких таблицях наведено значення t, яке дорівнює від нуля до восьми [1 та ін.]. Для теоретичних досліджень значення t можна брати яким завгодно. Але у більшості випадків існує такий підхід. Якщо є ряд істинних похибок і визначена для цього ряду середня квадратична похибка, то всі істинні похибки (виміри), які більше потроєного значення середньої квадратичної похибки із даних результатів виключаються. Таким чином значення нормованої похибки може бути від нуля до мінус трьох або плюс трьох.

Тепер розглянемо вираз (4) стосовно простої і загальної арифметичних середин. У цих випадках умови (5 і 6) дійсно виконуються. Цьому є суворі докази (друга властивість відхилень результатів вимірів від простої і загальної арифметичних середин). Але визначимось, чому буде дорівнювати в цьому випадку сума квадратів нормованих поправок $[t_V]$, тобто

$$[t_V] = \sum_{i=1}^{n} \frac{V_i^2}{m_i^2} = ?$$

Середня квадратична похибка одного виміру m_i обчислюється за відомою формулою Бесселя. Враховуючи це, підставимо квадрат її значення

$$\frac{V_1^2}{m^2} + \frac{V_2^2}{m^2} + \ldots + \frac{V_n^2}{m^2} = \frac{(n-1)\cdot\left[V_1^2 + V_2^2 + \ldots + V_n^2\right]}{[VV_i]} =$$

$$= n - 1\,. \quad (16)$$

У випадку загальної арифметичної середини квадрат середньої квадратичної похибки виміру обчислюється за формулою (12), де квадрат середньої квадратичної похибки одиниці ваги дорівнює

$$\mu^2 = \frac{[pVV]}{n-1}. \qquad (17)$$

Враховуючи (12) і (17) отримаємо

$$\frac{V_1^2}{m_1^2} + \frac{V_2^2}{m_2^2} + \ldots + \frac{V_n^2}{m_n^2} = \frac{p_1 V_1^2}{\mu^2} + \frac{p_2 V_2^2}{\mu^2} + \ldots + \frac{p_n V_n^2}{\mu^2} =$$
$$= n - 1. \qquad (18)$$

Далі розглянемо, чому буде дорівнювати вираз $\sum_{i=1}^{n} \frac{V_i^2}{m_i^2}$ при суворому урівнюванні корелатним та параметричним способами любої геодезичної мережі. Оскільки при рівноточних вимірах $\mu = m$, а μ^2 знаходиться за формулою

$$\mu^2 = \frac{[VV]}{r}, \qquad (19)$$

то отримаємо, що

$$\frac{V_1^2}{\mu^2} + \frac{V_2^2}{\mu^2} + \ldots + \frac{V_n^2}{\mu^2} = r,$$

де r – кількість надлишкових вимірів.

При нерівноточних вимірах, коли квадрат середньої квадратичної похибки одиниці ваги μ^2 визначається за формулою

$$\mu^2 = \frac{[pVV]}{r}, \qquad (20)$$

а середня квадратична похибка виміру за формулою (12), також отримаємо, що

$$\left[\frac{V^2}{m^2}\right] = r. \qquad (21)$$

Тепер розглянемо самі поправки. Заздалегідь у більшості випадків (до урівнювання) можна визначити: «Чому їхня сукупність повинна дорівнювати після урівнювання». Розглянемо, наприклад, тріангуляційні мережі. Вочевидь при корелатному способі урівнювання тріангуляційних мереж сума усіх поправок повинна дорівнювати сумі вільних членів (нев'язок у трикутниках) з оберненим знаком), тобто

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{k=1}^{k} -W_k, \qquad (22)$$

де n – кількість кутів, k – кількість трикутників.

Також заздалегідь відомо якому значенню повинні дорівнювати суми поправок у кути відповідно до незалежних кутових умов. Наприклад, сума поправок у кути умови горизонту повинна дорівнювати нулю.

При параметричному способі урівнювання тріангуляційних мереж, хоч математично використовується інший від корелатного способу математичний підхід вирішення задачі урівнювання, також завчасно відомо, чому повинна дорівнювати сума поправок у напрямки, а саме – нулю, і обов'язково повинна виконуватись умова орієнтирного кута на кожному пункті. При цьому поправки знаходяться тільки по одному із варіантів можливих значень поправок, а саме $[PVV]$ = min.

Гайдаєв П.О. та інші вчені [6 та ін.] відмітили, що було б добре, якщо знайдені поправки були б такими, як істинні похибки, але це неможливо, хоча це може бути тільки випадково. Фактично урівнювання геодезичних мереж (знаходження поправок) незалежно від способу урівнювання виконується під основною умовою, а саме: «Усі незалежні функціональні залежності, яким пов'язані між собою виміряні величини повинні виконуватись». При цьому кількість варіантів таких груп поправок не обмежена. Але дякуючи роботам Лежандра А., Гаусса К. та інших вчених, вибирають такий варіант поправок, щоб виконувалась умова (5) або (6). Також можна допустити, що знайдені поправки за цими умовами можуть дорівнювати істинним похибкам, але це також малоймовірно.

З наведеного вище стосовно нормативних похибок мають місце такі властивості:

1. Сума квадратів нормованих похибок рівноточних і нерівноточних вимірів, якщо вони знаходяться за формулою (7), повинна дорівнювати кількості вимірів:

$$t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2 = n. \qquad (23)$$

2. Сума нормованих похибок рівноточних вимірів $[t]_{рв}$ повинна дорівнювати нулю або бути величиною близькою до нуля:

$$[t]_{рв} = \frac{\Delta_1}{m} + \frac{\Delta_2}{m} + \ldots + \frac{\Delta_n}{m} = \frac{[\Delta]}{m}. \qquad (24)$$

3. Сума нормативних похибок нерівноточних вимірів $[t]_{нв}$ також повинна дорівнювати нулю або її значення буде близьким до нуля:

$$[t]_{нв} = \frac{\Delta_1}{m_1} + \frac{\Delta_2}{m_2} + \ldots + \frac{\Delta_n}{m_n} =$$
$$= \frac{\Delta_1\sqrt{P_1}}{\mu} + \frac{\Delta_2\sqrt{P_2}}{\mu} + \ldots + \frac{\Delta_n\sqrt{P_n}}{\mu} = \frac{[\Delta\sqrt{P}]}{\mu}. \qquad (25)$$

4. Значення нормованих похибок може бути в межах

$$-3 \le t \le +3. \qquad (26)$$

Далі, якщо перейти до нормованих поправок t_V, то мають місце такі властивості:

1. Сума квадратів нормованих поправок повинна дорівнювати кількості надлишкових вимірів, тобто

$$t_{V_1}^2 + t_{V_2}^2 + \ldots + t_{V_n}^2 = r. \qquad (27)$$

2. Сума нормованих поправок може дорівнювати різним значенням в залежності від умов, яким підкорюються виміряні величини та самі поправки. Наприклад, для відхилень результатів вимірів від простої арифметичної середини сума нормованих поправок буде такою

$$[t_V]=\frac{V_1}{m}+\frac{V_2}{m}+\cdots+\frac{V_n}{m}=\frac{[V]}{m}=0. \qquad (28)$$

Це тому, що за першою властивістю відхилень результатів вимірів від простої арифметичної середини їх сума дорівнює нулю, тобто $[V]=0$.

Тепер поміркуємо стосовно терміну міри точності *h*, яку запропонував ще Гаусс. Як відомо, для побудови кривої Гаусса (кривої нормального розподілу) обчислюється щільність розподілу, яка використовується як ордината, за формулою:

$$\varphi(\Delta)=У=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\Delta^2}, \qquad (29)$$

де *h* – міра точності, яка обчислюється за формулою:

$$h=\frac{1}{m\sqrt{2}}, \qquad (30)$$

де *m* – середня квадратична похибка вимірів.

Виникає питання, а що є тоді середня квадратична похибка вимірів? Адже в якості міри точності вимірів прийнята середня квадратична похибка. Також можна вважати, що вага виміру це також міра точності. Але треба визначити, що з них «первинно». Вочевидь це середня квадратична похибка, а величини *h* і вага це вже її «похідні». Тому доцільно їх виділити і відрізняти у термінах, а саме: величину *h* називати обернена (друга) міра точності або міра точності кривої Гаусса, або міра точності кривої нормального розподілу. При цьому, якщо вага виміру не має розмірності, то величина *h* має розмірність зворотну розмірності середньої квадратичної похибки.

Висновки

На основі наведеного вище можна зазначити таке:

1. Вираз у дужках показника степеню у формулі (1) завжди дорівнює кількості істинних похибок *n*. При цьому, це значення не залежить від значень істинних та середніх квадратичних похибок.

2. Якщо перейти до нормованих поправок, то сума їх квадратів буде дорівнювати кількості надлишкових вимірів *r*, і ця кількість не буде залежати від значень самих поправок та середніх квадратичних похибок.

3. Наведені вище два висновки дають змогу стверджувати, що показник степеню у формулі (1) не може бути ні мінімальним, ні максимальним для якогось конкретного ряду істинних похибок або поправок, отриманих у результаті урівнювання. Значення цього показника залежить тільки від кількості вимірів, тобто використовувати показник степеню формулу (1) для обґрунтування методу найменших квадратів не доцільно.

4. Обґрунтуванням методу найменших квадратів є те, що запропонував ще Гаусс і було підтримано багатьма вченими і дослідниками, а саме: «Знаходження поправок при умові (5) або (6) дає змогу в більшості випадків отримувати у кінцевому результаті найменші значення середніх квадратичних похибок вимірів або одиниці ваги.

5. Стосовно нормального закону розподілу треба зауважити таке. Якщо стовідсотково можна виключити систематичні похибки, то різноманіття прояву випадкових похибок може бути доволі значним і відхилення від цього закону можливі, але це не значить, що його не існує.

Треба бути вдячними Гауссу та іншим вченим, які розвивали цю тему, бо вочевидь, ще не все, як кажуть, «розкладено по полицях» і є можливість продовжувати дослідження.

Література

1. Большаков В.Д. Теория ошибок наблюдений: учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. / В.Д. Большаков. – М.: Недра, 1983. – 223 с.
2. Большаков В.Д. Городская полигонометрия (Уравнивание и основы уравнивания) / В.Д. Большаков, Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1979. – 303 с.
3. Видуев Н.Г. Вероятностно-статистический анализ погрешностей измерений / Н.Г. Видуев, Г.С. Кондра. – М.: Недра, 1969. – 320 с.
4. Войтенко С.П. Математична обробка геодезичних вимірів. Метод найменших квадратів: навч. посібник / С.П. Войтенко. – К.: – КНУБА, 2005. – 236 с.
5. Войтенко С.П. Математична обробка геодезичних вимірів. Теорія похибок вимірів: навч. посібник / С.П. Войтенко. – К.: – КНУБА, 2003. – 216 с.
6. Гайдаев П.А. Теория математической обработки геодезический измерений / П.А. Гайдаев, В.Д. Большаков. – М.: Недра, 1969. – 400 с.
7. Идельсон Н.И. Способ наименьших квадратов и теория математической обработки наблюдений / Н.И. Идельсон. – М.: Геодезиздат, 1947. – 359 с.
8. Мазмишвили А.И. Теория ошибок и метод наименьших квадратов / А.И. Мазмишвили. – М.: Недра, 1978. – 311 с.
9. Папазов М.Г. Теория ошибок и способ наименьших квадратов / М.Г. Папазов, С.Г. Могильный. – М.: Недра, 1968. – 302 с.
10. Рябчій В.А. Теорія похибок вимірювань: навч. посібник / В.А. Рябчій, В.В. Рябчій. – Д.: Національний гірничий університет, 2006. – 166 с.
11. Смирнов Н.В. Теория вероятностей и математическая статистика в приложении к

геодезии / Н.В. Смирнов, Д.А. Белуги. – М.: Недра, 1969. – 379 с.
12. Чеботарев А.С. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей: Учебник для геодезических вузов и факультетов / А.С. Чеботарев. – М.: Геодезиздат, 1958. – 606 с.

Обґрунтування принципу найменших квадратів

В.А. Рябчій, В.В. Рябчій

Визначені властивості нормованих похибок. Встановлено, що використовувати суму квадратів нормованих похибок для обґрунтування принципу найменших квадратів не доцільно.

Обоснование принципа наименьших квадратов

В.А. Рябчий, В.В. Рябчий

Определены свойства нормированных ошибок. Установлено, что использовать сумму квадратов нормированных ошибок для обоснования принципа наименьших квадратов не целесообразно.

Ground of principle of least squares

V.A. Ryabchiy, V.V. Ryabchiy

Properties of the rationed errors are certain. It is set that to use the sum of squares of the rationed errors for the ground of principle of least squares not expediently.