

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»**



І.В. Новицький

С.А. Ус

Випадкові процеси

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний
посібник для студентів вищих навчальних закладів*

2-ге видання виправлене й доповнене

Дніпропетровськ
НГУ
2014

УДК 519.216/217(075.8)

ББК 22.171я73

Н73

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів, що навчаються за освітньо-професійною програмою бакалавра з напрямку підготовки «Системний аналіз» (лист № 1/11-6576 від 05.05.2014).

Рецензенти:

Лебедев Є. О., д-р фіз.-мат. наук, проф. (Київський національний університет ім. Т. Г. Шевченка, завідувач кафедри прикладної статистики);

Наконечний О.Г., д-р фіз.-мат. наук, професор (Київський національний університет ім. Т. Г. Шевченка, завідувач кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень).

Новицький І.В.

Н73 Випадкові процеси. [Текст]: навч. посіб. / І.В. Новицький, С.А. Ус; М-во освіти і науки України, Нац. гірн. ун-т. – 2-ге вид. випр. і доп. – Д. : НГУ, 2014. – 132 с.

ISBN 978–966–350–506–0

Навчальний посібник охоплює матеріал, передбачений програмою дисципліни “Випадкові процеси” для студентів напрямку підготовки 6.040303 Системний аналіз.

Розглянуто основні поняття теорії випадкових процесів та її застосування в системах масового обслуговування.

Книгу розраховано на осіб, які знають математику в межах вузівського курсу, й рекомендовано для студентів технічних спеціальностей і тих, хто використовує ймовірнісні методи при розв’язуванні практичних задач.

УДК 519.216/217(075.8)

ББК 22.171я73

ISBN 978–966–350–506–0

© І.В. Новицький, С.А. Ус, 2014

© Національний гірничий університет,
2014

Зміст

Вступ.....	4
РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ	6
§ 1.1. Поняття про випадкову функцію (ВФ)	6
§ 1.2. Характеристики випадкових функцій	9
§ 1.3. Визначення характеристик випадкової функції	16
§ 1.4. Проходження випадкових функцій через динамічну систему.....	18
§ 1.5. Лінійні оператори й перетворення ВФ лінійною динамічною системою	21
§ 1.6. Додавання випадкових функцій.....	24
§ 1.7. Канонічні розкладання ВФ.....	26
§ 1.8. Проходження ВФ, заданої канонічним розкладанням, через лінійну динамічну систему.....	30
Висновки.....	33
Питання для самоконтролю.....	34
Задачі до розділу 1.....	35
Задачі для самостійного розв'язування.....	36
РОЗДІЛ 2. СТАЦІОНАРНІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ (СВП)	42
§ 2.1. Поняття про СВП.....	42
§ 2.2. Ергодична властивість СВП.....	44
§ 2.3. Визначення характеристик ергодичного СВП на основі однієї реалізації	47
§ 2.4. Спектральне розкладання СВП на скінченному проміжку часу.....	49
§ 2.5. Спектральне розкладання СВП на нескінченному часовому інтервалі.....	52
Спектральна щільність.....	52
§ 2.6. Моделі функції спектральної щільності. Білий шум	58
§ 2.7. Спектральне розкладання ВФ у комплексній формі	61
§ 2.8. Перетворення СВП стаціонарною лінійною системою.....	65
§ 2.9. Поняття про задачі аналізу й синтезу динамічних систем.....	71
Висновки.....	77
Питання для самоконтролю.....	78
Задачі до розділу 2.....	79
Задачі для самостійного розв'язування.....	83
РОЗДІЛ 3. ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ (ВП) ІЗ ЛІЧИЛЬНОЮ МНОЖИНОЮ СТАНІВ	87
§ 3.1. ВП як зміна стану системи	87
§ 3.2. Ланцюги Маркова.....	89
§ 3.3. Потоки подій. Найпростіший потік.....	97
§ 3.4. Марковські дискретні процеси із неперервним часом.....	107
§ 3.5. Марковські процеси типу «загибель – розмноження».....	113
Висновки.....	119
Питання для самоконтролю.....	119
Задачі до розділу 3.....	120
Задачі для самостійного розв'язування.....	127
Список скорочень.....	129
Список літератури.....	129
Предметний покажчик.....	130

Вступ

При вивченні явищ навколишнього світу ми часто маємо справу із процесами, розвиток яких заздалегідь передбачити неможливо. Така непередбачуваність пояснюється впливом на хід процесів випадкових факторів. Строго кажучи, у природі немає невідповідних явищ, але є процеси, на які випадковість впливає несуттєво, і при їх вивченні цей вплив можна не брати до уваги, але є і такі, де випадковість відіграє основну роль (наприклад, броунівський рух частинок). Між цими двома полюсами перебуває багато процесів, на перебіг яких випадковість впливає більшою або меншою мірою.

Наведемо приклади таких процесів.

1. Населення міста змінюється з часом випадково (непередбачено) під впливом таких факторів як народжуваність, смертність, міграція.

2. Рівень води у річці змінюється випадково залежно від погоди, кількості опадів, танення снігу, інтенсивності зрошувальних заходів.

3. ЕОМ у процесі роботи може випадковим чином переходити від одного стану до іншого, наприклад:

S_1 – працює справно,

S_2 – є несправність, але вона не виявлена,

S_3 – несправність виявлена, ведеться пошук її причини,

S_4 – прилад ремонтується.

Ці переходи відбуваються під впливом таких факторів як коливання напруги в електромережі, відмова деяких елементів, момент виявлення несправності, час ремонту.

4. Температура повітря T у даній місцевості змінюється залежно від висоти над рівнем моря, тобто $T(h)$.

5. Напруга мережі змінюється в часі, тобто $U = U(t)$, та коливається близько номіналу під впливом таких випадкових факторів як кількість і вид приладів, що вмикаються в мережу, моменти їхнього вимкнення й вимкнення й т. ін.

У курсі теорії ймовірностей основним об'єктом дослідження є випадкові величини. У результаті випробувань випадкова величина набуває єдиного значення, причому воно заздалегідь невідоме. Застосування такого елементарного підходу до вивчення випадкових явищ не може задовольнити практичні потреби. Зрозуміло, що $T(h)$ і $U(t)$ є випадковими величинами, на які діють випадкові фактори. Однак вони зазнають змін під час випробування зі зміною аргументів h і t (висота й час). Випадкові величини, які змінюються протягом випробування, називаються *випадковими функціями*.

Вивченням подібних випадкових об'єктів, які є узагальненням поняття випадкових величин, займається новітній розділ теорії ймовірності – теорія випадкових функцій.

Теорія випадкових (стохастичних) процесів – це математична наука, яка вивчає закономірності випадкових явищ у динаміці їх розвитку (розбіжності між поняттями «випадкова функція» і «випадковий процес» будуть пояснені нижче).

Теорія випадкових функцій продовжує активно розвиватися, оскільки в багатьох практичних задачах системного аналізу й теорії керування потрібно враховувати випадкові фактори саме в динаміці, тобто зважати на їхню мінливість у процесі випробування.

Мета даного навчального посібника – ознайомити студента з основами теорії випадкових процесів, виробити в нього навички застосування ймовірнісних методів при розв’язуванні практичних задач і моделюванні реальних процесів.

Структурно посібник являє собою три розділи. У першому розглянуто основні поняття теорії випадкових процесів. Другий розділ присвячено стаціонарним випадковим процесам, третій – випадковим процесам, характерним лічильною множиною станів. Кожний розділ супроводжується задачами для самостійного розв’язування і питаннями для перевірки засвоєння теоретичного матеріалу.

Книгу розраховано на осіб, що засвоїли курс математики в межах вузівської програми, вона стане у пригоді студентам технічних спеціальностей і тим, хто використовує ймовірнісні методи при розв’язуванні практичних задач.

РОЗДІЛ 1

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Мета розділу: вивчення основних понять теорії випадкових процесів, характеристик випадкових функцій і методів їх обчислення, правил перетворення випадкової функції лінійною динамічною системою.

§ 1.1. Поняття про випадкову функцію (ВФ)

Випадковою функцією (ВФ) називається функція, яка внаслідок випробування може набути того чи іншого конкретного вигляду, причому заздалегідь невідомо, якого саме. Випадкові функції аргументу t позначають $X(t)$, $Y(t)$.

Наприклад, якщо U – випадкова величина, то $X(t) = \sin(tU)$ – випадкова функція.

Конкретний вигляд, набутий ВФ внаслідок випробування, називається *реалізацією ВФ*.

Наприклад, якщо маємо випадкову величину U , котра набула в першому випробуванні значення: $u_1 = 1$, а в другому: $u_2 = 2,5$, то реалізаціями випадкової функції: $X(t) = \sin(tU)$, у першому й другому випробуванні будуть відповідно: $x_1(t) = \sin t$ та $x_2(t) = \sin 2,5t$. Вочевидь, реалізації ВФ є функціями не випадковими.

Якщо над ВФ провести кілька випробувань, то ми одержимо групу, або сім'ю, реалізацій цієї функції: $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$. Це основний експериментальний матеріал, на базі якого обчислюються характеристики випадкової функції (рис.1.1).

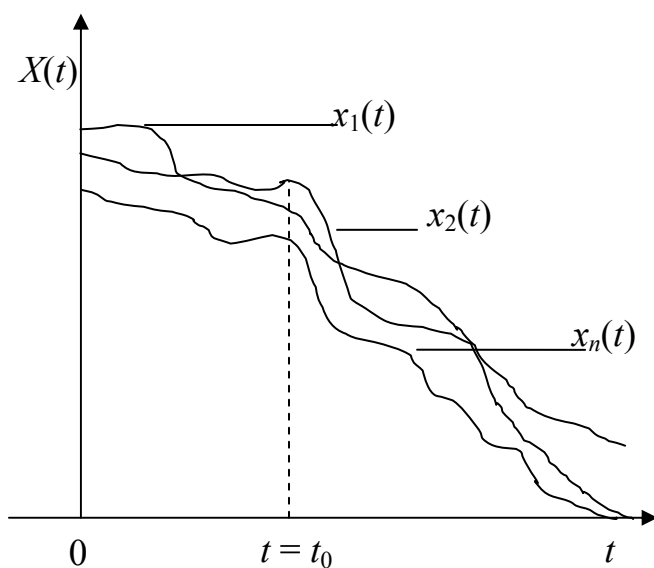


Рис. 1.1. Криві реалізацій випадкової функції $X(t)$: $x_1(t)$, $x_2(t)$... $x_n(t)$

Для переважної більшості практичних задач аргументом ВФ є час. У цьому випадку ВФ може розглядатися як послідовна зміна стану системи в часі і називається *випадковим процесом*. Однак, у певних випадках мають місце ВФ, які залежать не від часу, а від інших аргументів. Наприклад, концентрація метану вздовж лави вугільної шахти являє собою ВФ просторової координати; температура повітря в різних шарах атмосфери є ВФ, що залежить від висоти.

Крім того, випадкові функції можуть залежати від кількох аргументів. Наприклад, температура повітря в даній місцевості є ВФ чотирьох аргументів – трьох просторових і часу. Далі ми будемо вивчати тільки ВФ одного аргументу.

Розглянемо ВФ $X(t)$. Нехай унаслідок n випробувань отримано її реалізації $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Конкретне випробування перетворює ВФ $X(t)$ на не випадкову функцію, тобто на одну зі своїх реалізацій.

Зафіксуємо деяке значення аргументу: $t = t_0$. Тоді ВФ перетворюється на випадкову величину $X(t_0)$, яка називається *розрізом* ВФ для аргумента: $t = t_0$. Інакше кажучи, ВФ $X(t)$ об'єднує в собі властивості випадкової величини й функції.

Зобразимо умовно ВФ на деякому відрізку зміни аргументу t й розглянемо значення її реалізацій в моменти часу t_0, t_1, \dots, t_m . Для кожного значення аргументу t_j ($j = \overline{0, m}$) будемо мати відповідний розріз ВФ: $X(t_0), X(t_1), X(t_2) \dots X(t_m) \dots$ (рис. 1.2). Таким чином, ВФ можна приблизно замінити системою $(m + 1)$ випадкових величин (її розрізів). Зі збільшенням m така заміна стає все більш точною.

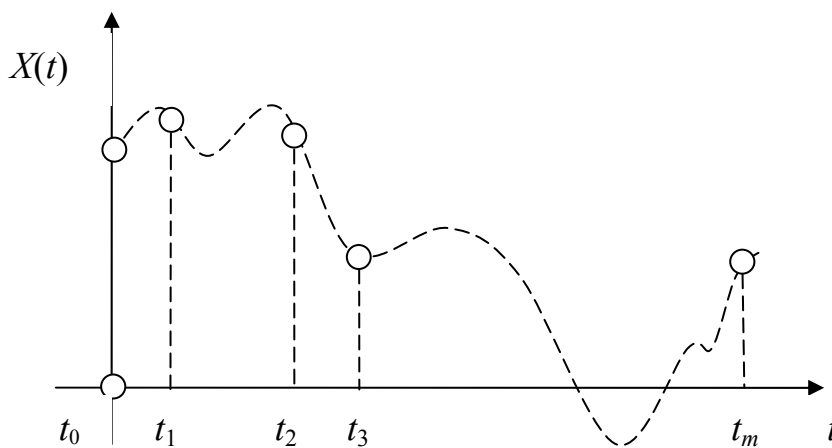


Рис. 1.2. Умовне зображення випадкової функції $X(t)$

Серед ВП можна виділити процеси з лічильною множиною станів, коли множина значень $x(t)$ в кожен момент часу t є лічильною. Вони у свою чергу поділяються на ВП з дискретним і неперервним часом.

ВП з лічильною множиною станів і дискретним часом характеризуються тим, що зміна значень $x(t)$ (станів системи) відбувається тільки в строго певні, розділені кінцевими інтервалами моменти часу $t_1, t_2, t_3 \dots$

Прикладом такого процесу може бути робота ЕОМ, яка змінює свій стан у моменти t_1, t_2, \dots, t_j , що визначаються тактом машини.

Якщо розглядати одновимірний випадковий процес $X(t)$ із дискретним часом, то його розрізи в моменти t_1, t_2, \dots, t_j утворюють послідовність випадкових величин $X(t_1), X(t_2) \dots X(t_j) \dots$. За аргументи послідовності може бути вибраний номер значення моменту переходу: $X(1), X(2), \dots, X(j)$.

Випадковий процес $X(t)$ називають процесом, котрий характеризується *неперервним часом*, якщо переходи системи від одного стану до іншого можуть відбуватися в будь-який момент часу t протягом спостережуваного періоду t .

Приклади таких випадкових процесів: число відмов технічного пристрою від початку роботи до моменту t ; броунівський рух частинки в полі зору мікроскопа; кількість $N(t)$ хворих у місті в період епідемії на момент часу t .

Випадковий процес називається процесом, який характеризується *неперервними станами*, коли його розрізом у будь-який момент часу t є неперервна випадкова величина.

До описаних випадкових процесів можна віднести: напругу $U(t)$ в електромережі у момент часу t ; тиск газу $P(t)$ у даному резервуарі в момент t ; параметри, які характеризують у момент t стан космічної ракети, що виводиться на орбіту (багатовимірний випадковий процес із неперервними станами).

Таким чином, усі випадкові процеси ми можемо поділити на такі чотири класи:

1. Процеси із дискретними станами і дискретним часом.
2. Процеси із дискретними станами і неперервним часом.
3. Процеси із неперервними станами і дискретним часом.
4. Процеси із неперервними станами і неперервним часом.

Що ж являє собою закон розподілу ВФ?

Очевидно, що набір із $(m+1)$ розрізів ВФ буде являти собою систему $(m+1)$ випадкових величин і ця система повинна описуватися $(m+1)$ -вимірним законом розподілу ймовірностей.

Таким чином, ВФ можна розглядати як узагальнення поняття системи випадкових величин, коли розрізи, що включені в систему, утворюють нескінченну (незліченну) множину. При такому тлумаченні ВФ задамося питанням: яким чином можна виконати її математичний опис?

До основних характеристик випадкового процесу належать його скінченновимірні розподіли.

Розглянемо деякий розріз ВФ $X(t)$ для аргументу t .

Ця випадкова величина в загальному випадку залежить від значення t і має закон розподілу, який описується функцією розподілу $F(x, t)$. Названа функція задає *одновимірний закон розподілу* ВФ. Вона повністю описує кожний окремий розріз, але не дає повного опису випадкової функції. Наприклад, неможливо виконувати над випадковою функцією операції, для яких потрібен спільний розгляд сукупності розрізів, знаючи тільки вигляд одновимірної функції розподілу, оскільки вона не дає інформації про зв'язок

між розрізами ВФ. Із цього погляду більш повною характеристикою ВФ є двовимірний закон розподілу, який задається спільною функцією розподілу $F(x_1, x_2, t_1, t_2)$ двох розрізів ВФ $X(t)$: $X_1 = X(t_1)$ та $X_2 = X(t_2)$. Але цей закон розподілу також не дає повного опису будь-якого випадкового процесу (його достатньо, щоб описати нормально розподілену випадкову функцію або марковський випадковий процес). Тоді виникає необхідність розглядати тривимірні функції розподілу $F(x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3)$, чотиривимірні й т. д. Таким чином, найбільш повний опис випадкової функції можна отримати, розглядаючи сім'ю скінченновимірних розподілів:

$$\{F(x, t), F(x_1, x_2, t_1, t_2), \dots, F(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n), \dots\}.$$

Кореляційною теорією ВФ називають таку, що базується на вивченні моментів першого та другого порядку. Ця теорія дає змогу розв'язувати багато практичних задач.

§ 1.2. Характеристики випадкових функцій

Відомі характеристики випадкових величин, зокрема математичне сподівання (МС), дисперсія, середнє квадратичне відхилення, являють собою числа. Характеристиками ВФ у загальному випадку є не числа, а функції.

Математичним сподіванням ВФ $X(t)$ називається не випадкова функція $m_x(t)$, яка для кожного значення аргументу t дорівнює математичному сподіванню відповідного розрізу випадкової функції, тобто $m_x(t) = M[X(t)]$.

Геометрично математичне сподівання випадкової функції можна розуміти як “середню криву”, навколо якої розташовані інші криві, що відображають реалізації ВФ. На рис. 1.3 тонкими лініями показані реалізації випадкової функції, товстою лінією – її математичне сподівання. Для фіксованого значення аргументу математичне сподівання є середнім значенням розрізу, навколо якого розташовані його можливі значення.

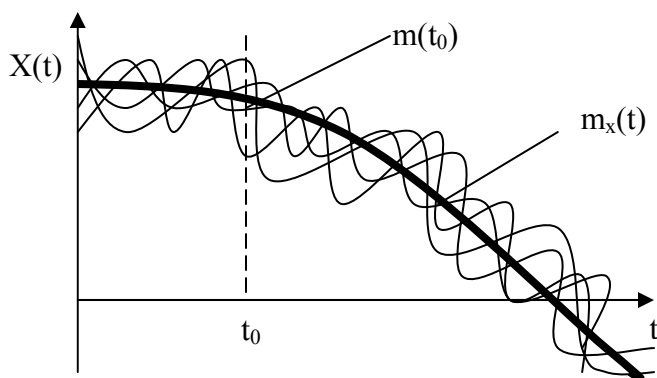


Рис. 1.3. Графіки математичного сподівання випадкової функції $X(t)$ та її реалізацій

Математичне сподівання ВФ має такі властивості (вони впливають із властивостей математичного сподівання випадкової величини):

1. Математичне сподівання невинядкової функції $\varphi(t)$ дорівнює самій функції, тобто

$$M[\varphi(t)] = \varphi(t).$$

2. Невинядковий множник $\varphi(t)$ можна виносити за знак математичного сподівання, а саме:

$$M[\varphi(t)X(t)] = \varphi(t)M[X(t)] = \varphi(t)m_x(t).$$

3. Математичне сподівання суми двох винядкових функцій дорівнює сумі математичних сподівань доданків, тобто

$$M[Y(t)+X(t)] = m_x(t) + m_Y(t).$$

Приклад 1.1. Елементарна винядкова функція має такий вигляд: $\varphi(t) = Xe^{-t}$, де X – винядкова величина, розподілена за нормальним законом із параметрами a та σ . Визначити математичне сподівання винядкової функції $\varphi(t)$.

Розв'язування

Визначимо математичне сподівання, враховуючи, що невинядковий множник можна виносити за знак математичного сподівання, а саме:

$$m_\varphi(t) = M(Xe^{-t}) = e^{-t}M(X) = e^{-t}a.$$

Відповідь: $m_\varphi(t) = e^{-t}a$.

Визначити математичне сподівання винядкової функції $X(t)$ також можна, обчислюючи математичні сподівання розрізів при фіксованому параметрі t й переходячи від розрізу до розрізу.

Розглянемо випадок, коли розріз винядкової функції $X(t)$ при фіксованому значенні аргумента t є дискретною винядковою величиною, і має розподіл, заданий таблицею, а саме:

$X(t)$	$x_1(t)$	$x_2(t)$...	$x_n(t)$
p	$p_1(t)$	$p_2(t)$...	$p_n(t)$

Тоді математичне сподівання винядкової функції $X(t)$ може бути обчислене за такою формулою:

$$m_x(t) = M[X(t)] = \sum_{i=1}^n x_i(t)p_i(t).$$

Якщо ж розріз випадкового процесу $X(t)$ при даному значенні t є абсолютно неперервною випадковою величиною із щільністю розподілу $f_1(x, t)$, то його математичне сподівання можна обчислити в такий спосіб:

$$m_x(t) = M[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x, t) dx.$$

Але на практиці частіше математичне сподівання $m_x(t)$ не обчислюється за одновимірним законом розподілу, а замінюється його наближеною оцінкою, яку визначають за експериментальними даними.

Дисперсією випадкової функції $X(t)$ називається не випадкова функція $D_x(t)$, значення якої для кожного аргументу t дорівнює дисперсії відповідного розрізу ВФ, тобто

$$D_x(t) = D[X(t)].$$

Дисперсія для кожного значення аргументу t характеризує розсіювання реалізацій ВФ відносно математичного сподівання $m_x(t)$.

Аналогічно, середнє квадратичне відхилення ВФ визначимо за такою формулою: $\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}$.

Знаючи закон розподілу будь-якого розрізу випадкової функції $X(t)$, тобто її одновимірний закон розподілу, можна визначити дисперсію випадкової функції $X(t)$.

Якщо розріз $X(t)$ є дискретною випадковою величиною із заданим рядом розподілу, то дисперсія випадкового процесу обчислюється за такою формулою:

$$D_x(t) = D[X(t)] = \sum_{i=1}^n [x_i(t) - m_x(t)]^2 p_i(t),$$

де i – номер можливого значення випадкової величини $X(t)$ при даному аргументі t , $p_i(t)$ – імовірність цього значення.

Для обчислення дисперсії можна також скористатися іншим виразом:

$$D_x(t) = \sum_{i=1}^n x_i^2(t) p_i(t) - m_x^2(t).$$

Якщо розріз $X(t)$ є абсолютно неперервною випадковою величиною із щільністю $f_1(x, t)$, то дисперсія випадкового процесу може бути обчислена таким чином:

$$D_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - m_x(t)]^2 f_1(x, t) dx$$

або

$$D_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x, t) dx - m_x^2(t).$$

Отже, так само, як і математичне сподівання, дисперсія випадкового процесу $X(t)$ визначається його одновимірним законом розподілу.

Розглянемо властивості дисперсії ВФ.

1. Дисперсія не випадкової функції дорівнює 0, тобто

$$D[\varphi(t)] = 0$$

2. Дисперсія суми випадкової функції $X(t)$ і не випадкової функції $\varphi(t)$ дорівнює дисперсії випадкової функції, а саме

$$D[X(t) + \varphi(t)] = D_x(t).$$

3. Дисперсія добутку випадкової функції $X(t)$ і не випадкової функції $\varphi(t)$ дорівнює добутку квадрату не випадкового множника і дисперсії випадкової функції, тобто

$$D[X(t)\varphi(t)] = \varphi^2(t)D_x(t).$$

П р и к л а д 1.2. Визначити дисперсію випадкової функції: $X(t) = U \cos t$, де U – випадкова величина і $D(U) = 4$.

Розв'язування

Використаємо властивості дисперсії, враховуючи, що $\cos t$ – не випадковий множник, тоді

$$D[X(t)] = D[U \cos t] = \cos^2 t \cdot D[U] = 4 \cos^2 t.$$

Відповідь: $D[X(t)] = 4 \cos^2 t$.

Розглянемо дві випадкові функції, зображені у вигляді сім'ї реалізацій на рис. 1.4. Випадкові функції $X_1(t)$ і $X_2(t)$ мають однакові математичні сподівання й дисперсії, проте характер цих ВФ, внутрішня структура цих процесів суттєво відрізняються.

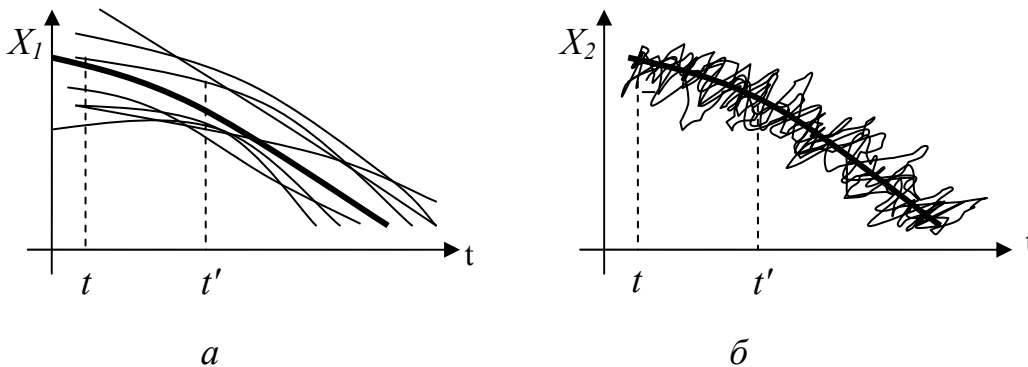


Рис. 1.4. Зображення випадкових функцій, для яких характерна: a – сильна залежність між розрізами при різних значеннях аргументу t ; b – слабша залежність між розрізами за різних значень аргументу t

Для функції $X_1(t)$ характерні поступові, плавні зміни. Якщо в момент часу t вона набула значення набагато більшого за математичне сподівання, то ймовірно, що і в момент t' вона набуде значення, більше середнього, тобто для ВФ X_1 характерна сильна залежність між розрізами при різних значеннях аргумента t (й t'). На відміну від неї, функція $X_2(t)$ має яскраво виражену коливальну структуру з хаотичними коливаннями. Для такої функції характерне швидке зникнення залежності між її значеннями в міру зростання відстані між ними.

Очевидно, що різниця між випадковими функціями $X_1(t)$ та $X_2(t)$ не може бути виявлена, якщо ми будемо вивчати лише їх математичні сподівання та дисперсії, тобто для коректного опису ВФ недостатньо цих характеристик.

Щоб описати розглянуті властивості випадкового процесу, вводять спеціальну характеристику – *кореляційну (автокореляційну) функцію*. Вона характеризує ступінь залежності між розрізами випадкової функції, які відповідають різним моментам часу t .

Нагадаємо, що ступінь залежності двох випадкових величин характеризується їх кореляційним моментом. Відповідно ступінь залежності двох розрізів $X(t)$ і $X(t')$ буде описуватися їх кореляційним моментом і являти собою функцію двох аргументів: t й t' .

Кореляційною функцією ВФ $X(t)$ називається не випадкова функція двох аргументів $K_x(t, t')$, яка для кожної пари значень t й t' дорівнює кореляційному моменту відповідних розрізів ВФ, тобто

$$K_x(t, t') = M[\overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t')], \text{ де } \overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m(t), \overset{\circ}{X}(t') = X(t') - m(t').$$

$$\text{Очевидно, що коли } t = t', \text{ то } K_x(t, t') = M[\overset{\circ}{X}^2(t)] = D_x(t).$$

Крім того, кореляційна функція симетрична відносно своїх аргументів, тобто

$$K_x(t, t') = K_x(t', t).$$

Якщо зобразити кореляційну функцію $K_x(t, t')$ у вигляді поверхні, то ця поверхня буде симетричною відносно вертикальної площини Q , яка проходить через бісектрису кута tOt' . Схематично її графік має вигляд, зображений на рис. 1.5.

Властивості кореляційної функції визначаються властивостями кореляційної матриці системи випадкових величин.

Припустимо, є система випадкових величин: $X(t_1), X(t_2) \dots X(t_m)$. Кореляційна матриця характеризує зв'язок між усіма ВВ цієї системи, тобто це матриця $\|k_{ij}\|_{m \times m}$, кожен елемент якої дорівнює кореляційному моменту випадкових величин $\overset{\circ}{X}(t_i)$ і $\overset{\circ}{X}(t_j)$: $k_{ij} = M[\overset{\circ}{X}(t_i) \cdot \overset{\circ}{X}(t_j)]$. Вочевидь, матриця

$\|k_{ij}\|_{m \times m}$ – симетрична.

Нагадаємо, що ВФ $X(t)$ приблизно можна замінити системою випадкових величин $X(t_1), X(t_2) \dots X(t_m)$ і точність її наближення підвищується при збільшенні кількості розрізів m .

Ось чому на практиці при побудові кореляційної функції $K(t, t')$ випадкової функції $X(t)$ застосовують такий спосіб: задають ряд рівновіддалених значень аргументу й будують кореляційну матрицю отриманої системи випадкових величин $X(t_1) \dots X(t_m)$.

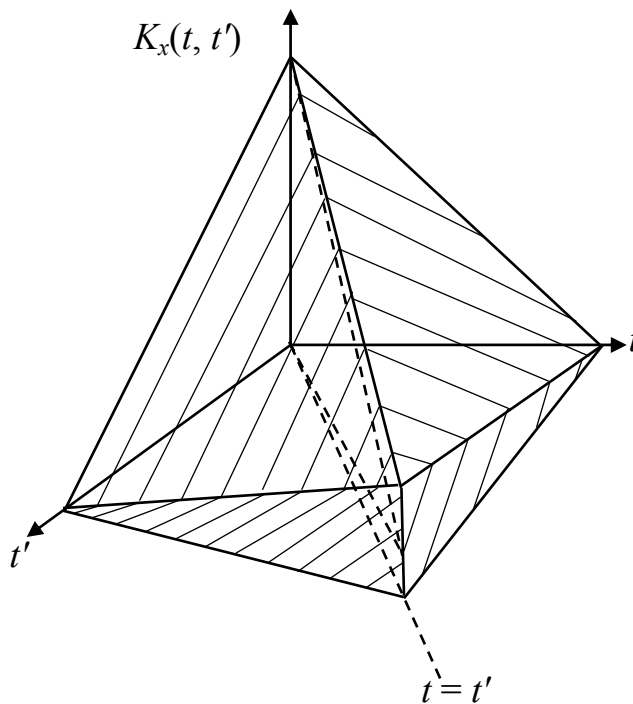


Рис. 1.5. Схематичний графік кореляційної функції ВФ

Тепер з'ясуємо, як змінюються характеристики ВФ при додаванні до неї не випадкового доданка та при її множенні на не випадкову величину.

Додамо до ВФ $X(t)$ не випадковий доданок $\varphi(t)$. Тоді ми одержимо нову ВФ $Y(t)$, а саме: $Y(t) = X(t) + \varphi(t)$. Згідно з властивостями математичного сподівання

$$M[Y(t)] = M[X(t) + \varphi(t)] = M[X(t)] + \varphi(t);$$

таким чином, $m_y(t) = m_x(t) + \varphi(t)$.

Отже, при додаванні до ВФ не випадкового доданка, до її математичного сподівання додається той самий не випадковий доданок.

Далі обчислимо кореляційну функцію $Y(t)$, а саме:

$$K_y(t, t') = M[\overset{\circ}{Y}(t) \cdot \overset{\circ}{Y}(t')] = M[(Y(t) - m_x(t))(Y(t') - m_x(t'))] =$$

$$\begin{aligned}
&= M [(X(t) + \varphi(t) - m_x(t) - \varphi(t))(X(t') + \varphi(t') - m_x(t') - \varphi(t'))] = \\
&= M [(X(t) - m_x(t))(X(t') - m_x(t'))] = K_x(t, t').
\end{aligned}$$

Як бачимо, від додавання не випадкового доданка кореляційна функція ВФ не змінюється.

Помножимо ВФ $X(t)$ на не випадковий множник: $Y(t) = \varphi(t) X(t)$. Тоді

$$m_y(t) = M[\varphi(t) X(t)] = \varphi(t) M[X(t)] = \varphi(t) m_x(t).$$

Таким чином, при множенні ВФ на не випадковий множник її МС множиться на той самий множник.

Обчислимо кореляційну функцію, таким чином:

$$\begin{aligned}
K_y(t, t') &= M[(Y(t) - m_y(t))(Y(t') - m_y(t'))] = M[\varphi(t) \varphi(t')(X(t) - m_x(t))(X(t') - m_x(t'))] = \\
&= \varphi(t) \varphi(t') K_x(t, t').
\end{aligned}$$

Отже, при множенні ВФ на не випадковий множник $\varphi(t)$ її кореляційна функція множиться на $\varphi(t)$ й $\varphi(t')$.

Підсумовуючи все, що було сказано вище, можна визначити такі основні властивості кореляційної функції:

1. Якщо аргументи кореляційної функції мають однакові значення (тобто $t_1 = t_2$), то вона перетворюється на дисперсію, а саме:

$$K_x(t, t) = D_x(t).$$

2. Кореляційна функція $K_x(t, t')$ симетрична відносно своїх аргументів, тобто

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2, t_1).$$

3. Додавання до випадкової функції $X(t)$ не випадкового доданка $\varphi(t)$ не змінює її кореляційної функції, тобто коли $Y(t) = X(t) + \varphi(t)$, то

$$K_y(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2).$$

4. При множенні випадкової функції $X(t)$ на не випадковий множник $\varphi(t)$ її кореляційна функція помножується на добуток $\varphi(t_1)\varphi(t_2)$, відповідно якщо $Y(t) = X(t)\varphi(t)$, то

$$K_y(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2)\varphi(t_1)\varphi(t_2).$$

5. Абсолютна величина кореляційної функції не перевищує середнього геометричного дисперсій відповідних розрізів, а саме:

$$|K_x(t_1, t_2)| \leq \sqrt{D_x(t_1)D_x(t_2)}.$$

Окрім кореляційної функції, на практиці для оцінювання ступеня залежності між розрізами ВФ часто використовують ще одну характеристику, а саме, *нормовану кореляційну функцію* ВП, що являє собою коефіцієнт кореляції відповідних розрізів випадкової функції і обчислюється за такою формулою:

$$r_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{\sigma_x(t)\sigma_x(t')}.$$

Нормована кореляційна функція має ті самі властивості, що й кореляційна функція, причому властивість 5 формулюється таким чином: абсолютна величина нормованої кореляційної функції не перевищує одиниці, тобто

$$|r_x(t, t')| \leq 1.$$

Крім того, очевидно, що коли $t = t'$, то $r_x = 1$.

Імовірнісний сенс нормованої кореляційної функції такий самий, що й коефіцієнта кореляції для ВВ, а саме: чим ближче значення нормованої кореляційної функції до одиниці, тим сильніша лінійна залежність між розрізами випадкової функції.

§ 1.3. Визначення характеристик випадкової функції

Припустимо, що, досліджуючи випадкову функцію $X(t)$, провели n незалежних випробувань, у результаті яких отримано n її реалізацій (рис. 1.6.)

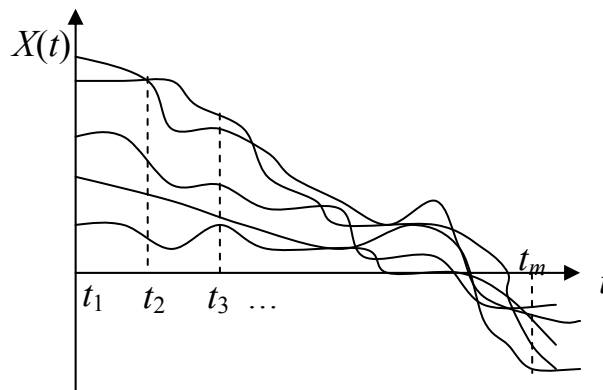


Рис. 1.6. Криві реалізацій випадкової функції $X(t)$

Потрібно знайти оцінки для характеристик випадкової функції $X(t)$, а саме: математичного сподівання $m_x(t)$, дисперсії $D_x(t)$ і кореляційної функції $K_x(t, t')$.

Щоб розв'язати цю задачу, розглянемо ряд розрізів ВФ, які відповідають моментам часу t_1, t_2, \dots, t_m , і зареєструємо значення функції $X(t)$ для кожного з

цих моментів. Кожному з них буде відповідати n значень випадкової функції. Значення $t_1, t_2, t_3 \dots t_m$, як правило, задають на однаковій відстані одне від одного, при цьому величина інтервалу між сусідніми значеннями вибирається залежно від вигляду експериментальних кривих так, щоб за вибраними точками можливо було досить точно відновити загальний обрис кожної кривої. Однак часто буває, що інтервал між розрізами задають незалежно від умов задачі дослідження, а визначають із технічних умов, зокрема пов'язують із можливостями вимірювального приладу.

Значення, яких набуває функція $X(t)$, заносять у таблицю, де кожний рядок відповідає окремій реалізації, а кількість колонок дорівнює числу опорних значень аргументу.

T $X(t)$	t_1	t_2	...	t_k	...	t_l	...	t_m
$x_1(t)$	x_{11}	x_{12}	...	x_{1k}	...	x_{1l}	...	x_{1m}
$x_2(t)$	x_{21}	x_{22}	...	x_{2k}	...	x_{2l}	...	x_{2m}
...
$x_i(t)$	x_{i1}	x_{i2}	...	x_{ik}	...	x_{il}	...	x_{im}
...
$x_n(t)$	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nk}	...	x_{nl}	...	x_{nm}

Тут x_{ij} – значення функції $x_i(t)$, яке відповідає i -й реалізації для j -го моменту часу, тобто результати дослідів подано у вигляді матриці (x_{ij}) , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.

За цих умов оцінки характеристик ВФ можна обчислити за поданими нижче формулами.

1. Оцінка математичного сподівання

$$\overline{m}_x(t_j) = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ij}}{n}, \quad j = \overline{1, m}.$$

2. Оцінка дисперсії

$$\overline{D}_x(t_j) = \frac{\sum_{i=1}^n [x_{ij} - \overline{m}_x(t_j)]^2}{n-1}, \quad j = \overline{1, m}.$$

3. Оцінка кореляційної функції

$$\overline{K}_x(t_j, t_l) = \frac{\sum_{i=1}^n [(x_{ij} - \overline{m}_x(t_j))(x_{il} - \overline{m}_x(t_l))]}{n-1}, \quad j, l = \overline{1, m}.$$

Розраховуючи оцінки дисперсії та кореляційної функції, іноді користуються початковими моментами, тоді мають місце такі обчислювальні формули:

$$\overline{D}_x(t_j) = \left[\frac{\sum_{i=1}^n x_{ij}^2}{n} - \overline{m}_x^2(t_j) \right] \frac{n}{n-1}, \quad j = \overline{1, m};$$

$$K_x(t_j, t_l) = \left[\frac{\sum_{i=1}^n x_{ij}x_{il}}{n} - m_x(t_j)m_x(t_l) \right] \frac{n}{n-1}, \quad j, l = \overline{1, m}.$$

Застосовуючи наведені формули, належить умовно перенести початок координат на осі ординат ближче до математичного сподівання з тим, щоб уникнути різниці близьких чисел.

Після того, як ці характеристики обчислено, можна, використовуючи значення $m_x(t_1), m_x(t_2), \dots, m_x(t_m)$, побудувати залежність $m_x(t)$. Аналогічно відтворюють залежність $D_x(t)$. Функція $K_x(t, t')$ відтворюється за її значеннями у прямокутній системі точок. За необхідності всі ці функції можна апроксимувати аналітичними виразами.

§ 1.4. Проходження випадкових функцій через динамічну систему

При вивченні реальних систем будь-якого походження (технічних, механічних, електричних, економічних і т. д.) їхню роботу часто можна описати за такою схемою: у динамічну систему A подається випадковий процес $X(t)$ – *вхідний сигнал* або *вхідний вплив* (див. рис. 1.7). Далі система A виконує перетворення вхідного сигналу $X(t)$, унаслідок чого на її виході отримуємо випадковий процес $Y(t)$, який називається *реакцією системи A* (або *вихідним сигналом системи A*).

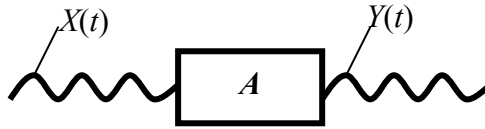


Рис. 1.7. Схема динамічної системи

Наведемо приклади систем, які здійснюють зазначені перетворення.

1. Розглянемо систему A , у якій проводиться експлуатація однорідних технічних пристроїв (ТП). За вхідний вплив $X(t)$ візьмемо число введених (на момент часу t) в експлуатацію ТП, реакція системи $Y(t)$ – число ТП, які експлуатуються у момент часу t . При цьому $X(t) \geq Y(t)$, оскільки частина ТП може вийти з експлуатації.

2. При експлуатації ЕОМ за вхідний сигнал можна брати напругу силового живлення $X(t)$, яка подається на вхід стабілізатора напруги, а за вихідний сигнал $Y(t)$ – напругу на виході стабілізатора.

3. Нехай система A – нагрівальна піч; тоді вхідний вплив $X(t)$ – витрата палива; реакція системи $Y(t)$ – температура печі.

4. Система A – промислове підприємство; $X(t)$ – ціни на сировину; $Y(t)$ – обсяг оборотних коштів.

5. Система A – сільськогосподарське підприємство; вхідний вплив $X(t)$ – кількість опадів; реакція системи $Y(t)$ – величина врожаю.

Зазначимо, що в загальному випадку система має кілька входів і виходів. Ми будемо вивчати найпростіший випадок, коли є тільки один вхід й один вихід. У такій постановці задачі система A перетворює вхід $X(t)$ у вихід $Y(t)$. Символічно це можна записати як $Y(t) = L[X(t)]$, де L – *правило перетворення*.

Цей запис означає, що кожній функції $X(t)$ за певним правилом (алгоритмом) ставиться у відповідність функція $Y(t)$.

Правило може бути простим, наприклад, множення на число; інтегрування, диференціювання та інші. Іноді перетворення L зводиться до розв'язування диференціального рівняння.

Оператором називається правило перетворення однієї функції в іншу.

Правило, за яким вхідний вплив $X(t)$ системи A перетворюється в реакцію $Y(t)$, називається *оператором динамічної системи*.

У теорії систем існує три види задач:

1. *Задача аналізу*.

Має на меті визначити реакцію системи з відомим оператором на відомий вхідний вплив.

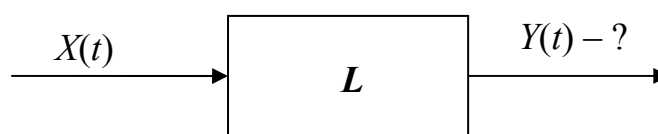


Рис. 1.8. Схема задачі аналізу : $X(t)$, L – відомі; $Y(t)$ – ?

2. Задача виміру (спостереження).

Виникає, коли необхідно визначити вхідний вплив на систему, якщо відомі її оператор і реакція системи на виході.

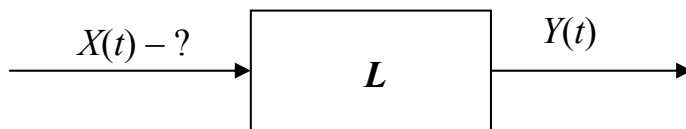


Рис. 1.9. Схема задачі виміру: $Y(t)$, L – відомі; $X(t)$ – ?

3. Задача ідентифікації.

Полягає у визначенні оператора системи, коли задано (виміряно) вхідний вплив на систему та її реакцію.

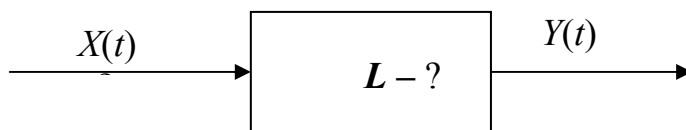


Рис. 1.10. Схема задачі ідентифікації: $X(t)$, $Y(t)$ – відомі; L – ?

У тому випадку, коли $X(t)$ і $Y(t)$ – це не випадкові (детерміновані) функції часу, існують широко відомі методи розв'язування сформульованих вище задач. Разом з тим, у реальних умовах вхідний вплив $X(t)$ ніколи не прибуває на вхід системи в “чистому вигляді” – на нього діють випадкові фактори (перешкоди, збурення), і тому він являє собою ВФ $X(t)$. Це означає, що й реакція системи також буде випадковою функцією $Y(t)$.

Звідси випливають такі практичні задачі:

– оцінити випадкові спотворення реакції системи $Y(t)$ за наявності відомих випадкових збурень вхідного сигналу $X(t)$ (задача аналізу).

– вибрати параметри системи (тобто оператор L) таким чином, щоб ці споворення були мінімальними.

Більш простою є перша задача. Сформулюємо її таким чином: на вхід системи прибуває ВФ $X(t)$ з відомими характеристиками (математичне сподівання й кореляційна функція), система перетворює її відповідно до відомого оператора L . Потрібно визначити характеристики (математичне сподівання й кореляційну функцію) випадкового процесу: $Y(t) = L[X(t)]$, на виході системи.

Аналітично ця задача може бути розв'язана в одному окремому, але важливому для практики випадку: коли і оператор L , і система є *лінійними*.

§ 1.5. Лінійні оператори й перетворення ВФ лінійною динамічною системою

Оператор L називається *лінійним однорідним*, якщо він має такі властивості:

1. Лінійний однорідний оператор від суми дорівнює сумі лінійних однорідних операторів від доданків, а саме:

$$L[x_1(t) + x_2(t)] = L[x_1(t)] + L[x_2(t)].$$

2. Сталий множник можна виносити за знак лінійного оператора, тобто

$$L[cx(t)] = cL[x(t)].$$

Для лінійного однорідного оператора L характерно, що $L[0] = 0$.

Останній запис означає, що коли вхідний вплив відсутній, то й реакція системи дорівнює 0.

Прикладами лінійних однорідних є такі оператори:

- диференціювання: $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$;
- інтегрування: $y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$;
- множення на задану функцію: $y(t) = \gamma(t)x(t)$;
- інтегрування із заданою «вагою» $\gamma(t)$: $y(t) = \int_0^t \gamma(\tau)x(\tau) d\tau$.

З а в д а н н я. Перевірте самостійно лінійність й однорідність названих операторів

Оператор називається *лінійним неоднорідним*, якщо він складається із суми лінійного однорідного оператора та деякої заданої невідповідної функції, тобто

$$y(t) = L[x(t)] = L_0[x(t)] + \gamma(t),$$

тут L_0 – лінійний однорідний оператор.

Наприклад: $y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + \gamma(t)$.

У математиці та в техніці застосовується умовна форма запису оператора.

Наприклад, $p = \frac{d}{dt}$, це оператор диференціювання. Тобто $y(t) = px(t)$, це те саме,

що й $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$.

Використовуючи ці позначення, лінійне диференціальне рівняння:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x,$$

можна записати таким чином:

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) y = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0) x.$$

Лінійні системи відіграють важливу роль в інженерних розрахунках. Оператор системи найчастіше може бути або строго лінійним, або лінеаризованим.

У загальному випадку, крім лінійних, мають місце також *нелінійні* оператори, наприклад: $y(t) = x^2(t)$, $y(t) = \sin x(t)$ і т. ін.

Відповідні їм системи називаються нелінійними.

Розглянемо таку задачу: за характеристиками ВФ на вході лінійної системи $m_x(t)$, $K_x(t, t')$ потрібно знайти характеристики ВФ на її виході: $m_y(t)$, $K_y(t, t')$, коли відомо, що оператор системи $Y(t) = L[X(t)]$.

Обчислення характеристик ВФ на виході виконується за такими правилами:

1. $m_y(t) = L[m_x(t)]$ у разі використання лінійного однорідного оператора L .
 $m_y(t) = L[m_x(t)] + \gamma(t)$, коли лінійний оператор L неоднорідний, тобто, *математичне сподівання ВФ на виході лінійної системи знаходять шляхом застосування оператора до математичного сподівання ВФ на вході, при цьому, якщо оператор L неоднорідний, то до результату додається невинадкова функція $\gamma(t)$.*

2. $K_y(t, t') = L^{(t)} L^{(t')} [K_x(t, t')]$, це можна сформулювати таким чином: *кореляційну функцію ВФ на виході лінійної системи знаходять шляхом двократного застосування оператора (за кожним з аргументів) до кореляційної функції ВФ на вході.*

Розглянемо приклади перетворень ВФ лінійною динамічною системою.

1. Візьмемо лінійну систему з оператором інтегрування: $y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$.

Тоді математичне сподівання вихідної функції отримуємо за таким правилом:

$$m_y(t) = \int_0^t m_x(\tau) d\tau,$$

а кореляційна функція

$$K_y(t, t') = \int_0^t \int_0^{t'} K_x(\tau, \tau') d\tau' d\tau.$$

2. У лінійній системі з оператором диференціювання: $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$,
 математичне сподівання вихідної функції

$$m_y(t) = \frac{dm_x(t)}{dt},$$

а кореляційна функція

$$K_y(t, t') = \frac{\partial^2 K_x(t, t')}{\partial t \partial t'}.$$

Насамкінець зауважимо, що дисперсію ВФ $Y(t)$ на виході системи можна легко визначити за кореляційною функцією, прийнявши, що $t = t'$, тобто

$$D_y(t) = K_y(t, t).$$

П р и к л а д 1.3. На вхід диференціовального механізму (див. рис. 1.11),
 прибуває ВФ $X(t)$, математичне сподівання якої $m_x(t) = \sin t$, а кореляційна
 функція $K_x(t, t') = Ce^{-\alpha(t'-t)^2}$, де C – стала. Необхідно визначити такі
 характеристики реакції системи: $m_y(t)$, $K_y(t, t')$, $D_y(t)$.

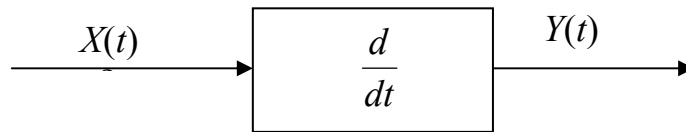


Рис. 1.11. Схема системи до прикладу 1.3

Розв'язування

Оскільки за умовами задачі L – оператор диференціювання, то
 $Y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$. За сформульованими вище правилами обчислюємо
 характеристики реакції системи, а саме:

$$m_y(t) = \frac{dm_x(t)}{dt} = \frac{d \sin t}{dt} = \cos t,$$

$$K_y(t, t') = \frac{\partial^2 K_x(t, t')}{\partial t \partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} \left[-2\alpha(t'-t)Ce^{-\alpha(t'-t)^2} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ [-2\alpha(t'-t)C] \left[e^{-\alpha(t'-t)^2} \right] \right\} =$$

$$= -2\alpha(t'-t)C \cdot 2\alpha(t'-t)e^{-\alpha(t'-t)^2} + e^{-\alpha(t'-t)^2} \cdot 2\alpha C = 2\alpha C e^{-\alpha(t'-t)^2} \left[1 - 2\alpha(t'-t)^2 \right].$$

Вважаючи, що $t = t'$, знайдемо дисперсію вихідного процесу, тобто

$$D_y(t) = K_y(t,t) = 2\alpha C.$$

Відповідь: $m_y(t) = \cos t$, $K_y(t,t') = 2\alpha C e^{-\alpha(t'-t)^2} [1 - 2\alpha(t'-t)^2]$, $D_y(t) = 2\alpha C$.

П р и к л а д 1.4. ВФ $X(t)$ має такі характеристики: $m_x(t) = 1$, $K_x(t,t') = e^{\alpha(t'+t)}$. Визначити характеристики для ВФ: $Y(t) = t \frac{dx(t)}{dt} + 1$.

Розв'язування

Оператор перетворення є лінійним неоднорідним, тому згідно з правилами перетворення

$$m_y(t) = t \frac{dm_x(t)}{dt} + 1 = 1,$$

$$K_y(t,t') = tt' \frac{\partial^2 K_x(t,t')}{\partial t \partial t'} = tt' \frac{\partial}{\partial t} [\alpha e^{\alpha(t+t')}] = tt' \alpha^2 e^{\alpha(t+t')},$$

$$D_y(t) = K_y(t,t) = t^2 \alpha^2 e^{2\alpha t}.$$

Відповідь: $m_y(t) = 1$, $K_y(t,t') = tt' \alpha^2 e^{\alpha(t+t')}$, $D_y(t) = t^2 \alpha^2 e^{2\alpha t}$.

§ 1.6. Додавання випадкових функцій

У багатьох практичних випадках на вхід системи прибуває не одна, а дві випадкові функції. При цьому система виконує операцію їхнього підсумовування, тобто реакція системи являє собою випадкову функцію $Z(t)$, яка дорівнює сумі випадкових функцій $X(t)$ і $Y(t)$ (рис. 1.12).

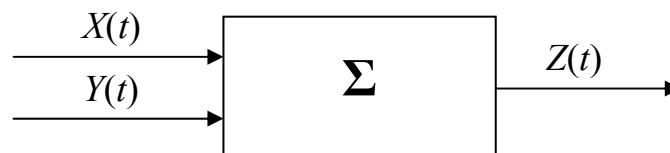


Рис. 1.12. Схема системи, яка реалізує суму двох випадкових функцій

За цих умов виникає потреба у визначенні характеристик реакції вихідної функції $Z(t)$ за відомими характеристиками вхідних функцій $X(t)$ та $Y(t)$.

Якщо складові $X(t)$ та $Y(t)$ незалежні, то це зробити дуже просто. У загальному ж випадку потрібно знати ще одну характеристику, а саме – взаємну кореляційну функцію.

Взаємною кореляційною функцією двох ВФ $X(t)$ і $Y(t)$ називається не випадкова функція двох аргументів t й t' , яка для кожної пари аргументів (t, t') дорівнює кореляційному моменту відповідних розрізів $X(t)$ і $Y(t')$, тобто

$$R_{xy}(t, t') = M[(X(t) - m_x(t))(Y(t') - m_y(t'))].$$

Нормована взаємна кореляційна функція обчислюється за такою формулою:

$$\rho_{xy}(t, t') = \frac{R_{xy}(t, t')}{\sigma_x(t)\sigma_y(t')}.$$

Якщо $R_{xy}(t, t') \equiv 0$, то ВФ $X(t)$ і $Y(t)$ називаються некорельованими.

Розглянемо таку задачу:

Нехай $X(t)$ і $Y(t)$ – випадкові функції із відомими математичним сподіваннями й кореляційними функціями. Потрібно визначити математичне сподівання $m_z(t)$ і кореляційну функцію $K_z(t, t')$ на виході системи, якщо $Z(t) = X(t) + Y(t)$.

Мають місце такі правила перетворення:

1. При додаванні двох ВФ їх математичні сподівання також додаються, тобто

$$m_z(t) = m_x(t) + m_y(t).$$

2. При додаванні двох ВФ кореляційна функція суми дорівнює сумі кореляційних функцій доданків плюс їх подвоєна взаємна кореляційна функція, а саме:

$$K_z(t, t') = K_x(t, t') + K_y(t, t') + 2R_{xy}(t, t').$$

Перевіримо цю властивість.

Для центрованих функцій має місце така рівність: $\dot{Z}(t) = \dot{X}(t) + \dot{Y}(t)$.

Враховуючи це, обчислимо кореляційну функцію на виході системи, таким чином:

$$\begin{aligned} K_z(t, t') &= M\left[\dot{Z}(t)\dot{Z}(t')\right] = M\left\{\left[\dot{X}(t) + \dot{Y}(t)\right]\left[\dot{X}(t') + \dot{Y}(t')\right]\right\} = \\ &= M\left[\dot{X}(t)\dot{X}(t')\right] + M\left[\dot{Y}(t)\dot{Y}(t')\right] + M\left[\dot{X}(t)\dot{Y}(t')\right] + M\left[\dot{X}(t')\dot{Y}(t)\right] = \\ &= K_x(t, t') + K_y(t, t') + 2R_{xy}(t, t'). \end{aligned}$$

Окремо розглянемо додавання до ВФ $X(t)$ випадкової величини γ , тоді

$$\begin{aligned} Z(t) &= X(t) + \gamma; \\ m_z(t) &= m_x(t) + m_\gamma; \\ K_z(t, t') &= K_x(t, t') + D_\gamma, \end{aligned} \quad (1.1)$$

тут m_γ і D_γ – математичне сподівання й дисперсія ВВ γ .

Зауважимо, що рівність (1.1) справедлива лише у випадку, коли випадкова функція $X(t)$ і випадкова величина γ – незалежні.

П р и к л а д 1.5. Знайти математичне сподівання й кореляційну функцію суми двох незалежних ВФ $X(t)$ і $Y(t)$ з такими характеристиками: $M_x(t) = t$, $K_x(t, t') = tt'$, $M_y(t) = -t$, $K_y(t, t') = tt'e^{\alpha(t+t')}$.

Розв'язування

За умовами задачі $Z(t) = X(t) + Y(t)$. Обчислимо математичне сподівання згідно з правилом перетворення:

$$m_z(t) = m_x(t) + m_y(t) = t - t = 0.$$

Кореляційна функція суми $K_z(t, t') = K_x(t, t') + K_y(t, t') + 2R_{xy}(t, t')$. Але $R_{xy}(t, t') = 0$, оскільки $X(t)$ і $Y(t)$ – незалежні, тому

$$K_z(t, t') = tt' + tt'e^{\alpha(t+t')} = tt'(1 + e^{\alpha(t+t')}).$$

$$\text{Відповідь: } m_z(t) = 0, K_z(t, t') = tt'(1 + e^{\alpha(t+t')}).$$

§ 1.7. Канонічні розкладання ВФ

Розглянуті вище правила лінійного перетворення ВФ динамічною системою викликають труднощі при їхній практичній реалізації. Особливо це стосується подвійного перетворення кореляційної функції. Навіть якщо оператор L має просту форму, обчислення кореляційної функції виявляється дуже громіздким. Коли ж, як це звичайно буває, робота динамічної системи описується диференціальними рівняннями, тобто оператор, що описує перетворення, задано у неявному вигляді, то задача суттєво ускладнюється й у більшості випадків стає практично нерозв'язною.

У цих обставинах, розв'язуючи практичні задачі, частіше застосовують методи, які передбачають більш прості перетворення. Один із таких – метод канонічних розкладань, розроблений В.С. Пугачовим.

Ідея методу полягає в тому, що перетворювана оператором ВФ спочатку подається у вигляді суми так званих *елементарних* ВФ.

Елементарною називається ВФ, що має такий вигляд:

$$X(t) = V\varphi(t), \quad (1.2)$$

де V – випадкова величина, $\varphi(t)$ – звичайна (невипадкова) функція.

Вона являє собою більш простий тип випадкової функції, оскільки у виразі (1.2) випадковим є тільки множник V .

На рис.1.13 наведено приклади елементарних випадкових функцій, які подано у вигляді сімей реалізацій.

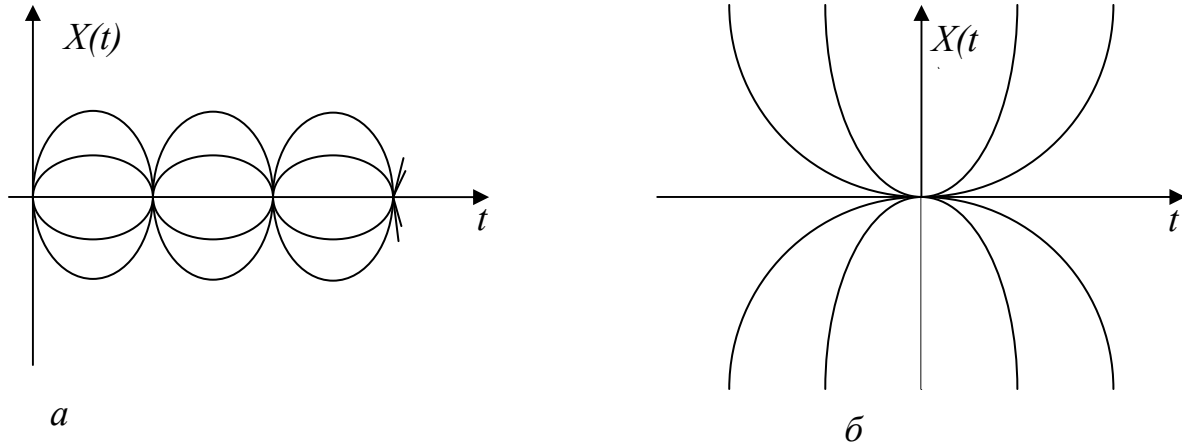


Рис. 1.13. Криві реалізацій елементарних випадкових функцій:
 а) $X(t) = V \sin t$, $\varphi(t) = \sin t$; б) $X(t) = V t^2$, $\varphi(t) = t^2$

Отже, в функціях такого типу дві особливості випадкових функцій розмежовано, зокрема, випадковість зосереджена у випадковій величині V , а залежність від аргументу – в невідповідній функції $\varphi(t)$.

Визначимо характеристики елементарної ВФ (1.2).

Математичне сподівання

$$m_x(t) = M[V\varphi(t)] = m_v \varphi(t). \quad (1.3)$$

Вочевидь, коли $m_v = 0$, то $m_x(t) = 0$.

Нагадаємо, що будь-яку ВФ можна центрувати, тобто перетворити таким чином: $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t)$. Легко побачити, що $M(\overset{\circ}{X}(t)) = 0$. Надалі ми будемо розглядати центровані елементарні ВФ, математичне сподівання яких дорівнює нулю, тобто

$$m_v = 0; \quad V = \overset{\circ}{V}; \quad m_x(t) \equiv 0.$$

Визначимо кореляційну функцію елементарної ВФ, а саме:

$$K_x(t, t') = M[X(t)X(t')] = \varphi(t)\varphi(t')M[V^2] = \varphi(t)\varphi(t')D_v, \quad (1.4)$$

де D_v – дисперсія випадкової величини V .

Очевидно, що над елементарною ВФ неважко виконувати лінійні перетворення. Наприклад:

$$X'(t) = V\varphi'(t),$$

$$\int_0^t X(\tau)d\tau = V \int_0^t \varphi(\tau)d\tau.$$

У загальному випадку

$$L[X(t)] = VL[\varphi(t)]. \quad (1.5)$$

Таким чином, коли елементарна ВФ, яка має вигляд (1.2), прибуває на вхід лінійної системи, то її перетворення оператором L зводиться до перетворення невинуваткової функції $\varphi(t)$.

Основна ідея методу канонічних розкладань полягає в тому, що ВФ $X(t)$, яка перебуває на вході системи, приблизно (або точно) подають у вигляді системи елементарних ВФ і тільки потім перетворюють за допомогою оператора L .

Нехай маємо ВФ: $X(t) = m_x(t) + \overset{\circ}{X}(t)$.

Припустимо, що її вдалося подати у вигляді такої суми:

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^m V_i \varphi_i(t), \quad (1.6)$$

де V_i – випадкова величина із математичним сподіванням, що дорівнює нулю. Подання ВФ $X(t)$ у вигляді виразу (1.6) називається *розкладанням ВФ*.

У цьому разі випадкові величини V_1, V_2, \dots, V_m називаються *коефіцієнтами розкладання*, а невинуваткові функції $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)$ – *координатними функціями*.

Визначимо реакцію $Y(t)$ системи, описаної лінійним оператором L , на вхідний вплив $X(t)$, а саме:

$$Y(t) = L[X(t)] = L[m_x(t)] + \sum_{i=1}^m V_i L[\varphi_i(t)]. \quad (1.7)$$

З огляду на те, що $L[m_x(t)] = m_y(t)$, і ввівши позначення $\psi_i(t) = L[\varphi_i(t)]$, отримуємо такий результат:

$$Y(t) = m_y(t) + \sum_{i=1}^m V_i \psi_i(t). \quad (1.8)$$

Вираз (1.8) є розкладанням реакції системи $Y(t)$ за елементарними функціями $\psi_i(t)$.

Зауважимо, що коефіцієнти розкладання V_1, V_2, \dots, V_m не змінюються, вони залишаються тими самими, що й для вхідного впливу $X(t)$. Лінійному ж перетворенню піддаються лише координатні функції.

Отже, задану розкладанням за елементарними функціями ВФ можна перетворювати відповідно до такого загального правила:

Якщо ВФ $X(t)$, задана розкладанням за елементарними функціями, піддається перетворенню через дію лінійного оператора L , то коефіцієнти розкладання залишаються незмінними, а математичне сподівання й координатні функції перетворюються із застосуванням того самого оператора L .

У такий спосіб задача визначення реакції системи $Y(t)$ спрощується, тому що оператор L застосовується лише один раз до невинуватих функцій $m_x(t)$, $\varphi_1(t)$, ... $\varphi_m(t)$, на відміну від кореляційної функції $K_x(t, t')$, яка перетворюється двічі.

Розглянемо ВФ $X(t)$, задану таким розкладанням:

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^m V_i \varphi_i(t),$$

де $V_1 \dots V_m$ – система ВВ із нульовим математичним сподіванням й кореляційною матрицею $\|K_{ij}\|$.

Знайдемо кореляційну функцію й дисперсію ВФ $X(t)$.

Обчислимо кореляційну функцію $K_x(t, t')$, враховуючи, що $K_x(t, t') = M \left[\overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t') \right]$, $\overset{\circ}{X}(t) = \sum_{i=1}^m V_i \varphi_i(t)$, і $\overset{\circ}{X}(t') = \sum_{i=1}^m V_i \varphi_i(t')$. Тоді отримуємо такий вираз:

$$K_x(t, t') = M \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m V_i V_j \varphi_i(t) \varphi_j(t') \right] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m M[V_i V_j] \varphi_i(t) \varphi_j(t'). \quad (1.9)$$

Коли $i = j$, то математичне сподівання $M[V_i V_i] = M[V_i^2] = k_{ii} = D_i$, де D_i – дисперсії ВВ V_i , $i = \overline{1, m}$, а вираз (1.9) можна записати в такому вигляді:

$$K_x(t, t') = \sum_{i=1}^m \varphi_i(t) \varphi_i(t') D_i + \sum_{i=1}^m \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \varphi_i(t) \varphi_j(t') k_{ij}. \quad (1.10)$$

Вважаючи, що $t = t'$, отримуємо вираз для обчислення дисперсії, тобто

$$D_x(t) = \sum_{i=1}^m \varphi_i^2(t) D_i + \sum_{i=1}^m \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \varphi_i(t) \varphi_j(t) k_{ij}, \quad (1.11)$$

Вирази (1.10) і (1.11) набувають простого вигляду, якщо всі коефіцієнти розкладання V_i , $i = \overline{1, m}$, некорельовані, тобто $k_{ij} = 0$ для всіх випадків, коли $i \neq j$. У цьому разі розкладання ВФ називається *канонічним*.

Визначення. Канонічним розкладанням випадкової функції називається її подання в такому вигляді:

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^m V_i \varphi_i(t), \quad (1.12)$$

тут $m_x(t)$ – математичне сподівання ВФ $X(t)$; $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, m}$, – координатні функції; V_i , $i = \overline{1, m}$, – некорельовані ВВ із нульовим математичним сподіванням.

Коли має місце канонічне розкладання ВФ (1.12), то її кореляційна функція виходить із виразу (1.10) шляхом прирівнювання до нуля всіх сум, для яких $i \neq j$, і набуває такого вигляду:

$$K_x(t, t') = \sum_{i=1}^m \varphi_i(t) \varphi_i(t') D_i. \quad (1.13)$$

Вираз (1.13) називається канонічним розкладанням кореляційної функції. Вважаючи, що $t = t'$, одержимо із формули (1.13) вираз для обчислення дисперсії ВФ, а саме:

$$D_x(t) = \sum_{i=1}^m [\varphi_i(t)]^2 D_i. \quad (1.14)$$

Таким чином, знаючи канонічне розкладання ВФ (1.12), можна відразу визначити канонічне розкладання її кореляційної функції (1.13). Справедливим є також обернене твердження.

Зауважимо, що

- канонічне розкладання можна отримати багатьма способами;
- число доданків у канонічному розкладанні може бути нескінченним, а сума в такому випадку замінюється інтегралом;
- канонічне розкладання не дає інформації про те, який закон розподілу має випадковий процес;
- практичні способи побудови канонічного розкладання мають базуватися на статистичних даних про випадкові процеси.

§ 1.8. Проходження ВФ, заданої канонічним розкладанням, через лінійну динамічну систему

Нехай лінійна динамічна система з оператором L перетворює ВФ $X(t)$, що прибуває на її вхід, у реакцію $Y(t)$, тобто $Y(t) = L[X(t)]$ (рис. 1.14).

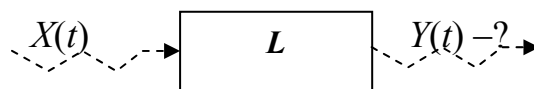


Рис. 1.14. Лінійна динамічна система

Припустимо, що $X(t)$ задано таким канонічним розкладанням:

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^m V_i \gamma_i(t).$$

Оскільки оператор L лінійний, то реакція системи має такий вигляд:

$$Y(t) = L[X(t)] = L[m_x(t)] + \sum_{i=1}^m V_i L[\gamma_i(t)]. \quad (1.15)$$

Останній вираз (1.15) є також канонічним розкладанням ВФ $Y(t)$, математичне сподівання якої

$$m_y(t) = L[m_x(t)], \quad (1.16)$$

а координатні функції

$$\Psi_i(t) = L[\gamma_i(t)], \quad i = \overline{1, m}. \quad (1.17)$$

Отже, при лінійному перетворенні канонічного розкладання ВФ $X(t)$ отримуємо канонічне розкладання ВФ $Y(t)$, причому математичне сподівання й координатні функції піддаються тому самому лінійному перетворенню, тобто

$$Y(t) = m_y(t) + \sum_{i=1}^m V_i \Psi_i(t), \quad (1.18)$$

а $m_x(t)$ і $\psi_i(t)$ можна знайти за формулами (1.16) і (1.17).

Кореляційна функція та дисперсія реакції $Y(t)$ визначаються за допомогою таких рівнянь:

$$K_y(t, t') = \sum_{i=1}^m \Psi_i(t) \Psi_i(t') D_i,$$

$$D_y(t) = \sum_{i=1}^m \Psi_i^2(t) D_i.$$

Враховуючи правила, подані нами в §1.5 відносно лінійного однорідного оператора, сформулюємо правила неоднорідного лінійного перетворення: $L[X(t)] = L_o[X(t)] + \varphi(t)$, випадкового процесу, заданого своїм канонічним розкладанням.

1. Якщо випадковий процес, заданий своїм канонічним розкладанням:

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^m V_i \gamma_i(t),$$

піддати лінійному неоднорідному перетворенню L , то отримаємо випадковий процес також у вигляді канонічного розкладання, а саме:

$$Y(t) = L[X(t)] = m_y(t) + \sum_{i=1}^m V_i \psi_i(t),$$

тут $m_y(t)$ – математичне сподівання випадкового процесу $Y(t)$, отримане в результаті того самого лінійного неоднорідного перетворення математичного сподівання випадкового процесу $X(t)$, тобто

$$m_y(t) = L[m_x(t)] ,$$

а координатні функції канонічного розкладання випадкового процесу $Y(t)$ одержують як наслідок відповідного лінійного однорідного перетворення L_o координатних функцій канонічного розкладання випадкового процесу $X(t)$, тобто

$$\psi_i(t) = L_o[\gamma_i(t)], \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

2. Коефіцієнти канонічного розкладання не змінюються.

3. Кореляційну функцію випадкового процесу: $Y(t) = L[X(t)]$, отриманого в результаті неоднорідного перетворення випадкового процесу $X(t)$, можна відшукати шляхом відповідного подвійного лінійного однорідного перетворення кореляційної функції випадкового процесу $X(t)$. Це перетворення проводиться спочатку за аргументом t , а потім за t' (або навпаки), тобто

$$K_y(t, t') = L_{ot} [L_{ot'} [K_x(t, t')]] ,$$

тут $L[X(t)] = L_o[X(t)] + \phi(t)$.

Якщо випадковий процес $X(t)$, задано своїм канонічним розкладанням:

$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^m V_i \gamma_i(t)$, то кореляційну функцію випадкового процесу:

$Y(t) = L[X(t)]$, отримують за такою формулою:

$$K_y(t, t') = \sum_{i=1}^m \psi_i(t) \psi_i(t') D_i .$$

Розглянемо випадок, коли модель системи (її оператор) задано у вигляді лінійного диференціального рівняння, а саме:

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) Y(t) = (b_l p^l + b_{l-1} p^{l-1} + \dots + b_1 p + b_0) X(t)$$

або в скороченому записі

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i p^i \right) Y(t) = \left(\sum_{j=0}^l b_j p^j \right) X(t) .$$

Оскільки система лінійна, аналогічному диференціальному рівнянню мають відповідати математичні сподівання й кожна з координатних функцій входу та реакцій системи, тобто

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=0}^n a_i p^i \right) m_y(t) = \left(\sum_{j=0}^l b_j p^j \right) m_x(t); \\ \left(\sum_{i=0}^n a_i p^i \right) \Psi_k(t) = \left(\sum_{j=0}^l b_j p^j \right) \gamma_k(t), \quad k = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (1.19)$$

Кількість диференціальних рівнянь, що входять у систему (1.19), становить $(m + 1)$, ці рівняння розв'язують відносно функцій $m_y(t)$, $\psi_1(t)$, ... $\psi_m(t)$ для заданих функцій $m_x(t)$, $\gamma_1(t)$, ... $\gamma_m(t)$... При цьому приймаються такі початкові умови:

$$m_y^{(i)}(0) = y^{(i)}(0), \quad i = \overline{0, n-1},$$

$$\Psi_j^{(i)}(0) = 0, \quad i = \overline{0, n-1}; \quad j = \overline{1, m}.$$

П р и к л а д 1.6. ВФ $X(t)$ задано своїм канонічним розкладанням:

$$X(t) = \sum_{i=1}^n V_i e^{-\alpha_i t} + a, \quad \text{де } V_i \text{ – незалежні центровані ВВ із дисперсіями } D_i, \quad a \text{ –}$$

невипадкова величина. Визначити характеристики випадкової функції $X(t)$.

Розв'язування

Обчислимо математичне сподівання випадкової функції $X(t)$, враховуючи, що випадкові величини V_i центровані, тобто $M(V_i) = 0$, тоді

$$m_x(t) = M \left(\sum_{i=1}^n V_i e^{-\alpha_i t} + a \right) = M \sum_{i=1}^n (V_i e^{-\alpha_i t}) + a = a = \text{const}.$$

Кореляційна функція випадкової функції $X(t)$

$$K_x(t, t') = \sum_{i=1}^n e^{-\alpha_i t} e^{-\alpha_i t'} D_i = \sum_{i=1}^n D_i e^{-\alpha_i (t+t')},$$

а її дисперсія $D_x(t) = K_x(t = t') = \sum_{i=1}^n D_i e^{-2\alpha_i t}$.

$$\text{Відповідь: } m_x(t) = a, \quad K_x(t, t') = \sum_{i=1}^n D_i e^{-\alpha_i (t+t')}, \quad D_x(t) = \sum_{i=1}^n D_i e^{-2\alpha_i t}.$$

Висновки

1. Випадкова функція зосереджує в собі властивості функції та випадкової величини.

2. Основними характеристиками випадкової функції є математичне сподівання, дисперсія, кореляційна функція.

3. Характеристики випадкової функції являють собою функції не випадкові.

4. При перетворенні випадкової функції лінійною динамічною системою обчислення її характеристик на виході виконується за такими правилами:

Математичне сподівання ВФ на виході лінійної системи знаходять шляхом застосування оператора системи до математичного сподівання ВФ на вході. Якщо оператор системи неоднорідний, тобто $L = L_0 + \varphi(t)$, до результату додається не випадкова функція $\varphi(t)$.

Кореляційну функцію ВФ на виході лінійної системи визначають шляхом двократного застосування оператора (за кожним з аргументів) до кореляційної функції ВФ на вході.

5. Кожна випадкова функція може бути подана у вигляді канонічного розкладання.

6. В результаті перетворення лінійною динамічною системою випадкової функції, поданої своїм канонічним розкладанням, на виході системи отримують процес, також заданий канонічним розкладанням. При цьому характеристики вихідного процесу одержують, застосовуючи до характеристик вхідного процесу те саме перетворення.

Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення випадкової функції та випадкового процесу.
2. Що називають розрізом випадкової функції?
3. Що називають реалізацією випадкової функції?
4. Подайте класифікацію випадкових процесів. Наведіть приклади.
5. Які характеристики випадкових функцій ви знаєте?
6. Дайте визначення математичного сподівання випадкової функції. Які її властивості воно характеризує?
7. Як обчислити дисперсію випадкової функції? Які властивості випадкової функції вона характеризує?
8. Сформулюйте властивості математичного сподівання випадкової функції?
9. Якими властивостями характеризується дисперсія випадкової функції?
10. Чому математичне сподівання та дисперсія не є достатніми для визначення основних особливостей випадкової функції?
11. Дайте визначення кореляційної функції ВФ. Які властивості випадкової функції вона характеризує?
12. Сформулюйте властивості кореляційної функції ВФ.
13. Як можна визначити характеристики випадкової функції із результатів експерименту?

14. Що називають канонічним розкладанням випадкового процесу?
15. Скількома способами можна виконати канонічне розкладання випадкового процесу?
16. Яким чином визначають математичне сподівання випадкового процесу, заданого своїм канонічним розкладанням?
17. Як можна визначити кореляційну функцію випадкового процесу, заданого своїм канонічним розкладанням?
18. Які оператори (перетворення) називаються лінійними? Лінійними однорідними? Нелінійними? Наведіть приклади.
19. Сформулюйте правило однорідного лінійного перетворення випадкового процесу, заданого своїм канонічним розкладанням.
20. Сформулюйте правило неоднорідного лінійного перетворення випадкового процесу, заданого своїм канонічним розкладанням.
21. Яким чином визначають характеристики випадкового процесу $Y(t)$, отриманого в результаті лінійного неоднорідного перетворення випадкового процесу $X(t)$?

Задачі до розділу 1

Приклади розв'язування задач

1. Випадкова функція $X(t)$ має такі характеристики: $m_x(t) = t^2 - 1$; $K_x(t, t') = 2e^{-\alpha(t'-t)^2}$. Визначити характеристики таких ВФ: $Y(t) = tX(t) + t^2 + 1$ та $Z(t) = 2t \frac{dX(t)}{dt} + (1-t)^2$.

Розв'язування

Оператори перетворення $X(t)$ в $Y(t)$ і $Z(t)$ є лінійними неоднорідними, тому можемо застосовувати правила, які були сформульовані для неоднорідних лінійних операторів у § 1.5.

Отже,

$$m_y(t) = tm_x(t) + t^2 + 1 = t(t^2 - 1) + t^2 + 1 = t^3 + t^2 - t + 1,$$

$$K_y(t, t') = tt' \cdot 2e^{-\alpha(t'-t)^2}.$$

$$m_z(t) = 2t \frac{dm_x(t)}{dt} + (1-t)^2 = 4t^2 + 1 - 2t + t^2 = 5t^2 - 2t + 1,$$

$$K_z(t, t') = 4tt' \frac{\partial^2 K_x(t, t')}{\partial t \cdot \partial t'} = 4tt' \cdot 2 \frac{\partial}{\partial t} \left[2\alpha(t-t')e^{-\alpha(t'-t)^2} \right] =$$

$$= 16\alpha tt' \left[e^{-\alpha(t'-t)^2} + 2\alpha(t-t')(t'-t)e^{-\alpha(t'-t)^2} \right] = 16\alpha tt' e^{-\alpha(t'-t)^2} \left[1 - 2\alpha(t'-t)^2 \right].$$

2. Випадкову функцію задано у вигляді суми елементарних функцій: $X(t) = V_1 e^{-\alpha_1 t} + V_2 e^{-\alpha_2 t}$, де V_1 й V_2 – центровані випадкові величини, кореляційна матриця яких $k = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$. Знайти характеристики ВФ $X(t)$.

Розв'язування

Скориставшись кореляційною матрицею, переконуємось, що V_1 й V_2 – некорельовані випадкові величини, а їхні дисперсії $D_{v_1} = 2$ й $D_{v_2} = 5$. Це означає, що ВФ $X(t)$ подано у вигляді канонічного розкладання, тому

$$\begin{aligned} m_x(t) &= 0; \\ K_x(t, t') &= D_{v_1} e^{-\alpha_1(t+t')} + D_{v_2} e^{-\alpha_2(t+t')} = 2e^{-\alpha_1(t+t')} + 5e^{-\alpha_2(t+t')}; \\ D_x(t) = K_x(t, t) &= 2e^{-\alpha_1 t} + 5e^{-\alpha_2 t}. \end{aligned}$$

3. Розглянемо дві некорельовані ВФ $X(t)$ і $Y(t)$, що мають такі характеристики: $m_x(t) = t^2$; $K_x(t, t') = e^{\alpha_1(t+t')}$, $m_y(t) = 1$; $K_y(t, t') = e^{\alpha_2(t+t')}$. Визначити характеристики такої ВФ: $Z(t) = X(t) + tY(t) + t^2$.

Розв'язування

Обчислимо математичне сподівання ВФ $Z(t)$, враховуючи його властивості, сформульовані в § 1.2, тобто

$$\begin{aligned} m_z(t) &= M[X(t) + tY(t) + t^2] = M[X(t)] + tM[Y(t)] + M(t^2) = m_x(t) + t \cdot m_y(t) + t^2 = \\ &= t^2 + t + t^2 = 2t^2 + t. \end{aligned}$$

Тепер обчислимо кореляційну функцію та дисперсію ВФ $Z(t)$, беручи до уваги властивості кореляційної функції (див. § 1.2), а саме:

$$K_z(t, t') = K_x(t, t') + tt'K_y(t, t') = e^{\alpha_1(t+t')} + tt'e^{\alpha_2(t+t')},$$

$$D_z(t) = K_z(t, t) = e^{2\alpha_1 t} + t^2 e^{2\alpha_2 t}.$$

Задачі для самостійного розв'язування

1. Випадкова функція $X(t) = (t^2 + 1)U$, де U – випадкова величина, можливі значення якої перебувають в інтервалі $(0; 10)$. Знайти реалізації функції $X(t)$ під час двох випробувань, у яких величина U набула таких значень: а) $u_1 = 2$; б) $u_2 = 3,5$.

Відповідь: $x_1(t) = 2(t^2 + 1)$, $x_2(t) = 3,5(t^2 + 1)$.

2. Випадкова функція $X(t) = U \sin t$, де U – випадкова величина. Знайти розрізи випадкової функції $X(t)$, які відповідають таким фіксованим значенням аргументу: а) $t_1 = \frac{\pi}{6}$; б) $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

Відповідь: $X\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{U}{2}$, $X\left(\frac{\pi}{2}\right) = U$.

3. Знайти математичне сподівання випадкової функції $X(t) = Ue^t$, де U – випадкова величина, причому $M(U) = 5$.

Відповідь: $m_X(t) = 5e^t$.

4. Знайти математичні сподівання випадкових функцій: $X(t) = Ut^2 + 2t + 1$ та $Y(t) = U \sin 4t + V \cos 4t$, де U та V – випадкові величини, причому $M(U) = M(V) = 1$.

Відповідь: $m_X(t) = t^2 + 2t + 1$, $m_Y(t) = \sin 4t + \cos 4t$.

5. Відомо кореляційну функцію K_X випадкової функції $X(t)$. Знайти кореляційну функцію випадкової функції: $Y(t) = X(t) + t^2$.

Відповідь: $K_Y = K_X$.

6. Відомо кореляційну функцію K_X , випадкової функції $X(t)$. Знайти кореляційні функції таких випадкових функцій: а) $Y(t) = X(t)(t + 1)$; б) $Z(t) = CX(t)$, де C – стала величина.

Відповідь: а) $K_Y(t, t') = K_X(t, t')(t + 1)(t' + 1)$; б) $K_Z(t, t') = C^2 K_X(t, t')$.

7. Відомо дисперсію $D_X(t)$ випадкової функції $X(t)$. Знайти дисперсію випадкової функції: $Y(t) = X(t) + 2$.

Відповідь: $D_Y(t) = D_X(t)$.

8. Дано: $X(t)$ – випадкова функція, $\varphi(t)$ – не випадкова функція. Довести: якщо $Y(t) = X(t)\varphi(t)$, то $D_Y(t) = \varphi^2 D_X(t)$.

9. Відома дисперсія випадкової функції $X(t)$. Знайти дисперсію випадкової функції: $Y(t) = X(t)(t + 3)$.

Відповідь: $D_Y(t) = D_X(t)(t + 3)^2$.

10. На вхід підсилювальної ланки системи регулювання подається випадкова функція $X(t)$, математичне сподівання і кореляційна функція якої відомі, а саме: $m_X(t) = t$, $K_X(t_1, t_2) = e^{-a(t_2 - t_1)^2}$, ($a > 0$). Знайти: а) математичне

сподівання, б) кореляційну функцію вихідної випадкової функції $Y(t)$, якщо коефіцієнт підсилення $k = 5$.

Вказівка. Врахувати, що вихідна функція $Y(t) = 5X(t)$

Відповідь: а) $m_y(t) = 5t$, б) $K_y(t_1, t_2) = 25e^{-a(t_2 - t_1)^2}$

11. Знайти: а) математичне сподівання; б) кореляційну функцію; в) дисперсію випадкової функції: $X(t) = U \cos 2t$, де U – випадкова величина, причому $M(U) = 5$, $D(U) = 6$.

Відповідь: а) $m_x(t) = 5 \cos 2t$; б) $K_x(t, t') = 6 \cos 2t \cos 2t'$; в) $D_x(t) = 6 \cos^2 2t$.

12. Знайти: а) математичне сподівання; б) кореляційну функцію; в) дисперсію випадкової функції: $X(t) = U \sin 3t$, де U – випадкова величина, причому $M(U) = 10$, $D(U) = 0,2$.

Відповідь: а) $m_x(t) = 10 \sin 3t$; б) $K_x(t, t') = 0,2 \sin 3t \sin 3t'$;
в) $D_x(t) = 0,2 \sin^2 3t$.

13. Задано кореляційну функцію: $K_x(t_1, t_2) = t_1 t_2 e^{-|t_2 - t_1|}$, випадкової функції $X(t)$. Знайти нормовану кореляційну функцію.

Відповідь: $r_x(t_1, t_2) = \frac{e^{-|t_2 - t_1|}}{t_1 t_2}$.

14. Знайти взаємну кореляційну функцію двох випадкових функцій: $X(t) = t^2 U$ і $Y(t) = tU$, де U – випадкова величина, причому $D(U) = 5$.

Відповідь: $R_{xy}(t_1, t_2) = 5t_1^2 t_2$

15. Задано взаємну кореляційну функцію: $R_{xy}(t_1, t_2) = \cos(at_1 + \beta t_2)$. Записати взаємну кореляційну функцію $R_{yx}(t_1, t_2)$.

Відповідь: $R_{yx}(t_1, t_2) = \cos(at_2 + \beta t_1)$.

16. Задано математичне сподівання: $m_x(t) = t^2 + 2t + 1$, випадкової функції $X(t)$. Знайти математичне сподівання її похідної.

Відповідь: $m_{x'}(t) = 2t + 2$

17. Задано математичне сподівання: $m_x(t) = t^2 + 4$, випадкової функції $X(t)$. Знайти математичне сподівання випадкової функції: $Y(t) = tX'(t) + t^2$.

Відповідь: $m_y(t) = 3t^2$.

18. Задано кореляційну функцію: $K_x(t_1, t_2) = 5e^{-(t_2 - t_1)^2}$, випадкової функції $X(t)$. Знайти кореляційну функцію її похідної.

Відповідь: $K_{x'}(t_1, t_2) = 5e^{-(t_2 - t_1)^2} (1 - 2(t_2 - t_1))$.

19. На вхід диференціовальної системи прибуває випадкова функція $X(t)$, кореляційна функція якої $K_x(t_1, t_2) = [D_x \cos \omega(t_2 - t_1)] / (t_2 + t_1)$. Знайти кореляційну функцію вихідної функції.

Відповідь: $K_{x'}(t_1, t_2) = D_x \frac{\cos(t_2 - t_1) [(t_2 + t_1)^2 + 2]}{(t_2 + t_1)^3}$.

20. На вхід диференціовальної ланки прибуває випадкова функція, математичне сподівання якої $m_x(t) = 5 \sin t$, а кореляційна функція $K_x(t_1, t_2) = 3e^{-0.5(t_2 - t_1)^2}$. Знайти: а) математичне сподівання; б) кореляційну функцію вихідної функції: $Y(t) = X'(t)$.

Відповідь: а) $m_y(t) = 5 \cos t$, б) $K_y(t_1, t_2) = 3e^{-0.5(t_2 - t_1)^2} (1 - (t_2 - t_1)^2)$

21. Знайти математичне сподівання випадкових функцій: а) $X(t) = Ut^2$, де U – випадкова величина, причому $M(U) = 5$; б) $X(t) = U \cos 2t + Vt$, де U та V – випадкові величини, причому $M(U) = 3$, $M(V) = 4$.

Відповідь: а) $m_x(t) = 5t^2$; б) $m_x(t) = 3 \cos 2t + 4t$.

22. Задано кореляційну функцію $K_x(t_1, t_2)$ випадкової функції $X(t)$. Знайти кореляційні функції випадкових функцій: а) $Y(t) = X(t) + t$; б) $Y(t) = (t + 1)X(t)$; в) $Y(t) = 4X(t)$.

Відповідь: а) $K_y(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2)$; б) $K_y(t_1, t_2) = (t_1 + 1)(t_2 + 1)K_x(t_1, t_2)$; в) $K_y(t_1, t_2) = 16K_x(t_1, t_2)$.

23. Задано дисперсію $D_x(t)$ випадкової функції $X(t)$. Знайти дисперсію випадкових функцій: а) $Y(t) = X(t) + e^t$; б) $Y(t) = tX(t)$.

Відповідь: а) $D_y(t) = D_x(t)$; б) $D_y(t) = t^2 D_x(t)$.

24. Знайти: а) математичне сподівання; б) кореляційну функцію; в) дисперсію випадкової функції: $X(t) = U \sin 2t$, де U – випадкова величина, причому $M(U) = 3$, $D(U) = 6$.

Відповідь: а) $m_x(t) = 3 \sin 2t$; б) $K_x(t_1, t_2) = 6 \sin 2t_1 \sin 2t_2$;

в) $D_x(t) = 6 \sin^2 2t$.

25. Знайти нормовану кореляційну функцію випадкової функції $X(t)$, якщо відомо її кореляційну функцію: $K_x(t_1, t_2) = 3 \cos(t_2 - t_1)$.

Відповідь: $\rho_x(t_1, t_2) = \cos(t_2 - t_1)$.

26. Задано випадкові функції: $X(t) = (t-1)U$ та $Y(t) = t^2V$, де U і V – некорельовані випадкові величини, причому $M(U) = 2$, $M(V) = 3$, $D(U) = 4$, $D(V) = 5$. Знайти: а) математичне сподівання; б) кореляційну функцію; в) дисперсію суми: $Z(t) = X(t) + Y(t)$.

Вказівка: Переконатися в тому, що взаємна кореляційна функція заданих випадкових функцій дорівнює нулю, отже, $X(t)$ та $Y(t)$ некорельовані.

Відповідь: а) $m_x(t) = 2(t-1) + 3t^2$; б) $K_y(t_1, t_2) = 4(t_1-1)(t_2-1) + 6t_1^2t_2^2$; в) $D_x(t) = 4(t-1)^2 + 6t^4$.

27. Задано математичне сподівання: $m_x(t) = t^2 + 1$, випадкової функції $X(t)$. Знайти математичне сподівання її похідної.

Відповідь: $m_x(t) = 2t$.

28. Задано математичне сподівання: $m_x(t) = t^2 + 3$, випадкової функції $X(t)$. Знайти математичне сподівання випадкової функції: $Y(t) = tX'(t) + t^3$.

Відповідь: $m_y(t) = t^2(t+2)$.

29. Задано кореляційну функцію: $K_x(t_1, t_2) = e^{-(t_2-t_1)^2}$, випадкової функції $X(t)$. Знайти кореляційну функцію її похідної.

Відповідь: $K_x(t_1, t_2) = 2e^{-(t_2-t_1)^2} [1 - 2(t_2 - t_1)^2]$.

30. Задано математичне сподівання: $m_x(t) = 4t^3$, випадкової функції $X(t)$. Знайти математичне сподівання інтеграла: $Y(t) = \int_0^t X(s) ds$.

Відповідь: $m_y(t) = t^4$.

31. Задано випадкову функцію: $X(t) = U \cos^2 t$, де U – випадкова величина, причому $M(U) = 2$. Знайти математичне сподівання випадкової функції: $Y(t) = (t^2 + 1) \int_0^t X(s) ds$.

Відповідь: $m_y(t) = (t^2 + 1)[t + (\sin 2t)/2]$.

32. Задано кореляційну функцію: $K_x(t_1, t_2) = \cos \omega t_1 \cos \omega t_2$, випадкової функції $X(t)$. Знайти: а) кореляційну функцію; б) дисперсію інтеграла:

$$Y(t) = \int_0^t X(s) ds.$$

Відповідь: а) $K_y(t_1, t_2) = \frac{\sin \omega t_1 \sin \omega t_2}{\omega^2}$; б) $D_y(t) = (\sin^2 \omega t) / \omega^2$.

33. Задано випадкову функцію: $X(t) = Ue^{3t} \cos 2t$, де U – випадкова величина, причому $M(U) = 5$, $D(U) = 1$. Знайти: а) математичне сподівання;

б) кореляційну функцію; в) дисперсію інтеграла: $Y(t) = \int_0^t X(s) ds$.

Відповідь: а) $m_x(t) = 5e^{3t} \cos 2t$;

б) $K_y(t_1, t_2) = (1/169) \left[e^{3t_1} (2 \sin 2t_1 + 3 \cos 2t_1) - 3 \right] \left[e^{3t_2} (2 \sin 2t_2 + 3 \cos 2t_2) - 3 \right]$;

в) $D_y(t) = (1/169) \left[e^{3t} (2 \sin 2t + 3 \cos 2t) - 3 \right]^2$.

РОЗДІЛ 2

СТАЦІОНАРНІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ (СВП)

Мета розділу: вивчення властивостей стаціонарних випадкових процесів, методів обчислення характеристик СВП та правил їхнього перетворення лінійною динамічною системою.

§ 2.1. Поняття про СВП

На практиці часто спостерігаються випадкові процеси, перебіг яких у часі приблизно однаковий і які мають вид безперервних випадкових коливань навколо деякого середнього значення, причому ні середня амплітуда, ні характер цих коливань не змінюються істотно. Кожен із таких випадкових процесів можна розглядати як такий, що триває в часі невизначено довго. При цьому за початок відліку можна вибрати будь-який момент часу, але характеристики процесу залишаться незмінними. Описані випадкові процеси називаються *стаціонарними* (рис. 2.1). Коректне математичне визначення стаціонарного процесу буде подано нижче.

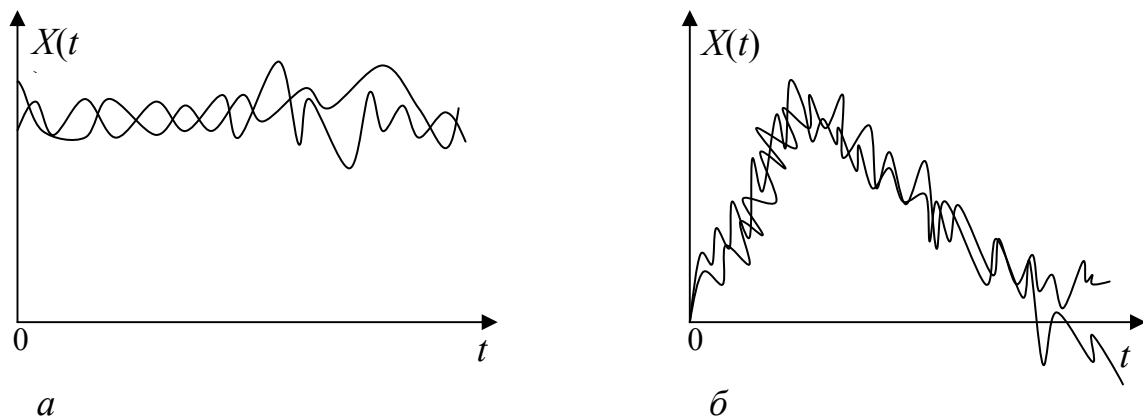


Рис. 2.1. Приклади випадкових процесів: *а* – криві стаціонарного процесу, *б* – криві нестаціонарного процесу

До стаціонарних випадкових процесів можна віднести коливання напруги в електромережі, випадкові шуми в радіоприймачі, хитавицю корабля.

Зауважимо, що крім СВП, існують і нестаціонарні процеси, характеристики яких змінюються в часі. Але потрібно розуміти, що саме поняття «стаціонарність» часто залежить від інтервалу часу, на якому розглядається випадковий процес (див. рис. 2.2). Як бачимо, один і той самий процес буде стаціонарним, якщо його розглядати на інтервалі $t_1 \div t_2$, і нестаціонарним на інших проміжках часу.

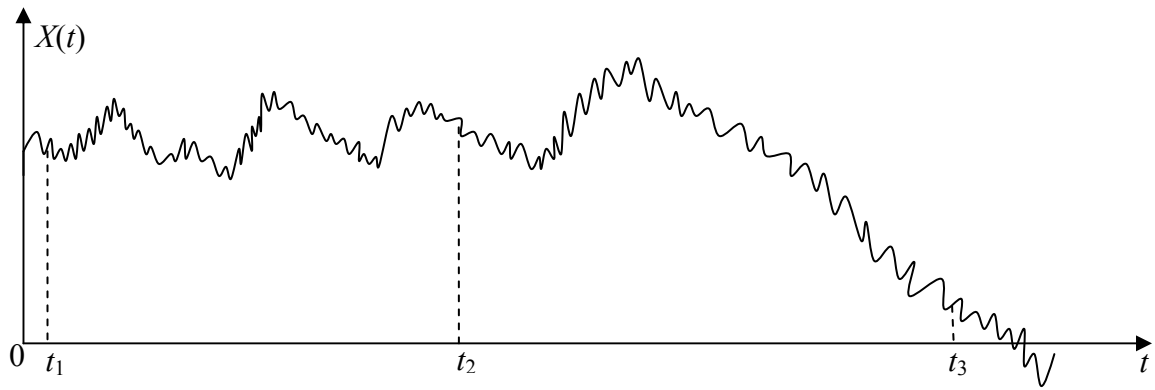


Рис. 2.2. Ілюстрація залежності стаціонарності процесу від часу:
 $0 \div t_1$ – нестаціонарний; $t_1 \div t_2$ – стаціонарний; $t_2 \div t_3$ – нестаціонарний

Оскільки порівняно з нестаціонарними процесами, математичний опис та перетворення СВП значно спрощуються, широкого застосування на практиці набула теорія СВП (теорія стаціонарних ВФ).

Випадкова функція $X(t)$ називається *стаціонарною*, якщо всі її ймовірнісні характеристики не залежать від аргументу t . Під характеристиками будемо розуміти математичне сподівання, дисперсію та кореляційну функцію.

Сформулюємо визначення СВП через його характеристики.

Випадкова функція $X(t)$ називається *стаціонарною*, якщо вона має:

- 1) стале математичне сподівання, тобто $m_x(t) = m_x = \text{const}$;
- 2) сталу дисперсію: $D_x(t) = D_x = \text{const}$;
- 3) кореляційний момент двох розрізів $K_x(t, t + \tau)$ не залежить від того, де саме на осі t взято відрізок довжиною τ , а зумовлюється тільки довжиною відрізка, тобто $K_x(t, t + \tau) = k_x(\tau)$ (рис. 2.3).

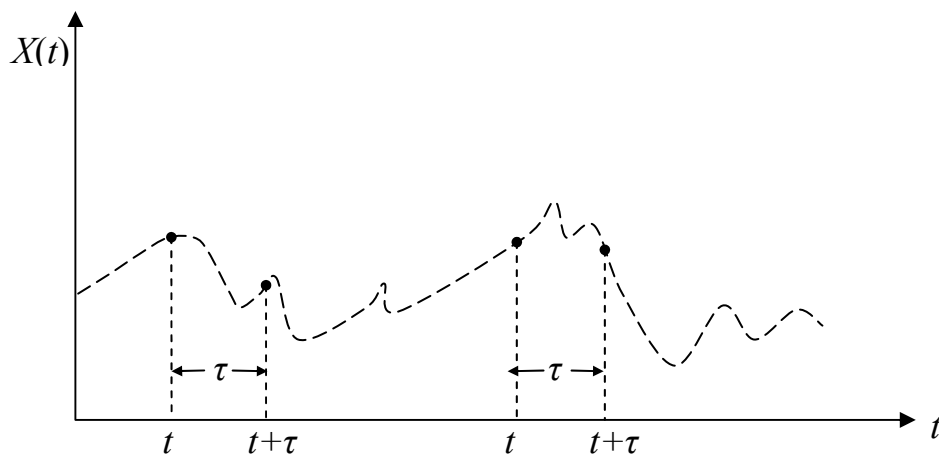


Рис. 2.3. Умовне зображення стаціонарного випадкового процесу

Зауважимо, що коли математичне сподівання мінливе, тобто процес не є стаціонарним, то можна перейти до центрованого процесу: $\tilde{X}(t) = X(t) - m_x(t)$, й розглядати його як стаціонарний. Тому надалі, щоб не висувати спеціальних

умов до математичного сподівання $m_x(t)$, будемо розглядати тільки центровані СВФ.

Крім того, друга умова є окремим випадком третьої, оскільки для СВП має місце рівність: $D_x(t) = K_x(t, t) = k_x(0) = \text{const}$.

Враховуючи все вищезазначене, робимо висновок, що рівність: $K_x(t, t + \tau) = k_x(\tau)$, – єдина істотна умова, яку має задовольняти стаціонарний ВП (СВФ).

Сформулюємо властивості кореляційної функції СВФ:

1. Кореляційна функція СВП – парна, тобто $k_x(\tau) = k_x(-\tau)$.

Дійсно, $K_x(t, t') = K_x(t', t)$, тоді

$$k_x(\tau) = K_x(t, t + \tau) = K_x(t + \tau, t) = k_x(-\tau).$$

2. Абсолютна величина кореляційної функції не перевищує її значення у точці початку координат, тобто

$$|k_x(\tau)| \leq k_x(0).$$

Зауважимо, що ці властивості випливають із загальних характеристик кореляційної функції (див. § 1.2).

Крім того, для оцінювання ступеня залежності між розрізами СВФ можна також використовувати *нормовану кореляційну функцію* СВП, яка визначається за такою формулою:

$$\rho_x(\tau) = \frac{k_x(\tau)}{D_x}.$$

Оскільки $D_x = k_x(0)$, то $\rho_x(0) = 1$. Отже, абсолютна величина нормованої кореляційної функції не перевищує одиниці.

§ 2.2. Ергодична властивість стаціонарних випадкових процесів

Розглянемо СВП $X(t)$, потрібно оцінити його характеристики: математичне сподівання m_x й кореляційну функцію $k_x(\tau)$.

Для того, щоб це зробити, необхідно мати кілька реалізацій СВП. Обробляючи дані цих реалізацій, знайдемо оцінку математичного сподівання $\tilde{m}_x(t)$ та кореляційної функції $\tilde{k}_x(t, t')$. Але у зв'язку з обмеженістю даних на інтервалі $0 \div \tau$ (скінченне число реалізацій), ми отримаємо лише наближені значення оцінок, тому $\tilde{m}_x(t)$ не буде сталим, а $\tilde{k}_x(t, t')$ залежатиме від двох аргументів. Ось чому для одержання прийнятних характеристик СВП необхідно буде усереднити математичне сподівання $\tilde{m}_x(t)$ за часом t , а кореляційну функцію усереднити стосовно різниці значень аргументу: $\tau = t - t'$. Такий метод обробки дуже громіздкий, тому виникає питання: чи не можна визначити

оцінки характеристик СВП на основі єдиної реалізації, спостережуваної протягом досить тривалого проміжку часу? Виявляється можна, але тільки в тому випадку, коли СВП має *ергодичну* властивість.

Ергодична властивість СВП полягає в тому, що кожна його окрема реалізація є ніби "характерним представником" усієї сукупності можливих реалізацій, тобто одна реалізація достатньої тривалості замінює при обробці множину реалізацій.

Якщо СВП $X(t)$ має ергодичну властивість, то для нього середнє за часом (на досить великому інтервалі) приблизно дорівнює середньому значенню за множиною спостережень. Отже, у цьому випадку всі характеристики випадкового процесу $X(t)$ можна визначати за однією реалізацією.

Розглянемо, які стаціонарні випадкові процеси мають ергодичну властивість, а які не мають.

Для цього скористаємось прикладами на рис. 2.4 та 2.5.

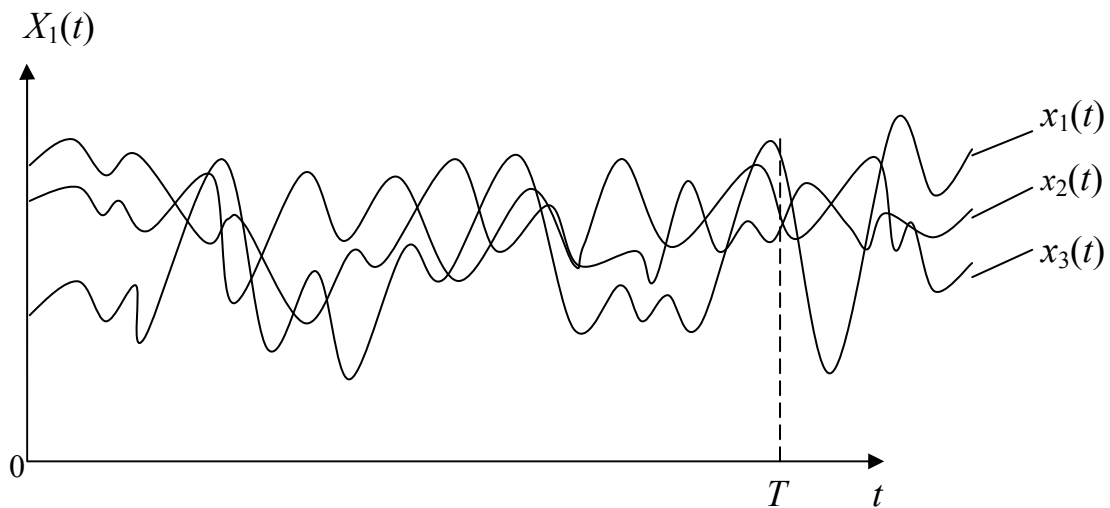


Рис. 2.4. Графіки реалізацій стаціонарного процесу $X_1(t)$, що має ергодичну властивість

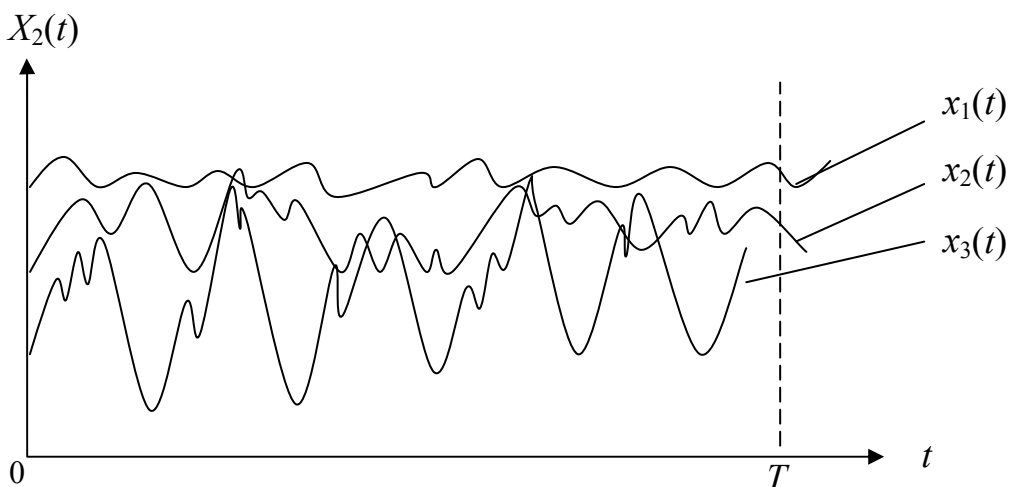


Рис. 2.5. Графіки реалізацій стаціонарного процесу $X_2(t)$, який не має ергодичної властивості

Очевидно, що ВП $X_1(t)$ і $X_2(t)$ є стаціонарними. Однак процесу $X_1(t)$ властива ергодичність, а процесу $X_2(t)$ – ні.

Припустимо, що $X_1(t)$ і $X_2(t)$ – процеси коливань величини кута атаки літака на даній висоті h . Тоді для процесу $X_1(t)$ висота h стала ($h = \text{const}$), а стосовно $X_2(t)$ висота для кожної з реалізацій набуває деякого випадкового значення в межах певного діапазону. Це означає, що ВП $X_2(t)$ має більш складну внутрішню структуру: він розкладений на елементарні випадкові процеси зі своїми індивідуальними характеристиками.

У цьому прикладі неергодичність ВП пов'язується із наявністю в його складі звичайної випадкової величини, а саме, висоти h .

Дійсно, розглянемо випадкову функцію: $Z(t) = X(t) + Y$, де $X(t)$ – ергодична СВФ із характеристиками m_x , $k_x(\tau)$, Y – ВВ з характеристиками m_y , D_y . Припустимо, що СВФ $X(t)$ і ВВ Y – некорельовані.

Відповідно до загальних правил додавання ВФ, характеристики ВФ $Z(t)$ будуть мати такі значення:

$$m_z = m_x + m_y,$$

$$k_z(\tau) = k_x(\tau) + D_y.$$

Із цих формул видно, що ВФ $Z(t)$ стаціонарна. Але вона не ергодична, оскільки кожна з її реалізацій буде мати індивідуальні характеристики, залежно від того, якого значення набула ВВ Y .

Про ергодичність або неергодичність ВП можна безпосередньо судити, оцінюючи вигляд його кореляційної функції. Річ у тім, що кореляційна функція неергодичного процесу має у своєму складі сталу D_y (див. рис. 2.6), на відміну від кореляційної функції ергодичного процесу.

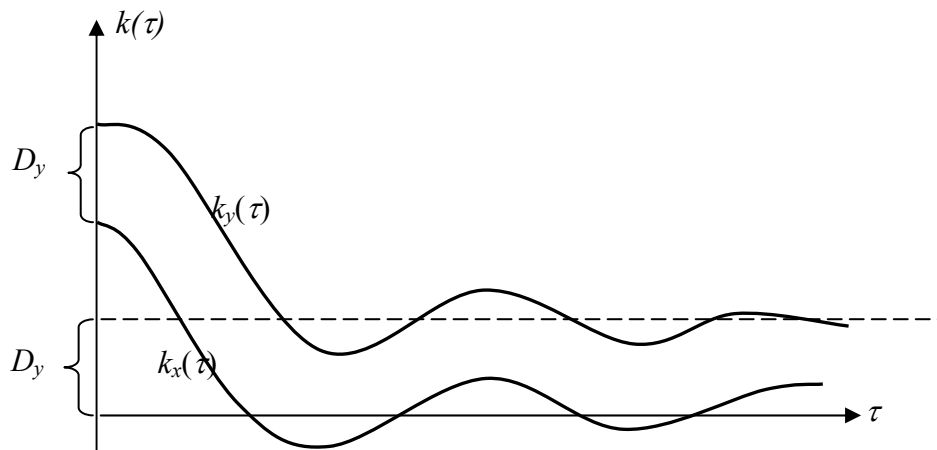


Рис. 2.6. Графіки кореляційних функцій ергодичного й неергодичного випадкових процесів: $k_x(\tau)$ – ергодичний, $k_y(\tau)$ – неергодичний

Отже, якщо кореляційна функція СВП вже не спадає, коли $\tau \rightarrow \infty$, а за умови досягнення деякого значення τ залишається сталою, то це свідчить про

те, що в складі ВФ $Z(t)$ є випадкова величина, а сам процес $Z(t)$ не є ергодичним. Далі покажемо, що в цьому випадку спектр ВФ $Z(t)$ буде складатися не тільки з неперервної частини, тобто в разі, коли частота $\omega = 0$, матиме місце скінченна дисперсія.

§ 2.3. Визначення характеристик ергодичного СВП на основі однієї реалізації

Нехай ВФ $X(t)$ являє собою СВП, якому властива ергодичність, і він заданий однією реалізацією на інтервалі $0 \div T$.

Як було сказано вище, характеристики ергодичної випадкової функції $X(t)$ можуть бути визначені не як середні за множиною реалізацій, а як середні за часом.

Інакше кажучи, оцінку математичного сподівання можна визначити за такою формулою:

$$M_x \approx \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dx. \quad (2.1)$$

Аналогічно на основі однієї реалізації випадкової функції $X(t)$ можна знайти оцінку кореляційної функції, а саме:

$$k_x(\tau) = M[\overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t + \tau)]. \quad (2.2)$$

Для обчислення функції $k_x(\tau)$ зручно спочатку центрувати ВП $X(t)$, тобто визначити функцію: $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x$, а потім обчислити кореляційну функцію за такою формулою:

$$k_x(\tau) \approx \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} \overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t + \tau) dt. \quad (2.3)$$

Обчислюючи інтеграл (2.3) для різних значень τ , отримують функцію $k_x(\tau)$. На практиці, розраховуючи інтеграли (2.1) і (2.3), їх замінюють скінченними сумами. Для цього попередньо весь інтервал даного ВП розбивається на n рівних частин довжиною Δt (див. рис. 2.7). Нехай t_1, t_2, \dots, t_n – середини цих інтервалів; $x_1 = x(t_1); x_2 = x(t_2), \dots, x_n = x(t_n)$ – це значення, яких набуває реалізація ВП в цих точках.

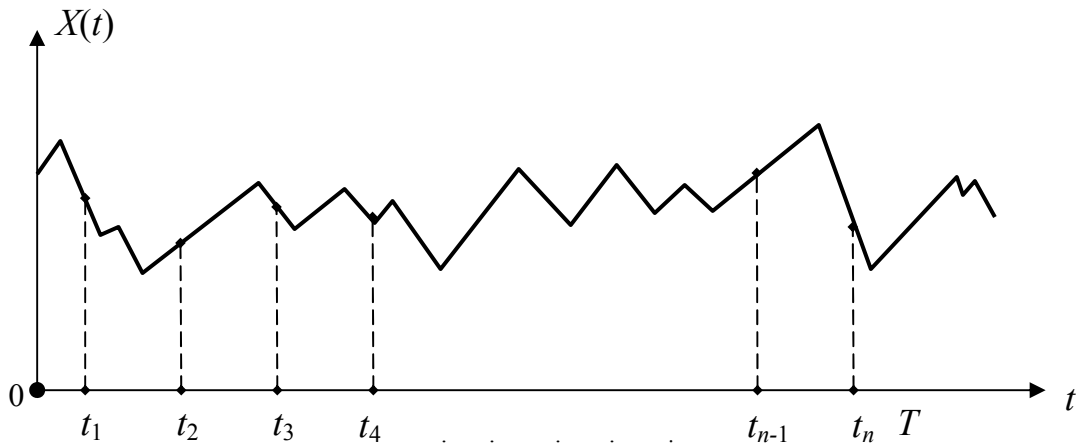


Рис. 2.7. Ілюстрація до обчислення характеристик випадкових функцій

Тоді наближене значення інтеграла (2.1) обчислюють за такою формулою:

$$m_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (2.4)$$

Аналогічно знаходять і кореляційну функцію для значень аргументу τ , які дорівнюють $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, m\Delta t$, ($m < n$), а саме:

$$k_x(j\Delta t) = \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j} x_i x_{i+j}, \quad j = \overline{0, m}, \quad (m < n). \quad (2.5)$$

Обчислення функції: $k_x(\tau) = k_x(j\Delta t)$ (тобто $\tau = j\Delta t$, $j = \overline{0, m}$), за виразом (2.5) виконують послідовно для всіх значень параметра j ($j = 0, 1, 2, \dots$). При цьому беруть таке значення m , що коли $\tau = m\Delta t$, то кореляційна функція $k_x(\tau)$ буде дорівнювати нулю або робити невеликі нерегулярні коливання поблизу нуля.

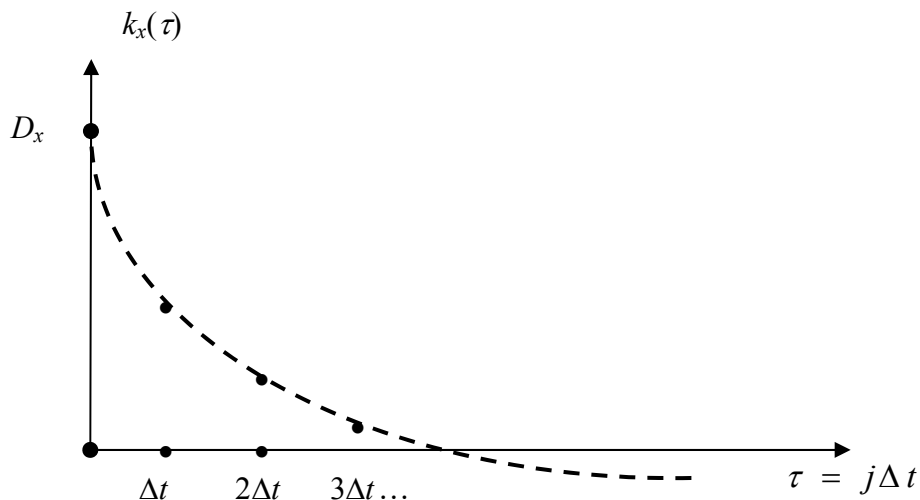


Рис. 2.8. Графік кореляційної функції ВФ

З огляду на сказане вище, можемо висловити такі зауваження:

1. Для того, щоб математичне сподівання m_x і кореляційну функцію $k_x(\tau)$ визначити з достатньою точністю, потрібно мати результати досить великої кількості вимірів n (сто і більше).

2. Вибір довжини часткових інтервалів Δt залежить від характеру ВФ $X(t)$, тобто швидкості її зміни. Зокрема, значення Δt вибирається так, щоб на один період найвищої частоти в спектрі $X(t)$ припадало орієнтовно до десяти вимірів.

3. Варто також мати на увазі, що при наближенні величини m до n кількість доданків у виразі (2.5) зменшується, а тому точність обчислень за цим виразом різко спадає.

§ 2.4. Спектральне розкладання СВП на скінченному проміжку часу. Спектр дисперсій

Відомо, що будь-яка не випадкова функція може бути подана у вигляді ряду Фур'є, тобто як сума гармонічних складових з певними амплітудами. При цьому *спектром процесу* називається функція, яка описує розподіл амплітуд за різними частотами. Спектр показує, якого роду коливання (які частоти) переважають у даному процесі.

Аналогічно можна описати й СВП. Справа в тому, що випадковий процес (як і детермінований) має свою певну структуру та свій спектральний склад.

Але особливістю випадкового процесу є те, що амплітуди гармонічних складових – це випадкові величини, тому *спектр* СВП являє собою розподіл дисперсій цих ВВ за частотами.

Розглянемо центрований ($m_x = 0$) СВП $\overset{\circ}{X}(t)$ на інтервалі $0 \div T$ (рис. 2.9).

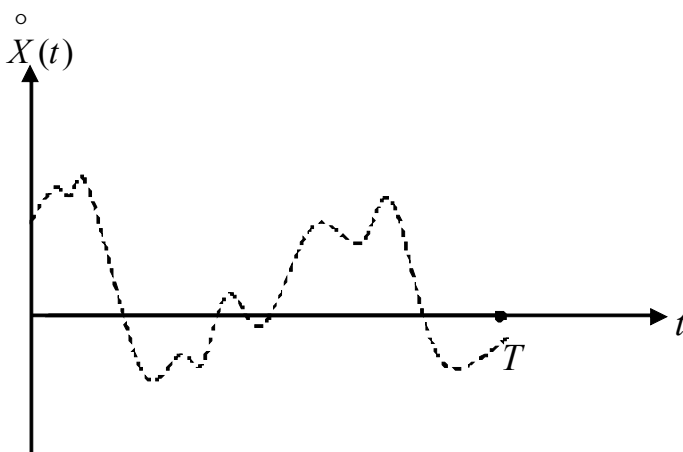


Рис. 2.9. Графік реалізації центрального випадкового процесу $\overset{\circ}{X}(t)$ на інтервалі $0 \div T$

Йому відповідає кореляційна функція: $k_x(\tau) = k_x(-\tau)$ (див. рис. 2.10).

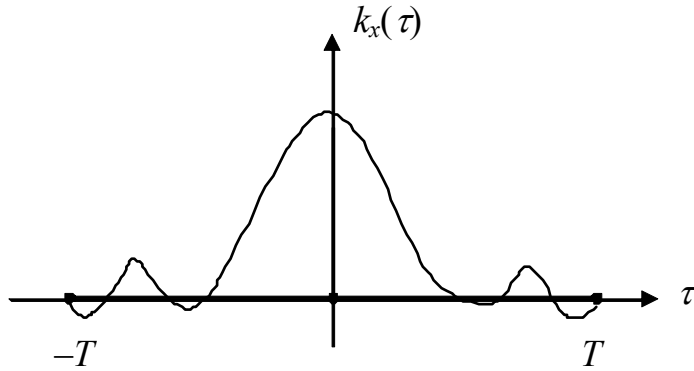


Рис. 2.10. Графік кореляційної функції СВП

Оскільки функція $k_x(\tau)$ – парна, то її можна подати у вигляді ряду парних гармонік, тобто

$$k_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau, \quad (2.6)$$

при цьому

$$\omega_k = k\omega_1; \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T}. \quad (2.6 \text{ а})$$

Очевидно, що величина ω_1 визначається інтервалом T і являє собою основну гармоніку.

Коефіцієнти D_k обчислюють за такими формулами:

$$\begin{cases} D_0 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T k_x(\tau) d\tau, \\ D_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T k_x(\tau) \cos \omega_k \tau d\tau, \quad \text{якщо } k \neq 0. \end{cases}$$

Оскільки $k_x(\tau)$ і $\cos \omega_k \tau$ є парними функціями, то ці формули можна записати в такому вигляді:

$$\begin{cases} D_0 = \frac{1}{T} \int_0^T k_x(\tau) d\tau, \\ D_k = \frac{2}{T} \int_0^T k_x(\tau) \cos \omega_k \tau d\tau, \quad \text{якщо } k \neq 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Перейдемо у формулі (2.6) до двох аргументів, враховуючи, що $\tau = t' - t$, тоді

$$\cos \omega_k \tau = \cos \omega_k (t' - t) = \cos \omega_k t' \cos \omega_k t + \sin \omega_k t' \sin \omega_k t$$

$$K_x(t, t') = \sum_{k=0}^{\infty} (D_k \cos \omega_k t' \cos \omega_k t + D_k \sin \omega_k t' \sin \omega_k t). \quad (2.8)$$

Формула (2.8) є канонічним розкладанням кореляційної функції $K_x(t, t')$. Координатними функціями цього розкладання є косинуси й синуси, частоти яких кратні основній гармоніці ω_1 . Однак канонічному розкладанню кореляційної функції $K_x(t, t')$ відповідає канонічне розкладання самої ВФ $X(t)$ з тими самими координатними функціями (див. §1.6), тобто ми можемо записати, що

$$\dot{X}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t), \quad (2.9)$$

де U_k, V_k – некорельовані ВВ, математичні сподівання яких дорівнюють нулю, а дисперсії є сталими, а саме:

$$D(U_k) = D(V_k) = D_k. \quad (2.10)$$

При цьому дисперсії D_k обчислюють за формулами (2.7).

Розкладання (2.9) називається *спектральним розкладанням СВП*.

Визначимо дисперсію ВФ $\dot{X}(t)$, задану своїм спектральним розкладанням [див. формулу (2.9)], таким чином:

$$\begin{aligned} D_x = D \left[\dot{x}(t) \right] &= D \left[\sum_{k=0}^{\infty} (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t) \right] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \cos^2(\omega_k t) D[U_k] + \sin^2(\omega_k t) D[V_k] = \sum_{k=0}^{\infty} (\cos^2 \omega_k t + \sin^2 \omega_k t) D_k = \sum_{k=0}^{\infty} D_k, \end{aligned}$$

тобто

$$D_x = \sum_{k=0}^{\infty} D_k. \quad (2.11)$$

Отже, дисперсія СВФ дорівнює сумі дисперсій усіх гармонік її спектрального розкладання. Формула (2.11) показує, що дисперсія ВФ $\dot{X}(t)$ розподілена певним чином за частотами. Графічно такий розподіл зображується спектром дисперсій СВФ (СВП) (див. рис. 2.11). Відповідно до формули (2.11) сума всіх ординат D_k дорівнює дисперсії D_x випадкової функції $\dot{X}(t)$.

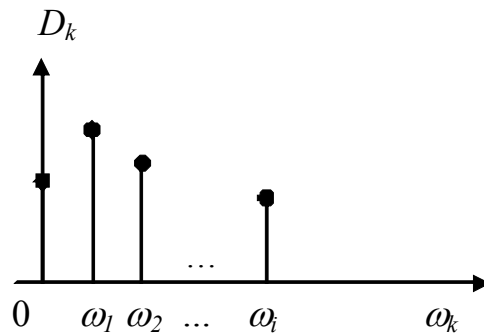


Рис. 2.11. Графічне зображення спектра дисперсій СВФ

Спектр визначаємо відповідно до заданої реалізації СВП $X(t)$ (t належить до інтервалу $0 \div T$) в такій послідовності:

1. СВП центрується, тобто будуюмо такий ВП: $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t)$.
2. Обчислюємо кореляційну функцію ВП $k_x(\tau)$ (τ належить до інтервалу $0 \div T$).
3. Визначаємо гармоніки ω_1 й ω_k за формулами (2.6, а).
4. Розраховуємо дисперсії гармонік D_k ($k = 0 \div \infty$) за формулами (2.7).

§ 2.5. Спектральне розкладання СВП на нескінченному часовому інтервалі. Спектральна щільність

Складові спектра дисперсій $D_k(\omega_k)$ СВП, що був розглянутий у попередньому параграфі, відповідають частотам ω_k , які відрізняються одна від одної на сталу величину $\Delta\omega$, а саме: $\Delta\omega = \omega_k - \omega_{k-1} = \omega_1 = \frac{2\pi}{2T}$. Очевидно, що ця величина буде залежити від довжини реалізації СВП.

При збільшенні довжини реалізації T , відстані $\Delta\omega$ ($\Delta\omega = \frac{\pi}{T}$) будуть зменшуватися. Якщо T буде прямувати до нескінченності, то відповідно, відстань $\Delta\omega$ наблизатиметься до нуля, а спектральні лінії $D_k(\omega_k)$ будуть також нескінченно наблизатися одна до одної. Крім того, величини складових $D_k(\omega_k)$ також прямуватимуть до нуля, оскільки дисперсія $D_x = \text{const}$, а гармонічних складових за такими умовами стає нескінченно багато.

Розглянемо таке відношення: $\frac{D_k}{\Delta\omega} = S_k(\omega_k)$. Воно показує середню щільність дисперсії на інтервалі частот ($\omega_k \div \omega_{k+1}$). Таким чином, для всіх значень ω_k можна побудувати діаграму щільності дисперсій на відповідних інтервалах (див. рис. 2.12).

Обчислимо площу k -го прямокутника. Очевидно, що вона відповідає такій рівності: $\frac{D_k}{\Delta\omega} \Delta\omega = D_k$, а площа всієї фігури – дисперсії СВП ($\sum_{k=1}^{\infty} D_k = D_x$).

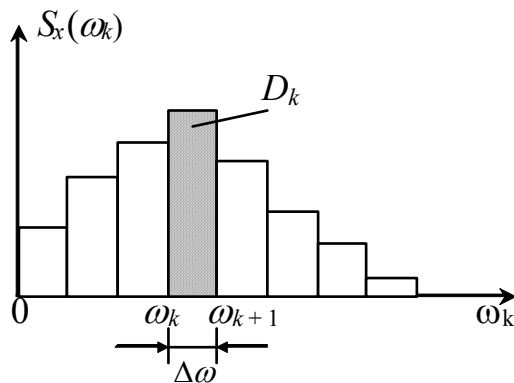


Рис. 2.12. Діаграма щільності дисперсій $S_x(\omega_k)$ СВП

Отже, якщо $T \rightarrow \infty$, то $\Delta\omega \rightarrow 0$ і східчаста фігура $S_x(\omega_k)$ буде необмежено наближатися до плавної кривої $S_x(\omega)$. Ця крива (залежність) виражає щільність розподілу дисперсій за частотами. Вона називається *спектральною щільністю* ВФ $X(t)$ й описується таким чином:

$$S_x(\omega) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{D_k}{\Delta\omega}.$$

Її графічне зображення подано на рис. 2.13.

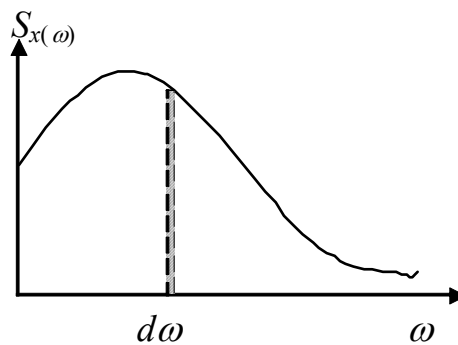


Рис. 2.13. Графік спектральної щільності ВФ

Очевидно, що площа, обмежена кривою спектральної щільності $S_x(\omega)$, як і раніше, дорівнює D_x , тобто

$$D_x = \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega. \quad (2.12)$$

Формула (2.12) описує розкладання дисперсії D_x СВП $\overset{\circ}{X}(t)$ на суму елементарних доданків $S_x(\omega)d\omega$, кожен з яких показує дисперсію: $dD = S_x(\omega)d\omega$, яка відповідає елементарній ділянці частот $d\omega$. До того ж, як і спектр дисперсій $D_x(\omega)$, спектральну щільність $S_x(\omega)$ можна повністю визначити за допомогою кореляційної функції $k_x(\tau)$ СВП $\overset{\circ}{X}(t)$.

Отже, давайте знайдемо зв'язок між спектральною щільністю $S_x(\omega)$ та кореляційною функцією $k_x(\tau)$ СВП $\overset{\circ}{X}(t)$. Будемо виходити з розкладання кореляційної функції $k_x(\tau)$ в ряд Фур'є на інтервалі $(-T; T)$, а саме:

$$k_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau, \quad (2.13)$$

при цьому дисперсія D_k на частоті ω_k обчислюється за такою формулою:

$$D_k = \frac{2}{T} \int_0^T k_x(\tau) \cos \omega_k \tau d\tau. \quad (2.14)$$

Тепер розглянемо середню щільність дисперсії на ділянці $\Delta\omega$, а саме:

$$S_x(\omega_k) = \frac{D_k}{\Delta\omega}, \quad (2.15)$$

тоді $D_k = S_x(\omega_k)\Delta\omega = S_x(\omega_k)\omega_1 = S_x(\omega_k)\frac{\pi}{T}$, тобто

$$D_k = S_x(\omega_k)\frac{\pi}{T}. \quad (2.16)$$

З урахуванням виразу (2.16) перепишемо формули (2.13) і (2.14) таким чином:

$$k_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} S_x(\omega_k) \cos \omega_k \tau \Delta\omega, \quad (2.17)$$

$$S_k(\omega_k) = \frac{2}{\pi} \int_0^T k_x(\tau) \cos \omega_k \tau d\tau. \quad (2.18)$$

Знайдемо границі у виразах (2.17) та (2.18), якщо $T \rightarrow \infty$ і $\Delta\omega \rightarrow d\omega$. За цих умов $S_x(\omega_k)$ буде прямувати до $S_x(\omega)$, а сума перетвориться на інтеграл, тоді

$$k_x(\tau) = \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad (2.19)$$

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k_x(\omega) \cos \omega \tau d\tau. \quad (2.20)$$

Формула (2.20) називається інтегралом Фур'є і являє собою розкладання СВП $\overset{\circ}{X}(t)$, заданого в нескінченному інтервалі, на суму гармонік із неперервним спектром.

Разом формули (2.19) і (2.20) називають перетвореннями Фур'є. Вони встановлюють взаємний зв'язок між кореляційною функцією $k_x(\tau)$ і спектральною щільністю $S_x(\omega)$ СВП $\overset{\circ}{X}(t)$.

На практиці замість спектральної щільності $S_x(\omega)$ часто використовують нормовану спектральну щільність $\alpha_x(\omega)$, яка визначається таким чином:

$$\alpha_x(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{D_x},$$

де D_x – дисперсія ВП.

Зрозуміло, що взаємні перетворення Фур'є будуть також справедливими, коли кореляційна функція й спектральна щільність нормовані, а саме:

$$\rho_x(\tau) = \int_0^{\infty} \alpha_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad (2.21)$$

$$\alpha_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (2.22)$$

де $\rho_x(\tau)$ – нормована кореляційна функція, $\alpha_x(\omega)$ – нормована спектральна щільність СВП $\overset{\circ}{X}(t)$.

Коли у виразі (2.21) задати таку умову: $\tau = 0$, то, враховуючи, що $\rho_x(0) = 1$, отримуємо такий результат: $\int_0^{\infty} \alpha_x(\omega) d\omega = 1$. Інакше кажучи, площа під кривою нормованої спектральної щільності дорівнює 1.

П р и к л а д 2.1. Нормована кореляційна функція $\rho_x(\tau)$ ВФ $X(t)$ спадає за лінійним законом від одиниці до нуля, коли $0 < \tau < \tau_0$, і дорівнює нулю, якщо $\tau > \tau_0$. Визначити нормовану спектральну щільність ВФ $X(t)$.

Розв'язування

Графік функції $\rho_x(\tau)$ має вигляд, показаний на рис. 2.14.

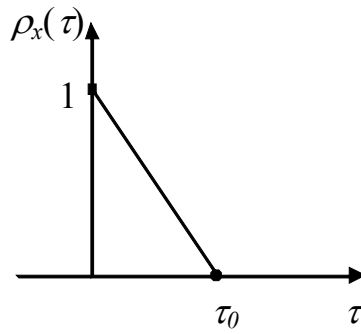


Рис. 2.14. Графік нормованої кореляційної функції ВП $X(t)$

Аналітично ця функція може бути описана такою формулою:

$$\rho_x(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{\tau}{\tau_0}, & \text{коли } 0 < \tau < \tau_0, \\ 0, & \text{коли } \tau > \tau_0. \end{cases}$$

Обчислимо нормовану спектральну щільність $\alpha_x(\omega)$ за формулою (2.22), а саме:

$$\alpha_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\tau_0} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) \cos \omega \tau d\tau = \frac{2}{\pi \tau_0 \omega^2} (1 - \cos \omega \tau_0).$$

Графічне зображення нормованої спектральної щільності $\alpha_x(\omega)$ показано на рис. 2.15. Очевидно, що характер графіка $\alpha_x(\omega)$ залежить від величини τ_0 . Зміна її значення приводить до зміни масштабу осей ω і $\alpha_x(\omega)$, але площа, обмежена кривою $\alpha_x(\omega)$ не змінюється і дорівнює 1. При збільшенні значення τ_0 масштаб осі ω зменшується, а осі $\alpha_x(\omega)$ – збільшується. Причому, коли $\tau_0 \rightarrow \infty$, то випадкова функція вироджується у випадкову величину, нормована кореляційна функція $\rho_x(\tau) = 1$ для всіх значень τ , спектр стає дискретним і його частота $\omega_0 = 0$.

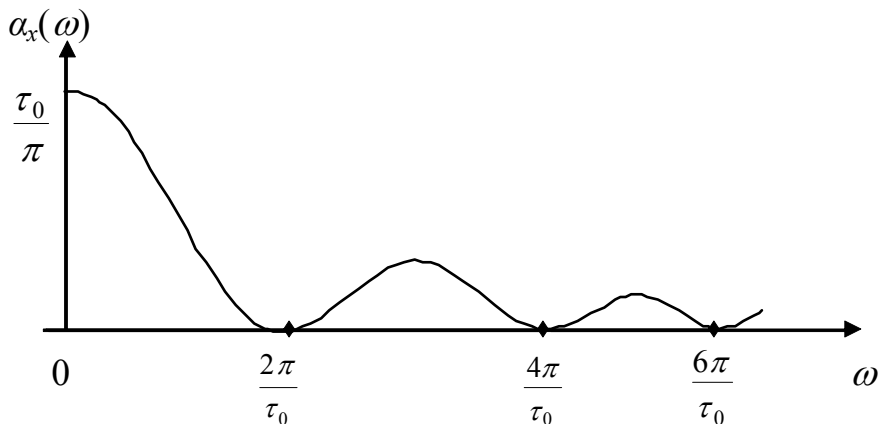


Рис. 2.15. Графік нормованої спектральної щільності ВП $X(t)$

Приклад 2.2. Нормована спектральна щільність $\alpha_x(\omega)$ ВФ $X(t)$ стала на деякому інтервалі частот $\omega_1 \div \omega_2$ і дорівнює нулю поза цим інтервалом. Визначити нормовану кореляційну функцію ВФ $X(t)$.

Розв'язування

Оскільки площа, обмежена кривою $\alpha_x(\omega)$, повинна дорівнювати 1, то відповідно до графіка (див. рис. 2.16)

$$\alpha_x(\omega) = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1}, \text{ коли } \omega_1 < \omega < \omega_2.$$

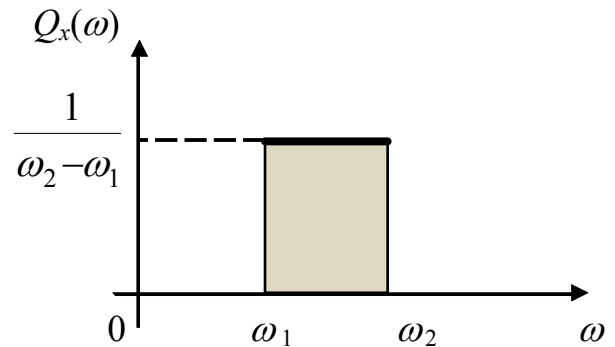


Рис. 2.16. Графічне зображення нормованої спектральної щільності $\alpha_x(\omega)$ ВФ $X(t)$ до прикладу 2.2

Тоді з використанням формули (2.21)

$$\begin{aligned} \rho_x(\tau) &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \alpha_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos \omega \tau d\omega = \frac{1}{\tau(\omega_2 - \omega_1)} (\sin \omega_2 \tau - \sin \omega_1 \tau) = \\ &= \frac{2}{\tau(\omega_2 - \omega_1)} \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \tau\right) \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \tau\right). \end{aligned}$$

Графічно функцію $\rho_x(\tau)$ зображено на рис. 2.17.

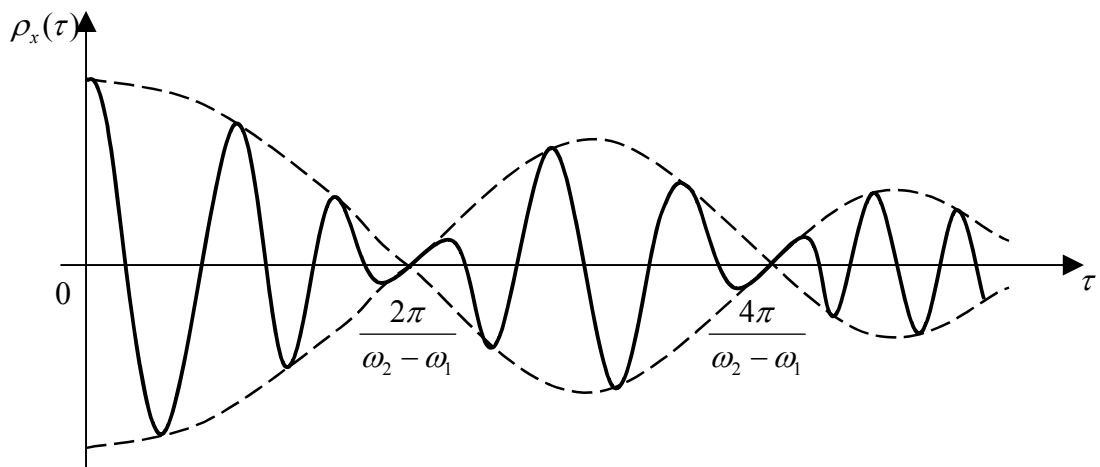


Рис. 2.17. Графік нормованої кореляційної функції ВФ $X(t)$ до прикладу 2.2

У граничному випадку, коли $\omega_2 \rightarrow \omega_1$ (тобто $\omega_1 = \omega_2$), спектр стає дискретним з однією-єдиною лінією на частоті ω . При цьому кореляційна функція $\rho_x(\tau) = \cos \omega \tau$, а ВФ $X(t) = U \cos \omega t + V \sin \omega t$, тобто маємо гармонічне коливання із частотою ω , але з випадковою амплітудою і фазою.

На практиці трапляються ситуації, коли ВФ має у своєму складі чисто періодичну складову частоти ω_k із випадковою амплітудою. Тоді в спектральному розкладанні, крім неперервного спектра $S_x(\omega)$, буде мати місце окрема частота ω_k із скінченною дисперсією. Якщо таких складових декілька, то спектр включає дві частини: дискретну й неперервну, тобто

$$k_x(\tau) = \sum_k D_k \cos \omega_k \tau + \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega.$$

Коли скінченна дисперсія в спектральному розкладанні припадає на нульову частоту ($\omega = 0$), це означає, що до складу ВФ як доданок входить звичайна ВВ із дисперсією D_0 .

§ 2.6. Моделі функції спектральної щільності. Білий шум

Із властивостей спектральної щільності випливає, що площа, обмежена її кривою, дорівнює дисперсії СВП $X(t)$, тобто з урахуванням залежності:

$R_x(\tau) = k_x(\tau) = \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega$, буде правильною така рівність:

$$D_x = R_x(0) = \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega.$$

Це означає, що для реальних СВП із обмеженою дисперсією площа, окреслена кривою $S_x(\omega)$, має бути також скінченною величиною. Отже, спектральна щільність $S_x(\omega) \rightarrow 0$, якщо $\omega \rightarrow \infty$. Ось чому в математичних моделях спектральної щільності часто використовують функції частоти, які мають цю властивість. Наприклад, широко застосовуються моделі у вигляді раціональних функцій частоти (відношення поліномів), а саме:

$$S_x(\omega) = \frac{a_m \omega^m + a_{m-1} \omega^{m-1} + \dots + a_1 \omega + a_0}{b_n \omega^n + b_{n-1} \omega^{n-1} + \dots + b_1 \omega + b_0},$$

причому $n > m$, а тому $S_x(\omega) \rightarrow 0$, якщо $\omega \rightarrow \infty$.

Існують також моделі, що не є раціональними функціями, наприклад, така модель:

$$S_x(\omega) = \frac{\sin(d\omega)}{d\omega}.$$

Специфічним варіантом моделі випадкового процесу є так званий «білий шум».

Білим шумом називається випадковий процес, спектральна щільність якого є сталою для всіх частот ω , тобто $S(\omega) = S_0 = \text{const}$.

Хоча такий процес фізично не може існувати (оскільки його дисперсія дорівнює нескінченності), він є зручною математичною моделлю, яку використовують у задачах аналізу й синтезу систем. Нерідко за допомогою білого шуму імітують дію перешкод широкого спектра частот.

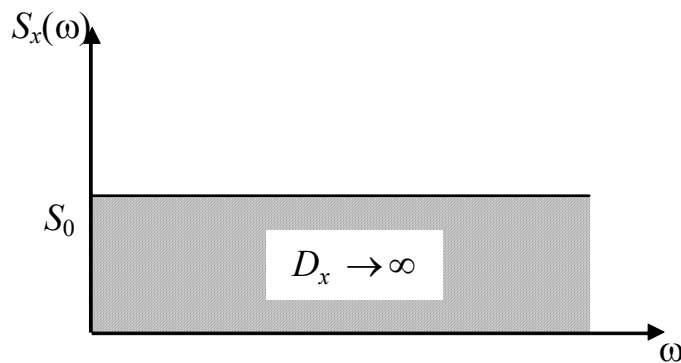


Рис. 2.18. Графічне зображення спектральної щільності випадкового процесу типу «білий шум»

Кореляційна функція білого шуму являє собою дельта-функцію, помножену на S_0 , тобто $R_x(\tau) = S_0\delta(\tau)$. Дельта-функція – це імпульс нескінченно малої тривалості, площа якого дорівнює одиниці (див. рис. 2.19).

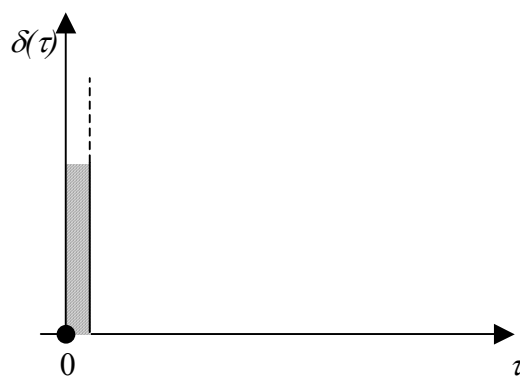


Рис. 2.19. Графік дельта-функції

Дійсно функція: $S_x(\omega) = \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau = \int_0^{\infty} S_0\delta(\tau) \cos \omega\tau d\tau = S_0$, являє собою спектральну щільність білого шуму, інтенсивність якого визначається величиною S_0 .

На практиці також часто використовується поняття білого шуму, спектр якого обмежений у деякій смузі. При цьому мають на увазі СВП, спектральна щільність якого стала в межах обмеженої смуги частот, і дорівнює нулю поза нею (див. рис. 2.20).

Аналітичний запис такої функції має такий вигляд:

$$S_x(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{коли } \omega < \omega_1, \\ S_0, & \text{коли } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2, \\ 0, & \text{коли } \omega > \omega_2. \end{cases}$$

Дисперсія цього СВП $D_x = S_0(\omega_2 - \omega_1)$.

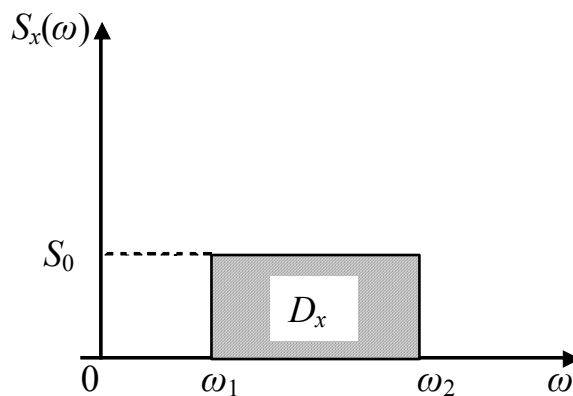


Рис. 2.20. Графічне зображення спектральної щільності білого шуму з обмеженим у смузі спектром

Розглянемо тепер випадок, коли $\omega_1 = 0$. Тоді спектральна щільність записується таким чином:

$$S_x(\omega) = \begin{cases} S_0, & \text{коли } \omega \leq \omega_2, \\ 0, & \text{коли } \omega > \omega_2. \end{cases}$$

Графік цієї функції зображено на рис. 2.21.

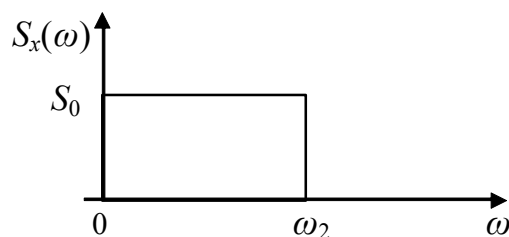


Рис. 2.21. Графічне зображення спектральної щільності білого шуму з обмеженим у смузі спектром, коли $\omega_1 = 0$

Дисперсія такого процесу $D_x = S_0 \omega_2$, а його кореляційна функція

$$R_x(\tau) = \int_0^{\omega_2} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega = S_0 \int_0^{\omega_2} \cos \omega \tau d\omega = \frac{S_0}{\tau} \sin \omega \tau \Big|_0^{\omega_2} = \frac{S_0}{\tau} \sin \omega_2 \tau .$$

Її графік зображено на рис. 2.22.

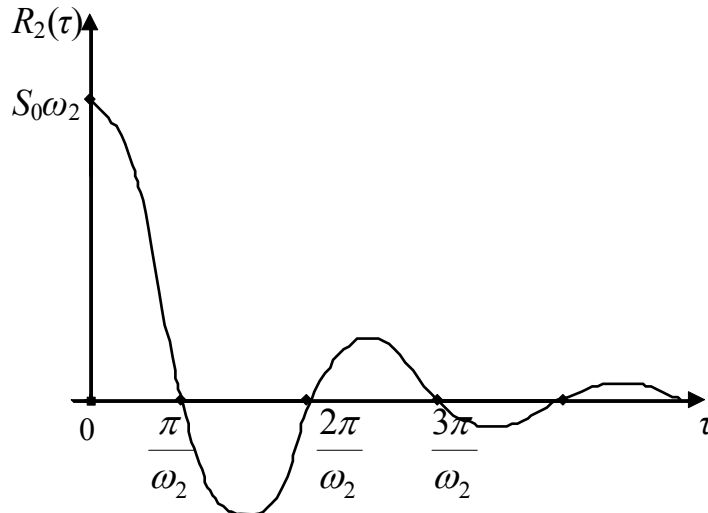


Рис. 2.22. Графік кореляційної функції білого шуму з обмеженим у смузі спектром, коли $\omega_1 = 0$

§ 2.7. Спектральне розкладання ВФ у комплексній формі

У деяких випадках при виконанні математичних перетворень зручніше користуватися комплексною формою запису спектрального розкладання. Тоді перетворення виконуються простіше, оскільки гармонічні функції розкладання записуються в комплексному поданні не у вигляді синусів і косинусів, а як експоненти. Перейдемо від дійсної форми спектрального розкладання до комплексної. Розглянемо спектральне розкладання ВФ $\overset{\circ}{X}(t)$ на інтервалі $(0 \div T)$, а саме:

$$\overset{\circ}{X}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t), \quad (2.23)$$

де U_k, V_k – некорельовані ВВ, причому $D[U_k] = D[V_k] = D_k$.

Оскільки $\omega_0 = 0$, то вираз (2.23) можна записати в такому вигляді:

$$\overset{\circ}{X}(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t). \quad (2.24)$$

Підставимо у вираз (2.24) відомі формули Ейлера, тобто

$$\cos \omega_k t = \frac{e^{i\omega_k t} + e^{-i\omega_k t}}{2},$$

$$\sin \omega_k t = \frac{e^{i\omega_k t} - e^{-i\omega_k t}}{2} = -i \frac{e^{i\omega_k t} - e^{-i\omega_k t}}{2},$$

тоді

$$\dot{X}(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(U_k \frac{e^{i\omega_k t} + e^{-i\omega_k t}}{2} - iV_k \frac{e^{i\omega_k t} - e^{-i\omega_k t}}{2} \right). \quad (2.24)$$

Формула (2.24) являє собою розкладання ВФ $\dot{X}(t)$ за координатними функціями $e^{i\omega_k t}$, $e^{-i\omega_k t}$.

Припустимо, що параметр k набуває не тільки додатних, але й від'ємних значень: $\omega_k = k\omega_1$ ($k = \pm 1; \pm 2; \pm 3 \dots$).

Тоді формулу (2.24) записуємо таким чином:

$$\dot{X}(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k - iV_k}{2} e^{i\omega_k t} + \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{U_k + iV_k}{2} e^{-i\omega_k t}, \quad (2.25)$$

тут передбачається, що $U_{-k} = U_k$ і $V_{-k} = V_k$.

Розкладання (2.25) можна записати в більш компактній формі, а саме:

$$\dot{X}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k e^{i\omega_k t}, \quad (2.26)$$

при цьому $W_k = U_0$, якщо $k = 0$;

$$W_k = \frac{U_k - iV_k}{2}, \text{ коли } k > 0;$$

$$W_k = \frac{U_k + iV_k}{2}, \text{ якщо } k < 0.$$

Вираз (2.26) – це канонічне розкладання ВФ $\dot{X}(t)$ із комплексними координатними функціями $e^{i\omega_k t}$ й комплексними коефіцієнтами W_k , дисперсії яких

$$D[W_k] = D\left[\frac{U_k \pm iV_k}{2}\right] = \frac{D[U_k]}{4} + \frac{D[V_k]}{4} = \frac{2D_k}{4} = \frac{D_k}{2}.$$

Позначимо, що $D_k^* = \frac{D_k}{2}$, коли $k \neq 0$ й $D_0^* = D_0$. Побудуємо дискретний спектр ВФ $\overset{\circ}{X}(t)$, який поширюється на частоти в інтервалі $(-\infty; +\infty)$ (рис. 2.23).

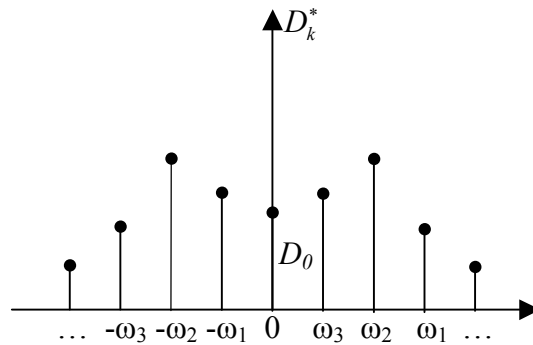


Рис. 2.23. Графічне зображення дискретного спектра ВФ

Цей спектр D_k^* буде симетричний щодо осі ординат, його ординати вдвічі менші спектра D_k , якщо $k \neq 0$ і виконується така умова:

$$D_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k.$$

Отже, в комплексному записі кореляційна функція набуває такого вигляду:

$$k_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k^* e^{i\omega_k \tau}, \quad (2.27)$$

при цьому

$$D_k^* = \frac{1}{2} D_k = \frac{1}{T} \int_0^T k_x(\tau) \cos \omega_k \tau d\tau, \quad (2.28)$$

якщо $k \neq 0$.

Надамо виразу (2.28) комплексної форми, підставивши у нього таке значення:

$$\cos \omega_k t = \frac{e^{i\omega_k t} + e^{-i\omega_k t}}{2},$$

тоді

$$D_k^* = \frac{1}{2T} \int_0^T k_x(\tau) \left(e^{i\omega_k \tau} + e^{-i\omega_k \tau} \right) d\tau = \frac{1}{2T} \int_0^T k_x(\tau) e^{i\omega_k \tau} d\tau + \frac{1}{2T} \int_0^T k_x(\tau) e^{-i\omega_k \tau} d\tau =$$

$$= \frac{1}{2T} \int_0^T k_x(\tau) e^{-i\omega_k t} d\tau + \frac{1}{2T} \int_{-T}^0 k_x(\tau) e^{-i\omega_k t} d\tau = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T k_x(\tau) e^{-i\omega_k t} d\tau,$$

тобто

$$D_k^* = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T k_x(\tau) e^{-i\omega_k t} d\tau. \quad (2.29)$$

Тепер у виразах (2.27), (2.29) визначимо границі, коли $T \rightarrow \infty$, тобто розглянемо спектральну щільність:

$$S_x^*(\omega) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{D_k^*}{\Delta\omega}. \quad (2.30)$$

У цьому випадку формули (2.27) і (2.29) набувають вигляду інтегральних співвідношень, які поєднують кореляційну функцію й спектральну щільність, а саме:

$$k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega) e^{i\omega_k t} d\omega, \quad (2.31)$$

$$S_x^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-i\omega_k t} d\tau. \quad (2.32)$$

Вирази (2.31) і (2.32) являють собою комплексну форму перетворень Фур'є.

Якщо у формулі (2.31) задати, що $\tau = 0$, то одержимо вираз для обчислення дисперсії ВФ $\overset{\circ}{X}(t)$, а саме:

$$D_x^* = \int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega) d\omega. \quad (2.33)$$

Ця формула подає дисперсію ВФ $\overset{\circ}{X}(t)$ у вигляді суми елементарних доданків, розподілених з певною щільністю S_x^* у діапазоні частот $(-\infty ; +\infty)$. Порівнюючи вираз (2.32) і формулу для дійсної форми розкладання:

$$S_k(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau,$$

бачимо, що спектральні щільності $S_x(\omega)$ і $S_x^*(\omega)$ відрізняються (див. рис. 2.24), а саме: $S_x^*(\omega)$ визначена в діапазоні частот $(-\infty ; +\infty)$, а $S_x(\omega)$ – у діапазоні

$(0; +\infty)$; також $S_x(\omega)$ має вдвічі більші ординати, ніж $S_x^*(\omega)$; крім того, $S_x^*(\omega)$ – симетрична відносно осі ординат.

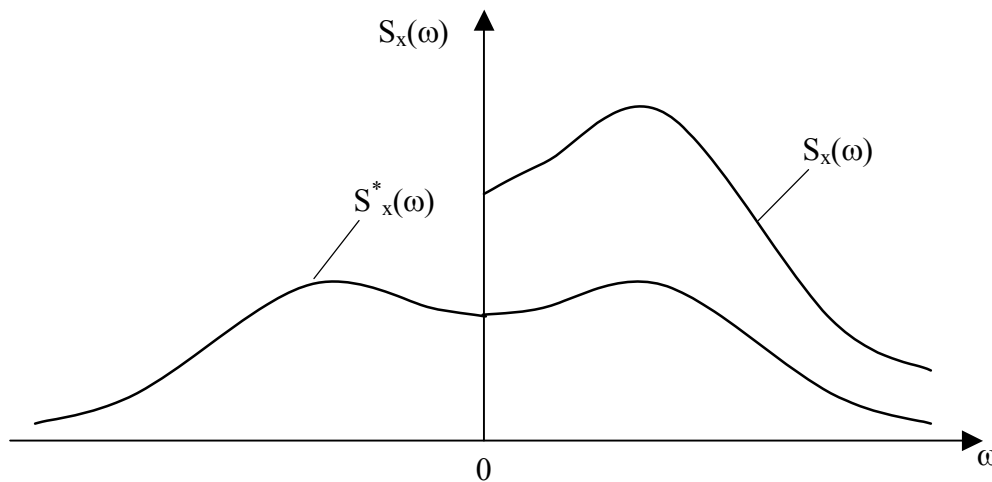


Рис. 2.24. Графічне зображення спектральних щільностей $S_x(\omega)$ і $S_x^*(\omega)$ ВФ $\overset{\circ}{X}(t)$

§ 2.8. Перетворення СВП стаціонарною лінійною системою

Лінійна система називається *стаціонарною*, якщо її параметри є сталими в часі. Функціонування стаціонарної лінійної системи описується, зазвичай, лінійними диференціальними рівняннями із сталими коефіцієнтами.

Розглянемо задачу про перетворення СВП стаціонарною лінійною системою.

Нехай на вхід лінійної системи L прибуває СВП $X(t)$; реакція системи $Y(t)$ також являє собою СВП (рис. 2.25). Характеристики СВП $X(t)$ відомі, це зокрема його математичне сподівання m_x і кореляційна функція $k_x(\tau)$. Потрібно визначити ті самі характеристики СВП $Y(t)$: m_y й $k_y(\tau)$.

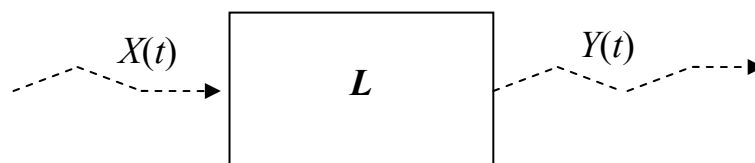


Рис. 2.25. Схема перетворення СВП лінійною системою

Щоб розв'язати цю задачу, скористаємося підходом, який базується на канонічному розкладанні ВФ. Він полягає в тому, що при лінійних перетвореннях ВФ, заданих канонічним розкладанням, їхні математичні сподівання й координатні функції перетворюються за допомогою того самого

лінійного оператора. Оскільки доводиться перетворювати невідповідні функції (математичне сподівання й координатні функції), то розглянемо спочатку перетворення невідповідних функцій лінійною системою.

Рівняння лінійної стаціонарної системи має такий вигляд:

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) Y(t) = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0) X(t), \quad (2.34)$$

тут p – оператор диференціювання, тобто $p = \frac{d}{dt}$.

У скороченому виразі (2.34) можна записати таким чином:

$$A_n(p)Y(t) = B_m(p)X(t) \quad (2.35)$$

або

$$Y(t) = \frac{B_m(p)}{A_n(p)} X(t). \quad (2.36)$$

Реакцію системи $Y(t)$ на вплив $X(t)$ визначають, розв'язавши рівняння (2.34) відносно $Y(t)$. Розв'язок цього рівняння являє собою суму двох складових: $Y_1(t)$ і $Y_2(t)$. Причому $Y_2(t)$ – розв'язок рівняння (2.34) без правої частини – це так званий *вільний рух системи*, складова $Y_1(t)$ – це *примусовий рух системи*, тобто її рух під дією вхідного впливу $X(t)$. У стійких системах складова $Y_2(t)$ прямує до 0, якщо $t \rightarrow \infty$, тобто в сталому режимі $Y_2(t) = 0$, тому стосовно стійкої системи будемо вважати, що $Y(t) = Y_1(t)$.

Координатні функції спектрального розкладання ВФ $X(t)$ являють собою гармонічні коливання. Отже, проаналізуємо реакцію лінійної стаціонарної системи на елементарний гармонічний вплив.

Нехай на вхід системи прибуває гармонійне коливання з одиничною амплітудою та частотою ω , що відповідає такому виразу:

$$X(t) = 1 \cdot \sin \omega t$$

або в комплексній формі

$$X(t) = e^{i\omega t}. \quad (2.37)$$

У цьому випадку реакція лінійної системи також буде гармонічною функцією із частотою ω , але з деякою амплітудою, яка залежить від частоти, тобто

$$Y(t) = \varphi(i\omega) e^{i\omega t}. \quad (2.38)$$

Підставимо вирази (2.37) і (2.38) у рівняння (2.34) і запишемо його в такому вигляді:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n}{dt^n} [\varphi(i\omega) e^{i\omega t}] + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} [\varphi(i\omega) e^{i\omega t}] + \dots + a_0 [\varphi(i\omega) e^{i\omega t}] = \\ = b_m \frac{d^m}{dt^m} e^{i\omega t} + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} e^{i\omega t} + \dots + b_0 e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Враховуючи, що для будь-якого значення k виконуються такі рівності:

$$\frac{d^k}{dt^k}[\varphi(i\omega)e^{i\omega t}] = (i\omega)^k \varphi(i\omega)e^{i\omega t},$$

$$\frac{d^k}{dt^k}[e^{i\omega t}] = (i\omega)^k e^{i\omega t},$$

записуємо остаточний варіант рівняння, а саме:

$$\varphi(i\omega)[a_n(i\omega)^n + a_{n-1}(i\omega)^{n-1} + \dots + a_1(i\omega) + a_0] = b_m(i\omega)^m + b_{m-1}(i\omega)^{m-1} + \dots + b_1(i\omega) + b_0.$$

Або в компактній формі

$$\varphi(i\omega)A_n(i\omega) = B_m(i\omega). \quad (2.40)$$

Із цієї формули випливає, що

$$\varphi(i\omega) = \frac{B_m(i\omega)}{A_n(i\omega)}. \quad (2.41)$$

Функцію $\varphi(i\omega)$ називають *частотною характеристикою* лінійної системи. Для її визначення необхідно в поліноми $A_n(p)$ і $B_m(p)$, замість оператора p , підставити величину $(i\omega)$, де i – уявна одиниця.

Таким чином, якщо на вхід лінійної стаціонарної системи прибуває гармонічне коливання: $X(t) = \sin \omega t$, то реакція системи записується у вигляді такого самого гармонічного коливання, помноженого на частотну характеристику системи.

Якщо ж на вході система зазнає гармонічного впливу з випадковою амплітудою, тобто $X(t) = Ue^{i\omega t}$, де U – випадкова величина, то реакція системи

$$Y(t) = U\varphi(i\omega)e^{i\omega t}.$$

Тепер застосуємо цей самий підхід до перетворення математичного сподівання СВП $X(t)$ і координатних функцій його розкладання.

Математичне сподівання запишемо у вигляді гармонічного коливання з нульовою частотою ($\omega = 0$), при цьому $\varphi(0) = \frac{B_m(0)}{A_n(0)} = \frac{b_0}{a_0}$, а математичне

сподівання ВФ $Y(t)$ (реакції системи) $m_y = \frac{b_0}{a_0}m_x$.

Тепер перейдемо до перетворення випадкової частини функції $X(t)$, а саме: $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t)$. Для цього запишемо функцію $\overset{\circ}{X}(t)$ на інтервалі $(0; T)$ у вигляді спектрального розкладання, тобто

$$\overset{\circ}{X}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k e^{i\omega_k t}, \quad (2.42)$$

де U_k – некорельовані ВВ, дисперсії яких утворюють спектр $\overset{\circ}{X}(t)$.

Відповідно до принципу суперпозиції (накладання), реакція лінійної системи на суму впливів дорівнює сумі реакцій на окремі впливи, а саме:

$$\overset{\circ}{Y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k \varphi(i\omega) e^{i\omega_k t}, \quad (2.43)$$

Формула (2.43) являє собою канонічне розкладання ВФ $\overset{\circ}{Y}(t)$ за системою гармонічних функцій. Визначимо спектр розкладання (2.43). Для цього знайдемо дисперсію k -ї випадкової величини таким чином:

$$\overset{\circ}{Y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k e^{i\omega_k t}, \quad W_k = U_k \varphi(i\omega),$$

$$D[W_k] = M[|U_k \varphi(i\omega_k)|^2] = M[|U_k|^2 |\varphi(i\omega)|^2] = |\varphi(i\omega)|^2 M[|U_k|^2] = |\varphi(i\omega)|^2 D_k,$$

тобто

$$D[W_k] = |\varphi(i\omega)|^2 D_k. \quad (2.44)$$

Висновок: при перетворенні стаціонарної випадкової функції лінійною стаціонарною системою кожен з ординат її спектра множать на квадрат модуля частотної характеристики системи.

Теоретично при проходженні ВФ $X(t)$ через систему її спектр певним чином [це залежить від частотної характеристики $\varphi(i\omega)$] перебудовується: сигнали на деяких частотах підсилюються, а на деяких послаблюються.

Розглянемо, як при даному перетворенні зміниться спектральна щільність ВФ. Для цього у виразі (2.44) перейдемо до границі, коли $T \rightarrow \infty$, і одержимо аналогічне перетворення функції спектральної щільності, а саме:

$$S_y(\omega) = |\varphi(i\omega)|^2 S_x(\omega). \quad (2.45)$$

Отже, при перетворенні СВП $X(t)$ стаціонарною лінійною системою його спектральну щільність множать на квадрат модуля частотної характеристики системи.

Користуючись виразом (2.45) та останнім правилом, можна легко розв'язати поставлену задачу: за характеристиками $X(t)$ на вході системи знайти характеристики $Y(t)$ на її виході.

Нехай функція $X(t)$ являє собою СВП, математичне сподівання m_x й кореляційна функція $k_x(\tau)$ якого відомі.

Потрібно знайти математичне сподівання m_y та кореляційну функцію $k_y(\tau)$ реакції системи $Y(t)$.

Цю задачу розв'язують у такому порядку:

1. Знаходимо математичне сподівання СВП на виході системи за такою формулою: $m_y = \frac{b_0}{a_0} m_x$.

2. За кореляційною функцією $k_x(\tau)$ визначаємо спектральну щільність на вході, а саме:

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau.$$

3. Використовуючи диференціальне рівняння системи, знаходимо її частотну характеристику: $\varphi(i\omega) = \frac{B_m(i\omega)}{A_n(i\omega)}$, а потім квадрат її модуля, тобто

$$|\varphi(i\omega)|^2 = \left| \frac{B_m(i\omega)}{A_n(i\omega)} \right|^2.$$

4. Застосовуючи наведене вище правило, обчислюємо спектральну щільність на виході системи, а саме:

$$S_y(\omega) = |\varphi(i\omega)|^2 S_x(\omega).$$

5. За спектральною щільністю реакції системи знаходимо кореляційну функцію, тобто

$$k_y(\tau) = \int_0^{\infty} S_y(\omega) \cos \omega \tau d\omega.$$

Зауважимо, що в багатьох задачах не потрібно визначати кореляційну функцію $k_y(\tau)$ повністю, а достатньо лише обчислити дисперсію D_y , таким чином:

$$D_y = k_y(0) = \int_0^{\infty} S_y(\omega) d\omega.$$

Розглянемо, нарешті, випадок, коли в складі ВФ на вході є звичайна випадкова величина U_0 , тобто

$$X_1(t) = U_0 + X(t),$$

де U_0 – ВВ з дисперсією D_0 .

Реакція системи буде являти собою суму такого вигляду: $Y_1(t) = V_0 + Y(t)$, де $Y(t)$ – реакція системи на ВП $X(t)$ – також являє собою ВФ, V_0 – ВВ, яку можна вважати гармонічним коливанням із нульовою частотою, тобто $V_0 = \frac{B_0}{A_0} U_0$, а її дисперсія $D_0^* = \left(\frac{B_0}{A_0}\right)^2 D_0$.

П р и к л а д 2.3. Робота лінійної динамічної системи описується таким диференціальним рівнянням:

$$a_1 \dot{y} + a_0 y = b_1 \dot{x} + b_0 x.$$

На вхід системи прибуває СВП $X(t)$, математичне сподівання якого m_x , а кореляційна функція $k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}$, де α – додатний коефіцієнт. Знайти математичне сподівання m_y і дисперсію D_y СВП на виході системи.

Розв'язування

Застосуємо описаний вище алгоритм розв'язування цієї задачі.

1. Знайдемо математичне сподівання функції виходу $Y(t)$, таким чином:

$$m_y = \frac{b_0}{a_0} m_x.$$

2. Використовуючи кореляційну функцію $k_x(\tau)$, обчислимо спектральну щільність СВП на вході системи, тобто

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k_x(\tau) \cos \omega \tau \, d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} D_x e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega \tau \, d\tau = \frac{2D_x \alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}.$$

3. Знайдемо частотну характеристику системи.

Враховуючи, що робота системи описується рівнянням: $(a_1 p + a_0)y(t) = (b_1 p + b_0)x(t)$, отримуємо такі залежності:

$$y(t) = \frac{b_1 p + b_0}{a_1 p + a_0} x(t), \quad p \rightarrow j\omega,$$

$$\varphi(j\omega) = \frac{b_1 j\omega + b_0}{a_1 j\omega + a_0}.$$

Визначимо квадрат модуля частотної характеристики системи, тобто

$$|\varphi(j\omega)| = \frac{|b_1 j\omega + b_0|^2}{|a_1 j\omega + a_0|^2} = \frac{b_1^2 \omega^2 + b_0^2}{a_1^2 \omega^2 + a_0^2}.$$

4. Обчислимо спектральну щільність на виході системи, а саме:

$$S_y(\omega) = |\varphi(j\omega)|S_x(\omega) = \frac{2D_x\alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)} \cdot \frac{b_1^2\omega^2 + b_0^2}{a_1^2\omega^2 + a_0^2}.$$

5. Визначаємо дисперсію вихідного сигналу за такою формулою:

$$D_y = \int_0^{\infty} S_y(\omega)d\omega. \text{ Таким чином:}$$

$$D_y = \int_0^{\infty} S_y(\omega)d\omega = \frac{2D_x}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{b_1^2\omega^2 + b_0^2}{a_1^2\omega^2 + a_0^2} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega.$$

Інтеграл обчислимо методом розкладання підінтегральної функції на прості дроби, а саме:

$$\frac{b_1^2\omega^2 + b_0^2}{a_1^2\omega^2 + a_0^2} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{A}{a_0^2 + a_1^2\omega^2} + \frac{B}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Знаходимо значення коефіцієнтів:

$$A = \alpha \frac{a_1^2 b_0^2 - a_0^2 b_1^2}{a_1^2 \alpha^2 - a_0^2}; \quad B = \alpha \frac{b_1^2 \alpha^2 - b_0^2}{a_1^2 \alpha^2 - a_0^2}.$$

Отже, дисперсія вихідного сигналу

$$D_y = D_x \frac{a_1 b_0^2 + a_0 b_1^2 \alpha}{a_0 a_1 (a_1 \alpha + a_0)}.$$

§ 2.9. *Поняття про задачі аналізу й синтезу динамічних систем*

При дослідженні динамічних систем методами теорії ВФ виникають два види задач: пряма й обернена. Вони називаються задачами аналізу й синтезу відповідно. Розглянемо їх.

П р я м а з а д а ч а (аналізу)

Існує лінійна динамічна система, яка описується диференціальним рівнянням такого вигляду:

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0)Y(t) = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0)X(t). \quad (2.45)$$

Необхідно дослідити точність роботи системи за наявності на її вході СВП – перешкоди $X(t)$.

Для цього спочатку визначають характеристики перешкоди $X(t)$: математичне сподівання, кореляційну функцію, спектральну щільність. Потім знаходять характеристики реакції $Y(t)$ як СВП. Отже, задача аналізу полягає в оцінюванні точності роботи системи в умовах різного роду перешкод.

Обернена задача (синтезу)

Ця задача полягає у виборі параметрів системи, тобто коефіцієнтів рівняння (2.45), таким чином, щоб для заданого спектра перешкоди $X(t)$ помилки на виході були б мінімальними.

Очевидно, що дисперсія вихідного сигналу $Y(t)$ при заданому спектрі $X(t)$ залежить від коефіцієнтів рівняння (2.45) (параметрів системи). Тоді задача синтезу записується таким чином:

$$D_y(a_0, a_1 \dots a_n, b_0, b_1 \dots b_m) \rightarrow \min_{a_i, b_j}. \quad (2.46)$$

Оскільки значення коефіцієнтів рівняння (2.45) $a_i, b_j, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$, залежать від конструктивних фізичних величин, які зумовлюють перебіг процесу, під час проектування системи їх можна варіювати в певних межах для того, щоб задовольнити умову (2.46).

Зауважимо, що розглянуті в § 2.8 формули для визначення кореляційної функції $k_x(\tau)$ і дисперсії D_y справедливі стосовно сталого режиму роботи, коли перехідні процеси закінчилися й вільна складова дорівнює нулю. Якщо ж вони тривають, то в системі, крім статичної помилки, зумовленої дисперсією D_y , мають місце й динамічні помилки. У цьому випадку оптимізацію проводять не за дисперсією D_y , а за складеним критерієм, який має такий вигляд: $J = D_y + m_y^2$, тобто розв'язують задачу оптимізації такого вигляду:

$$J = D_y + m_y^2 \rightarrow \min_{a_i, b_j}. \quad (2.47)$$

Параметри системи $a_i, b_j, (i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m})$, за яких критерій J набуває мінімального значення, називаються *оптимальними*.

Більш загальною є задача структурної оптимізації, коли визначають не тільки параметри, але й структуру оператора системи L таким чином, щоб забезпечити мінімальний рівень перешкод на виході.

Насамкінець зауважимо, що критерій (2.47) не єдиний, що використовується в задачі синтезу. Наприклад, часто застосовується критерій, який дорівнює відношенню потужності корисного інформативного сигналу до потужності перешкод (шумів).

П р и к л а д 2.4. На вхід системи прибуває сума корисного сигналу $a(t)$ у вигляді прямокутного імпульсу й білого шуму $X(t)$ із спектральною

щільністю S_0 (див. рис. 2.26). Математична модель системи має відому структуру, а саме:

$$b\dot{z}(t) + z(t) = y(t); \quad (2.48)$$

$$(bp + 1)z(t) = y(t). \quad (2.49)$$

Необхідно вибрати таке значення параметра системи b , щоб відношення «сигнал/шум» за потужністю на виході системи, тобто в сигналі $Z(t)$, було б максимальним.

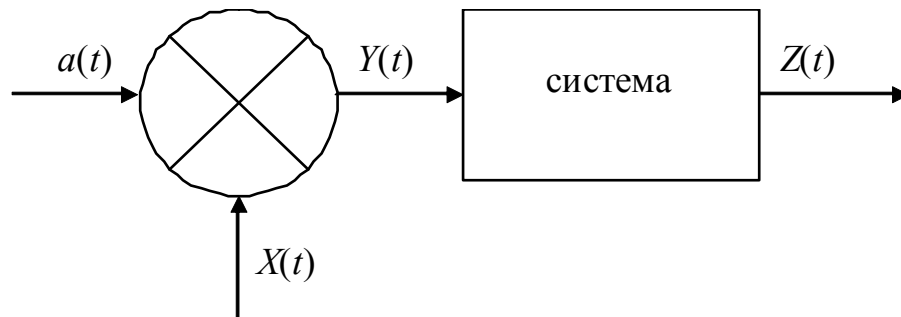


Рис. 2.26. Схема динамічної системи до прикладу 2.4

Розв'язування

Сформульована задача відноситься до типу обернених. Вона полягає у виборі оптимального значення параметра системи, структура якої відома.

Сигнал на вході в систему дорівнює сумі корисного сигналу $a(t)$ і шуму $X(t)$, тобто $Y(t) = a(t) + X(t)$. Оскільки система лінійна, то вихідний сигнал $Z(t)$ також буде являти собою суму двох складових: реакції системи на корисний сигнал $a^1(t)$ і реакції на шум $X^1(t)$, тобто $Z(t) = a^1(t) + X^1(t)$. Енергетична потужність сигналу пропорційна квадрату його рівня або дисперсії центрованого сигналу, тому критерій оптимізації має такий вигляд:

$$J = \frac{[a^1(t_0)]^2}{D_{x^1}} \rightarrow \max_b, \quad (2.50)$$

де t_0 – момент часу, який відповідає максимальному значенню корисного сигналу $a^1(t)$. Для його визначення необхідно розв'язати рівняння (2.48), коли на вході системи має місце сигнал $a(t)$, а на виході – $a^1(t)$, тобто

$$b\dot{a}^1 + a^1(t) = a(t) \quad \text{за умови, що } a^1(0) = 0.$$

Коли корисний сигнал $a(t)$ задано у вигляді прямокутного імпульсу, а саме:

$$a(t) = \begin{cases} A, & \text{коли } 0 \leq t \leq T, \\ 0, & \text{коли } t > T, \end{cases}$$

то розв'язок цього рівняння – вихідний сигнал $a^1(t)$ – буде мати такий вигляд:

$$a^1(t) = \begin{cases} A \left(1 - e^{-\frac{t}{b}} \right), & \text{коли } 0 \leq t < T, \\ A \left(1 - e^{-\frac{t}{b}} \right) e^{-\frac{(t-T)}{b}}, & \text{коли } t \geq T. \end{cases}$$

Його графічне зображення показано на рис. 2.27.

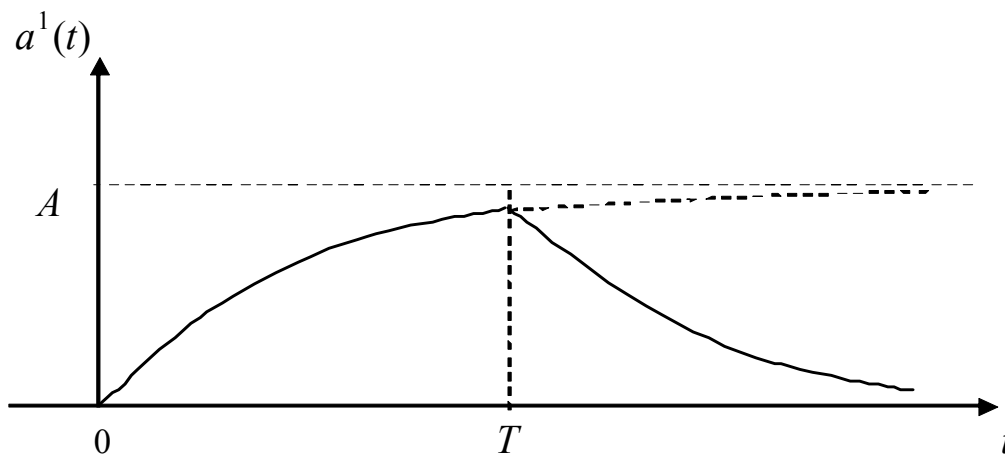


Рис. 2.27. Графік реакції системи на корисний сигнал до прикладу 2.4

Очевидно, що максимального значення сигнал $a^1(t)$ набуває тоді, коли $t = T$, отже, $t_0 = T$. Крім того,

$$a^1(t_0) = A \left(1 - e^{-\frac{T}{b}} \right). \quad (2.51)$$

Тепер визначимо дисперсію реакції системи D_{x^1} на білий шум $X(t)$, що діє на її вході.

Вхідний сигнал $X(t)$ являє собою білий шум із сталою спектральною щільністю S_0 , тобто $S_0(\omega) = S_0 = \text{const}$. Знайдемо за цих умов спектральну щільність реакції системи $S_{x^1}(\omega)$ на білий шум.

З формули (2.45) випливає, що $S_{x^1}(\omega) = |\varphi(j\omega)|^2 S(\omega)$, де $|\varphi(j\omega)|^2$ – квадрат модуля частотної характеристики системи. Визначимо цю величину.

Скориставшись рівнянням (2.49), можемо записати такі залежності:

$$W(p) = \frac{\bar{z}(t)}{\bar{y}(t)} = \frac{1}{bp+1}; \text{ при цьому } p \rightarrow j\omega,$$

$$\varphi(j\omega) = \frac{1}{bj\omega+1},$$

$$|\varphi(j\omega)| = \frac{1}{|bj\omega+1|} = \frac{1}{\sqrt{b^2\omega^2+1}},$$

$$|\varphi(j\omega)|^2 = \frac{1}{b^2\omega^2+1}.$$

Тоді спектральна щільність реакції на білий шум

$$S_{x^1}(\omega) = \frac{S_0}{b^2\omega^2+1}.$$

Обчислимо дисперсію реакції системи на білий шум таким чином:

$$D_x = \int_0^\infty S_x(\omega) d\omega = \int_0^\infty \frac{S_0}{b^2\omega^2+1} d\omega = S_0 \int_0^\infty \frac{d\omega}{1+b^2\omega^2} = \frac{S_0}{b} \int_0^\infty \frac{d(b\omega)}{1+b^2\omega^2} =$$

$$= \frac{S_0}{b} \operatorname{arctg}(b^2\omega^2) \Big|_0^\infty = \frac{S_0\pi}{2b}.$$

Отже,

$$D_x = \frac{S_0\pi}{2b}. \quad (2.52)$$

На основі отриманих виразів для обчислення максимального значення сигналу $a^1(t_0)$ (2.51) і дисперсії шуму D_{x^1} на виході системи (2.52) запишемо критерій (2.50), тобто

$$J = \frac{[a^1(t_0)]^2}{D_{x^1}} = \frac{A^2(1-e^{-\frac{T}{b}})^2}{\frac{S_0\pi}{2b}} \rightarrow \max_b. \quad (2.53)$$

Критерій J необхідно максимізувати за параметром системи b . Для цього зведемо вираз (2.53) до такого вигляду:

$$J = \frac{2A^2T}{S_0\pi} \frac{(1-e^{-\frac{T}{b}})^2}{\frac{T}{b}} = C \frac{(1-e^{-m})^2}{m} \rightarrow \max_m, \quad (2.54)$$

тут $m = \frac{T}{b}$; а $C = \frac{2A^2T}{S_0\pi}$, тобто являє собою сталу, обчислювану для конкретного випадку, її значення не впливає на розв'язок, тому для спрощення розрахунків, може бути прийнято таким, що дорівнює одиниці. Тоді критерій набуває такого вигляду:

$$J = \frac{(1 - e^{-m})^2}{m} \rightarrow \max_m.$$

Розв'яжемо цю задачу.

Необхідною умовою оптимальності є рівність нулю похідної функції, тому обчислимо похідну для критерію J і прирівняємо її до нуля, а саме:

$$\frac{\partial J}{\partial m} = \frac{2(1 - e^{-m})e^{-m}m - (1 - e^{-m})^2}{m^2} = \frac{(1 - e^{-m})(2e^{-m}m - 1 + e^{-m})}{m^2} = 0,$$

$$2e^{-m}m - 1 + e^{-m} = (2m + 1)e^{-m} - 1 = 0.$$

Корінь цього рівняння може бути відшуканий за допомогою одного з числових методів. У даному випадку $m = 1,2565$; $\frac{T}{b} = 1,2565$ і, відповідно,

$$b^* = \frac{T}{1,2565}. \quad (2.55)$$

Отриманий результат варто розуміти так: для того, щоб відношення $\frac{\text{сигнал } Z^1(t)}{\text{шум } X^1(t)}$ за потужністю на виході системи було максимальним, необхідно обчислювати її параметр b , скориставшись формулою (2.55) та з огляду на величину тривалості корисного сигналу T .

Заключний етап розв'язування – це аналіз отриманого оптимального розв'язку задачі на чутливість до зміни параметра системи. На рис. 2.28 показано залежність функції: $J' = \frac{(1 - e^{-m})^2}{m}$, від значення параметра m .

Із графіка видно, що оптимальне значення критерію J' в околі точки екстремуму: $m^* = 1,2565$, слабо чутливе до зміни параметра m , тобто невеликі варіації параметра системи b навколо оптимального значення не спричинять помітного погіршення якості роботи системи з погляду даного критерію.

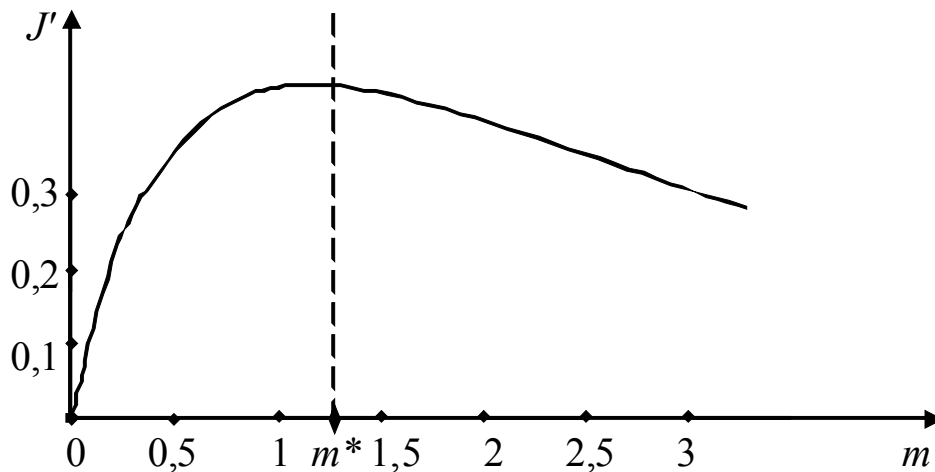


Рис. 2.28. Графік залежності критерію J' від параметра m до прикладу 2.4

Висновки

1. Випадкова функція $X(t)$ називається стаціонарною, якщо всі її ймовірнісні характеристики не залежать від аргументу t (від часу).
2. СВП має ергодичну властивість, за умови, що кожна його окрема реалізація, досліджена протягом досить тривалого інтервалу часу, може замінити обробку всієї множини реалізацій.
3. Характеристики СВП, який має ергодичну властивість, можуть бути визначені на основі однієї реалізації.
4. Для аналізу частотного складу СВП на практиці використовують його канонічне розкладання за системою гармонічних функцій. Таке розкладання називають спектральним.
5. Спектральне розкладання СВП на скінченному проміжку часу називається спектром дисперсій і являє собою розподіл загальної дисперсії СВП за частотами.
6. Спектральне розкладання СВП на нескінченному проміжку часу описується функцією спектральної щільності, що являє собою розподіл щільності дисперсій за частотами.
7. Спектральне розкладання може бути подане в дійсній або комплексній формі.
8. У процесі дослідження ефективності функціонування динамічних систем за наявності перешкод виникають дві основні задачі – задача аналізу й задача синтезу.
9. Задача аналізу має на меті оцінювання точності роботи системи в умовах різного роду перешкод, тобто дослідження характеристик процесу на виході системи, якщо відомо його характеристики на її вході.
10. Задача синтезу полягає у виборі оператора системи таким чином, щоб при заданому спектрі перешкоди $X(t)$ помилки на виході були б мінімальними.

Питання для самоконтролю

1. Які випадкові функції називають стаціонарними?
2. Дайте визначення стаціонарної функції, використовуючи її характеристики.
3. Які властивості має кореляційна функція стаціонарної випадкової функції?
4. Які властивості має нормована кореляційна функція СВФ?
5. Чи буде стале математичне сподівання достатньою умовою стаціонарності ВФ?
6. Які випадкові функції називають ергодичними?
7. Яким чином визначають характеристики ергодичної СВФ за результатами випробування?
8. Дайте визначення спектра СВФ.
9. Що називають спектральною щільністю СВП? Що вона виражає?
10. Як визначається спектральне розкладання СВП на скінченному інтервалі часу? На нескінченному інтервалі часу?
11. Як можна побудувати спектр дисперсій СВФ за її реалізацією?
12. Яким чином пов'язані між собою спектральна щільність і кореляційна функція СВП?
13. Який існує зв'язок між нормованою спектральною щільністю і нормованою кореляційною функцією СВП?
14. Чому дорівнює площа, обмежена кривою спектральної щільності СВП?
15. Чому дорівнює площа, обмежена кривою нормованої спектральної щільності СВП?
16. Як можна записати спектральне розкладання СВФ у комплексній формі?
17. Який ВП називають «білим шумом»?
18. Які моделі «білого шуму» ви знаєте? Які їхні характеристики?
19. Що називають частотною характеристикою динамічної системи?
20. Яким чином визначають реакцію системи на СВП?
21. У чому полягає задача аналізу динамічних систем при наявності на її вході перешкоди?
22. Сформулюйте задачу синтезу динамічних систем, які функціонують в умовах перешкод.

Задачі до розділу 2

Приклади розв'язування задач

1. Випадкова функція $X(t)$ має такі характеристики: $m_x(t) = 0$, $K_x(t, t') = \frac{1}{1 + (t' - t)^2}$. Знайти характеристики ВФ: $Y(t) = \int_0^t X(\tau) d\tau$. Визначити, чи є стаціонарними ВФ $X(t)$ і $Y(t)$.

Розв'язування

Оператор інтегрування є лінійним, тому

$$m_y(t) = \int_0^t m_x(\tau) d\tau = 0,$$

$$K_y(t, t') = \int_0^t d\tau \int_0^{t'} K_x(\tau, \tau') d\tau' = \int_0^t \left(\int_0^{t'} \frac{d\tau'}{1 + (\tau' - \tau)^2} \right) d\tau = \int_0^t [\arctg(t' - \tau) - \arctg(-\tau)] d\tau =$$

$$= t \arctg t + t' \arctg t' - (t - t') \arctg(t - t') - \frac{1}{2} \ln \frac{(1 + t^2)(1 + t'^2)}{1 + (t - t')^2},$$

$$D_y(t) = K_y(t, t) = 2t \arctg t - \ln(1 + t^2).$$

ВФ $X(t)$ стаціонарна, оскільки її математичне сподівання $m_x(t) = \text{const}$ й дисперсія $D_x(t) = 1 = \text{const}$, крім того кореляційна функція

$$K_x(t, t') = k_x(\tau) = \frac{1}{1 + \tau^2}, \quad \text{тут } \tau = t' - t.$$

ВФ $Y(t)$ нестаціонарна, оскільки її дисперсія залежить від аргументу t .

2. Випадкова функція $X(t)$ задана канонічним розкладанням: $X(t) = t + V_1 \cos \omega t + V_2 \sin \omega t$, де V_1 й V_2 – центровані некорельовані випадкові величини, дисперсії яких $D_{v_1} = D_{v_2} = 2$. Визначити, чи є стаціонарною ВФ $X(t)$.

Розв'язування

Спочатку знайдемо характеристики випадкової функції $X(t)$, таким чином:

$$m_x(t) = M[t + V_1 \cos \omega t + V_2 \sin \omega t] = t;$$

$$K_x(t) = D_{v_1} \cos \omega t \cdot \cos \omega t' + D_{v_2} \sin \omega t \cdot \sin \omega t' = 2(\cos \omega t \cdot \cos \omega t' + \sin \omega t \cdot \sin \omega t') =$$

$$= 2 \cos \omega(t' - t);$$

$$D_x(t) = K_x(t, t) = 2 \cos(\omega \cdot 0) = 2.$$

ВФ $X(t)$ не є стаціонарною, оскільки її математичне сподівання залежить від часу. Кореляційна ж функція та дисперсія задовольняють умови

стаціонарності, тому, наприклад, центрована функція: $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t)$, буде стаціонарною ВФ.

3. Випадкова функція $X(t)$ задана таким виразом: $X(t) = V \cos \omega t$, де V – випадкова величина, характеристики якої: $m_V = 2$; $\sigma_V = 3$. Випадкова величина $Y(t) = X(t) + \alpha \frac{dX(t)}{dt}$. Знайти характеристики ВФ $X(t)$ і $Y(t)$ та визначити, чи є вони стаціонарними?

Розв'язування

$$m_x(t) = M[V \cos \omega t] = m_V \cos \omega t = 2 \cos \omega t,$$

$$K_x(t, t') = D_V \cos \omega t \cdot \cos \omega t' = 9 \cos \omega t \cdot \cos \omega t',$$

$$D_x(t) = K_x(t, t) = 9 \cos^2 \omega t.$$

Знайдемо характеристики ВФ $Y(t)$, попередньо подавши її подібно до $X(t)$ у вигляді елементарної функції:

$$Y(t) = V \cos \omega t + \alpha \frac{dV \cos \omega t}{dt} = V(\cos \omega t - \alpha \omega \sin \omega t),$$

$$m_y(t) = m_V (\cos \omega t - \alpha \omega \sin \omega t) = 2(\cos \omega t - \alpha \omega \sin \omega t),$$

$$K_y(t, t') = D_V (\cos \omega t - \alpha \omega \sin \omega t)(\cos \omega t' - \alpha \omega \sin \omega t'),$$

$$D_y(t) = K_y(t, t) = D_V (\cos \omega t - \alpha \omega \sin \omega t)^2.$$

4. Дано спектральну щільність стаціонарного випадкового процесу $X(t)$:

$$S_x(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{коли } \omega < \omega_0, \\ c^2, & \text{коли } \omega_0 \leq \omega \leq 2\omega_0, \\ 0, & \text{коли } \omega > 2\omega_0. \end{cases}$$

Визначити кореляційну функцію СВП $X(t)$.

Розв'язування

Щоб розв'язати цю задачу, використаємо перетворення Фур'є, а саме:

$$\begin{aligned} K_x(\tau) &= \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega = \int_{\omega_0}^{2\omega_0} c^2 \cdot \cos \omega \tau d\omega = \frac{c^2}{\tau} \sin \omega \tau \Big|_{\omega_0}^{2\omega_0} = \\ &= \frac{c^2}{\tau} (\sin 2\omega_0 \tau - \sin \omega_0 \tau) = \frac{c^2}{\tau} \sin \omega_0 \tau (2 \cos \omega_0 \tau - 1). \end{aligned}$$

5. Визначити спектральну щільність випадкового процесу $X(t)$, якщо його кореляційна функція $K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha\tau}$.

Розв'язування

Застосуємо перетворення Фур'є:

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} D_x e^{-\alpha\tau} \cos \omega \tau d\tau =$$

$$= \frac{2D_x}{\pi} \cdot \frac{e^{-\alpha\tau}}{\alpha^2 + \omega^2} (-\alpha \cos \omega \tau + \omega \sin \omega \tau) \Big|_0^{\infty} = \frac{2\alpha D_x}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)}.$$

6. На рис. 2.29 зображено графік нормованої спектральної щільності $S(\omega)$. Знайти частоту ω_0 (див. рис. 2.29).

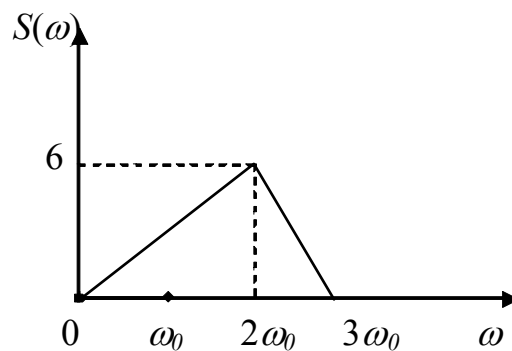


Рис. 2.29. Графік нормованої спектральної щільності до задачі 6

Розв'язування

Враховуючи, що площа, окреслена на графіку лінією нормованої спектральної щільності, дорівнює одиниці, частоту ω_0 можна знайти з такої умови:

$$\int_0^{\infty} S(\omega) d\omega = 1.$$

Користуючись графіком, обчислимо цю площу й складемо рівняння, а саме:

$$S = \frac{1}{2} 6 \cdot 2\omega_0 + \frac{1}{2} 6 \cdot \omega_0 = 6\omega_0 + 3\omega_0 = 9\omega_0 = 1, \text{ звідси } \omega_0 = \frac{1}{9}.$$

7. На рис. 2.30 зображено графік спектральної щільності випадкового процесу $X(t)$. Необхідно знайти дисперсію ВП $X(t)$.

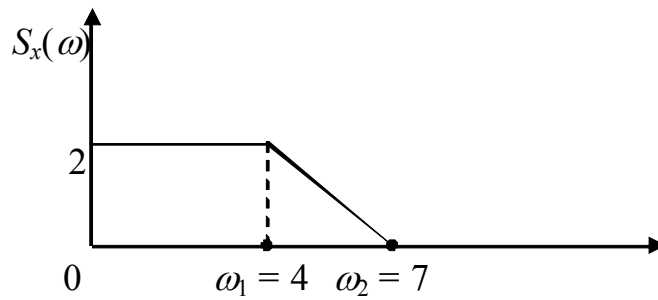


Рис. 2.30. Графік спектральної щільності до задачі 7

Розв'язування

Дисперсія ВП $X(t)$ дорівнює площі, окресленій на рисунку лінією графіка спектральної щільності, тому

$$D_x = 2 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 11.$$

8. Визначити дисперсію похідної випадкової функції $X(t)$, якщо відомо її спектральну щільність: $S_x(\omega) = \frac{a^2}{(\omega^2 + a^2)^2}$.

Розв'язування

Можна вважати, що випадковий процес перетворюється системою, яку описано оператором диференціювання: $\frac{d}{dt} = p$, тобто її передатна функція $W(p) = p$. Така система має частотну характеристику: $W(j\omega) = j\omega$. Отже, $|W(j\omega)|^2 = \omega^2$. Спектральна щільність похідної (тобто функції на виході системи)

$$S_{\dot{x}}(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega) = \frac{a^2 \omega^2}{(\omega^2 + a^2)^2},$$

тоді дисперсія похідної

$$D_{\dot{x}}(\omega) = \int_0^{\infty} S_{\dot{x}}(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} \frac{a^2 \omega^2}{(\omega^2 + a^2)^2} \cdot d\omega = \left[-\frac{\omega a^2}{2(\omega^2 + a^2)} + \frac{a}{2} \operatorname{arctg} \frac{\omega}{a} \right]_0^{\infty} = \frac{\pi a}{4}.$$

9. На вхід лінійної системи прибуває випадковий процес $X(t)$, кореляційна функція якого $K_x(\tau) = ae^{-\tau a}$. Знайти спектральну щільність $S_y(\omega)$ процесу на виході системи, якщо її вхід і вихід пов'язані таким диференціальним рівнянням: $Y(t) = k_1 X(t) + k_2 \dot{X}(t)$.

Розв'язування

Щоб знайти спектральну щільність $Y(t)$, необхідно скористатися таким співвідношенням: $S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega)$.

Знайдемо квадрат модуля частотної характеристики системи, тобто

$$W(p) = k_1 + k_2 p,$$

$$W(j\omega) = k_1 + k_2(j\omega),$$

$$|W(j\omega)|^2 = k_1^2 + k_2^2 \omega^2.$$

Крім того, використовуючи перетворення Фур'є, обчислимо спектральну щільність вхідного процесу:

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} a e^{-\alpha \tau} \cos \omega \tau d\tau = \\ &= \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{e^{-\alpha \tau}}{\alpha^2 + \omega^2} (-\alpha \cos \omega \tau + \omega \sin \omega \tau) \Big|_0^{\infty} = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Отримуємо остаточний результат:

$$S_y(\omega) = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \cdot (k_1^2 + k_2^2 \omega^2).$$

Задачі для самостійного розв'язування

1. Чи є стаціонарною випадкова функція: $X(t) = t^3 U$, у якій U – випадкова величина, причому: а) $m_u \neq 0$, б) $m_u = 0$?

Відповідь: а) ні, оскільки $m_x(t) \neq \text{const}$; б) ні, бо кореляційна функція залежить не від різниці аргументів, а від кожного з них.

2. Чи є стаціонарною випадкова функція: $X(t) = \sin(t + \varphi)$, де φ – випадкова величина, розподілена рівномірно на інтервалі $(0, 2\pi)$?

Відповідь: так, оскільки $m_x(t) = 0 = \text{const}$, $K_x(t_1, t_2) = 0,5 \cos(t_2 - t_1)$.

3. Задано випадкову функцію: $X(t) = t + U \sin t + V \cos t$, тут U і V – випадкові величини, причому $M(U) = M(V) = 0$, $D(U) = D(V) = 5$, $M(UV) = 0$.

Довести, що: а) $X(t)$ – нестаціонарна функція; б) $\dot{X}(t)$ – стаціонарна функція.

Відповідь: а) $m_x(t) \neq \text{const}$, б) $m_x(t) = \text{const}$, $K_x(t_1, t_2) = 5 \cos(t_2 - t_1)$.

4. Відомо, що кореляційна функція стаціонарної випадкової функції $X(t)$ $k_x(\tau) = 3e^{-2\tau^2}$. Знайти кореляційну функцію випадкової функції: $Y(t) = 5X(t)$.

Відповідь: $k_x(\tau) = 75e^{-2\tau^2}$.

5. Задано кореляційну функцію стаціонарної випадкової функції $X(t)$: $k_x(\tau) = 2e^{-2\tau^2}$. Знайти нормовану кореляційну функцію випадкової функції $X(t)$.

Відповідь: $\rho_x(\tau) = e^{-\tau^2}$.

6. Задано кореляційну функцію стаціонарної випадкової функції $X(t)$: $k_x(\tau) = 6e^{-0,2\tau}$. Визначити: а) кореляційну функцію СВФ $X(t)$; б) дисперсію її похідної: $X'(t) = \dot{x}$.

Відповідь: а) $k_{\dot{x}}(\tau) = 0,24e^{-0,2\tau^2} (1 - 0,4\tau^2)$; б) $D_{\dot{x}} = 0,24$.

7. Задано кореляційну функцію стаціонарної випадкової функції $X(t)$: $k_x(\tau) = e^{|\tau|}$. Знайти дисперсію інтеграла: $Y(t) = \int_0^t X(s) ds$.

Відповідь: $D_y(t) = 2(t + e^{-t} - 1)$.

8. Обчислити дисперсію стаціонарної випадкової функції $X(t)$, знаючи, що її спектральна щільність $S_x(\omega) = \frac{6}{\pi(1 + \omega^2)}$.

Відповідь: $D_x = 6$.

9. Визначити спектральну щільність стаціонарної випадкової функції $X(t)$, причому відомо, що її кореляційна функція

$$k_x(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{3}|\tau|, & \text{коли } |\tau| \leq 3, \\ 0, & \text{коли } |\tau| > 3. \end{cases}$$

Відповідь: $S_x(\omega) = \frac{2 \sin^2(3\omega/2)}{3\pi\omega^2}$.

10. Знайти спектральну щільність стаціонарної випадкової функції $X(t)$, знаючи, що її кореляційна функція $k_x(\tau) = 5e^{-2|\tau|}$.

$$\text{Відповідь: } S(\omega) = \frac{10}{\pi(4 + \omega^2)}.$$

11. Задано спектральну щільність стаціонарної випадкової функції $X(t)$: $S_x(\omega) = 6/(\pi(1 + \omega^2))$. Визначити її нормовану спектральну щільність.

$$\text{Відповідь: } \alpha_x(\omega) = \frac{1}{\pi(1 + \omega^2)}.$$

12. Знайти кореляційну функцію стаціонарної випадкової функції $X(t)$, знаючи, що її спектральна щільність

$$S_x(\omega) = \begin{cases} s_0, & \text{якщо } \omega \in (-4\omega_0, -2\omega_0) \cup (2\omega_0, 4\omega_0), \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

$$\text{Відповідь: } k_x(\tau) = \frac{2s_0}{\tau} \sin \omega_0 \tau (2 \cos 2\omega_0 \tau - 1).$$

13. Спектральна щільність стаціонарної випадкової функції $X(t)$ стала в діапазоні частот (ω_1, ω_2) , а поза ним дорівнює нулю, тобто

$$S_x(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{коли } \omega < \omega_1, \\ s, & \text{коли } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2, \\ 0, & \text{коли } \omega > \omega_2. \end{cases}$$

Визначити: а) кореляційну функцію; б) дисперсію; в) нормовану кореляційну функцію стаціонарної випадкової функції $X(t)$.

$$\text{Відповідь: а) } k_x(\tau) = \frac{s(\sin \omega_2 \tau - \sin \omega_1 \tau)}{\tau}; \text{ б) } D_x = s(\omega_2 - \omega_1);$$

$$\text{в) } \rho_x(\tau) = \frac{\sin \omega_2 \tau - \sin \omega_1 \tau}{\tau(\omega_2 - \omega_1)}.$$

14. На вхід лінійної стаціонарної динамічної системи, яка описується рівнянням: $Y'(t) + 3Y(t) = X'(t) + 4X(t)$, подається стаціонарна випадкова функція $X(t)$, математичне сподівання якої $m_x = 6$, а кореляційна функція $k_x(\tau) = 5e^{-3|\tau|}$. Визначити математичне сподівання і дисперсію функції $Y(t)$ на виході системи у встановленому режимі.

$$\text{Відповідь: } m_y = 8; D_y = 22/3.$$

15. На вхід лінійної стаціонарної динамічної системи, яка описується рівнянням: $Y''(t) + 5Y'(t) + 6Y(t) = X''(t) + X(t)$, подається стаціонарна випадкова функція $X(t)$, математичне сподівання якої $m_x = 4$, а кореляційна функція $k_x(\tau) = e^{-|\tau|}$. Знайти математичне сподівання і спектральну щільність випадкової функції $Y(t)$ на виході системи у встановленому режимі.

$$\text{Відповідь: } m_y = 2/3; S_y(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{25\omega^2 + (6 - \omega^2)^2}.$$

16. На вхід лінійної стаціонарної динамічної системи, яка описується рівнянням: $Y'''(t) + 6Y''(t) + 11Y'(t) + 6Y(t) = 7X'''(t) + 5X(t)$, подається стаціонарна випадкова функція $X(t)$, кореляційна функція якої $k_x(\tau) = 2e^{-|\tau|}(1 + |\tau|)$. Знайти спектральну щільність випадкової функції $Y(t)$ на виході системи у встановленому режимі.

В к а з і в к а. Розкласти на лінійні множники знаменник передатної функції таким чином: $p^3 + 6p^2 + 11p + 6 = (p + 1)(p + 2)(p + 3)$.

$$\text{Відповідь: } S_y(\omega) = \frac{4(49\omega^6 + 25)}{\pi(\omega^2 + 1)^3(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 9)}.$$

РОЗДІЛ 3

ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ ІЗ ЛІЧИЛЬНОЮ МНОЖИНОЮ СТАНІВ

Мета розділу: ознайомлення з випадковими процесами, які мають зліченну множину станів, та їх особливостями, набуття навичок застосування теорії випадкових процесів до розв'язування практичних задач.

§ 3.1. Випадковий процес як зміна стану системи

Функціонування системи в часі може бути описане різними способами. У даному розділі ми розглянемо його як процес послідовної зміни станів системи.

Стан системи є фундаментальним поняттям системного аналізу. У будь-який момент часу він описується фіксованим набором значень змінних, які називають *змінними стану*. У загальному випадку їх можна подати у вигляді вектора: $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, і у кожній окремій задачі ці змінні мають певний фізичний зміст.

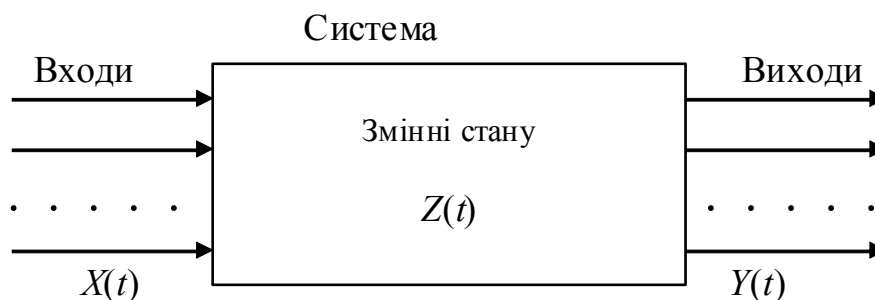


Рис. 3.1. Модель функціонування системи

Під дією вхідних впливів $X(t)$ стан системи $Z(t)$ та її реакція (вихід) $Y(t)$ змінюються в часі (рис. 3.1). Змінні стану при цьому є проміжними і характеризують внутрішній стан системи.

Математична модель системи, описана через змінні стану, в детермінованому випадку має таку структуру:

$$\dot{Z}(t) = \varphi[z(t), X(t)]. \quad (3.1)$$

$$Y(t) = f[z(t), X(t)]. \quad (3.2)$$

Ця модель описує ситуацію, коли стан системи в наступний момент часу [рівняння (3.1)] та її реакція в даний момент часу [рівняння (3.2)] цілком визначено станом системи $Z(t)$ і вхідним впливом $X(t)$ в даний момент часу. За таких умов рівняння (3.1) називається рівнянням стану; а рівняння (3.2) – рівнянням виходу системи.

Однак на практиці входи $X(t)$ часто являють собою випадкові процеси, отже, і зміна стану системи під їхнім впливом, природно, також буде являти собою ВП.

У цьому випадку для опису роботи системи застосовуються інші підходи й методи, які називаються *стохастичними* (імовірнісними). Цей розділ має на меті розглянути саме такі підходи й відповідний їм математичний опис.

Нагадаємо, що випадкові процеси за ознаками дискретності й неперервності можна поділити на чотири класи (див. § 1.1). Розглянемо класифікацію процесів функціонування систем відносно стану $Z(t)$ й незалежного аргументу (часу t).

1. *Неперервні процеси із неперервним часом.* Стан Z набуває значень із деякої неперервної множини і може змінюватись у будь-який момент часу t із певного проміжку.

Прикладом системи, функціонування якої описується саме таким процесом є нагрівальна піч. Тут стан Z – це температура печі, вочевидь, вона являє собою неперервний у часі ВП.

2. *Неперервні процеси із дискретним часом.* У таких процесах стан Z набуває значень з деякого проміжку (неперервної множини), однак ці значення фіксуються в дискретні моменти часу t .

Таким процесом є проведення періодичного циклічного опитування (з періодом Δt) датчиків струму кількох електродвигунів електронною системою контролю струму.

3. *Дискретні процеси із неперервним часом.* Тут стан системи Z набуває значень із деякої дискретної множини і він може змінюватися в будь-який момент часу t (оскільки час t неперервний).

Описані процеси властиві інформаційній системі обслуговування клієнтів, де її стан Z – це кількість клієнтів у черзі на обслуговування в момент часу t .

4. *Дискретні процеси із дискретним часом.* У їхньому перебігу стан системи Z набуває значень із деякої дискретної множини, причому його зміна може відбуватися тільки у фіксовані моменти часу t .

У цьому розділі ми будемо розглядатимемо процеси, що відбуваються в системах третього і четвертого типу, тобто ті, що характеризуються дискретною множиною станів, зокрема *марковські* процеси. Зауважимо, що математичний апарат розроблений для опису згаданих процесів та ланцюгів Маркова широко використовується у теорії систем, дослідженні операцій та в інших прикладних дисциплінах. Це зумовлено багатьма причинами, серед яких можна визначити такі:

1. Багато реальних технічних систем можна подати у вигляді скінченної множини станів, при цьому їхня поведінка в процесі функціонування адекватно моделюється саме марковськими процесами.

2. Високий рівень розробки теорії марковських процесів із дискретною множиною станів дозволяє використовувати її для розв'язування багатьох прикладних задач.

Уведемо основні поняття й визначення, що характеризують такі процеси.

Нехай $\varphi(t)$, $t \in T \subset R_1$ – n -вимірний випадковий процес, скінченновимірні функції щільності ймовірності якого (можливо узагальнені) $f(x_1, x_2 \dots x_n)$ [це

скорочений запис, тобто $f(x_1, x_2 \dots x_n) = f(x_1, x_2 \dots x_n | t_1, t_2 \dots t_n)$] визначено для всіх чисел $n \geq 1$ й параметрів $t_k \in T$, $k = \overline{1, n}$, причому $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Коли до того ж умовна щільність імовірності має такий вигляд:

$$f(x_n | x_{n-1}, x_{n-2} \dots x_1) = f(x_n | x_{n-1}), \quad (*)$$

то випадковий процес $\varphi(t)$, $t \in T$ називають *марковським*.

Властивість (*) називають ще *марковською властивістю*.

Випадковий процес: $\varphi(t)$, $t \in T = [a; b]$ – називають *марковським процесом*, із дискретною множиною станів, якщо йому властива умова (*) і в кожний фіксований моменту часу $t^* \in T$ випадкова величина $\varphi(t^*)$ є дискретною.

Іншими словами, випадковий процес, який триває в системі із дискретною множиною станів, зветься марковським, коли в будь-який момент часу t ймовірність кожного із майбутніх станів системи ($t > t_0$) залежить тільки від її теперішнього стану ($t = t_0$) і не залежить від того, яким чином і коли саме вона потрапила у цей стан, тобто від її поведінки в минулому.

§ 3.2. Ланцюги Маркова

Ланцюгом будемо називати послідовність випробувань, у кожному з яких може відбутися лише одна подія з повної групи подій $Q_1, Q_2 \dots Q_m \dots$. Ці події інтерпретують як стани системи, причому чергове k -те випробування можна вважати зміною стану в момент часу t_k . Оскільки кількість станів являє собою лічильну множину (найчастіше скінченну), і час також набуває значень із дискретної (лічильної) множини, то процес зміни станів ланцюга (системи) є дискретним ВП із дискретним часом.

Нехай $\{Q_j\}_{j=1}^n$ – скінченна множина можливих станів системи, а випадкова подія q_j^k , полягає в тому, що після проходження k етапів система перебуває у стані Q_j .

Випадкова послідовність $\{q_j^k\}$, $j = 1, 2, \dots, n$, $k = 0, 1, 2, \dots$, називається дискретним *ланцюгом Маркова*, коли виконується така умова:

$$P(q_j^k | q_i^{k-1} \cap \dots \cap q_1^0) = P(q_j^k | q_i^{k-1}),$$

тобто стосовно будь-якого моменту часу t умовні ймовірності станів системи у майбутньому залежать тільки від теперішнього стану системи і не залежать від того, коли і яким чином система потрапила в цей стан.

Основним завданням дослідження ланцюгів Маркова є обчислення безумовних імовірностей знаходження системи S у всякий момент часу t в стані Q_j .

Для формалізованого опису ланцюга Маркова зручно використовувати поняття ймовірностей станів і ймовірностей переходу. Позначимо ймовірність реалізації випадкової події q_j^k через $p_j(k)$. Вектор імовірностей станів системи після проходження нею k етапів позначимо через $p(k)$, тобто

$$p(k) = (p_1(k), p_2(k) \dots p_n(k))^T,$$

а вектор ймовірностей початкових станів системи через $p(0)$,

$$p(0) = (p_1(0), p_2(0) \dots p_n(0))^T.$$

Очевидно, що $\sum_{j=1}^n p_j(k) = 1, k \geq 0$.

Умовну ймовірність події q_j^k , коли відбулася подія q_i^{k-1} , позначають як $p_{ij}(k) = P(q_j^k | q_i^{k-1})$ і називають *ймовірністю переходу*.

Матрицю такого вигляду:

$$P_k = \|p_{ij}(k)\|_{n \times n}. \quad (3.3)$$

для кожного фіксованого значення числа k називають *матрицею перехідних імовірностей*, або *матрицею переходу*.

П р и к л а д 3.1. Ланцюг Маркова описано такими матрицями переходу:

$$P_1 = \begin{vmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,4 & 0,6 \end{vmatrix}; \quad P_2 = \begin{vmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,3 & 0,7 \end{vmatrix}; \quad P_3 = \begin{vmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0,8 \end{vmatrix} \dots$$

Аналізуючи ці дані, можна перекопатися, що система має два стани ($m = 2$). При першому випробуванні ($k = 1$) імовірність переходу від стану Q_1 до стану Q_1 дорівнює 0,1 (тобто, якщо система перебуває в стані Q_1 , то при першому випробуванні з імовірністю 0,1 вона в ньому залишиться). Імовірність переходу із стану Q_1 в стан Q_2 дорівнює 0,9 (тобто з ймовірністю 0,9 система перейде зі стану Q_1 в стан Q_2). Аналогічно, ймовірність переходу при першому випробуванні від стану Q_2 до Q_1 дорівнює 0,4, а з Q_2 в Q_2 – 0,6. Матриці P_2 й P_3 описують поведінку системи в другому й третьому випробуваннях.

Характерним випадком ланцюга Маркова є *однорідний* ланцюг, у якому перехідні ймовірності $p_{ij}(k)$ не залежать від номера випробування k , тобто $p_{ij}(k) = p_{ij}$, і матриця переходу P не змінюється на кожному з етапів k ($k \geq 1$). Інакше ланцюг називається неоднорідним.

Розглянемо деякі властивості матриць перехідних імовірностей.

Властивість 1. Сума елементів будь-якого рядка матриці переходів дорівнює 1, тобто

$$\sum_{j=1}^m p_{ij}(k) = 1, \quad i = \overline{1, m}. \quad (3.4)$$

Дана властивість впливає з того, що $\{q_j^k\}_{j=1}^n$ – це повна група подій $\forall k \geq 1$, і означає, що при k -му випробуванні система зі стану Q_i ($i = 1, \dots, m$) обов'язково перейде в один з можливих станів $Q_1, Q_2 \dots Q_m$.

Властивість 2. Вектор імовірностей станів після проходження системою k етапів дорівнює добутку транспонованої матриці переходів P_k і вектора ймовірностей станів після $(k - 1)$ етапу, тобто

$$p(k) = P_k^T p(k - 1), \quad k \geq 1.$$

Оскільки $\{q_j^k\}_{j=1}^n$ – повна група подій, $\forall k \geq 1$, то за формулою повної ймовірності

$$\sum_{i=1}^n P[q_j^k | q_i^{k-1}] P[q_i^{k-1}] = P[q_j^k], \quad j = \overline{1, n}, \quad \forall k \geq 1$$

або, що те саме,

$$\sum_{i=1}^n p_{ij}(k) p_j(k - 1) = p_j(k), \quad j = \overline{1, n}, \quad \forall k \geq 1$$

Властивість 3. Вектор імовірностей $p_j(k)$ станів системи після проходження нею k етапів можна однозначно встановити за допомогою матриць перехідних імовірностей P_1, P_2, \dots, P_k і вектора початкового стану $p(0)$, а саме:

$$p(n) = (P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n)^T p(0). \quad (3.5)$$

При цьому, якщо ланцюг Маркова однорідний, то $P_j \equiv P, j \geq 1$ і

$$p(k) = (P^k)^T p(0), \quad (3.6)$$

де P^k – k -й степінь матриці P .

З огляду на властивість 2

$$p(k) = P_k^T p(k - 1) = P_k^T (P_{k-1}^T p(k - 2)) = (P_k P_{k-1})^T p(k - 2) = \dots = (P_k P_{k-1} \dots P_1)^T p(0).$$

Ланцюг Маркова називається *скінченним*, якщо йому властива скінченна множина станів.

Ланцюг Маркова називається *незвідним*, якщо до кожного стану системи можна потрапити із будь-якого іншого.

Ланцюг Маркова називається *періодичним*, якщо повернення системи в будь-який стан відбувається тільки через певну кількість кроків, кратну деякому цілому числу γ , більшому за 1 ($\gamma > 1$).

П р и к л а д 3.2. Ланцюг Маркова описується матрицею переходів, яка має такий вигляд:

$$P = \begin{vmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 & 0 \end{vmatrix}.$$

Це означає, що система має три стани (оскільки розмірність матриці – три). Незалежно від номера випробування k із стану, наприклад, Q_2 система може перейти в стан Q_1 з імовірністю: $p_{21} = 0,4$ або в стан Q_3 (імовірність: $p_{23} = 0,6$), а залишитися в стані Q_2 вона не може.

П р и к л а д 3.3. Із таблиці, що містить усі цілі числа від 1 до m включно, навмання вибираються числа. Система перебуває в стані Q_j , якщо найбільше з вибраних чисел дорівнює j . Потрібно скласти матрицю переходів системи й визначити клас такого ланцюга Маркова.

Розв'язування

Якщо система перебуває в стані Q_1 то вона може з однаковою ймовірністю перейти в будь який інший стан (оскільки одиниця – найменше число). Зі стану Q_2 вона може перейти лише в стани $Q_2, Q_3 \dots Q_m$, причому якщо буде вибрана одиниця або двійка, то система залишиться в стані Q_2 , тому ймовірність цього стану буде вдвічі більшою за інші. Розмірковуючи аналогічно, будемо матрицю переходів. Вона буде мати такий вигляд:

$$P = \begin{vmatrix} \frac{1}{m} & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} & \dots & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \\ 0 & \frac{2}{m} & \frac{1}{m} & \dots & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & \frac{3}{m} & \dots & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{m-1}{m} & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ланцюг Маркова, описаний даною матрицею, є скінченним (оскільки число станів m скінченне), звідним, тому що з кожного стану можливий перехід лише в стани, які мають більший номер (наприклад із стану Q_m не можна перейти в жоден інший стан), неперіодичним й однорідним (матриця переходу не залежить від номера випробування).

П р и к л а д 3.4. Машина перевозить вантаж між чотирма пунктами, які розташовані на кільцевій трасі. Вантажі транспортують з кожного пункту тільки в наступний (з імовірністю 0,8) або в попередній (з імовірністю 0,2). Початкове місце розташування машини – пункт 2. Визначити ймовірності перебування машини в кожному з пунктів після чотирьох перевезень.

Розв'язування

За стани системи візьмемо місця розташування машини – чотири можливі пункти – Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 . Тоді матриця переходів буде мати такий вигляд:

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 0,8 & 0 & 0,2 \\ 0,2 & 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,8 \\ 0,8 & 0 & 0,2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Отриманий ланцюг Маркова – скінченний, незвідний, періодичний, однорідний.

Знайдемо ймовірності станів після чотирьох випробувань за формулою (3.6). У даному випадку її можна записати таким чином:

$$p(4) = (P^T)^4 p(0).$$

Обчислимо послідовно добутки матриць.

Вихідна транспонована матриця переходу має такий вигляд:

$$P^T = \begin{vmatrix} 0 & 0,2 & 0 & 0,8 \\ 0,8 & 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 & 0,2 \\ 0,2 & 0 & 0,8 & 0 \end{vmatrix}.$$

Обчислимо її квадрат: $(P^T)^2 = P^T \times P^T = \begin{vmatrix} 0,32 & 0 & 0,68 & 0 \\ 0 & 0,32 & 0 & 0,68 \\ 0,68 & 0 & 0,32 & 0 \\ 0 & 0,68 & 0 & 0,32 \end{vmatrix},$

куб: $(P^T)^3 = (P^T)^2 \cdot P^T = \begin{vmatrix} 0 & 0,608 & 0 & 0,392 \\ 0,608 & 0 & 0,392 & 0 \\ 0 & 0,392 & 0 & 0,608 \\ 0,392 & 0 & 0,608 & 0 \end{vmatrix},$

та четвертий степінь: $(P^T)^4 = (P^T)^3 \cdot P^T =$

$$\begin{vmatrix} 0,4352 & 0 & 0,5648 & 0 \\ 0 & 0,4352 & 0 & 0,5648 \\ 0,5648 & 0 & 0,4352 & 0 \\ 0 & 0,5648 & 0 & 0,4352 \end{vmatrix}.$$

Маємо такий остаточний результат: $p(4) = (P^T)^4 \cdot p(0) =$

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0,4352 \\ 0 \\ 0,5648 \end{vmatrix}.$$

Варто припустити, що зі збільшенням числа випробувань імовірності будуть прямувати до 0,5, тобто

$$p(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0 \\ 0,5 \end{vmatrix}, \text{ якщо число } n \text{ – парне;}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = \begin{vmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0,5 \\ 0 \end{vmatrix}, \text{ коли число } n \text{ – непарне.}$$

Зауважимо, що для практики найбільш цікавим є визначення саме граничних імовірностей станів $p(\infty)$. Однак, ці границі в стовпці $p(\infty)$ існують за певних умов.

Щоб визначити ці умови, розглянемо характеристичні числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ матриці переходів P . Вони є коренями такого характеристичного рівняння:

$$|\lambda E - P| = 0, \quad (3.7)$$

Граничні ймовірності $p(\infty)$ мають місце, якщо один з коренів рівняння (3.7.) дорівнює 1, тобто $\lambda_1 = 1$, а інші задовольняють таку умову:

$$|\lambda_s| < 1, \quad S = \overline{2, m}. \quad (3.8)$$

У загальному випадку корені рівняння (3.7) задовольняють умову: $|\lambda_S| \leq 1, S = \overline{1, m}$.

Якщо виконується умова (3.8), то елементи стовпця $p^{(\infty)}$ можна визначити із такої системи рівнянь:

$$\sum_{i=1}^m p_{ij} p_i^{(\infty)} = p_j^{(\infty)}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.9)$$

Оскільки рівняння цієї системи лінійно залежні, то її доповнюють такою очевидною умовою:

$$\sum_{j=1}^m p_j^{(\infty)} = 1. \quad (3.10)$$

Насамкінець зауважимо, що матриця: $P^{(\infty)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (P)^n$, називається *матрицею граничних імовірностей переходів*. При виконанні умови (3.8) усі її рядки однакові й кожен з них збігається зі стовпцем $p^{(\infty)}$.

П р и к л а д 3.5. Однорідний марковський ланцюг описується матрицею переходів, яка має такий вигляд:

$$P = \begin{vmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0 & 0,6 & 0,4 \end{vmatrix}.$$

Знайти вектор імовірностей граничних станів $p^{(\infty)}$.

Розв'язування

Спочатку необхідно визначити, чи існує вектор $p^{(\infty)}$, тобто перевірити умову (3.8).

Щоб знайти корені $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ рівняння: $|\lambda E - P| = 0$, запишемо його для нашого випадку, а саме:

$$\begin{vmatrix} 0,1 - \lambda & 0,5 & 0,4 \\ 0,5 & 0,2 - \lambda & 0,3 \\ 0 & 0,6 & 0,4 - \lambda \end{vmatrix} = (0,1 - \lambda)(0,2 - \lambda)(0,4 - \lambda) + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,6 -$$

$$- 0,3 \cdot 0,6(0,1 - \lambda) - 0,25(0,4 - \lambda) = -\lambda^3 + 0,7\lambda^2 + 0,29\lambda + 0,01 = 0.$$

Таким чином, рівняння (3.7) набуває такого вигляду:

$$\lambda^3 - 0,7\lambda^2 - 0,29\lambda - 0,01 = 0.$$

Знайдемо його корені. Оскільки $\lambda_1 = 1$, то для визначення інших коренів поділимо вихідне рівняння на $(\lambda - 1)$, тобто

$$\begin{array}{r|l} \lambda^3 - 0,72\lambda^2 - 0,29\lambda - 0,01 & \lambda - 1 \\ \hline \lambda^3 - \lambda^2 & \lambda^2 + 0,3\lambda + 0,01 \\ \hline 0,3\lambda^2 - 0,29\lambda & \\ \hline 0,3\lambda^2 - 0,3\lambda & \\ \hline 0,01\lambda - 0,01 & \\ \hline 0,01\lambda - 0,01 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

і розв'яжемо отримане рівняння: $\lambda^2 + 0,3\lambda + 0,01 = 0$.

Його корені $\lambda_2 = -0,0382$, $\lambda_3 = -0,2618$.

Оскільки $|\lambda_S| < 1$, коли $S = \overline{2,3}$, то умови (3.8) виконуються. Отже, вектор $p(\infty)$ існує.

Тепер знайдемо елементи вектора: $p(\infty) = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$, з рівнянь (3.9) і (3.10).

Відповідна система записується таким чином:

$$\begin{cases} 0,1p_1 + 0,5p_2 + 0 \cdot p_3 = p_1, \\ 0,5p_1 + 0,2p_2 + 0,6p_3 = p_2, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Її розв'язок: $p_1 = 0,229$; $p_2 = 0,4122$; $p_3 = 0,3588$; тобто вектор

$p(\infty) = \begin{pmatrix} 0,229 \\ 0,4122 \\ 0,3588 \end{pmatrix}$, і гранична матриця переходів набуває такого вигляду:

$$P^\infty = (P)^\infty = \begin{pmatrix} 0,229 & 0,4122 & 0,3588 \\ 0,229 & 0,4122 & 0,3588 \\ 0,229 & 0,4122 & 0,3588 \end{pmatrix}.$$

§ 3.3. Потіки подій. Найпростіший потік

Перш ніж продовжити вивчення дискретних процесів зміни станів системи, варто проаналізувати причини, які викликають перехід системи від одного стану до іншого. Очевидно, що цей перехід зумовлюється впливом зовнішнього середовища на систему, тобто система змінює свій стан під дією вхідних впливів, або *входів* (рис. 3.2).

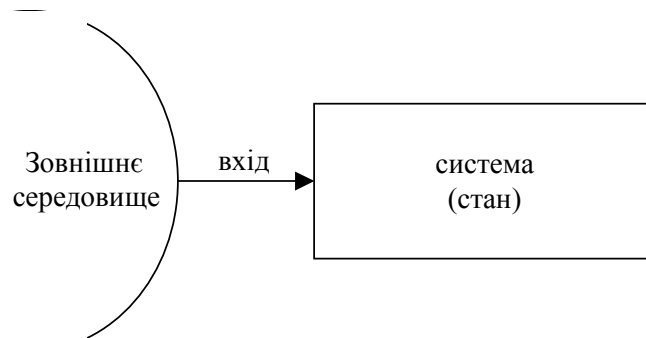


Рис. 3.2. Схема взаємодії системи й середовища

У дискретних системах вхід являє собою деякий потік подій, що відбуваються у випадкові моменти часу.

Розглянемо способи опису потоків подій.

Потоком подій називається така їхня послідовність, коли події відбуваються одна за одною в деякі моменти часу. Наприклад: потік викликів, що надходять на АТС; потік виготовлених деталей, які прибувають у ВТК заводу; потік машин, що потребують заправки паливом; потік літаків, котрі приземляються в аеропорту тощо. Ми будемо розглядати потоки однорідних подій, тобто такі, що розрізняються тільки моментами появи. Графічно їх зображують у вигляді точок, що означають моменти настання подій, на осі часу (рис. 3.3).

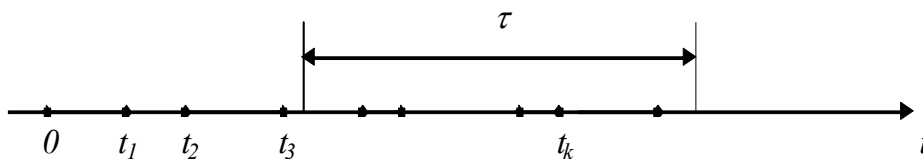


Рис. 3.3. Зображення потоку однорідних подій

Потік називається *регулярним*, якщо події в ньому розділені однаковими проміжками часу. Такі потоки рідко мають місце на практиці. Типовим для реальних ситуацій є випадковий потік.

Уведемо такі визначення:

Потік подій називається *стаціонарним*, коли для будь-якого скінченного числа відрізків часу $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$, що не перекриваються, розподіл вектора

$$X(b_1 + t) - X(a_1 + t), \quad X(b_2 + t) - X(a_2 + t), \dots, \quad X(b_n + t) - X(a_n + t)$$

не залежить від часу t .

Як наслідок отримуємо, що розподіл різниці $X(t + \tau) - X(t)$, для кожного значення $\tau > 0$, збігається з розподілом $X(\tau)$ і не залежить від часу t .

Потік подій називається *потоком без післядії*, коли для будь-яких інтервалів часу, що не перекриваються, число подій, котрі попадають в один з них, не залежить від кількості подій, які потрапляють в інші інтервали.

Потік подій називається *ординарним*, якщо ймовірність попадання в елементарний інтервал Δt двох або більше подій практично неможлива. Дано цій властивості математичне формулювання. Позначимо через $p_1(t, \Delta t)$ ймовірність того, що на ділянку $(t, t + \Delta t)$ потрапить тільки одна подія, $p_0(t, \Delta t)$ – ймовірність того, що на цю ділянку не потрапить жодна з подій, $p_{>1}(t, \Delta t)$ – ймовірність попадання на ділянку $(t, t + \Delta t)$ двох або більше подій. Для ординарного потоку подій, коли $\Delta t \rightarrow 0$, буде виконано таку умову:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{>1}(t, \Delta t)}{\Delta t} = 0.$$

Якщо потік подій має всі три описані вище властивості, то він називається *найпростішим* (або *стаціонарним пуассонівським*).

Найпростіший потік подій відіграє серед інших особливу роль. Відомо, що, підсумовуючи велику кількість незалежних ВВ, у результаті одержуємо випадкову величину, розподілену нормально. Аналогічно, можна довести, що при підсумовуванні (взаємному накладанні) великого числа ординарних, стаціонарних потоків, результатом буде потік, близький до найпростішого.

Таким чином, найпростіші потоки (і близькі до них) дуже часто трапляються в реальних обставинах.

Зобразимо на осі Ot найпростіший потік подій як необмежену послідовність точок (рис. 3.4).

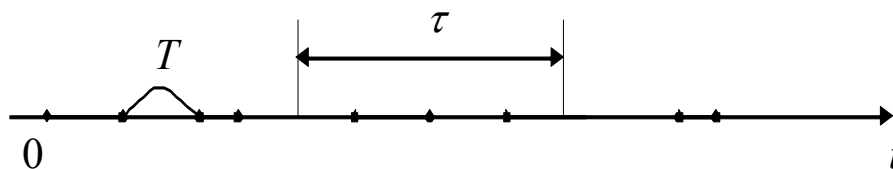


Рис. 3.4. Графічне зображення найпростішого потоку подій

Вивчення найпростішого потоку розпочнемо з обчислення ймовірності появи k подій за проміжок часу тривалістю τ , тобто визначимо функцію $P_k(\tau)$. Зауважимо, що внаслідок стаціонарності потоку розташування відрізка довжиною τ на осі Ot не вплине на результат.

Розглянемо проміжок часу одиничної довжини і позначимо через p ймовірність того, що за цей час не відбудеться жодної події, тобто $p = P_0(1)$.

Розіб'ємо проміжок 1 на n рівних частин довжиною $\frac{1}{n}$, які не перетинаються.

Унаслідок стаціонарності й відсутності післядії буде правильним таке твердження:

$$p = \left(P_0\left(\frac{1}{n}\right) \right)^n,$$

(воно випливає з теореми про імовірність добутку незалежних подій), звідси

$$P_0\left(\frac{1}{n}\right) = p^{\frac{1}{n}}, \quad P_0\left(\frac{k}{n}\right) = p^{\frac{k}{n}},$$

де k – натуральне число.

Нехай $\tau > 0$ – це деяке невід'ємне число. Тоді для кожного натурального n існує натуральне число k , яке задовольняє таку умову: $\frac{k-1}{n} \leq \tau \leq \frac{k}{n}$. Оскільки

$P_0(\tau)$ – незростаюча функція часу (чим довший проміжок часу τ , тим менша ймовірність ненастання жодної події), то

$$P_0\left(\frac{k-1}{n}\right) \leq P_0(\tau) \leq P_0\left(\frac{k}{n}\right) \quad (3.11)$$

тобто

$$p^{\frac{k-1}{n}} \leq P_0(\tau) \leq p^{\frac{k}{n}}.$$

Нехай тепер k і n прямують до нескінченності таким чином, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n} = \tau$. Тоді з огляду на нерівність (3.11) $P_0(\tau) = p^\tau$.

Оскільки величина $P_0(\tau)$ являє собою ймовірність, то вона відповідає умові: $0 \leq P_0(\tau) \leq 1$, тоді можливі такі три випадки: 1) $p = 0$; 2) $p = 1$; 3) $0 < p < 1$.

Перші два випадки загалом для нас нецікаві.

У першому для всіх значень τ ймовірність $P_0(\tau) = 0$ і, отже, ймовірність того, що за проміжок часу будь-якої тривалості відбудеться хоча б одна подія, дорівнює 1. Це означає, що кількість подій нескінченна для всіх інтервалів довжиною τ з імовірністю 1.

У другому випадку $P_0(\tau) = 1$, а значить, події не відбуваються.

Розглянемо третій випадок, у якому задамо, що $p = e^{-\lambda}$, причому $\lambda = \text{const} > 0$ ($\lambda = -\ln p$). Підставивши це значення у вираз: $P_0(\tau) = p^\tau$, отримаємо формулу для обчислення цієї ймовірності.

Отже, використовуючи лише умови стаціонарності та відсутності післядії, ми дійшли такого висновку:

$$P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau}, \quad \forall \tau \geq 0. \quad (3.12)$$

Очевидно, що для всіх значень τ буде правильною така рівність: $P_0(\tau) + P_1(\tau) + P_{>1}(\tau) = 1$. При цьому коли значення τ близьке до нуля, з формули (3.12) випливає рівність: $P_0(\tau) = 1 - \lambda\tau + o(\tau)$ (розклад за формулою Маклорена). Оскільки виконання умови ординарності означає, що $P_{>1}(\tau) = o(\tau)$, то при малих значеннях τ

$$P_1(\tau) = \lambda\tau + o(\tau). \quad (3.13)$$

Перейдемо безпосередньо до виведення формули для обчислення ймовірності $P_k(\tau)$, коли $k \geq 1$. Із цією метою визначимо ймовірність того, що за час $\tau + \Delta\tau$ подія відбудеться k разів. Кількість способів, якими це може бути здійснено, дорівнює $(k+1)$, а саме:

- за інтервал часу τ відбудуться всі k подій, а за проміжок $\Delta\tau$ не відбудеться жодної;
- за проміжок часу τ відбудеться $(k-1)$ подія, а за проміжок $\Delta\tau$ – одна;
-
- за проміжок τ не відбудеться жодної події, а за проміжок $\Delta\tau$ – k подій.

Беручи до уваги умови стаціонарності й відсутності післядії, за формулою повної ймовірності отримаємо таку рівність:

$$P_k(\tau + \Delta\tau) = \sum_{j=0}^k P_j(\tau) P_{k-j}(\Delta\tau).$$

Позначимо, що $R_k = \sum_{j=0}^{k-2} P_j(\tau) P_{k-j}(\Delta\tau)$, і одержимо таку оцінку:

$$R_k \leq \sum_{j=0}^{k-2} P_{k-j}(\Delta\tau) = \sum_{s=2}^k P_s(\Delta\tau) = P_{>1}(\Delta\tau) = o(\Delta\tau)$$

(остання рівність випливає з умови ординарності потоку). Отже,

$$P_k(\tau + \Delta\tau) = P_k(\tau) P_0(\Delta\tau) + P_{k-1}(\tau) P_1(\Delta\tau) + o(\Delta\tau).$$

З урахуванням формули (3.12) і (3.13), для малих значень $\Delta\tau$

$$P_0(\Delta\tau) = e^{-\lambda\Delta\tau} = 1 - \lambda\Delta\tau + o(\Delta\tau),$$

$$P_1(\Delta\tau) = \lambda\Delta\tau + o(\Delta\tau),$$

тому $P_k(\tau + \Delta\tau) = (1 - \lambda\Delta\tau) P_k(\tau) + \lambda\Delta\tau P_{k-1}(\tau) + o(\Delta\tau)$.

Звідси

$$\frac{P_k(\tau + \Delta\tau) - P_k(\tau)}{\Delta\tau} = -\lambda P_k(\tau) + \lambda P_{k-1}(\tau) + o(1).$$

Оскільки, коли $\Delta\tau \rightarrow 0$, то границя правої частини існує, а значить існує і границя лівої частини. Переходячи в останній рівності до границі, одержимо диференціальне рівняння для визначення $P_k(\tau)$:

$$\frac{dP_k(\tau)}{d\tau} = -\lambda P_k(\tau) + \lambda P_{k-1}(\tau). \quad (3.14)$$

Беручи до уваги рівність (3.12) та умови ординарності, отримуємо такі початкові умови:

$$P_0(0) = 1, \quad P_k(0) = 0, \quad k \geq 1. \quad (3.15)$$

У рівняннях (3.14) зробимо заміну шуканих функцій, а саме:

$$P_k(\tau) = e^{-\lambda\tau} u_k(\tau). \quad (3.16)$$

Тоді з рівності (3.12) випливає, що $u_0(\tau) = 1$, а з формул (3.15) отримаємо, що:

$$u_0(0) = 1, \quad u_k(0) = 0, \quad k \geq 1. \quad (3.17)$$

Підставивши вираз (3.16) у формулу (3.14), одержимо систему диференціальних рівнянь для послідовного визначення функцій $u_k(\tau)$, $k \geq 1$, а саме:

$$\frac{du_k(\tau)}{d\tau} = \lambda u_{k-1}(\tau). \quad (3.18)$$

За умови, що $k=1$, звідси отримаємо таке рівняння: $\frac{du_1(\tau)}{d\tau} = \lambda$.

Інтегруючи його з урахуванням початкової умови (3.17), визначимо, що $u_1(\tau) = \lambda\tau$. Продовжуючи аналогічно процес послідовного інтегрування рівнянь

(3.18), для всіх значень $k \geq 1$ вважаємо, що $u_k(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!}$. Звідси, з огляду на

рівність (3.12) та заміну (3.16), остаточно знайдемо ймовірності $P_k(\tau)$ для всіх значень числа $k \geq 0$, а саме:

$$P_k(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau}. \quad (3.19)$$

Співвідношення (3.19) дають змогу стверджувати, що ті три властивості (стаціонарність, відсутність післядії, ординарність), які визначають найпростіший потік, цілком характеризують його структуру з точністю до параметра λ , який може бути будь-яким додатним числом. Два найпростіші потоки можуть відрізнитися один від одного лише значеннями цього параметра.

Для опису будь-якого стаціонарного потоку домовимося позначати через $w(\tau)$ ймовірність того, що за проміжок часу τ відбудеться хоча б одна подія, тобто

$$w(\tau) = 1 - P_0(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(\tau) = P_1(\tau) + P_{>1}(\tau).$$

Стосовно найпростішого потоку з параметром λ ймовірність $P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau}$, отже, коли $\tau \rightarrow 0$ то $w(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau} = 1 - (1 - \lambda\tau + o(\tau)) = \lambda\tau + o(\tau)$, тобто

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{w(\tau)}{\tau} = \lambda. \quad (3.20)$$

Вважатимемо це співвідношення визначенням параметра λ цього потоку. Далі побачимо, що границя (3.20) існує для будь-якого стаціонарного потоку, а визначений співвідношенням (3.20) параметр λ є однією з найважливіших його характеристик.

Повернемося до найпростішого потоку й знайдемо математичне сподівання кількості подій, що відбуваються за проміжок часу τ , а саме:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kP_k(\tau) = e^{-\lambda\tau} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda\tau} \lambda\tau \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda\tau} \lambda\tau e^{\lambda\tau} = \lambda\tau.$$

Ми могли б передбачити цей результат, оскільки відомо, що математичне сподівання випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона, дорівнює параметру цього закону, тобто $\lambda\tau$.

Математичне сподівання кількості подій за одиницю часу називають *інтенсивністю* стаціонарного потоку й позначають через μ , тобто, коли йдеться про найпростіший потік, то $\mu = \lambda$.

Покажемо, що для будь-якого стаціонарного потоку $\mu \geq \lambda$.

Справді, математичне сподівання кількості подій за час τ для стаціонарного потоку $\mu\tau = \sum_{k=1}^{\infty} kP_k(\tau) \geq \sum_{k=1}^{\infty} P_k(\tau) = w(\tau)$, звідси $\mu \geq \frac{w(\tau)}{\tau}$.

Оскільки ліва частина цієї нерівності від часу τ не залежить, то з огляду на співвідношення (3.20) це означає, що $\mu \geq \lambda$, хоча саме існування границі (3.20) для будь-якого стаціонарного потоку ще треба довести (це буде зроблено нижче).

Отже, інтенсивність μ найпростішого потоку дорівнює його параметру λ ; а стосовно довільного стаціонарного потоку можна лише стверджувати, що $\mu \geq \lambda$.

У геометричній інтерпретації це означає, що число точок, які попадають на довільну ділянку довжиною τ осі Ot (рис. 3.4), у випадку, коли потік найпростіший, розподілено відповідно до закону Пуассона, його математичне сподівання $M_\tau = \tau\lambda$, де λ – параметр потоку, а ймовірність того, що за час τ відбудеться саме m подій, обчислюється за такою формулою:

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau}.$$

Важливою характеристикою потоку також є закон розподілу довжини інтервала T між сусідніми подіями: $F(t) = p(T < t)$.

Визначимо цей закон. Запишемо ймовірність протилежної події, тобто

$$p(T > t) = 1 - F(t).$$

Очевидно, що $p(T > t)$ – це ймовірність того, що за час t не настала жодна подія і $p(T > t) = e^{-\lambda t}$.

Отже, $1 - F(t) = e^{-\lambda t}$ або $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Відповідна щільність розподілу $f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

Ця формула описує показниковий закон розподілу, а λ – його параметр. Таким чином, якщо кількість подій на інтервалі часу розподілена згідно із законом Пуассона, то довжина інтервалу між подіями буде розподілена за показниковим законом. Відомо, що характеристики цього закону розподілу визначаються за такими формулами:

$$M_t = M[T] = \frac{1}{\lambda} \quad \text{і} \quad D_t = D[T] = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma_t = \frac{1}{\lambda}.$$

Отже, для показникового закону розподілу характерна така властивість: якщо проміжок часу T , розподілений за цим законом, вже триває деякий час τ , то цей факт ніяк не впливає на закон розподілу тієї частини проміжку, що залишилася, – він буде таким самим, як і закон розподілу всього проміжку T .

Ця властивість, насправді, являє собою, ще одне формулювання властивості відсутності післядії, що є основною ознакою найпростішого потоку.

Доведемо, що відсутність післядії властива показниковому закону розподілу.

Із цією метою розглянемо випадковий проміжок часу T з такою функцією розподілу:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}. \quad (3.21)$$

Припустимо, що цей проміжок вже тривав якийсь час τ , тобто відбулася подія: $T > \tau$. Знайдемо умовний закон розподілу частини проміжку T_1 , що залишилася: $T_1 = T - \tau$, позначивши його таким чином:

$$F^{(\tau)}(t) = P(T - \tau < t | T > \tau).$$

Доведемо, що умовний закон розподілу $F^{(\tau)}(t)$ не залежить від значення τ і дорівнює $F(t)$. Спочатку знайдемо ймовірність добутку двох подій, а саме:

$$P((T > \tau)(T - \tau < t)) = P(T > \tau) \cdot P(T - \tau < t | T > \tau) = P(T > \tau) \cdot F^{(\tau)}(t),$$

звідси

$$F^{(\tau)}(t) = \frac{P((T > \tau)(T - \tau < t))}{P(T > \tau)},$$

але подія $(T > \tau)(T - \tau < t)$ рівносильна події: $\tau < T < t + \tau$, ймовірність якої

$$P(\tau < T < t + \tau) = F(t + \tau) - F(\tau).$$

З іншого боку, $P(T > \tau) = 1 - F(\tau)$, отже,

$$F^{(\tau)}(t) = \frac{F(t + \tau) - F(\tau)}{1 - F(\tau)}. \quad (3.22)$$

Підставимо вираз (3.21) у рівність (3.22), тоді

$$F^{(\tau)}(t) = \frac{1 - e^{-\lambda(t+\tau)} - (1 - e^{-\lambda\tau})}{1 - (1 - e^{-\lambda\tau})} = \frac{e^{-\lambda\tau} - e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda\tau}} = 1 - e^{-\lambda t},$$

що й потрібно було довести.

У такий спосіб ми впевнилися, що коли інтервал часу між подіями розподілений за показниковим законом, то будь-які відомості про його тривалість не впливають на закон розподілу частини проміжку, яка залишилася: він буде також показниковим. На рис. 3.5, 3.6 показано графічні зображення щільності розподілу відповідно до законів $F(t)$ і $F^{(\tau)}(t)$.

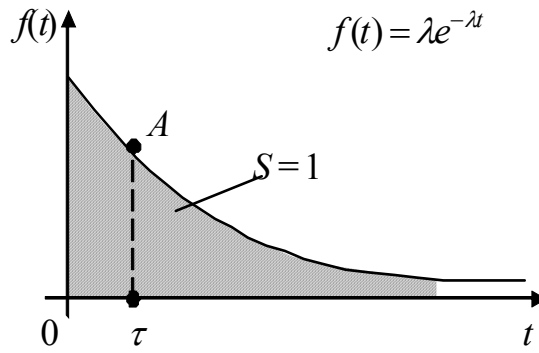


Рис. 3.5. Графік щільності розподілу за показниковим законом $F(t)$

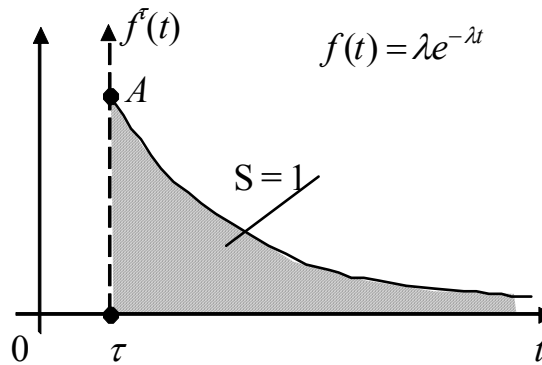


Рис. 3.6. Графік щільності розподілу за показниковим законом $F^{(\tau)}(t)$

Можна довести, що показниковий закон – єдиний, що має таку властивість. Наприклад, у разі рівномірного закону розподілу графіки його щільності мають вигляд, який зображено на рис. 3.7:

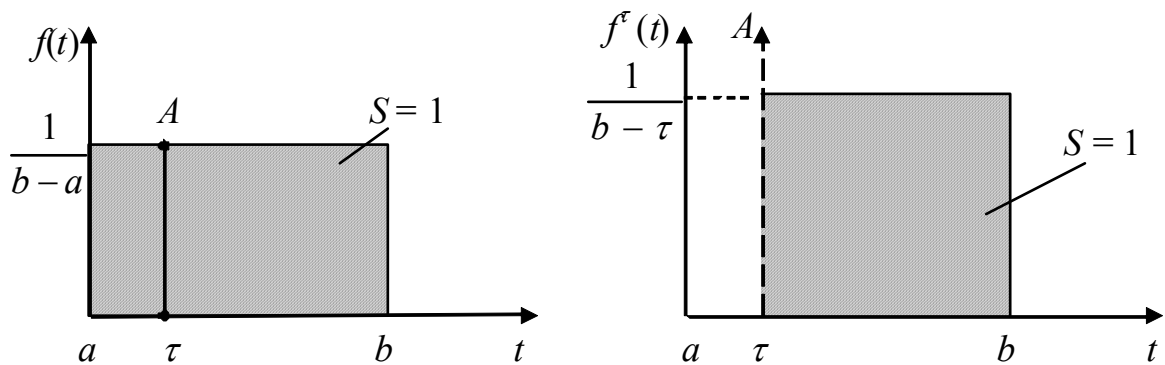


Рис. 3.7. Графіки щільності розподілу $f(t)$ та $f^r(t)$ у разі рівномірного розподілу інтервалів між подіями

Зауважимо, що крім найпростішого (стаціонарного, пуассонівського) існують інші ідеалізації реальних потоків подій. Розглянемо їх більш детально.

1. *Нестационарний пуассонівський потік* має властивості ординарності й відсутності післядії, однак характеризується змінним параметром $\lambda(t)$. У цьому

поточи середнє число подій, що мають місце на проміжку часу τ , залежить не тільки від його довжини, але й від його розташування на осі часу t_0 (рис. 3.8).

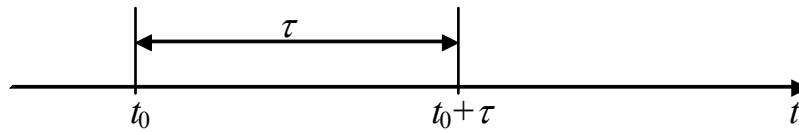


Рис. 3.8. Схематичне зображення проміжку часу τ для нестационарного пуассонівського потоку подій

Кількість подій, які попадають на ділянку часу $[t_0; t_0 + \tau]$, розподілена відповідно до закону Пуассона, тобто

$$P_m(t_0\tau) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \quad (m = 0, 1, 2 \dots),$$

тут $a = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t) dt$.

Знайдемо закон розподілу інтервалу часу T між двома подіями (рис. 3.9): $F(t_0, t) = P(T < t) = 1 - P(T > t)$.

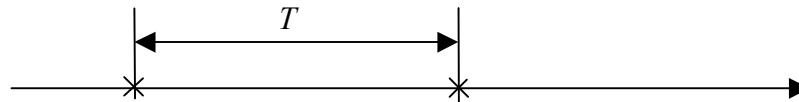


Рис. 3.9. Графічна інтерпретація інтервалу часу між двома подіями

Але $P(T > t)$ – це ймовірність того, що на ділянці $(t_0 \div t)$ не відбудеться жодної події, тому

$$F(t_0, t) = 1 - e^{-a}.$$

Прикладом реальної ситуації, що відповідає описаній моделі, є потік машин у певному районі міста протягом доби. Він має змінну щільність і близький до нестационарного пуассонівського потоку.

2. *Потік Пальма* (потік з обмеженою післядією). Інтервали часу між подіями $T_1, T_2 \dots$ є незалежними випадковими величинами. Найпростіший потік – це окремий випадок потоку Пальма, у ньому $T_1, T_2 \dots$ – незалежні випадкові величини, розподілені за показниковим законом.

3. *Потоки Ерланга*. Вони являють собою, власне, різновид потоку Пальма і характерні обмеженою післядією. Потоки Ерланга утворюються внаслідок «просіювання» найпростішого потоку. Наприклад, якщо з найпростішого потоку вилучити кожен другу подію (кожен другу точку на осі), то решта точок

утворюють потік Ерланга першого порядку E_1 . Очевидно, що E_1 являє собою потік Пальма: оскільки, якщо $T_1, T_2 \dots$ – незалежні ВВ, то будуть незалежними також їхні попарні суми. Потік Ерланга другого порядку E_2 формується тоді, коли в найпростішому потоці зберегти кожну третю точку, а дві проміжні вилучити. Аналогічно потік E_k виходить із найпростішого як збереження в ньому кожної $(k+1)$ -ї точки. За умови, що $k=0$, потік Ерланга стає найпростішим (без післядії), зі збільшенням величини k ефект післядії наростає, і коли $k=\infty$, то потік Ерланга перетворюється в регулярний (інтервали $T_1, T_2 \dots$ – являють собою однакові, тобто не випадкові величини).

§ 3.4. Марковські дискретні процеси із неперервним часом

У § 3.2. було розглянуто марковські дискретні процеси із дискретним часом (марковські ланцюги). У цьому параграфі ми охарактеризуємо процеси зміни станів системи, які можуть відбуватися під дією вхідного потоку подій в будь-який момент часу.

Зручною моделлю подібних процесів є марковський дискретний процес із неперервним часом.

Нагадаємо його математичне визначення.

Нехай $\varphi(t), t \in T \subset R_1$ – n -вимірний випадковий процес, скінченновимірні функції щільності ймовірності $f(x_1, x_2 \dots x_n)$ якого (можливо узагальнені) визначено для всіх $n \geq 1$ й $t_k \in T, k = \overline{1, n}$, причому $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Якщо при цьому умовна щільність імовірності має такий вигляд:

$$f(x_n | x_{n-1}, x_{n-2} \dots x_1) = f(x_n | x_{n-1}), \quad (*)$$

то $\varphi(t), t \in T$ називають марковським процесом.

Інакше кажучи, процес, який відбувається у фізичній системі, називається марковським (або процесом без післядії), якщо стосовно кожного моменту часу ймовірність будь-якого стану системи в майбутньому залежить тільки від стану системи в даний момент і не залежить від того, яким чином система потрапила у цей стан.

Процес зміни станів системи буде марковським тоді, коли потік подій, які викликають зміну станів системи, буде пуассонівським, тобто потоком без післядії, розподіленим за показниковим законом. Покажемо це на прикладі.

Нехай маємо пристрій, який складається з кількох елементів. Ці елементи можуть незалежно один від одного виходити з ладу у випадкові моменти часу, викликаючи відмову роботи всього пристрою. Отже, час безвідмовної роботи кожного елемента являє собою випадкову величину, що розподілена за показниковим законом із параметром λ . Час, необхідний для відновлення роботи пристрою, – це також ВВ, розподілена за показниковим законом із параметром μ .

Таким чином, функціонування системи, являє собою ВП, характерний неперервним часом і скінченною множиною станів, а саме:

X_0 – система працює (справна);

X_1 – система ремонтується (несправна)

Граф станів системи має вигляд, зображений на рис. 3.10.

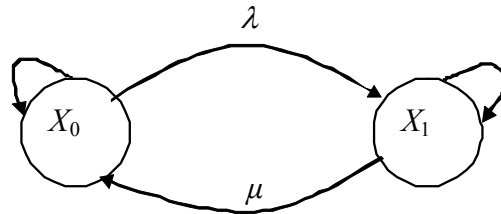


Рис. 3.10. Граф станів системи

Вочевидь, існує два потоки подій: потік відмов, що переводить систему від стану X_0 до стану X_1 з інтенсивністю λ (це середнє число відмов в одиницю часу) і потік відновлень, що переводить систему із стану X_1 в стан X_0 з інтенсивністю μ (середнє число відновлених елементів в одиницю часу).

Даний процес є марковським саме тому, що потоки відмов і відновлень розподілені за показниковим законом, тобто без післядії (цю властивість показникового закону розглянуто в § 3.3). Підтвердимо це міркування.

Нехай у момент часу t_0 система перебуває в стані X_0 (працює). Оскільки час безвідмовної роботи кожного елемента характеризується показниковим розподілом, то момент відмови кожного елемента в майбутньому не залежить від того, скільки часу він уже працював. Отже, ймовірність того, що в майбутньому система залишиться в стані X_0 або змінить його, не залежить від минулого процесу. Припустимо тепер, що в момент t_0 система перебуває в стані X_1 (ремонтуються). Оскільки час ремонту також характеризується показниковим розподілом, то ймовірність його закінчення в будь-який момент після t_0 не залежить від того, коли розпочався ремонт. Отже, процес є марковським.

Очевидно, що показниковий розподіл часу роботи елемента й часу ремонту – це істотні умови, без яких процес не був би марковським.

Наприклад, рівномірний закон розподілу часу безвідмовної роботи системи зумовлює те, що ймовірність відмови елемента залежить від того, скільки часу він вже пропрацював.

Розглянемо методику розрахунку дискретних марковських процесів у системі з неперервним часом.

Нехай маємо випадковий процес, що відбувається в системі, можливі стани якої $X_0, X_1 \dots X_i \dots X_j$. Позначимо через $p_{ij}(t_0, \tau)$ умовну ймовірність того, що в момент: $t = t_0 + \tau$, система перебуватиме в стані X_j , коли в момент t_0 вона перебувала в стані X_i . ВП називається *марковським*, якщо ця ймовірність $p_{ij}(t_0, \tau)$ залежить тільки від i, j, t_0, τ , тобто тільки від того, у якому стані система була в момент t_0 та в який стан вона перейде через час τ .

Таким чином, для опису поведінки системи в класі марковських дискретних процесів із неперервним часом необхідно:

1. Увести поняття стану системи.
2. Визначити всі стани, у яких може перебувати система.
3. Скласти граф станів системи, тобто окреслити шляхи можливих безпосередніх її переходів з одного стану в інший.
4. Для розрахунку перехідних процесів у системі визначити її стан у початковий момент часу.
5. Стосовно кожного можливого переходу на графі показати інтенсивність λ_{ij} потоку подій, що переводять систему зі стану X_i в стан X_j . Ці параметри, як правило, визначаються експериментально.

Виконання більшості практичних завдань ґрунтується на визначенні сукупності ймовірностей $P_j(t)$ того, що процес у момент часу t буде перебувати в стані X_j , $j = \overline{0, n}$. Ці ймовірності визначають шляхом розв'язування системи диференціальних рівнянь [2, § 4.1], які називають рівняннями Колмогорова (на честь академіка О.М. Колмогорова, який запропонував такий метод аналізу марковських дискретних процесів із неперервним часом). Вони мають такий вигляд:

$$P_j'(t) = - \left(\sum_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^n \lambda_{ij} \right) P_j(t) + \sum_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^n P_i(t) \lambda_{ij}, \quad j = \overline{0, n}, \quad (3.23)$$

$$P_0(0) = 1, \quad P_j(0) = 0, \quad j = \overline{0, n}. \quad (3.24)$$

Система (3.23) описує перехідний процес, припускаючи, що початковим станом є нульовий [рівності (3.24)].

Якщо кількість станів системи – n , і від кожного з них можна перейти до будь-якого іншого, то така система буде мати *граничний стаціонарний режим*. Наприклад, системі, яку зображено на рис. 3.11, *а*, властивий стаціонарний режим, а системі на рис. 3.11, *б* – ні.

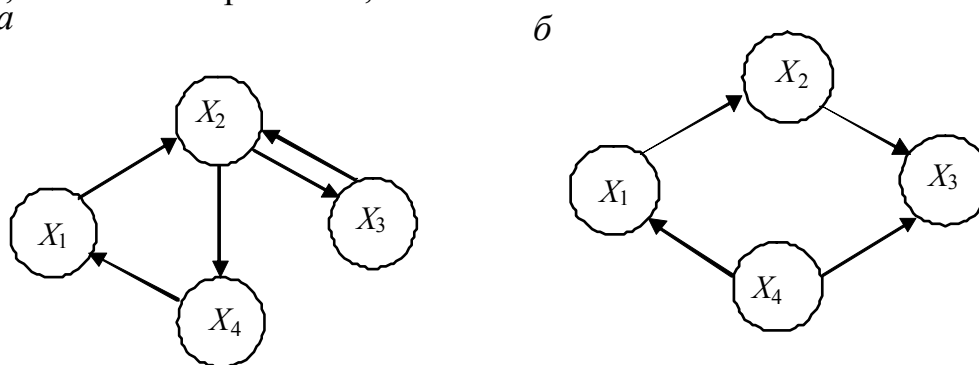


Рис. 3.11. Граф станів системи, якій властивий граничний стаціонарний режим (*а*); граф станів системи, яка не має граничного стаціонарного режиму (*б*)

Із практичного погляду цікавим є визначення ймовірностей станів системи саме в граничному стаціонарному режимі. Для їхнього розрахунку використовується система алгебраїчних рівнянь, що виходить із системи (3.23) шляхом прирівнювання до нуля похідних, а саме:

$$-\left(\sum_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^n \lambda_{ij} \right) P_j + \sum_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^n P_i \lambda_{ij} = 0, \quad j = \overline{0, n}. \quad (3.25)$$

Система (3.25) – лінійно залежна, тому для розв’язування її необхідно доповнити таким рівнянням:

$$\sum_{i=0}^n P_i = 1. \quad (3.26)$$

П р и к л а д 3.6. Два абоненти A і B працюють з одним інформаційним центром. У кожен момент часу центр може обслуговувати тільки одного абонента. Абонент A має більш високий пріоритет, тому, якщо від A приходить заявка, то обслуговування абонента B припиняється до завершення роботи з абонентом A . За таких умов потрібно:

1. Розрахувати ймовірності можливих станів даної системи, коли відомі інтенсивності потоків подій, що переводять систему в сусідні стани.
2. З’ясувати, чи буде система працювати ефективно, коли відомо, що для цього необхідно, аби втрати часу абонента B на очікування становили не більше 50 % часу його обслуговування.
3. Встановити, які параметри і яким чином повинні змінитися, щоб підвищилася ефективність обслуговування абонента B ?

Розв’язування

Уведемо поняття стану системи.

Очевидно, що стан системи визначається станом абонентів A і B . Для абонента A можливі два стани: 0 – відсутність заявки; 1 – обслуговування. Для абонента B можливі три стани: 0 – відсутність заявки; 1 – обслуговування; 2 – очікування обслуговування. Тоді можна визначити такі стани системи:

X_1 – відсутність заявок від абонентів A і B , тобто $(0, 0)$;

X_2 – відсутність заявки від абонента A й обслуговування абонента B – $(0, 1)$;

X_3 – обслуговування абонента A і відсутність заявки від абонента B – $(1, 0)$;

X_4 – обслуговування абонента A й очікування обслуговування абонентом B – $(1, 2)$.

Граф станів системи має вигляд, який зображено на рис. 3.12.

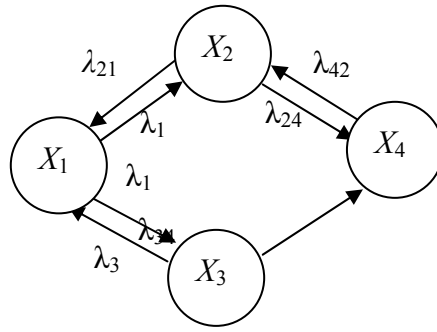


Рис. 3.12. Граф станів системи

Відповідно до формул (3.25) складемо систему алгебраїчних рівнянь для визначення ймовірностей станів P_i , $i = \overline{1,4}$, тобто

$$\begin{cases} -(\lambda_{12} + \lambda_{13})P_1 + \lambda_{21}P_2 + \lambda_{31}P_3 = 0, \\ -(\lambda_{21} + \lambda_{24})P_2 + \lambda_{42}P_4 + \lambda_{12}P_1 = 0, \\ -(\lambda_{31} + \lambda_{34})P_3 + \lambda_{13}P_1 = 0, \\ -\lambda_{42}P_4 + \lambda_{24}P_2 + \lambda_{34}P_3 = 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

Систему рівнянь можна скласти і безпосередньо за графом, користуючись таким правилом: для кожного i -го стану складається одне рівняння, причому значення вихідної інтенсивності λ береться зі знаком мінус і множиться на ймовірність даного стану P_i ; а величини вхідної інтенсивності беруться зі знаком плюс і множаться на ймовірності станів, із яких вони виходять.

Допустимо, що для графа задано такі значення інтенсивності: $\lambda_{12} = \lambda_{13} = 1$; $\lambda_{21} = \lambda_{31} = 0,5$; $\lambda_{34} = 2$; $\lambda_{24} = 3$; $\lambda_{42} = 4$; $\lambda_{21} = \lambda_{31} = 0,5$; $\lambda_{34} = 2$; $\lambda_{24} = 3$; $\lambda_{42} = 4$; тоді система (3.17) набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} -2P_1 + 0,5P_2 + 0,5P_3 = 0, \\ P_1 - 3,5P_2 + 4P_4 = 0, \\ P_1 - 2,5P_3 = 0, \\ 3P_2 + 2P_3 - 4P_4 = 0. \end{cases}$$

Це система лінійно залежних рівнянь, тому одне з рівнянь (не важливо, яке) необхідно замінити умовою (3.26). Замінімо нею перше рівняння системи, а саме:

$$\begin{cases} P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1, \\ P_1 - 3,5P_2 + 4P_4 = 0, \\ P_1 - 2,5P_3 = 0, \\ 3P_2 + 2P_3 - 4P_4 = 0. \end{cases} \quad (3.28)$$

Розв'язуючи систему (3.28), наприклад, методом Гаусса, одержимо такі результати:

$$P_1 = \frac{10}{79}; \quad P_2 = \frac{36}{79}; \quad P_3 = \frac{4}{79}; \quad P_4 = \frac{29}{79}.$$

Відношення часу очікування й часу обслуговування абонента B визначається відношенням імовірностей станів P_4 і P_2 , тобто

$$\frac{P_4}{P_2} = \frac{29}{39}.$$

Оскільки це відношення більше 0,5 (50 %), то можна зробити висновок про неефективність роботи системи.

Щоб зменшити величину відношення $\frac{P_4}{P_2}$, необхідно знизити інтенсивність потоків λ_{21} , λ_{24} , λ_{34} або підвищити інтенсивність потоків λ_{12} і λ_{42} .

П р и к л а д 3.7. В умовах попередньої задачі скласти граф станів для визначення ймовірностей станів системи, якщо з інформаційним центром працює три абоненти A , B , C , а їхні пріоритети мають такий вигляд: $A > B > C$.

Уведемо такі позначення:

- 0 – відсутність заявки,
- 1 – обслуговування,
- 2 – очікування обслуговування.

Тоді можливі стани системи можуть бути описані таким чином:

X_1 – відсутність заявок від абонентів A , B , C – (0, 0, 0);

X_2 – обслуговування абонента A , відсутність заявок від абонентів B , C – (1, 0, 0);

X_3 – обслуговування абонента B , відсутність заявок від абонентів A , C – (0, 1, 0);

X_4 – обслуговування абонента C , відсутність заявок від абонентів A , B – (0, 0, 1);

X_5 – обслуговування абонента A , очікування обслуговування абонентом B , відсутність заявок від абонента C – (1, 2, 0);

X_6 – обслуговування абонента A , відсутність заявок від абонента B , очікування своєї черги абонентом C – (1, 0, 2);

X_7 – відсутність заявок від абонента A , обслуговування B , очікування обслуговування абонентом C – (0, 1, 2);

X_8 – обслуговування абонента A , очікування обслуговування абонентами B, C – (1, 2, 2).

Граф станів системи має вигляд, зображений на рис. 3.13.

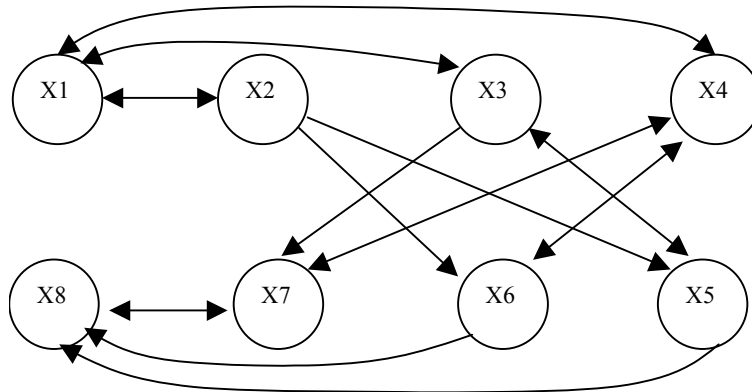


Рис. 3.13. Граф станів системи до прикладу 3.7

§ 3.5. Марковські процеси типу «загибель – розмноження». Рівняння Ерланга

Процеси типу «загибель – розмноження» являють собою окремий випадок дискретних процесів, що характеризуються неперервним часом (їх розглянуто у § 3.4). Такі процеси мають структуру графа станів і переходів, зображену на рис. 3.14.

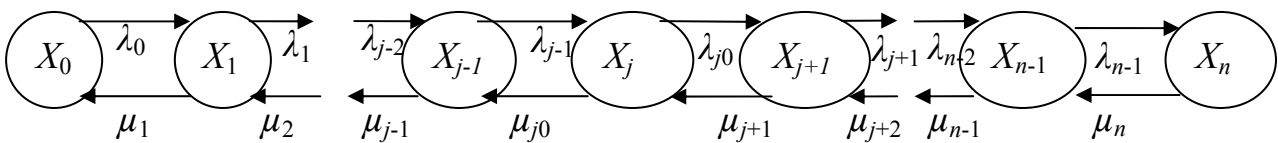


Рис. 3.14. Структура графа переходів, відповідних процесу типу «загибель – розмноження»

Система, зображена на рис. 3.14, має $(n + 1)$ стан X_j , $j = \overline{0, n}$, з них два кінцевих: X_0 й X_n (у загальному випадку крайнього правого стану може й не існувати, тобто $n \rightarrow \infty$). У ній діють дві протилежні тенденції: потік подій λ , що переводить систему в праві сусідні стани, та потік подій μ , що переводить систему в сусідні ліві стани. Наведемо приклади таких потоків.

1. Надходження й витрата грошей у касі.
2. Надходження й витрата матеріалів на складі.
3. Поява та обслуговування клієнтів.
4. Розмноження особин у популяціях та їхня загибель і под.

У загальному випадку інтенсивність потоків λ і μ залежить від стану, в якому перебуває система. Передбачається, що потоки подій λ і μ найпростіші (стаціонарні, без післядії, ординарні) і щільність розподілу часу між подіями підпорядковується показниковому закону, тобто

$$\begin{aligned} f_j(t) &= \lambda_j e^{-\lambda_j t}, \\ g_j(t) &= \mu_j e^{-\mu_j t}, \end{aligned} \quad j = \overline{0, n}. \quad (3.29)$$

Як відомо, у найпростіших потоках імовірність настання за час τ саме m подій визначається за такою формулою:

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau}. \quad (3.30)$$

Завдання полягає у визначенні ймовірностей станів системи $P_j(t)$, $j = \overline{0, n}$, у будь-який моменту часу t .

Оскільки обидва потоки подій λ і μ – найпростіші, то процес, який триває в системі, – марковський.

Визначимо спочатку ймовірність того, що в момент часу $(t + \Delta t)$ система перебуває в стані X_0 . Це може відбутися у двох випадках:

A – у момент t система перебувала в стані X_0 і за час Δt не відбулося жодної події з потоку λ .

B – у момент t система перебувала в стані X_1 і за час Δt відбулася подія з потоку μ , тоді

$$P_0(t + \Delta t) = P(A) + P(B).$$

Згідно з формулою (3.20), $P(A) = P_0(t)e^{-\lambda_0\Delta t} \approx P_0(t)[1 - \lambda_0\Delta t]$.

Тут $P_0(t)$ – імовірність того, що в момент часу t система перебувала в стані X_0 ; $e^{-\lambda_0\Delta t}$ – імовірність того, що за час Δt не відбулося жодної події з потоку λ .

Аналогічно $P(B) = P_1(t)(1 - e^{-\mu_1\Delta t}) \approx P_1(t)\mu_1\Delta t$. При цьому $1 - e^{-\mu_1\Delta t} = \mu_1\Delta t$, це ймовірність того, що за час Δt відбудеться хоча б одна подія з потоку μ , тоді

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)(1 - \lambda_0\Delta t) + \mu_1 P_1(t)\Delta t.$$

Перейдемо в цій рівності до границі, коли $\Delta t \rightarrow 0$, і робимо такий висновок:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t).$$

Тепер знайдемо диференціальне рівняння для визначення будь-якої ймовірності $P_j(t)$, $j = \overline{1, n-1}$, тобто для будь-якого внутрішнього стану системи.

Позначимо такі події: A – система залишиться в стані X_j ; B – система перейде зі стану X_{j-1} в стан X_j протягом часу Δt ; C – система перейде зі стану X_{j+1} у стан X_j протягом періоду Δt .

Вочевидь,

$$P_j(t + \Delta t) = P(A) + P(B) + P(C).$$

Ймовірність того, що жодна подія із потоків λ і μ не відбудеться й система залишиться в стані X_j , можна обчислити таким чином:

$$e^{-\lambda_j \Delta t} e^{-\mu_j \Delta t} = e^{-(\lambda_j + \mu_j) \Delta t} \approx 1 - (\lambda_j + \mu_j) \Delta t.$$

Тепер обчислимо ймовірності настання подій A, B, C :

$$P(A) = P_j(t)[1 - (\lambda_j + \mu_j) \Delta t] \text{ – система залишиться в стані } X_j.$$

$P(B) = P_{j-1}(t) \lambda_{j-1} \Delta t$ – система перейде зі стану X_{j-1} у стан X_j протягом часу Δt .

$P(C) = P_{j+1}(t) \mu_{j+1} \Delta t$ – система перейде зі стану X_{j+1} у стан X_j протягом періоду Δt .

Отже, остаточно отримуємо таку систему рівнянь:

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = \lambda_{j-1} P_{j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) P_j(t) + \mu_{j+1} P_{j+1}(t), \quad j = \overline{1, n-1}.$$

Далі визначимо ймовірність $P_n(t + t\Delta)$, а саме:

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t)(1 - \mu_n \Delta t) + P_{n-1}(t) \lambda_{n-1} \Delta t,$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) - \mu_n P_n(t).$$

Таким чином, маємо систему n рівнянь, яка називається *системою рівнянь Ерланга*. Запишемо її.

$$\begin{cases} \dot{P}_0(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t), \\ \dot{P}_j(t) = \lambda_{j-1} P_{j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) P_j(t) + \mu_{j+1} P_{j+1}(t), & j = \overline{1, n-1}, \\ \dot{P}_n(t) = \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) - \mu_n P_n(t). \end{cases} \quad (3.31)$$

Інтегрування цієї системи, доповненої такою умовою: $\sum_{j=0}^n P_j(t) = 1$, за певних початкових умов (наприклад, $P_0(0) = 1, P_1(0) = \dots = P_n(0) = 0$) визначає перебіг у системі перехідного процесу в часі, тобто ймовірності $P_0(t), P_1(t) \dots P_n(t)$.

Як уже було сказано вище, для багатьох практичних задач більш цікавими є ймовірності станів P_j , $j = \overline{0, n}$, у граничному стаціонарному (сталому) режимі. Ці ймовірності обчислюють, розв'язуючи систему алгебраїчних рівнянь, а саме:

$$\begin{cases} -\lambda_0 P_0 + \mu_1 P_1 = 0, \\ \lambda_{j-1} P_{j-1} - (\lambda_j + \mu_j) P_j + \mu_{j+1} P_{j+1} = 0, & j = \overline{1, n-1}, \\ \lambda_{n-1} P_{n-1} - \mu_n P_n = 0. \end{cases} \quad (3.32)$$

Система (3.32) виходить із системи (3.31), коли прийняти, що $P_j = \text{const}$.

Насамкінець відзначимо, що система (3.32) є лінійно залежною, тому її варто доповнити такою умовою:

$$\sum_{j=0}^n P_j = 1. \quad (3.33)$$

Застосований у даному параграфі підхід до виведення формул Ерланга (3.31), (3.32) для системи типу «загибель – розмноження», може бути використаний і до більш загального випадку, коли структура графа станів довільна. Так, на основі цього підходу отримано систему рівнянь (див. § 3.4) для розрахунку ймовірностей станів у системі з довільною структурою. Методика виведення розрахункових формул аналогічна описаній вище. Істотним тут є марковський характер (відсутність післядії) процесу зміни станів.

П р и к л а д 3.8. АТС має 4 лінії зв'язку. На станцію надходить у середньому 3 виклики за хвилину. Виклик, що надійшов, коли всі лінії були зайняті, одержує відмову й залишає систему. Середня тривалість телефонної розмови $T = 2$ хв. Вважаючи потік викликів найпростішим, а час розмови розподіленим за показниковим законом, визначити ймовірність відмови та ймовірність простою АТС.

Розв'язування

Оскільки потоки подій розглядаються в системі без післядії, то будемо вважати процес зміни станів марковським.

Позначимо можливі стани системи:

X_0 – усі лінії зв'язку вільні,

X_1 – один канал зайнятий,

X_2 – два канали зайняті,

X_3 – три канали зайняті,

X_4 – чотири канали зайняті.

Граф станів даної системи має вигляд, зображений на рис. 3.15.

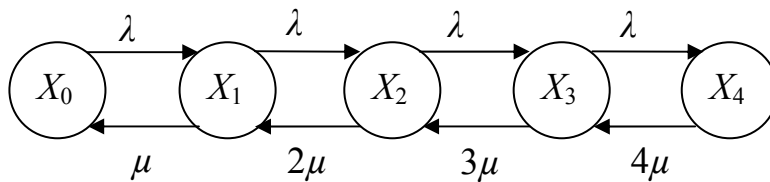


Рис. 3.15. Граф станів системи до прикладу 3.8

Отже, маємо систему типу «загибель – розмноження» (точніше її окремий випадок), коли вхідний потік викликів має сталу інтенсивність, тобто $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda = 3 \text{ хв}^{-1}$, μ – потік звільнення ліній зв'язку, інтенсивність якого змінна, точніше, кратна числу зайнятих каналів у системі, а саме: $\mu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} \text{ хв}^{-1}$ (кількість розмов протягом хвилини на одній лінії). Таким чином, $\mu_1 = \mu$, $\mu_2 = 2\mu$, $\mu_3 = 3\mu$, $\mu_4 = 4\mu$.

Система рівнянь Ерланга (3.33) в цьому окремому випадку має розв'язок такого вигляду:

$$P_k = \frac{\frac{a^k}{k!}}{\sum_{j=0}^n \frac{a^j}{j!}}, \quad k = \overline{0, n}, \quad (3.34)$$
$$a = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Для наших даних $n = 4$; $a = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$.

Імовірність відмови – це ймовірність того, що всі чотири лінії зв'язку зайняті, тобто система перебуває в стані X_4 . Обчислимо її за формулами 3.34.

$$P_4 = \frac{\frac{a^4}{4!}}{\sum_{j=0}^4 \frac{a^j}{j!}} = \frac{\frac{6^4}{24}}{1 + \frac{6^1}{1!} + \frac{6^2}{2!} + \frac{6^3}{3!} + \frac{6^4}{4!}} = 0,47.$$

Тепер розрахуємо ймовірність простою системи, тобто ситуації, коли всі канали вільні, тобто

$$P_0 = \frac{\frac{a^0}{0!}}{\sum_{j=0}^4 \frac{a^j}{j!}} = \frac{1}{1 + \frac{6^1}{1!} + \frac{6^2}{2!} + \frac{6^3}{3!} + \frac{6^4}{4!}} = 0,0087.$$

Таким чином, імовірність відмови в даній системі дорівнює 0,47, а ймовірність її простою становить 0,0087.

П р и к л а д 3.9. У перукарні працює три майстри. У середньому протягом години заклад відвідують 8 клієнтів. Середній час обслуговування клієнта одним майстром $T = 15$ хв. Вважаючи, що потік клієнтів і час їхнього обслуговування підпорядковуються показниковому закону розподілу, а в разі, коли всі майстри зайняті, потенційний клієнт залишає перукарню, розрахувати середнє число зайнятих майстрів.

Розв'язування

Позначимо можливі стани системи:

X_0 – усі майстри вільні,

X_1 – один майстер зайнятий,

X_2 – два майстри зайняті,

X_3 – три майстри зайняті.

Граф станів описаної системи буде мати вигляд, зображений на рис. 3.16.

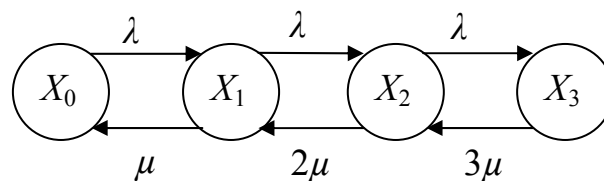


Рис. 3.16. Граф станів системи до прикладу 3.9

Визначимо параметри системи. З умов задачі: $n = 3$, $\lambda = 8$ год⁻¹,
 $\mu = \frac{1}{T}$ год⁻¹ = 4 год⁻¹. Отже, $a = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{8}{4} = 2$.

Середнє число зайнятих майстрів обчислюється за такою формулою:

$$\bar{S} = \sum_{j=0}^n jP_j.$$

Спочатку, використовуючи формули (3.34), знайдемо ймовірності станів системи таким чином:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}} = \frac{1}{6,333} = 0,1579 \text{ – імовірність простою;}$$

$$P_1 = \frac{\frac{a^1}{1!}}{6,333} = \frac{2}{6,333} = 0,3158;$$

$$P_2 = \frac{\frac{a^2}{2!}}{6,333} = \frac{2}{6,333} = 0,3158;$$

$$P_3 = \frac{\frac{a^3}{3!}}{6,333} = \frac{1,333}{6,333} = 0,2105 \text{ – імовірність відмови.}$$

Тепер обчислимо середнє число зайнятих майстрів, а саме:

$$\bar{S} = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_3 = 1 \cdot 0,3158 + 2 \cdot 0,3158 + 3 \cdot 0,2105 = 1,5789.$$

Висновки

Функціонування системи в часі може бути описано як процес послідовної зміни її станів.

Це дозволяє використовувати теорію випадкових процесів у розв'язуванні багатьох практичних задач. Існує ефективний математичний апарат моделювання роботи системи в разі, коли її функціонування можна описати як випадковий процес, характерний дискретною множиною станів.

Функціонування системи, яка відповідає випадковому процесу із дискретними станами і дискретним часом, повністю описується матрицею переходу. У разі, коли система описується як такий процес, її математичною моделлю буде система диференціальних рівнянь.

Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення поняття «ланцюг подій».
2. Яка послідовність подій називається ланцюгом Маркова?
3. Які величини необхідно знати для повного опису ланцюга Маркова?

4. Яким співвідношенням мають відповідати ймовірності переходу системи від одного стану до іншого?
5. Який ланцюг Маркова називається скінченним? Однорідним? Періодичним? Незвідним?
6. Які ВП називаються процесами без післядії?
7. Як можна визначити ймовірність того, що внаслідок n -го випробування система перейде в стан Q_j ?
8. Які випадкові процеси називають марковськими?
9. Опишіть алгоритм побудови моделі системи в класі марковських дискретних процесів, що відбуваються у неперервному часі.
10. Якими характеристиками описується марковський процес?
11. Яким чином формується граф станів марковського процесу?
12. Яким системам властивий граничний стаціонарний режим?
13. За яких умов системам властивий граничний стаціонарний режим?
14. Дайте визначення потоку подій.
15. Який потік подій називають регулярним? Ординарним? Стаціонарним? Найпростішим? Пуассонівським?
16. За яким законом розподілено кількість точок на осі, що попадають в інтервал довжиною τ , коли потік найпростіший?
17. Яким чином визначають ймовірність того, що за час τ відбудеться рівно m подій, коли йдеться про найпростіший потік?
18. Яка властивість є найсуттєвішою для визначення найпростішого потоку?
19. Яка властивість показникового закону розподілу використовується в розрахунках найпростішого потоку подій?
20. Який потік подій називається нестаціонарним пуассонівським? Поток Пальма? Поток Ерланга?
21. Яку структуру має граф випадкового процесу типу «загибель – розмноження»?
22. Наведіть приклади реальних систем, що описуються моделлю ВП типу «загибель – розмноження»?
23. Яким чином визначають інтенсивність потоку подій? Від чого вона залежить?
24. Виведіть формули Ерланга.

Задачі до розділу 3

1. Система може перебувати в одному із шістьох станів. Її перехід з одного стану в інший здійснюється таким чином: на черговому кроці кидають гральний кубик. Коли цифра, яка випала, збігається з номером стану системи, то він збільшується на одиницю; якщо не збігається, то система залишається в тому самому стані. Від шостого стану перехід здійснюється до першого. Скласти матрицю переходів й описати властивості ланцюга Маркова.

Розв'язування

Імовірність того, що система залишиться в будь-якому із можливих станів, буде дорівнювати $\frac{5}{6}$, імовірність переходу в стан з наступним номером становить $\frac{1}{6}$ (оскільки ймовірність того, що на кубіку випаде певна цифра дорівнює $\frac{1}{6}$), а ймовірність переходу в усі інші стани буде дорівнювати 0. Отже, матриця переходів набуває такого вигляду:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

Ланцюг Маркова, описаний даною матрицею, є скінченним (оскільки число станів 6), незвідним (тому що з кожного стану можна дістатися будь-якого іншого), неперіодичним й однорідним (матриця переходу не залежить від номера випробування).

2. Матриця переходів системи має такий вигляд:

$$P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Визначити властивості цього ланцюга Маркова та розрахувати ймовірності станів системи через три кроки, якщо початковим її станом є перший.

Розв'язування

Цей ланцюг скінченний (кількість станів – три), звідний (оскільки із стану 3 не можна перейти в жоден інший), неперіодичний, однорідний (матриця переходу не залежить від номера випробування).

Для однорідного ланцюга вектор імовірностей станів визначається за такою формулою:

$$p(n) = (P^n)' \cdot p(0),$$

де n – кількість кроків; $p(0)$ – вектор початкових станів; $p(n)$ – вектор станів через n кроків; P – матриця переходів.

Виконаємо обчислення, якщо $n = 3$, а вектор початкових станів $p(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

таким чином,

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,098 & 0,135 & 0,767 \\ 0,081 & 0,098 & 0,821 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(P^3)' = \begin{pmatrix} 0,098 & 0,081 & 0 \\ 0,135 & 0,098 & 0 \\ 0,767 & 0,821 & 1 \end{pmatrix},$$

$$p(3) = (P^3)' \cdot p(0) = \begin{pmatrix} 0,098 & 0,081 & 0 \\ 0,135 & 0,098 & 0 \\ 0,767 & 0,821 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,098 \\ 0,135 \\ 0,767 \end{pmatrix}.$$

Отже, ймовірності станів системи через три кроки становлять: першого – $p_1(3) = 0,098$; другого – $p_2(3) = 0,135$ і третього – $p_3(3) = 0,767$.

3. Дано таку матрицю переходів системи:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Знайти граничні ймовірності її станів.

Розв'язування

Вектор граничних станів системи p^∞ існує тоді, коли всі корені характеристичного рівняння: $|\lambda E - P| = 0$, крім одного ($\lambda_k = 1$), за модулем менші від одиниці. Перевіримо цю умову стосовно заданої матриці переходів. Спочатку складемо характеристичне рівняння, а саме:

$$|\lambda E - P| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0,4 - \lambda & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,8 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(0,4 - \lambda)(0,8 - \lambda) - 0,7 \cdot 0,2 \cdot (0,4 - \lambda) - \\ - 0,6 \cdot 0,3 \cdot (0,8 - \lambda) = -\lambda^3 + 1,2\lambda^2 - 0,2 = 0.$$

Корені цього рівняння $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 \approx 0,558$; $\lambda_3 \approx -0,358$.

За цих обставин умова існування граничних імовірностей виконується. Обчислимо їх, скориставшись такою системою рівнянь:

$$\sum_{i=1}^m P_{ij} p_i^\infty = p_j^\infty, \quad j = \overline{1, m},$$

доповнену очевидною умовою: $\sum_{j=1}^m p_j^\infty = 1$.

У даній задачі ця система набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} 0p_1 + 0,6p_2 + 0,2p_3 = p_1, \\ 0,3p_1 + 0,4p_2 + 0p_3 = p_2, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Її розв'язок являє собою граничні ймовірності станів.

Отже, $p_1^\infty = 0,1854$; $p_2^\infty = 0,0556$; $p_3^\infty = 0,759$.

4. Граф станів системи із дискретним числом станів і неперервним часом, має вигляд, зображений на рис. 3.16. На дугах графа проставлено значення інтенсивності переходів λ_{ij} . Необхідно скласти систему рівнянь для визначення ймовірностей зміни станів і розрахувати ймовірності станів системи в граничному стаціонарному режимі.

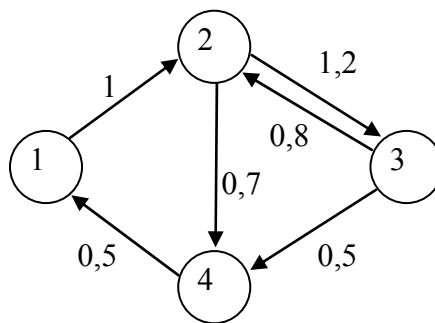


Рис. 3.16. Граф станів системи (до задачі 4)

Розв'язування

У загальному вигляді система рівнянь для розрахунку значень ймовірностей станів $P_j(t)$, $j = \overline{1, n}$, має такий вигляд:

$$\dot{P}_j(t) = -P_j(t) \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \lambda_{ji} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \lambda_{ij} P_i(t), \quad j = \overline{1, n}.$$

Відповідно до умов нашої задачі запишемо її таким чином:

$$\begin{cases} \dot{P}_1(t) = -\lambda_{12}P_1(t) + \lambda_{41}P_4(t), \\ \dot{P}_2(t) = -(\lambda_{23} + \lambda_{24}) \cdot P_2(t) + \lambda_{12}P_1(t) + \lambda_{32}P_3(t), \\ \dot{P}_3(t) = -(\lambda_{32} + \lambda_{34}) \cdot P_3(t) + \lambda_{23}P_2(t), \\ \dot{P}_4(t) = -\lambda_{41}P_4(t) + \lambda_{24}P_2(t) + \lambda_{34}P_3(t). \end{cases}$$

Ця система диференціальних рівнянь, з огляду на початкові умови та з урахуванням того, що $\sum_{j=1}^n p_j(t) = 1$, визначає процес зміни ймовірностей станів системи.

Для їх розрахунку стосовно граничного стаціонарного режиму необхідно в даній системі диференціальних рівнянь прирівняти похідні нулю й замінити одне з рівнянь такою умовою: $\sum_{j=1}^n p_j = 1$, тоді система рівнянь набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} -P_1 + 0,5P_4 = 0, \\ -1,9P_2 + P_1 + 0,8P_3 = 0, \\ -1,3P_3 + 1,2P_2 = 0, \\ P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи її, знайдемо ймовірності станів системи в граничному режимі, тобто

$$P_1 = 0,214794; P_2 = 0,184922; P_3 = 0,170697; P_4 = 0,429587.$$

5. Три рибальських траулери обслуговує одна плавуча база. Середній час плавання траулера становить 2 доби, після чого він прибуває на базу для обслуговування. На базі є один причал, а середній час обслуговування траулера дорівнює 8 годин. Визначити середній час простою бази, вважаючи, що процеси в цій системі марковські.

Розв'язування

Цей об'єкт (база) можна описати як систему масового обслуговування із скінченним числом вимог. Уведемо поняття станів системи:

X_0 – на базі немає жодного траулера (простій);

X_1 – на базі обслуговується один траулер;

X_2 – один траулер обслуговується, а ще один чекає в черзі;

X_3 – один траулер обслуговується, а два очікують у черзі.

Граф станів системи зображено на рис. 3.17:

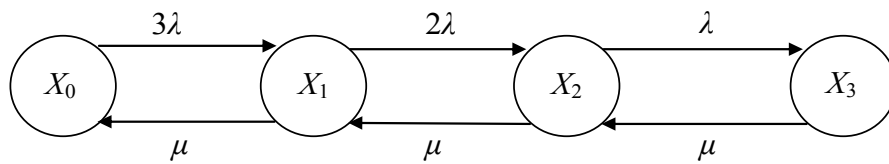


Рис. 3.17. Граф станів системи (до задачі 5)

Визначимо інтенсивність потоку обслуговування μ і потоку обслуговування λ , враховуючи, що вони повинні мати однакову розмірність, а саме:

$$\lambda = 0,5 \text{ доби}^{-1}; \quad \mu = 3 \text{ доби}^{-1}.$$

Граничні ймовірності станів P_j , $j = \overline{0,3}$, обчислимо, розв'язуючи таку систему рівнянь [див. формули (3.22), (3.23)]:

$$\begin{cases} -3\lambda P_0 + \mu P_1 = 0, \\ -(2\lambda + \mu)P_1 + \mu P_2 + 3\lambda P_0 = 0, \\ -(\mu + \lambda)P_2 + \mu P_3 + 2\lambda P_1 = 0, \\ -\mu P_3 + \lambda P_2 = 0, \\ P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1. \end{cases}$$

Перші чотири рівняння – лінійно залежні, тому одне з них вилучаємо. Підставляючи у рівняння значення параметрів λ і μ , отримуємо таку систему:

$$\begin{cases} -1,5P_0 + 3P_1 = 0, \\ -4P_1 + 3P_2 + 1,5P_0 = 0, \\ -3P_3 + 0,5P_2 = 0, \\ P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1. \end{cases}$$

Після її розв'язування отримуємо, що $P_0 \approx 0,59$. Обчислимо середній час простою бази: $24 \text{ год} \cdot 0,59 = 14,16$ години на добу.

6. Клієнти, що звертаються в майстерню побутового обслуговування, створюють найпростіший потік з інтенсивністю λ . Кожного клієнта майстер обслуговує протягом випадкового інтервалу часу, який розподілено за показниковим законом з параметром μ . У разі відсутності вільних майстрів клієнт не чекає, а відмовляється від обслуговування.

Визначити, скільки необхідно мати майстрів, аби ймовірність відмови клієнтові в негайному обслуговуванні не перевищувала 0,016, якщо $\mu = \lambda$.

Розв'язування

Даний об'єкт можна описати як систему масового обслуговування, інтенсивність джерела (кількості звертань клієнтів за одиницю часу) якої не залежить від її стану.

Позначимо через m кількість каналів обслуговування (тобто майстрів). Граф станів системи має вигляд, зображений на рис. 3.18.

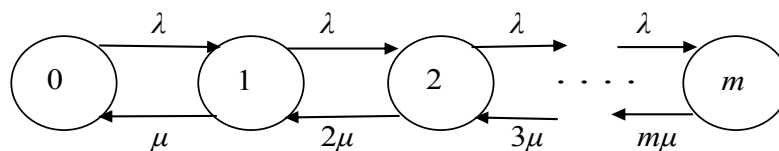


Рис. 3.18. Граф станів системи (до задачі 6)

Ймовірність відмови в обслуговуванні дорівнює ймовірності стану m , тобто P_m . Отже, необхідно знайти таке мінімальне ціле значення числа m , щоб виконувалася умова: $P_m \leq 0,016$. Скористаємося формулою Ерланга, тобто

$$P_m = \frac{\frac{a^m}{m!}}{\sum_{j=0}^m \frac{a^j}{j!}}$$

Тут $a = \lambda / \mu$, а значить, відповідно до умови нашої задачі $a = 1$. Неважко підрахувати, що коли $m = 3$, то

$$P_3 = \frac{\frac{1}{6}}{1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}} = 0,0625 > 0,016,$$

якщо ж $m = 4$, то

$$P_3 = \frac{\frac{1}{24}}{1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}} \approx 0,015385 < 0,016.$$

Отже, в перукарні повинні працювати чотири майстри.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Матриця переходів системи має такий вигляд:

$$P = \begin{vmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Охарактеризуйте цей ланцюг Маркова та визначіть ймовірності станів системи через три кроки, якщо початковим її станом є перший.

2. Матриця переходів системи має такий вигляд:

$$P = \begin{vmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{vmatrix}$$

Визначити властивості цього ланцюга Маркова й розрахувати ймовірності станів системи через три кроки, якщо початковим її станом є третій.

3. Дано таку матрицю переходів системи:

$$P = \begin{vmatrix} 0,7 & 0,3 & 0 \\ 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{vmatrix}$$

Знайти граничні ймовірності її станів.

4. Дано таку матрицю переходів системи:

$$P = \begin{vmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \end{vmatrix}$$

Знайти граничні ймовірності її станів.

5. Граф станів системи має вигляд, зображений на рис. 3.19. На дугах графа проставлено значення інтенсивності переходів λ_{ij} . Необхідно скласти систему рівнянь для обчислення ймовірностей станів системи і знайти ці ймовірності в умовах граничного стаціонарного режиму.

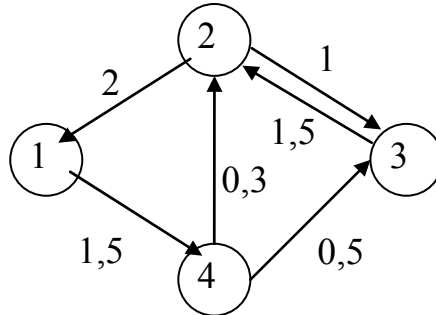


Рис. 3.19. Граф станів системи (до задачі 5)

6. Клієнти, що звертаються в майстерню побутового обслуговування, створюють найпростіший потік з інтенсивністю λ . Кожного клієнта майстер обслуговує протягом випадкового часового інтервалу, який розподілено за показниковим законом з параметром μ . У разі відсутності вільних майстрів клієнт не чекає, а відмовляється від обслуговування. Визначити, скільки необхідно мати майстрів, щоб імовірність відмови клієнтові в негайному обслуговуванні не перевершувала 0,15, за таких умов: а) $\mu = 2\lambda$; б) $\mu = 0,5\lambda$.

Список скорочень

- ВВ – випадкова величина;
ВП – випадковий процес;
ВФ – випадкова функція;
МС – математичне сподівання;
СВП – стаціонарний випадковий процес;
СВФ – стаціонарна випадкова функція.

Список літератури

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М. : Наука, 1964. – 576 с.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М. : Наука, 1973. – 368 с.
3. Волков И.К. Случайные процессы: учеб. для вузов / И.К. Волков, С.М. Зуев, Г.М. Цветкова; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко; М-во образования и науки РФ, Москов. гос. техн. ун-т. им. Н.Э. Баумана. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 448 с.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 2002. – 479 с.
5. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей / Б.В. Гнеденко. – М. : Наука, 1969. – 400 с.
6. Жерновий Ю.В. Марковські моделі масового обслуговування: Тексти лекцій / Ю.В. Жерновий; М-во освіти і науки України, Львів. нац. ун-т. – Л. : ЛНУ ім. Івана Франка, 2004. – 154 с.
7. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / под общей ред. А.А. Свешникова. – М. : Наука, 1965. – 632 с.
8. Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів: навч. посіб. / А.В. Скороход. – К. : Либідь, 1990. – 168 с.

Предметний покажчик

А

Автокореляційна функція 13

Б

Білий шум 59

В

Взаємна кореляційна функція 25

Випадкова функція 4, 6

– стаціонарна 43

Випадковий процес 7

– із дискретним часом 8

– із неперервними станами 8

– із неперервним часом 8

Вільний рух системи 66

Властивість марковська 89

Властивість

– дисперсії випадкової функції 11,12

– кореляційної функції 15

– математичного сподівання ВФ 10

Вхідний сигнал 18

Г

Граничний стаціонарний режим 109

Д

Дискретні процеси

– із неперервним часом 88

– із дискретним часом, 88

Дисперсія випадкової функції 11

Е

Елементарна ВФ 26

Ергодична властивість СВП 45

З

Задача

– аналізу 19

– виміру 20

– ідентифікації, 20

Закон розподілу ВФ одновимірний 8

Змінні стану 87

К

Канонічне розкладання ВФ 30

– кореляційної функції ВФ 30

Коефіцієнти розкладання 28

Координатні функції 28, 31, 51, 62

Кореляційна теорія ВФ 9

Кореляційна функція 13

– нормована 44

Л

Ланцюг 89

– Маркова 89

– незвідний, 92

– періодичний 92

– скінченний 92

– однорідний 90

Лінійна система стаціонарна 65

М

Марковський процес 89, 90

Математичне сподівання ВФ 9

Матриця граничних імовірностей

переходів 95

Н

Неперервні процеси

– з дискретним часом 88

– з неперервним часом 88

Нестаціонарний пуассонівський

потік 105

О

Однорідний ланцюг 90

Оператор 19

– лінійний неоднорідний, 21

– лінійний однорідний 21

П

Потік

- без післядії 98
- Ерланга 106
- марковський 89, 108
- найпростіший 98
- ординарний 98
- Пальма 106
- регулярний 97
- стаціонарний 97
- стаціонарний пуассонівський 98
- подій 97

Примусовий рух системи 66

Процеси типу «загибель –
розмноження» 113

Р

Реакція системи 18

Реалізація випадкової функції 6

Розкладання

– ВФ 28

– спектральне СВП 51

Розріз випадкової функції 7

С

Система рівнянь Ерланга 116

Сім'я реалізацій 6

Спектр процесу 49

Спектральна щільність ВФ 53

Ч

Частотна характеристика системи 67

Навчальне видання

Новицький Ігор Валерійович
Ус Світлана Альбертівна

ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

Навчальний посібник

Редактор О.Н. Ільченко

Підп. до друку 23.05.2014. Формат 30х42/4.
Папір офсет. Ризографія. Ум. друк. арк. 7,1.
Обл.-вид. арк. 9,1. Тираж 300 пр. Зам. №

Підготовлено до друку та видруковано
в Державному вищому навчальному закладі «Національний гірничий
університет».

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004 р.

49005, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19.