МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

Н.П. Уланова
В.В. Приходько

ПРАКТИКУМ З ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Навчальний посібник

Дніпропетровськ
НГУ
2014

УДК 517.3
ББК 22.161.1я73
У 47

Рекомендовано до видання вченою радою ДВНЗ «Національний гірничий університет» (протокол № 9 від 13.11.2014).

Рецензенти: А.В. Павленко, завідувач кафедри вищої математики НМетАУ, д-р фіз.-мат. наук, проф.;
А.П. Дзюба, завідувач кафедри обчислювальної механіки та міцності конструкцій ДНУ, д-р техн. наук, проф.

Уланова Н.П.

У 47 Практикум з інтегрування функцій однієї змінної: навч. посіб. / Н.П. Уланова, В.В. Приходько; М-во освіти і науки України, Нац. гірн. ун-т. – Д.: НГУ, 2014. – 80 с.

Викладено основні методи інтегрування. Матеріал проілюстровано детальним розв’язанням численних прикладів. Наведено розробки аудиторних занять (до прикладів додано відповіді), а також варіанти самостійних робіт.

Запропоновано індивідуальні завдання та зразок виконання типового варіанта.

Рекомендовано студентам, які вивчають відповідний розділ вищої математики.

УДК 517.3
ББК 22.161.1я73

1. МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

1.1. ПОНЯТТЯ ТА ВЛАСТИВОСТІ НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА. ТАБЛИЦЯ ІНТЕГРАЛІВ

Функцію $F(x)$ називають ***первісною*** для даної функції $f(x)$ у проміжку $[a,b]$, якщо для всіх $x \in [a,b]$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$ або, що те ж саме, $dF(x) = f(x)dx$.

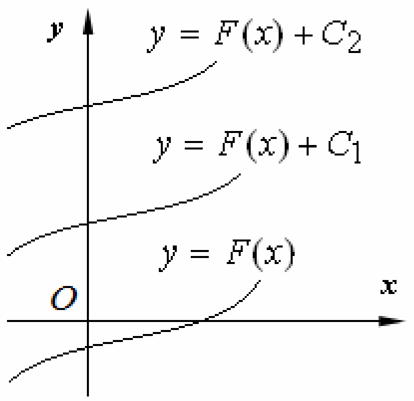
Знаходження первісної для заданої функції зветься ***інтегруванням.***

Приклад. Знайти первісну функції $f(x) = 4x^3$.

Очевидно, що будь-яка функція $x^4 + C$, де C – стала, може слугувати первісною для $4x^3$, оскільки $\left(x^4 + C\right)' = 4x^3$.

Множину всіх первісних $F(x) + C$ функції $f(x)$, де C – довільна стала, називають ***невизначеним інтегралом*** від функції $f(x)$ і позначають $\int f(x)dx$. Тут $\int$ – символ невизначеного інтеграла, $f(x)$ – підінтегральна функція, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз.

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C \quad \Leftrightarrow \quad F'(x) = f(x)}\,.$$



Геометрично невизначений інтеграл являє собою сім'ю кривих $y = F(x) + C$, а дотичні до них, проведені в точках з однаковими абсцисами, паралельні між собою. Усі криві цієї сім'ї звуться ***інтегральними кривими,*** утвореними з кривої $y = F(x)$ шляхом паралельного перенесення вздовж осі Oy (рисунок).

Властивості невизначеного інтеграла

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу: $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

3. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює цій функції плюс довільна стала: $\int dF(x) = F(x) + C$.

4. Постійний множник можна виносити за знак інтеграла, тобто

$$\int A f(x)\,dx = A\int f(x)dx, \text{ де } A = const.$$

5. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від усіх доданків:

$$\int \left(f_1(x) \pm f_2(x) \right) dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx .$$

6. Коли $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)\,dx = \dfrac{1}{a} \cdot F(ax+b) + C$, де $a, b = const$.

7. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, а $u = j\,(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну, то $\int f(u)du = F(u) + C$ (властивість інваріантності формул інтегрування).

Таблиця інтегралів

1. $\int dx = x + C$.

2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \ \ n \neq -1$.

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

5. $\int e^x dx = e^x + C$.

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C; \\ -\dfrac{1}{a} \operatorname{arcctg} \dfrac{x}{a} + C. \end{cases}$

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin \dfrac{x}{a} + C; \\ -\arccos \dfrac{x}{a} + C. \end{cases}$

12. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{x-a}{x+a} \right| + C$.

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$.

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$.

15. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} \right| + C$.

16. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{p}{4} \right) \right| + C$.

17. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$.

18. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$.

19. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.

20. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.

Формули 1 – 20 з таблиці інтегралів правильні для всіх значень змінної x, що належать до областей визначення підінтегральної функції та її первісної.

1.2. МЕТОД БЕЗПОСЕРЕДНЬОГО ІНТЕГРУВАННЯ

Даний метод базується на застосуванні основних властивостей невизначеного інтеграла і формул із таблиці інтегралів.

Приклад. Знайти інтеграли: **1)** $\int\left(4x^3+5\right)dx$. **2)** $\int\left(\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^3}\right)dx$.

3) $\int\sqrt[3]{x^5}dx$. **4)** $\int\frac{3x^4+5x\sqrt[3]{x}-8\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx$. **5)** $\int 6\sin^2\frac{x}{2}dx$.

6) $\int\frac{dx}{9x^2+25}$. **7)** $\int\frac{3^{x+2}+4^{x-1}}{12^x}dx$. **8)** $\int\frac{x^2dx}{x^2-5}$.

9) $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$. **10)** $\int\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$.

Вказівка. Під час запису прикладів тут і надалі всі проміжні викладки будемо розміщувати між фігурними дужками, а, приміром, запис $\overset{ф.1}{=}$ свідчитиме про використання формули 1 із таблиці інтегралів.

Розв'язання

1) $\int\left(4x^3+5\right)dx=4\int x^3dx+5\int dx\overset{ф.2;\,ф.1}{=}4\cdot\frac{x^4}{4}+5x+C=x^4+5x+C$.

2) $\int\left(\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^3}\right)dx=\int\frac{dx}{x^5}+\int\frac{dx}{x^4}+\int\frac{dx}{x^3}=\int x^{-5}dx+\int x^{-4}dx+\int x^{-3}dx\overset{ф.2}{=}$

$=-\frac{1}{4x^4}-\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{2x^2}+C$.

3) $\int\sqrt[3]{x^5}dx\overset{ф.2}{=}\int x^{5/3}dx=\frac{x^{5/3+1}}{5/3+1}+C=\frac{x^{8/3}}{8/3}+C=\frac{3x^{8/3}}{8}+C=\frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8}+C$.

4) Поділимо почленно чисельник на знаменник; у результаті підінтегральна функція розкладеться на доданки, кожен із яких легко проінтегрувати:

$$\int\frac{3x^4+5x\sqrt[3]{x}-8\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx=\int\frac{3x^4+5x^{4/3}-8x^{1/2}}{x^{3/2}}dx=\int\left(3x^{5/2}+5x^{-1/6}-\frac{8}{x}\right)dx=$$

$$=3\int x^{5/2}dx+5\int x^{-1/6}dx-8\int\frac{dx}{x}\overset{ф.\,2;\,ф.3}{=}3\cdot\frac{x^{5/2+1}}{5/2+1}+5\cdot\frac{x^{-1/6+1}}{-1/6+1}-8\ln|x|+C=$$

$$=\frac{6}{7}x^{7/2}+6x^{5/6}-8\ln|x|+C.$$

5) $\int 6\sin^2\frac{x}{2}dx=6\int\frac{1}{2}(1-\cos x)dx=3\int dx-3\int\cos xdx\overset{ф.1;\,ф.6}{=}3x-3\sin x+C$.

6) $\int \frac{dx}{9x^2+25}=\int \frac{dx}{9\left(x^2+\frac{25}{9}\right)}=\frac{1}{9}\int \frac{dx}{x^2+\frac{25}{9}}\overset{ф.10}{=}\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{5}\operatorname{arctg}\frac{3}{5}x+C=$

$=\frac{1}{15}\operatorname{arctg}\frac{3}{5}x+C$.

7) $\int \frac{3^{x+2}+4^{x-1}}{12^x}dx=\int\left(\frac{9\cdot 3^x}{12^x}+\frac{4^x}{4\cdot 12^x}\right)dx=9\int\left(\frac{1}{4}\right)^x dx+\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{3}\right)^x dx\overset{ф.4}{=}$

$=9\cdot\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^x}{\ln\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln\frac{1}{3}}+C=-\frac{9}{4^x\ln 4}-\frac{1}{4\cdot 3^x\ln 3}+C$.

8) Віднімемо й додамо в чисельнику дробу число 5, тоді отримаємо

$\int\frac{x^2dx}{x^2-5}=\int\frac{x^2-5+5}{x^2-5}dx=\int\left(1+\frac{5}{x^2-5}\right)dx=\int dx+5\int\frac{dx}{x^2-(\sqrt{5})^2}\overset{ф.1;\ ф.12}{=}$

$=x+5\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right|+C$.

9) Одиницю в чисельнику подамо у вигляді $1=\sin^2 x+\cos^2 x$:

$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}\overset{ф.8;\ ф.9}{=}$

$=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$.

10) $\int\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx=\int\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)(1+x^2)}}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{(1-x^2)(1+x^2)}}\right)dx=$

$=\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}+\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\overset{ф.13;\ ф.11}{=}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+\arcsin x+C$.

АЗ-1

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int x^5dx$. **2.** $\int 4xdx$. **3.** $\int\frac{dx}{3}$. **4.** $\int\frac{dx}{x^4}$. **5.** $\int(x^3-5x^2+3x)dx$.

6. $\int(x+2)(x-1)dx$. **7.** $\int\frac{dx}{2\sqrt[3]{x}}$. **8.** $\int\sqrt{x}(2\sqrt[3]{x}-1)dx$. **9.** $\int\frac{dx}{5x}$.

10. $\int\frac{(x^2+3x-1)}{x^2}dx$. **11.** $\int\frac{(2+\sqrt{x})^2}{x}dx$. **12.** $\int\frac{x-4}{\sqrt{x}+2}dx$. **13.** $\int 2^x 3^x dx$.

14. $\int 3^{x+4}dx$. **15.** $\int 5^x(5^x+2)dx$. **16.** $\int (7^x+1)(7^{-x}-1)dx$.

17. $\int (5\cos x+\frac{\sin x}{3})dx$. **18.** $\int \frac{6-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$. **19.** $\int \frac{dx}{\cos 2x-\cos^2 x}$.

20. $\int 2\cos^2\frac{x}{2}dx$. **21.** $\int \frac{dx}{x^2+4}$. **22.** $\int \frac{dx}{\sqrt{81-x^2}}$. **23.** $\int \frac{dx}{x^2-5}$.

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$. **25.** $\int \sqrt{\frac{5+x^2}{x^4-25}}dx$. **26.** $\int \frac{x^2-3}{9-x^4}dx$.

Відповіді: **1.** $\frac{x^6}{6}+C$. **2.** $2x^2+C$. **3.** $\frac{x}{3}+C$. **4.** $-\frac{1}{3x^3}+C$.

5. $\frac{x^4}{4}-5\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}+C$. **6.** $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x+C$. **7.** $\frac{3}{4}x^{\frac{2}{3}}+C$. **8.** $\frac{12}{11}x^{\frac{11}{5}}+\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+C$.

9. $\frac{1}{5}\ln|x|+C$. **10.** $x+3\ln|x|+\frac{1}{x}+C$. **11.** $4\ln|x|+8\sqrt{x}+x+C$. **12.** $\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}-2x+C$.

13. $\frac{6^x}{\ln 6}+C$. **14.** $81\frac{3^x}{\ln 3}+C$. **15.** $\frac{25^x}{\ln 25}+2\frac{5^x}{\ln 5}+C$. **16.** $-\frac{7^x}{\ln 7}+\frac{\left(\frac{1}{7}\right)^x}{\ln\frac{1}{7}}+C$.

17. $5\sin x-\frac{1}{3}\cos x+C$. **18.** $6\,\mathrm{tg}\,x-x+C$. **19.** $\mathrm{ctg}\,x+C$. **20.** $x+\sin x+C$.

21. $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+C$. **22.** $\arcsin\frac{x}{9}+C$. **23.** $\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right|+C$.

24. $\ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right|+C$. **25.** $\ln\left|x+\sqrt{x^2-5}\right|+C$. **26.** $-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$.

1.3. ІНТЕГРУВАННЯ ПІДСТАНОВКОЮ

Якщо інтеграл $I=\int f(x)dx$ не вдається обчислити безпосередньо за формулами 1 – 20 таблиці інтегралів, то можна спробувати одразу або за допомогою спеціальних прийомів звести інтегрування заданих функцій до елементарних (табличних) інтегралів. Один із таких прийомів – ***метод підстановки (заміни змінної),*** в основі якого лежить інваріантність формул інтегрування (властивість 7 невизначеного інтеграла).

Введемо нову змінну t, пов’язану з x залежністю

$$t=y\ (x);\qquad x=j\ (t), \tag{1}$$

де функції $j\left(t\right)$ і $y\left(x\right)$ – взаємно обернені, неперервні і мають неперервні похідні у відповідних інтервалах існування змінних x і t.

Заміна змінної у невизначеному інтегралі відбувається за допомогою підстановок двох видів:

1. $\boxed{x = j\left(t\right)}$, де $t-$ нова змінна. У цьому разі отримаємо формулу заміни змінної:

$$\int f(x)dx = \int f(j\left(t\right))\,j'(t)\,dt. \tag{2}$$

Тут функцію $j\left(t\right)$ намагаються вибрати таким чином, щоб права частина формули (2) набувала найбільш зручного для інтегрування вигляду. Після інтегрування слід виконати обернену заміну змінної.

2. $\boxed{t = y\,(x)}$, де $t-$ нова змінна, а формулу заміни

$$\int f(y\,(x))y\,'(x)dx = \int f(t)dt \tag{3}$$

розумітимемо так: коли підінтегральний вираз вдається подати у формі

$$F(x)dx = f(y\,(x))y\,'(x)\,dx,$$

то у вихідному інтегралі можна зробити заміну $t = y\,(x)$; $dt = y\,'(x)dx$, потім проінтегрувати отриманий вираз $f(t)dt$ за змінною t, а в кінці виконати обернену заміну t на $y\,(x)$. Наприклад,

$$\int \cos(kx)kdx = \left\{\begin{matrix} t = kx \\ dt = kdx \end{matrix}\right\} = \int \cos t dt = \sin t + C = \sin(kx) + C.$$

Як видно, унаслідок підстановки $t = kx;\ dt = (kx)'dx = kdx$ інтеграл перетворився на табличний.

Отже, формулу (2) можливо застосовувати справа наліво.

Приклади. Знайти невизначені інтеграли методом підстановки:

1) $\int \cos 3x dx$. **2)** $\int \sqrt{1+\sin x}\cos x dx$. **3)** $\int \frac{10x-3}{5x^2-3x+2}dx$.

4) $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$. **5)** $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$.

Розв'язання. 1) Цей інтеграл буде табличним, якщо під знаком диференціала стоятиме аргумент $3x$ підінтегральної функції $\cos 3x$, а саме: $d(3x) = (3x)'dx = 3dx$. Тобто за допомогою підстановки $3x = t$ заданий інтеграл зведено до табличного:

$$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\int \cos 3x \cdot 3dx = \frac{1}{3}\int \cos t dt \overset{ф.6}{=} \frac{1}{3}\sin t + C.$$

Повернувшись до початкової змінної x, остаточно отримаємо

$$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\sin 3x + C.$$

2) $\int\sqrt{1+\sin x}\cos x dx=\left\{\begin{aligned}&t=1+\sin x\\&dt=(1+\sin x)'dx=\cos x dx\end{aligned}\right\}=\int\sqrt{t}\,dt=\int t^{1/2}dt\overset{ф.2}{=}$

$=\dfrac{2}{3}t^{3/2}+C=\dfrac{2}{3}\sqrt{t^3}+C=\dfrac{2}{3}\sqrt{(1+\sin x)^3}+C$.

3) $\int\dfrac{10x-3}{5x^2-3x+2}dx=\left\{\begin{aligned}&t=5x^2-3x+2\\&dt=(5x^2-3x+2)'dx=(10x-3)dx\end{aligned}\right\}=\int\dfrac{dt}{t}\overset{ф.3}{=}$

$=\ln|t|+C=\ln\left|5x^2-3x+2\right|+C$.

4) $\int\dfrac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\left\{\begin{aligned}&t=\sqrt[3]{x}\\&dt=(\sqrt[3]{x})'dx=(x^{1/3})'dx=\dfrac{1}{3}x^{-2/3}dx=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}dx\end{aligned}\right\}=$

$=3\int\dfrac{\sin\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x^2}}dx=3\int\sin t dt\overset{ф.7}{=}-3\cos t+C=-3\cos\sqrt[3]{x}+C$.

5) $\int\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}=\left\{\begin{aligned}&t=x^2+1\\&dt=(x^2+1)'dx=2xdx\end{aligned}\right\}=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{2xdx}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{dt}{\sqrt{t}}\overset{ф.2}{=}$

$=\dfrac{2\sqrt{t}}{2}+C=\sqrt{x^2+1}+C$.

АЗ-2

У завданнях 1– 35 знайти інтеграли:

1. $\int\sin 7x dx$. **2.** $\int\cos(p\ /3-2x)dx$. **3.** $\int(15x-6)^7dx$. **4.** $\int\sqrt{5x+2}\,dx$.

5. $\int\dfrac{dx}{(1-2x)^5}$. **6.** $\int\dfrac{dx}{\sqrt[3]{8x+7}}$. **7.** $\int\dfrac{dx}{3x+2}$. **8.** $\int e^{5-2x}dx$. **9.** $\int 7^{5x+2}dx$.

10. $\int\dfrac{dx}{4+9x^2}$. **11.** $\int\dfrac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$. **12.** $\int x\sqrt{x^2+5}dx$. **13.** $\int\dfrac{e^x dx}{(e^x-1)^7}$.

14. $\int\dfrac{2x+3}{x^2+3x+1}dx$. **15.** $\int\dfrac{(5+\sqrt{x})^7}{\sqrt{x}}dx$. **16.** $\int\dfrac{dx}{x\ln x}$. **17.** $\int\dfrac{e^{2/x^2}dx}{x^3}$.

18. $\int x^3 7^{2-x^4}dx$. **19.** $\int\sqrt[3]{e^{2x}+3}\;e^{2x}dx$. **20.** $\int\dfrac{2^x dx}{5+2^x}$. **21.** $\int\dfrac{e^{2x}dx}{1-e^{4x}}$.

22. $\int\dfrac{5^x dx}{25^x+1}$. **23.** $\int\cos x\sin^3 x dx$. **24.** $\int\dfrac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$. **25.** $\int\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}dx}{\cos^2 x}$.

26. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\operatorname{ctg}^3 x \sin^2 x}}$. **27.** $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{arctg} x}dx}{1+x^2}$. **28.** $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arcctg} x}$.

29. $\int e^{5\sin x+4}\cos x dx$. **30.** $\int \frac{\sin x dx}{2+\cos^2 x}$. **31.** $\int \frac{\sin(5/x^4)}{x^5}dx$.

32. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x+3}}$. **33.** $\int \frac{x^2dx}{\cos^2 x^3}$. **34.** $\int \frac{e^{-1/x^5}dx}{x^6}$. **35.** $\int \sqrt{1-3\sin 2x}\cos 2x dx$.

Відповіді: **1.** $-\frac{1}{7}\cos 7x + C$. **2.** $-\frac{1}{2}\sin(p/3-2x)+C$. **3.** $\frac{(15x-6)^8}{120}+C$.

4. $\frac{2(5x+2)^{3/2}}{15}+C$. **5.** $\frac{1}{8(1-2x)^4}+C$. **6.** $\frac{3\sqrt[3]{(8x+7)^2}}{16}+C$. **7.** $\frac{1}{3}\ln|3x+2|+C$.

8. $-\frac{1}{2}e^{5-2x}+C$. **9.** $\frac{7^{5x+2}}{5\ln 7}+C$. **10.** $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3x}{2}+C$. **11.** $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{4}+C$.

12. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+5)^3}+C$. **13.** $-\frac{1}{6(e^x-1)^6}+C$. **14.** $\ln\left|x^2+3x+1\right|+C$.

15. $\frac{(5+\sqrt{x})^8}{4}+C$. **16.** $\ln|\ln x|+C$. **17.** $-\frac{1}{4}e^{2/x^2}+C$. **18.** $-\frac{7^{2-x^4}}{4\ln 7}+C$.

19. $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(e^{2x}+3)^4}+C$. **20.** $\frac{\ln(5+2^x)}{\ln 2}+C$. **21.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right|+C$.

22. $\frac{\operatorname{arctg}5^x}{\ln 5}+C$. **23.** $\frac{1}{4}\sin^4 x+C$. **24.** $-3\sqrt[3]{\cos x}+C$. **25.** $\frac{3}{4}\sqrt[3]{\operatorname{tg}^4 x}+C$.

26. $-4\sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}+C$. **27.** $\frac{5}{6}\sqrt[5]{\operatorname{arctg}^6 x}+C$. **28.** $-\ln|\operatorname{arcctg} x|+C$. **29.** $\frac{1}{5}e^{5\sin x+4}+C$.

30. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{\sqrt{2}}+C$. **31.** $\frac{1}{20}\cos(5/x^4)+C$. **32.** $\ln\left|\ln x+\sqrt{\ln^2 x+3}\right|+C$.

33. $\frac{1}{3}\operatorname{tg} x^3+C$. **34.** $\frac{1}{5}e^{-1/x^5}+C$. **35.** $-\frac{1}{9}\sqrt{(1-3\sin 2x)^3}+C$.

Самостійна робота

Знайти невизначені інтеграли:

1. а) $\int \frac{x^2dx}{5+x^3}$; **б)** $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x-7}}$. **2. а)** $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{5+2^x}}$; **б)** $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}$.

3. а) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+2\sin x}}$; **б)** $\int \frac{e^x dx}{9+e^{2x}}$. **4. а)** $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x+3}\, dx}{\cos^2 x}$; **б)** $\int \frac{e^{5x}dx}{e^{10x}-1}$.

1.4. ІНТЕГРУВАННЯ ВИРАЗІВ, ЩО МІСТЯТЬ КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН У ЗНАМЕННИКУ

1.4.1. Інтеграли вигляду $I_1=\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$; $I_2=\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Після виділення повного квадрата з квадратного тричлена ax^2+bx+c інтеграл I_1 зводиться до одного з табличних інтегралів $\int \frac{dt}{t^2+q^2}$ ($ф$.10) або $\int \frac{dt}{t^2-q^2}$ ($ф$.12), а інтеграл I_2 – до $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm q^2}}$ ($ф$.13, 14) чи $\int \frac{dt}{\sqrt{q^2-t^2}}$ ($ф$.11).

Зауваження. Якщо у тричлені старший коефіцієнт $a \neq 1$, то при виділенні повного квадрата цей коефіцієнт виносять за дужки, тобто $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$.

Приклад. Знайти інтеграли: **а)** $\int \frac{dx}{x^2+2x+10}$; **б)** $\int \frac{dx}{x-x^2+2}$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+11}}$; **г)** $\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2-7}}$.

Розв'язання. а) $I=\int \frac{dx}{x^2+2x+10}$.

Виділимо повний квадрат: $x^2+2x+10=(x^2+2x+1)+9=(x+1)^2+9$.

Тоді $I=\int \frac{dx}{(x+1)^2+9}=\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+3^2} \overset{ф.10}{=} \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+C$;

б) $\int \frac{dx}{x-x^2+2}=-\int \frac{dx}{x^2-x-2}=\Big\{x^2-x-2=\left(x^2-x+0,25\right)-0,25-2=$

$=\left(x-0,5\right)^2-2,25=\left(x-0,5\right)^2-\left(1,5\right)^2\Big\}=-\int \frac{d\left(x-0,5\right)}{\left(x-0,5\right)^2-\left(1,5\right)^2} \overset{ф.12}{=}$

$$=-\frac{1}{2\cdot 1,5}\ln\left|\frac{(x-0,5)-1,5}{(x-0,5)+1,5}\right|+C=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+1}{x-2}\right|+C;$$

в) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+11}}=\left\{x^2-6x+11=(x^2-6x+9)+2=(x-3)^2+2\right\}=$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+2}}=\int\frac{d(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2+2}}\overset{\text{ф.13}}{=}\ln\left|(x-3)+\sqrt{(x-3)^2+2}\right|+C=$$

$$=\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+11}\right|+C;$$

г) $\int\frac{dx}{\sqrt{8x-x^2-7}}=\left\{8x-x^2-7=-(x^2-8x+7)=-((x^2-8x+16)-16+7)=\right.$

$$\left.=-((x-4)^2-9)=-(x-4)^2+9=9-(x-4)^2\right\}=\int\frac{d(x-4)}{\sqrt{9-(x-4)^2}}\overset{\text{ф.11}}{=}$$

$$=\arcsin\frac{x-4}{3}+C.$$

1.4.2. Інтеграли вигляду $I_3=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$; $I_4=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

При обчисленні інтегралів I_3, I_4 діють таким чином: при $A\neq 0$ у чисельнику дробу виділяють вираз $2ax+b$, який дорівнює похідній квадратного тричлена. Після цього отриманий інтеграл подають як суму (різницю) двох інтегралів, перший з яких підстановкою $t=ax^2+bx+c$ зводять до табличного (*ф*.3 чи *ф*.2), а другий має вигляд I_1 або I_2 (п. **1.4.1**).

Приклад. Знайти інтеграли: **а)** $\int\frac{(2x-3)}{x^2+8x+25}dx$; **б)** $\int\frac{(3x-1)}{\sqrt{x^2+8x+25}}dx$.

Розв'язання. а) $I=\int\frac{2x+3}{x^2-4x+9}dx$.

Знайдемо похідну знаменника $(x^2-4x+9)'=2x-4$, а тепер виділимо в чисельнику вираз $2x-4$, тобто $2x+3=(2x-4)+7$.

$$I=\int\frac{(2x-4)+7}{x^2-4x+9}dx=\int\frac{(2x-4)\,dx}{x^2-4x+9}+7\int\frac{dx}{x^2-4x+9}=I_1+7I_2.$$

Кожен із інтегралів I_1 та I_2 розглянемо окремо:

$$I_1=\int\frac{(2x-4)dx}{x^2-4x+9}=\int\frac{d(x^2-4x+9)}{x^2-4x+9}\overset{ф.3}{=}\ln\left|x^2-4x+9\right|+C_1.$$

$$I_2=\int\frac{dx}{x^2-4x+9}=\left\{x^2-4x+9=(x^2-4x+4)+5=(x-2)^2+5\right\}=$$

$$=\int\frac{dx}{(x-2)^2+5}=\int\frac{d(x-2)}{(x-2)^2+5}\overset{ф.10}{=}\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{5}}+C_2.$$

Тоді вихідний інтеграл $I=\ln\left|x^2-4x+9\right|+\frac{7}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{5}}+C$;

б) $I=\int\frac{(3x-1)}{\sqrt{x^2+8x+25}}dx$.

Одержимо похідну знаменника $(x^2+8x+25)'=2x+8$, а потім виділимо в чисельнику вираз $2x+8$:

$$3x-1=3\left(x-\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{2}\left(2x-\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{2}\left(2x+8-8-\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{2}\left(\left(2x+8\right)-8\frac{2}{3}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\left(\left(2x+8\right)-\frac{26}{3}\right)=\frac{3}{2}(2x+8)-\frac{3}{2}\cdot\frac{26}{3}=\frac{3}{2}(2x+8)-13.$$

$$I=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+8)-13}{\sqrt{x^2+8x+25}}dx=\frac{3}{2}\int\frac{(2x+8)dx}{\sqrt{x^2+8x+25}}-13\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+25}}=\frac{3}{2}I_1-13I_2.$$

Знайдемо перший і другий інтеграли:

$$I_1=\int\frac{(2x+8)dx}{\sqrt{x^2+8x+25}}=\int\frac{d(x^2+8x+25)}{\sqrt{x^2+8x+25}}\overset{ф.2}{=}2\sqrt{x^2+8x+25}+C_1.$$

$$I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+25}}=\int\frac{d(x+4)}{\sqrt{(x+4)^2+9}}\overset{ф.13}{=}\ln\left|x+4+\sqrt{(x+4)^2+9}\right|+C_2.$$

Остаточно матимемо

$$I=3\sqrt{x^2+8x+25}-13\ln\left|x+4+\sqrt{(x+4)^2+9}\right|+C.$$

1.4.3. Інтеграли вигляду $I_5=\int\frac{dx}{(x-b)\sqrt{ax^2+bx+c}}$

зводять до інтеграла I_2 за допомогою підстановки $x-b=\frac{1}{t}$.

Приклад. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}}$.

Розв'язання

$$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}}=\left\{x=\frac{1}{t};\ dx=-\frac{dt}{t^2}\right\}=-\int\frac{dt}{t^2\cdot\frac{1}{t}\cdot\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}-1}}=$$

$$=-\int\frac{dt}{t\cdot\sqrt{\frac{1-2t-t^2}{t^2}}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{1-2t-t^2}}.$$

Виділимо повний квадрат:

$$1-2t-t^2=-(t^2+2t-1)=-((t^2+2t+1)-2)=-(t+1)^2+2=2-(t+1)^2.$$

$$I=-\int\frac{dt}{\sqrt{2-(t+1)^2}}=-\arcsin\frac{t+1}{\sqrt{2}}+C=-\arcsin\frac{\frac{1}{x}+1}{\sqrt{2}}+C=-\arcsin\frac{1+x}{x\sqrt{2}}+C.$$

АЗ-3

У прикладах 1–11 знайти невизначені інтеграли:

1. $\int\frac{dx}{x^2+10x+29}$. **2.** $\int\frac{dx}{-x^2+4x-3}$. **3.** $\int\frac{dx}{2x^2-4x+5}$. **4.** $\int\frac{dx}{\sqrt{5+2x+x^2}}$.

5. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$. **6.** $\int\frac{dx}{\sqrt{5x-2x^2}}$. **7.** $\int\frac{2^x}{2^{2x}-4\cdot 2^x+3}dx$. **8.** $\int\frac{4x-3}{x^2-2x+6}dx$.

9. $\int\frac{16x+3}{4x^2+4x+5}dx$. **10.** $\int\frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x-2}}dx$. **11.** $\int\frac{2x+3}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$.

Відповіді: **1.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+5}{2}+C$. **2.** $-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|+C$. **3.** $\frac{\operatorname{arctg}\frac{2(x-1)}{\sqrt{6}}}{\sqrt{6}}+C$.

4. $\ln\left|x+1+\sqrt{5+2x+x^2}\right|+C$. **5.** $\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+1}\right|+C$. **6.** $\frac{\arcsin\frac{4x-5}{5}}{\sqrt{2}}+C$.

7. $\frac{1}{2\ln 2}\ln\left|\frac{2^x-3}{2^x-1}\right|+C$. **8.** $2\ln\left|x^2-2x-16\right|+\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{5}}+C$.

9. $2\ln\left|4x^2+4x+5\right|-\frac{5}{4}\operatorname{arctg}\left(x+\frac{1}{2}\right)+C$. **10.** $3\sqrt{x^2+2x-2}-$

$-4\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-2}\right|+C$. **11.** $-2\sqrt{3-2x-x^2}+\arcsin\frac{x+1}{2}+C$.

Самостійна робота

Знайти невизначені інтеграли:

1. а) $\int \frac{2x+5}{x^2-8x-9}dx$; **б)** $\int \frac{3x-5}{\sqrt{x^2+6x+20}}dx$.

2. а) $\int \frac{x-3}{x^2+6x+13}dx$; **б)** $\int \frac{6x-5}{\sqrt{2x^2-12x+15}}dx$.

3. а) $\int \frac{7x+3}{2x^2+4x+9}dx$; **б)** $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$.

1.5. ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

Таким інтегруванням зветься обчислення інтеграла за формулою

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}, \tag{4}$$

де $u = u(x), v = v(x)-$ неперервно диференційовні функції.

За допомогою формули (4) інтеграл $\int u dv$ можна звести до іншого інтеграла $\int v\,du$. Зазначену формулу доцільно використовувати, якщо останній інтеграл простіший за вихідний чи подібний до нього.

У ролі u зазвичай вибирають функцію, що спрощується при диференціюванні, а в ролі $dv-$решту підінтегрального виразу. Інтеграл від dv відомий або ж його легко знайти.

1. В інтегралах

$$\int P(x)\,e^{ax}dx, \qquad \int P(x)\sin axdx, \qquad \int P(x)\cos axdx$$

$P(x)-$ многочлен, $a-$ дійсне число. За u треба брати $P(x)$, а за $dv-$ вираз, що залишився.

2. При обчисленні інтегралів

$$\int P(x)\ln xdx, \qquad \int P(x)\arcsin xdx, \qquad \int P(x)\arccos xdx, \qquad \int P(x)\operatorname{arctg} xdx$$

за u приймають одну з функцій $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$ або $\operatorname{arctg} x$, а за $dv-$ $P(x)dx$.

3. В інтегралах

$$\int a^{kx}\sin bxdx, \qquad \int a^{kx}\cos bxdx,$$

де $a, b, k-$ дійсні числа, формулу (4) застосовують двічі. Після цього відносно шуканого інтеграла утворюється лінійне рівняння, розв’язавши яке і знаходять інтеграл.

Приклад 1. Обчислити інтеграли: **а)** $\int (2x+1)\cos x dx$; **б)** $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$;

в) $\int x^2 e^{3x} dx$; **г)** $\int \operatorname{arctg} x dx$; **д)** $\int e^{-x} \sin x dx$.

Розв'язання. а) Скористаємося методом інтегрування частинами: $u = 2x+1, \quad dv = \cos x dx$. Тоді $du = 2dx, \quad v = \int \cos x dx = \sin x + C$ (можна взяти $C = 0$).

За формулою (4)

$$\int (2x+1)\cos x dx = (2x+1)\sin x - \int \sin x \cdot 2\, dx = (2x+1)\sin x + 2\cos x + C;$$

б) $$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l|l} u = \ln x; & du = dx / x \\ dv = dx / x^2 & v = \int dx / x^2 = -1 / x \end{array} \right\} = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C;$$

в) $$\int x^2 e^{3x} dx = \left\{ \begin{array}{l|l} u = x^2; & du = 2xdx \\ dv = e^{3x}dx & v = \int e^{3x}dx = e^{3x} / 3 \end{array} \right\} = \frac{1}{3}x^2 \cdot e^{3x} - \frac{2}{3}\int x e^{3x} dx. \quad (5)$$

До інтеграла знову застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int x e^{3x} dx = \left\{ \begin{array}{l|l} u_1 = x; & du_1 = dx \\ dv_1 = e^{3x}dx & v_1 = \int e^{3x}dx = e^{3x}/3 \end{array} \right\} = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}.$$

Підставивши отриманий вираз у співвідношення (5), остаточно матимемо

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3}x^2 \cdot e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}\right) + C = \frac{1}{3}x^2 \cdot e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C;$$

г) $$\int \operatorname{arctg} x dx = \left\{ \begin{array}{l|l} u = \operatorname{arctg} x; & du = dx / (1+x^2) \\ dv = dx & v = \int dx = x \end{array} \right\} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C;$$

д) $$I = \int e^{-x} \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l|l} u = e^{-x}; & du = -e^{-x}dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{array} \right\} = -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x dx. \ (6)$$

Останній інтеграл потребує повторного інтегрування частинами:

$$\int e^{-x}\cos x dx = \left\{ \begin{array}{l|l} u_1 = e^{-x}; & du_1 = -e^{-x}dx \\ dv_1 = \cos x dx & v_1 = \sin x \end{array} \right\} = e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\sin x dx.$$

Підстановка отриманого виразу у співвідношення (6) зводить останнє до лінійного рівняння відносно шуканого інтеграла *I*, тобто

$$I = -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x - I,$$

з якого одержимо $I = -\frac{1}{2}e^{-x}\left(\cos x + \sin x\right) + C$.

Іноді при обчисленні інтегралів спочатку краще виконати заміну змінної, а вже потім інтегрувати частинами.

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int \sin\sqrt{x}dx$.

Розв'язання. Спершу застосуємо підстановку $t=\sqrt{x}$, після чого – формулу (4):

$$I=\int \sin\sqrt{x}dx=\left\{\begin{matrix}\sqrt{x}=t;\ x=t^2\\ dx=2t\,dt\end{matrix}\right\}=\int \sin t\cdot 2t\,dt=\left\{\begin{matrix}u=t; & du=dt\\ dv=\sin t dt & v=-\cos t\end{matrix}\right\}=$$

$$=2(-t\cos t+\int \cos t\,dt)=-2t\cos t+2\sin t+C.$$

Повертаючись до змінної x, одержуємо

$$I=\int \sin\sqrt{x}dx=-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+C.$$

АЗ - 4

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int x\sin 5x dx$. **2.** $\int \arcsin x dx$. **3.** $\int (x^2-3x+2)e^{-x}dx$. **4.** $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

5. $\int \frac{xe^x dx}{(x+1)^2}$; *вказівка:* $u=xe^x$. **6.** $\int x^3 e^{-x^2}dx$. **7.** $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx$. **8.** $\int 2^x\cos x dx$.

Відповіді: **1.** $-\frac{x}{5}\cos 5x+\frac{1}{25}\sin 5x+C$. **2.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

3. $-e^{-x}(x^2-x+1)+C$. **4.** $-x\operatorname{ctg}x+\ln|\sin x|+C$. **5.** $\frac{e^x}{x+1}+C$.

6. $-\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}-e^{-x^2}+C$. **7.** $\ln|\ln x|\cdot\ln x-\ln x+C$.

8. $(2^x\sin x+2^x\cos x\ln 2)/(1+\ln^2 2)+C$.

Самостійна робота

Знайти невизначені інтеграли:

1. а) $\int x\cos(3x+2)dx$; **б)** $\int x\operatorname{arctg}x dx$; **в)** $\int \ln(1+x^2)dx$;

г) $\int \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx$; *вказівка:* $u=x^2e^x$.

2. а) $\int xe^{3x}dx$; **б)** $\int x\ln(x-1)dx$; **в)** $\int \cos(\ln x)dx$; **г)** $\int \arcsin\sqrt{x}dx$.

3. а) $\int (x+2)\sin x dx$; **б)** $\int \sqrt{x}\ln x dx$; **в)** $\int e^x\cos 2x dx$; **г)** $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}dx$.

4. а) $\int x\cdot 2^{4x}dx$; **б)** $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$; **в)** $\int (\ln x)^2 dx$; **г)** $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$.

1.6. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ

Дробово-раціональною функцією (***раціональним дробом***) зветься відношення двох многочленів

$$R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0},$$

де $m, n-$ цілі додатні числа; a_i, $b_j\in R$, $i=\overline{0,m}$, $j=\overline{0,n}$.

Якщо $m<n$, то дріб називають ***правильним***, а коли $m\geq n$, – ***неправильним***.

Усякий неправильний раціональний дріб шляхом ділення чисельника на знаменник можна перетворити на суму многочлена і правильного раціонального дробу, а саме:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=H_{m-n}(x)+\frac{R_k(x)}{P_n(x)},$$

де $H_{m-n}(x)-$ ціла частина (многочлен), $R_k(x)-$ остача від ділення, $\dfrac{R_k(x)}{P_n(x)}-$ правильний дріб.

Наприклад, $\dfrac{6x^3+x^2-3x+5}{x+1}-$ неправильний дріб. Поділимо чисельник на знаменник

$$\begin{array}{rl|l}
Q_3(x)= & \;6x^3+x^2-3x+5 & \;x+1 \quad = P_1(x)\\ \cline{3-3}
- & \underline{6x^3+6x^2} & 6x^2-5x+2 \quad = H_2(x)\\
- & \quad -5x^2-3x+5 & \\
 & \quad \underline{-5x^2-5x} & \\
- & \qquad 2x+5 & \\
 & \qquad \underline{2x+2} & \\
 & \qquad\quad 3 \;= R_0(x) &
\end{array}$$

і отримаємо частку $H_2(x)=6x^2-5x+2$ й остачу $R_0(x)=3$. Отже,

$$\frac{6x^3+x^2-3x+5}{x+1}=(6x^2-5x+2)+\frac{3}{x+1}.$$

Таким чином, інтегрування дробово-раціональної функції зводиться до інтегрування многочлена й правильного дробу.

У повному курсі алгебри доведено теорему, де стверджується, що правильний раціональний дріб можна розкласти на суму простих дробів, кожен з яких належить до одного з чотирьох типів:

$$\frac{A}{x-a}\ (I);\qquad \frac{A}{(x-a)^k}\ (II);\qquad \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\ (III);\qquad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\ (IV),$$

де A, a, M, N, p, q – дійсні числа, $k -$ціле додатне число; $p^2-4q<0$, тобто корені квадратного тричлена (x^2+px+q) – комплексні.

Наведені вище дроби завжди можна проінтегрувати:

1. $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx = A\int\frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a|+C.$

2. $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int(x-a)^{-k}d(x-a) = \frac{A}{(x-a)^{k-1}(1-k)}+C.$

3. Методику знаходження інтегралів III типу наведено в п. 1.4.2. У цьому разі в чисельнику дробу виділяють похідну знаменника і розкладають отриманий інтеграл на суму двох інтегралів. Перший із них за допомогою підстановки $u=x^2+px+q$ зводять до інтеграла 3 із таблиці інтегралів, тобто $\displaystyle\int\frac{du}{u}=\ln|u|=\ln\left|x^2+px+q\right|$, а другий (після виділення повного квадрата у знаменнику) – до інтеграла 10: $\displaystyle\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}\quad (a^2=q-p^2/4>0)$.

4. При інтегруванні дробів IV типу з тричлена в знаменнику виділяють повний квадрат $x^2+px+q=\left(x+p/2\right)^2+q-p^2/4$ і виконують заміну $t=x+\dfrac{p}{2}$; $dt=dx$:

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx=\int\frac{M\left(t-p/2\right)+N}{\left(\left(t-p/2\right)^2+p\left(t-p/2\right)+q\right)^k}dt=M\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}+$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k},\ \text{де } a^2=q-\frac{p^2}{4}.$$

Перший інтеграл зведемо до табличного (*ф*. 2):

$$\int\frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^k}=\frac{1}{2}\int\left(t^2+a^2\right)^{-k}d(t^2+a^2)=\frac{1}{2(1-k)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}+C.$$

Знайдемо другий інтеграл:

$$I_k=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}=\frac{1}{a^2}\int\frac{(t^2+a^2)-t^2}{\left(t^2+a^2\right)^k}dt=$$

$$=\frac{1}{a^2}\left(\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}-\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}\right)=\frac{1}{a^2}\left(I_{k-1}-\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}\right).\qquad(7)$$

Останній вираз проінтегруємо частинами:

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2+a^2)^k} = \left\{ \begin{array}{l|l} u = t; & du = dt \\ dv = \dfrac{t\,dt}{(t^2+a^2)^k} & v = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} = \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)} I_{k-1}.$$

Тепер рівність (7) запишемо як

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{a^2}\left(I_{k-1} - \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{1}{2(1-k)} I_{k-1} \right)$$

або ж у вигляді

$$\boxed{I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2} I_{k-1} + \frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}} \right)}. \qquad (8)$$

Це – ***рекурентна формула зниження степеня знаменника***.

Приклад. Знайти інтеграл $I_3 = \int \frac{dt}{(t^2+4)^3}$.

Розв'язання. Тут $a = 2$; $k = 3$. Оскільки $I_1 = \int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{t}{2} + C$, то за формулою (8) $I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+4)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2} I_1 + \frac{t}{2(2-1)(t^2+4)} \right) =$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{t}{2} + \frac{t}{2(t^2+4)} \right) + C = \frac{1}{16}\mathrm{arctg}\frac{t}{2} + \frac{t}{8(t^2+4)} + C;$$

$$I_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4} I_2 + \frac{t}{4(t^2+4)^2} \right) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{64}\mathrm{arctg}\frac{t}{2} + \frac{3}{32}\cdot\frac{t}{t^2+4} + \frac{t}{4(t^2+4)^2} \right) + C.$$

У практичних обчисленнях замість рекурентної формули найчастіше використовують метод, за допомогою якого її виведено.

1.6.1. Розкладання многочленів на множники

Коренем многочлена $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$ називають таке значення x_0 змінної x, при якому многочлен перетворюється на нуль, тобто $P_n(x_0) = 0$.

Теорема 1. Будь-який многочлен із дійсними коефіцієнтами можна розкласти на лінійні та квадратні множники з дійсними коефіцієнтами. У цьому разі многочлен $P_n(x)$ матиме вигляд

$$\boxed{P_n(x)=(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}...(x-x_j)^{k_j}\,(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}...(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}}\,. \quad (9)$$

Тут $x_1,\dots,x_j$ – дійсні корені многочлена $P_n(x)$ із кратностями $k_1,\dots,k_j$ відповідно, а квадратні тричлени $x^2+p_ix+q_i$ $(i=1,2,\dots,m)$ не мають дійсних коренів (дискримінант $D=p_i^{\,2}-4q_i<0$). До того ж у рівності (9) $k_1+\dots+k_j+2(s_1+\dots+s_m)=n$. Корінь x_1 зветься ***простим***, якщо $k_1=1$, і ***кратним***, коли $k_1>1$. Зокрема, якщо квадратний тричлен $P_2(x)=ax^2+bx+c$ має дійсні корені x_1 і x_2, то його можна розкласти на множники:

$$P_2(x)=a(x-x_1)(x-x_2)\,.$$

Приклад 1. Розкласти многочлени на множники:

1) $P_2(x)=4x^2-11x+6$. **2)** $P_2(x)=x^2-2x+5$.

Розв'язання. 1) Знайдемо корені рівняння $4x^2-11x+6=0$. Дискримінант $D=121-4\cdot4\cdot6=25$; $x_1=\dfrac{11+5}{8}=2,\ x_2=\dfrac{11-5}{8}=\dfrac{3}{4}$, тобто

$$4x^2-11x+6=4(x-2)\left(x-3/4\right).$$

2) Дискримінант рівняння $x^2-2x+5=0$ $D=4-4\cdot5=-16<0$ свідчить про відсутність дійсних коренів. Ось чому розкласти многочлен $P_2(x)$ на лінійні множники з дійсними коефіцієнтами неможливо.

Многочлени вищих степенів іноді розкладають на множники безпосередньо (за допомогою групування доданків і винесення спільних множників). А якщо це не вдається, – використовують теорему Безу.

Теорема Безу. Многочлен $P_n(x)$ ділиться без остачі на двочлен $(x-x_0)$ тоді й тільки тоді, коли x_0 – корінь многочлена.

При знаходженні коренів многочлена $P_n(x)$ враховують той факт, що всі цілі корені зведеного алгебраїчного рівняння з цілими коефіцієнтами – дільники його вільного члена. Таким чином, цілі корені многочлена слід шукати серед дільників вільного члена рівняння $P_n(x)=0$.

Приклад 2. Розкласти многочлени на множники:

1) $P_3(x)=x^3+x^2-4x-4$. **2)** $P_3(x)=x^3-2x^2-11x+12$.

Розв'язання

1) $P_3(x)=x^3+x^2-4x-4=x^2(x+1)-4(x+1)=(x+1)(x^2-4)=$
$=(x+1)(x-2)(x+2)$.

2) Цілі корені многочлена $P_3(x)$ можуть зустрічатися лише серед дільників вільного члена 12, тобто поміж чисел $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$. Підставивши $x=1$ в многочлен, маємо $P_3(1)=1-2-11+12=0$, отже, $x=1$ – його корінь. Оскільки за теоремою Безу многочлен $P_3(x)$ повинен ділитися на $(x-1)$ без остачі, то після ділення в частці отримаємо квадратний тричлен:

$$
\begin{array}{r|l}
P_3(x) = x^3-2x^2-11x+12 & x-1 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^3-x^2} & x^2-x-12 \\
-x^2-11x+12 & \\
-\underline{-x^2+x} & \\
-12x+12 & \\
-\underline{-12x+12} & \\
0 &
\end{array}
$$

Таким чином, $P_3(x)=x^3-2x^2-11x+12=(x-1)(x^2-x-12)$. Далі визначимо, що рівняння $x^2-x-12=0$ має дійсні корені $x_1=-3$ і $x_2=4$. Із урахуванням цього вихідний многочлен подамо у вигляді $P_3(x)=(x-1)(x+3)(x-4)$.

1.6.2. Розкладання правильних раціональних дробів на прості дроби

Теорема 2. Будь-який правильний раціональний дріб $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, знаменник якого розкладено на множники за формулою (9), тобто

$$P_n(x)=(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_j)^{k_j}\,(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\ldots(x^2+p_mx+q_m)^{s_m},$$

можна подати як суму простих дробів, причому єдиним способом:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\left(\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}\right)+\left(\frac{B_1}{x-x_2}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+\ldots+\frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\ldots+\frac{C_{s_1}x+D_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_mx+q_m}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_mx+q_m)^2}+\ldots+\frac{M_{s_m}x+N_{s_m}}{(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}}\right).$$

Тут $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, C_1, D_1, \ldots, M_1, N_1, \ldots -$ дійсні коефіцієнти.

Приклад. Скориставшись теоремою 2, розкласти раціональні дроби на суму простих:

1) $\dfrac{x^2-3x+1}{x(x-2)(x+1)}$. **2)** $\dfrac{1}{(x+1)^2(x-3)(x^2+x+5)}$. **3)** $\dfrac{2x-5}{x(x^2+3)^2}$.

Розв'язання. 1) $\dfrac{x^2-3x+1}{x(x-2)(x+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x+1}$.

2) $\dfrac{1}{(x+1)^2(x-3)(x^2+x+5)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}+\dfrac{C}{x-3}+\dfrac{Mx+N}{x^2+x+5}$.

3) $\dfrac{2x-5}{x(x^2+3)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Mx+N}{x^2+3}+\dfrac{Px+S}{(x^2+3)^2}$.

Тут A, B, C, M, N, P, S – поки що не визначені коефіцієнти.

1.6.3. Практичні прийоми розкладання правильного раціонального дробу на суму простих дробів

Метод невизначених коефіцієнтів. Суть методу полягає в наступному. Після розкладання дробу на суму простих дробів потрібно виконати такі дії:

1. Обидві частини рівності помножити на знаменник вихідного дробу.

2. Оскільки рівність отриманих многочленів можлива лише за умови рівності коефіцієнтів при однакових степенях x у лівій і правій частинах цієї рівності, то слід прирівняти зазначені коефіцієнти. У результаті одержимо систему лінійних рівнянь для визначення шуканих чисел $A, B, C, \ldots$

Приклад 1. Подати дріб $\dfrac{x^2+3x-9}{(x+2)(x^2-2x+3)}$ у вигляді суми простих дробів.

Розв'язання. Згідно з теоремою 2 запишемо

$$\frac{x^2+3x-9}{(x+2)(x^2-2x+3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Mx+N}{x^2-2x+3}.$$

Після множення обох частин рівності на вираз $(x+2)(x^2-2x+3)$ матимемо

$$x^2+3x-9=Ax^2-2Ax+3A+Mx^2+Nx+2Mx+2N,$$

тобто

$$x^2+3x-9=x^2(A+M)+x(-2A+N+2M)+3A+2N.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо систему для визначення A, M, N:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+M=1; \\ x & -2A+N+2M=3; \\ x^0 & 3A+2N=-9, \end{array}$$

звідки $A=-1;\ M=2;\ N=-3$.

Таким чином, $\dfrac{x^2+3x-9}{(x+2)(x^2-2x+3)}=\dfrac{-1}{x+2}+\dfrac{2x-3}{x^2-2x+3}$.

Метод надання часткових значень. Іноді при визначенні невідомих коефіцієнтів аргументу x надають конкретних числових значень. Якщо ці значення збігатимуться з дійсними коренями знаменника, то дістанемо кілька рівнянь із одним невідомим.

Приклад 2. Подати дріб $\dfrac{4x^2+13x-12}{x(x-2)(x+3)}$ як суму простих дробів.

Розв'язання. $\dfrac{4x^2+13x-12}{x(x-2)(x+3)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x+3}$;

$$4x^2+13x-12=A(x-2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-2);$$

$$\begin{array}{r|ll} x=0 & -6A=-12; & A=2; \\ x=2 & 10B=30; & B=3; \\ x=-3 & 15C=-15; & C=-1. \end{array}$$

Отже, $\dfrac{4x^2+13x-12}{x(x-2)(x+3)}=\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{1}{x+3}$.

Щоб перевірити правильність розкладання, одержану суму дробів потрібно звести до спільного знаменника. І якщо отримаємо вихідний дріб, то розкладання буде правильним.

1.6.4. Алгоритм інтегрування раціональних дробів

Для знаходження інтеграла від раціонального дробу необхідно:

1) у разі неправильного дробу виділити з нього цілу частину (многочлен) і правильний дріб;

2) розкласти знаменник правильного дробу на множники;

3) подати правильний дріб у вигляді суми простих дробів;

4) проінтегрувати многочлен і отриману суму простих дробів.

Приклад 1. Знайти інтеграл $\displaystyle\int \frac{4x^5+4x^3-2x^2+2x+1}{x^2+1}\,dx$.

Розв'язання. Під знаком інтеграла – неправильний раціональний дріб, тому спочатку виділимо цілу частину, розділивши чисельник на знаменник:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;\begin{array}{l} 4x^5+4x^3-2x^2+2x+1 \\ 4x^5+4x^3 \end{array} & \begin{array}{l} x^2+1 \\ \hline 4x^3-2 \end{array} \\
\hline
-\;\begin{array}{l} -2x^2+2x+1 \\ -2x^2-2 \end{array} & \\
\hline
2x+3 &
\end{array}
$$

Отримаємо $\dfrac{4x^5+4x^3-2x^2+2x+1}{x^2+1}=(4x^3-2)+\dfrac{2x+3}{x^2+1}$.

Тепер проінтегруємо:

$$\int\frac{4x^5+4x^3-2x^2+2x+1}{x^2+1}dx=\int\left(4x^3-2\right)dx+\int\frac{2x+3}{x^2+1}dx=$$

$$=x^4-2x+\ln(x^2+1)+3\operatorname{arctg}x+C.$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\displaystyle\int\frac{2x+7}{(x-1)(x+2)}dx$.

Розв’язання. Подамо підінтегральний дріб у вигляді суми простих дробів. Лінійним множникам $(x-1)$ і $(x+2)$ знаменника відповідають дроби $\dfrac{A}{x-1}$ і $\dfrac{B}{x+2}$. Тобто $\dfrac{2x+7}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}$.

Помножимо обидві частини рівності на спільний знаменник і відкинемо його:

$$2x+7=A(x+2)+B(x-1). \tag{10}$$

Далі знайдемо A і B ***методом невизначених коефіцієнтів***. Запишемо рівність (10) у вигляді

$$2x+7=x(A+B)+2A-B.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{array}{c|l} x & A+B=2; \\ x^0 & 2A-B=7. \end{array}$$

Одержимо $A=3$; $B=-1$. Таким чином, $\dfrac{2x+7}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}$ і

$$\int\frac{2x+7}{(x-1)(x+2)}dx=\int\left(\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=3\ln|x-1|-\ln|x+2|+C.$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\displaystyle\int\frac{x^2+5x+1}{(x+1)(x-2)(x+3)}dx$.

Розв’язання. Підінтегральний дріб запишемо як суму простих дробів:

$$\frac{x^2+5x+1}{(x+1)(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}.$$

Обидві частини рівності помножимо на спільний знаменник і позбудемося його:

$$x^2+5x+1=A(x-2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+C(x+1)(x-2).$$

Для визначення коефіцієнтів A, B і C застосуємо ***метод надання часткових значень.*** Одержана рівність справджується для будь-яких x. Отже, надамо змінній x значень, що збігаються з коренями знаменника дробу:

$$\begin{array}{c|ll} x=-1 & -6A=-3; & A=1/2; \\ x=2 & 15B=15; & B=1; \\ x=-3 & 10C=-5. & C=-1/2. \end{array}$$

Таким чином, $\dfrac{x^2+5x+1}{(x+1)(x-2)(x+3)}=\dfrac{1}{2(x+1)}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{2(x+3)}.$

Тепер заданий інтеграл легко визначити:

$$\int\frac{x^2+5x+1}{(x+1)(x-2)(x+3)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+3}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x+1|+\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln|x+3|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|+\ln|x-2|+C.$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\displaystyle\int\frac{5x-4}{x(x-2)^2}dx$.

Розв’язання. Розкладемо підінтегральний дріб на прості дроби. Лінійному множнику x відповідає дріб $\dfrac{A}{x}$, а множнику $(x-2)^2$ – сума дробів $\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{(x-2)^2}$. Тож правильний раціональний дріб можна подати сумою простих дробів:

$$\frac{5x-4}{x(x-2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}.$$

Позбудемося знаменників:

$$5x-4=A(x-2)^2+Bx(x-2)+Cx.$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів скомбінуємо два методи: надамо x значень коренів знаменника ($x=0$, $x=2$) та прирівняємо коефіцієнти при x^2. У підсумку отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{array}{c|l}
x=0 & 4A=-4; \\
x=2 & 2C=6; \\
x^2 & A+B=0.
\end{array} \qquad \text{Звідси } A=-1; \quad C=3; \quad B=1.$$

Знайдемо інтеграл

$$\int\frac{5x-4}{x(x-2)^2}dx=-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x-2}+3\int\frac{dx}{(x-2)^2}=-\ln x+\ln|x-2|+\frac{3(x-2)^{-1}}{-1}+C.$$

Приклад 5. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{x^3+8}$.

Розв'язання. Спочатку розкладемо підінтегральний дріб на суму простих дробів:

$$\frac{1}{x^3+8}=\frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Mx+N}{x^2-2x+4}=$$

$$=\frac{A(x^2-2x+4)+(Mx+N)(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}.$$

За методом частинних значень визначимо коефіцієнти:

$$\begin{array}{c|ll}
x=-2 & 12A=1; & A=1/12; \\
x=0 & 1/3+2N=1; & N=1/3; \\
x=1 & 1/4+3M+1=1. & M=-1/12.
\end{array}$$

Результат розкладання –

$$\frac{1}{x^3+8}=\frac{1}{12(x+2)}+\frac{1/3-x/12}{x^2-2x+4}=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{x+2}+\frac{4-x}{x^2-2x+4}\right).$$

Тепер шуканий інтеграл перетвориться на суму двох інтегралів:

$$\int\frac{dx}{x^3+8}=\frac{1}{12}\left(\int\frac{dx}{x+2}+\int\frac{4-x}{x^2-2x+4}dx\right)=\frac{1}{12}\left(\ln|x+2|+\int\frac{4-x}{x^2-2x+4}dx\right).$$

Останній інтеграл $I=\int\frac{4-x}{x^2-2x+4}dx$ розглянемо окремо. Одержавши похідну від знаменника $\left(x^2-2x+4\right)'=2x-2$, виділимо в чисельнику очікуваний вираз:

$$4-x=-(x-4)=-\frac{1}{2}(2x-8)=-\frac{1}{2}\left(2x-2-6\right)=-\frac{1}{2}(2x-2)+3.$$

Тоді $I=\int\frac{4-x}{x^2-2x+4}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{(2x-2)\,dx}{x^2-2x+4}+3\int\frac{dx}{x^2-2x+4}=$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-2x+4)}{x^2-2x+4}+3\int\frac{d(x-1)}{(x-1)^2+3}=-\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+4)+\frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}-\ln\sqrt{x^2-2x+4}+C.$$

Остаточно $\int \frac{dx}{x^3+8} = \frac{1}{12}\left(\ln|x+2| + \frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}} - \ln\sqrt{x^2-2x+4} \right) + C =$

$= \frac{1}{12}\ln\frac{|x+2|}{\sqrt{x^2-2x+4}} + \frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C$.

Приклад 6. Знайти інтеграл $\int \frac{x^3+2x-2}{(x^2+2x+3)^2}dx$.

Розв'язання. Оскільки квадратний тричлен x^2+2x+3 не має дійсних коренів (дискримінант $D = 4-4\cdot 3 = -8 < 0$), то підінтегральний дріб розкладемо на множники таким чином:

$$\frac{x^3+2x-2}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+3} + \frac{Cx+D}{(x^2+2x+3)^2}.$$

Звільнившись від знаменника, матимемо

$$x^3+2x-2 = (Ax+B)(x^2+2x+3) + Cx + D;$$

$$x^3+2x-2 = Ax^3 + 2Ax^2 + 3Ax + Bx^2 + 2Bx + 3B + Cx + D$$

або $\quad x^3+2x-2 = Ax^3 + x^2(2A+B) + x(3A+2B+C) + 3B + D$.

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях
$$\begin{array}{c|l} x^3 & A = 1; \\ x^2 & 2A + B = 0; \\ x & 3A + 2B + C = 2; \\ x^0 & 3B + D = -2, \end{array}$$

отримаємо $\quad A = 1; \quad B = -2; \quad C = 3; \quad D = 4$. Після цього

$$\int \frac{x^3+2x-2}{(x^2+2x+3)^2}dx = \int \frac{x-2}{x^2+2x+3}dx + \int \frac{3x+4}{(x^2+2x+3)^2}dx =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-1-2}{(x^2+2x+1)-1+3}dx + \int \frac{\frac{3}{2}(2x+2-2)+4}{(x^2+2x+3)^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+3\right| - \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+3} + \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}. \qquad (11)$$

Останній інтеграл знайдемо, скориставшись рекурентною формулою (8):

$$I = \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{dx}{((x+1)^2+2)^2} = \begin{Bmatrix} t = x+1 \\ dt = dx \end{Bmatrix} = \int \frac{dt}{(t^2+2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(t^2+2)-t^2}{(t^2+2)^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2dt}{(t^2+2)^2}.$$

Тепер проінтегруємо частинами:

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2+2)^2} = \left\{ \begin{aligned} & u = t; && du = dt \\ & dv = \frac{t\,dt}{(t^2+2)^2} && v = \int \frac{t\,dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+2)}{(t^2+2)^2} = -\frac{1}{2(t^2+2)} \end{aligned} \right\} =$$

$$= -\frac{t}{2(t^2+2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} = -\frac{t}{2(t^2+2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} = -\frac{t}{2(t^2+2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= -\frac{x+1}{2((x+1)^2+2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

Отже,

$$I = \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{x+1}{4((x+1)^2+2)} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{x+1}{4((x+1)^2+2)} + C.$$

Повертаючись до (11), матимемо

$$\int \frac{x^3+2x-2}{(x^2+2x+3)^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+3\right| - \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+3} +$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{x+1}{4((x+1)^2+2)} + C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+3\right| - \frac{11}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} +$$

$$+\frac{x-5}{4(x^2+2x+3)} + C.$$

Зауваження. При знаходженні інтегралів типу $\int \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}dx$ слід наскільки можливо уникати трудомісткого процесу розкладання раціональних дробів (приклади – далі).

Приклад 7. Знайти інтеграли: **1)** $\int \frac{x}{x^4-1}dx$. **2)** $\int \frac{dx}{x^4-1}$. **3)** $\int \frac{x^2}{x^4-1}dx$.

Розв'язання. 1) $\int \frac{x}{x^4-1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2)^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| + C$.

2) $\int \frac{dx}{x^4-1} = \left\{ \frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+1}\right) \right\} =$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{dx}{x^2-1} - \int \frac{dx}{x^2+1}\right) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + C.$$

3) $\int \frac{x^2}{x^4-1}dx = \int \frac{(x^2-1)+1}{x^4-1}dx = \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^4-1} = \{\text{з урахуванням } \mathbf{2)}\} =$

$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$.

АЗ-5

Знайти інтеграли від раціональних дробів:

1. $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$. **2.** $\int \frac{x^3+2}{x^3-4x}dx$. **3.** $\int \frac{x^2-3}{x^3-2x^2-x+2}dx$.

4. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$. **5.** $\int \frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2}dx$. **6.** $\int \frac{x}{x^3-1}dx$.

7. $\int \frac{x}{x^3-3x+2}dx$. **8.** $\int \frac{x-5}{x^3-3x^2+4}dx$. **9.** $\int \frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)}dx$.

10. $\int \frac{1}{x(x^2+2)}dx$. **11.** $\int \frac{2x^3-18x+1}{(x^2+4x+5)^2}dx$. **12.** $\int \frac{x}{(x+1)(x^2+1)^2}dx$.

Відповіді: 1. $\ln|(x-2)(x+5)|+C$. **2.** $x-\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{3}{4}\ln|x+2|+\frac{5}{4}\ln|x-2|+C$.

3. $-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\ln|x-1|+\frac{1}{3}\ln|x-2|+C$. **4.** $x+\frac{1}{x}+2\ln|x-1|-\ln|x|+C$.

5. $\frac{8}{49(x-5)}-\frac{27}{49(x+2)}+\frac{30}{343}\ln\left|\frac{x-5}{x+2}\right|+C.$ **6.** $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

7. $-\frac{1}{3(x-1)}+\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C$. **8.** $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{3}\ln|x-2|-\frac{2}{3}\ln|x+1|+C$.

9. $\ln\left|\frac{x}{1+x}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1+2x}{\sqrt{3}}+C$. **10.** $\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{4}\ln(x^2+2)+C$.

11. $\ln|x^2+4x+5|+\frac{33x+62}{2(x^2+4x+5)}+\frac{9}{2}\operatorname{arctg}(x+2)+C$.

12. $\frac{x-1}{4(x^2+1)}-\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{8}\ln(1+x^2)+C$.

Самостійна робота

Знайти інтеграли від раціональних дробів:

1. а) $\int \frac{dx}{(x+2)(x+7)}$; **б)** $\int \frac{x\,dx}{(x+4)(x^2+1)}$.

2. а) $\int \frac{dx}{(x-3)(x+5)}$; **б)** $\int \frac{(x+3)dx}{(x-1)(x^2+9)}$.

3. а) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+6)}$; **б)** $\int \frac{(x+1)dx}{x(x^2+16)}$.

4. а) $\int \frac{dx}{(x+5)(x+3)}$; **б)** $\int \frac{(x+5)dx}{(x-2)(x^2+1)}$.

1.7. ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

1.7.1. Інтеграли вигляду $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

Функцію зі змінними $\sin x$ і $\cos x$, над якими виконують додавання, віднімання, множення і ділення (так звані раціональні дії), називають ***раціональною*** і позначають $R(\sin x, \cos x)$.

Невизначені інтеграли $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ зводять до інтегралів від раціональних алгебраїчних дробів за допомогою ***універсальної тригонометричної підстановки***

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t}\,.$$

При цьому $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $x = 2\operatorname{arctg} t$; $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Отже, $\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int R(t)\,dt$. Зокрема, за допомогою цієї підстановки зручно обчислювати такі інтеграли, як $\int \frac{dx}{a\cdot\cos x + b\cdot\sin x}$ $(a, b = const)$.

Приклади. Знайти інтеграли: **1)** $\int \frac{dx}{4-3\cos x}$. **2)** $\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x - 1}$.

Розв'язання

1) $$\int\frac{dx}{4-3\cos x}=\left\{\begin{array}{ll}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t; & x=2\operatorname{arctg}t\\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}; & dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right\}=\int\frac{1}{4-3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=$$

$$=2\int\frac{dt}{4+4t^2-3+3t^2}=2\int\frac{dt}{7t^2+1}=\frac{2}{7}\int\frac{dt}{t^2+\frac{1}{7}}=\frac{2}{7}\cdot\sqrt{7}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{7}t\right)+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{7}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

2) $$\int\frac{dx}{\cos x+2\sin x-1}=\left\{\begin{array}{lll}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t; & \sin x=\frac{2t}{1+t^2}; & x=2\operatorname{arctg}t\\ & \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}; & dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right\}=-\int\frac{dt}{(t-1)^2-1}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(t-1)-1}{(t-1)+1}\right|+C=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}\right|+C.$$

Зауваження. Оскільки універсальна підстановка нерідко потребує складних обчислень, то залежно від властивостей підінтегральної функції доцільне використання й інших підстановок (див. нижче).

1.7.2. Інтеграли вигляду $\int\sin^m x\cdot\cos^n x dx$

Вирізняють два випадки.

I. Якщо показники m і n – парні, то степені синуса й косинуса знижують за допомогою формул:

$$\boxed{\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x);\quad \sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x);\quad \sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x}.\qquad (12)$$

Приклади. Знайти інтеграли:

1) $\int\cos^2 xdx$. **2)** $\int\sin^2 3x\cos^2 3xdx$. **3)** $\int\cos^4 2{,}5xdx$.

Розв'язання. 1) $$\int\cos^2 xdx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int dx+\int\cos 2xdx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)+C=\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C.$$

2) $\int \sin^2 3x \cdot \cos^2 3x dx = \frac{1}{4}\int 4\sin^2 3x \cdot \cos^2 3x dx =$

$= \frac{1}{4}\int (2\sin 3x \cdot \cos 3x)^2 dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 6x dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 12x)\, dx =$

$= \frac{1}{8}\left(\int dx - \int \cos 12x dx\right) = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{12}\sin 12x\right) + C = \frac{x}{8} - \frac{\sin 12x}{96} + C$.

3) $\int \cos^4 2{,}5x dx = \int \left(\cos^2 2{,}5x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1+\cos 5x}{2}\right)^2 dx =$

$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 5x + \cos^2 5x)\, dx = \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 5x + \frac{1+\cos 10x}{2}\right) dx =$

$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} + 2\cos 5x + \frac{1}{2}\cos 10x\right) dx = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x + \frac{2}{5}\sin 5x + \frac{1}{20}\sin 10x\right) + C =$

$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{80}\sin 10x + C$.

II. Коли хоча б один із показників m, n – непарний, використовують описаний далі метод. Від непарного степеня відокремлюють один множник і приєднують до dx, утворюючи добуток $\cos x dx = d(\sin x)$ або $\sin x dx = -\,d(\cos x)$. Після цього застосовують підстановки: у першому випадку $t = \sin x$, а в другому – $t = \cos x$.

Приклади. Знайти інтеграли: **1)** $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$. **2)** $\int \cos^5 4x \cdot \sin^3 4x dx$.

Розв'язання. 1) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cdot \cos x dx =$

$= \left\{ t = \sin x; \quad dt = \cos x dx; \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2 \right\} =$

$= \int t^2 (1-t^2)\, dt = \int (t^2 - t^4)\, dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$.

2) $\int \cos^5 4x \sin^2 4x \cdot \sin 4x dx = \Big\{ t = \cos 4x; \quad dt = -4\sin 4x dx;$

$\sin^2 4x = 1 - \cos^2 4x = 1 - t^2 \Big\} = -\frac{1}{4}\int t^5 (1-t^2) dt =$

$= \frac{1}{4}\int (t^7 - t^5) dt = \frac{1}{4}\left(\frac{t^8}{8} - \frac{t^6}{6}\right) + C = \frac{\cos^8 4x}{32} - \frac{\cos^6 4x}{24} + C$.

1.7.3. Інтеграли вигляду $\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x}dx$; $\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}dx$ (показник n – парний)

Розглянемо два випадки.

I. Якщо показник m – також парний, застосовують одну з наведених підстановок:

$$\boxed{\begin{array}{ll} t=\operatorname{tg}x; & \cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2} \\ dt=\dfrac{dx}{\cos^2 x}; & \sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2} \end{array}} \quad \text{або} \quad \boxed{\begin{array}{ll} t=\operatorname{ctg}x; & \sin^2 x=\dfrac{1}{1+t^2} \\ dt=-\dfrac{dx}{\sin^2 x}; & \cos^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2} \end{array}}. \qquad (13)$$

Приклад. Знайти інтеграл: $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}dx$.

Розв'язання. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}dx=\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\cdot\frac{dx}{\sin^2 x}=\int \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x}\cdot\frac{dx}{\sin^2 x}=$

$$=\left\{t=\operatorname{ctg}x;\quad dt=-\frac{dx}{\sin^2 x};\quad \sin^2 x=\frac{1}{1+t^2}\right\}=-\int \frac{t^2(t^2+1)}{t^2}dt=$$

$$=-\int (t^2+1)dx=-\left(\frac{t^3}{3}+t+C\right)=-\left(\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}+\operatorname{ctg}x\right)+C.$$

II. Якщо показник m – непарний (п. 1.7.2, випадок II), доречний метод відокремлення множника від непарного степеня.

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$.

Розв'язання. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx=\int \frac{\sin^2 x\cdot \sin x dx}{\cos^4 x}=$

$$=\left\{t=\cos x;\quad dt=-\sin x dx;\quad \sin^2 x=1-\cos^2 x=1-t^2\right\}=$$

$$=-\int t^{-4}dt+\int t^{-2}dt=-\frac{t^{-3}}{-3}+\frac{t^{-1}}{-1}=\frac{1}{3t^3}-\frac{1}{t}+C=\frac{1}{3\sin^3 x}-\frac{1}{\sin x}+C.$$

Зауваження. Якщо інтеграл має вигляд $\int \operatorname{tg}^m x dx$ чи $\int \operatorname{ctg}^m x dx$, то незалежно від парності показника m користуються підстановками $t=\operatorname{tg}x$ або $t=\operatorname{ctg}x$ (випадок I цього підрозділу).

Приклад. Знайти інтеграл $\int \operatorname{tg}^3 x dx$.

Розв'язання. $I=\int \operatorname{tg}^3 x dx=\left\{t=\operatorname{tg}x;\quad x=\operatorname{arctg}t;\quad dx=\frac{dt}{1+t^2}\right\}=\int \frac{t^3}{1+t^2}dt$.

Маючи інтеграл від раціонального дробу (п. 1.6), перетворимо неправильний дріб

$$\frac{t^3}{1+t^2}=\frac{t\cdot t^2}{1+t^2}=t\cdot\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)=t\cdot\left(\frac{t^2+1-1}{1+t^2}\right)=t\cdot\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)=t-\frac{t}{1+t^2},$$

після чого повернемося до інтегрування:

$$I=\int\frac{t^3}{1+t^2}dt=\int\left(t-\frac{t}{1+t^2}\right)dt=\int tdt-\int\frac{tdt}{1+t^2}=\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{d\,(1+t^2)}{1+t^2}=$$

$$=\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+C=\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-\frac{1}{2}\ln(1+\operatorname{tg}^2 x)+C.$$

1.7.4. Інтеграли вигляду $\int R(\sin^{2m} x, \cos^{2n} x)dx$

У цьому разі застосовують підстановки $\boxed{t=\operatorname{tg}x}$ або $\boxed{t=\operatorname{ctg}x}$ (п. 1.7.3, випадок I), насамперед виділивши в підінтегральному виразі диференціали $\frac{dx}{\cos^2 x}=d(\operatorname{tg}x)$ чи $\frac{dx}{\sin^2 x}=-\,d(\operatorname{ctg}x)$ або одразу скориставшись формулами (13).

Приклади. Знайти інтеграли:

1) $\int\frac{dx}{4\sin^2 x+\cos^2 x}$. **2)** $\int\frac{dx}{9\sin^2 x-\cos^2 x}$.

Розв'язання. 1) $\int\frac{dx}{4\sin^2 x+\cos^2 x}=\int\frac{dx}{\cos^2 x(4\operatorname{tg}^2 x+1)}=$

$$=\int\frac{d(\operatorname{tg}x)}{4\operatorname{tg}^2 x+1}=\{\ t=\operatorname{tg}x\ \}=\int\frac{dt}{4t^2+1}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2+1/4}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 2\operatorname{arctg}2t+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}x)+C.$$

$$\textbf{2)}\ \int\frac{dx}{9\sin^2 x-\cos^2 x}=\left\{\begin{matrix} t=\operatorname{ctg}x; \quad dx=-\dfrac{dt}{1+t^2}; \quad \cos^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2} \\ x=\operatorname{arcctg}t; \ \sin^2 x=\dfrac{1}{1+t^2} \end{matrix}\right\}=$$

$$=\int\frac{-\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{9}{1+t^2}-\frac{t^2}{1+t^2}}=-\int\frac{dt}{9-t^2}=\int\frac{dt}{(t^2-9)}=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|+C=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\operatorname{ctg}x-3}{\operatorname{ctg}x+3}\right|+C.$$

1.7.5. Інтеграли вигляду $\int\cos ax\cdot\cos bx\,dx$; $\int\sin ax\cdot\sin bx\,dx$; $\int\sin ax\cdot\cos bx\,dx$

Добуток тригонометричних функцій під знаком інтеграла перетворюють на суму за однією з формул:

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin ax\cdot\sin bx=\frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x-\cos(a+b)x\right)\\&\cos ax\cdot\cos bx=\frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x+\cos(a+b)x\right)\\&\sin ax\cdot\cos bx=\frac{1}{2}\left(\sin(a-b)x+\sin(a+b)x\right)\end{aligned}}. \qquad (14)$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int\cos 5x\cdot\sin 3x\,dx$.

Розв'язання

$$\int\cos 5x\cdot\sin 3x\,dx=\left\{a=3;\ b=5;\ \sin 3x\cdot\cos 5x=\frac{1}{2}\left(\sin(-2x)+\sin 8x\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(-\sin 2x+\sin 8x\right)dx=\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 8x+C.$$

1.7.6. Інтегрування гіперболічних функцій

Гіперболічні функції інтегрують подібно до тригонометричних. При цьому використовують такі формули:

$$\boxed{\begin{array}{lll}\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1; & \operatorname{ch}^2x=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}2x+1); & 1-\operatorname{th}^2x=\operatorname{sch}^2x;\\ \operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}x=\frac{1}{2}\operatorname{sh}2x; & \operatorname{sh}^2x=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}2x-1); & 1-\operatorname{cth}^2x=\operatorname{csch}^2x\end{array}}. \qquad (15)$$

Зауваження. Слід пам'ятати, що $\operatorname{ch}x\,dx=d\left(\operatorname{sh}x\right)$, $\operatorname{sh}dx=d\left(\operatorname{ch}x\right)$, $\frac{dx}{\operatorname{ch}^2x}=d\left(\operatorname{th}x\right)$, $\frac{dx}{\operatorname{sh}^2x}=-d\left(\operatorname{cth}x\right)$.

Приклади. Знайти інтеграли: **1)** $\int \mathrm{sh}^2 x dx$. **2)** $\int \mathrm{sh}^3 x \,\mathrm{ch}^6 x dx$.

Розв'язання

1) $\int \mathrm{sh}^2 x dx = \frac{1}{2}\int (\mathrm{ch}\,2x - 1)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\mathrm{sh}\,2x - x\right) + C = \frac{1}{4}\mathrm{sh}\,2x - \frac{x}{2} + C$.

2) $\int \mathrm{sh}^3 x\,\mathrm{ch}^6 x dx = \int \mathrm{sh}^2 x\,\mathrm{ch}^6 x \cdot \mathrm{sh}\,x dx =$

$= \left\{ t = \mathrm{ch} x; \quad dt = \mathrm{sh}\,x dx; \quad \mathrm{sh}^2 x = \mathrm{ch}^2 x - 1 = t^2 - 1 \right\} = \int (t^2 - 1)\, t^6 dt =$

$= \int (t^8 - t^6) dt = \frac{t^9}{9} - \frac{t^7}{7} + C = \frac{\mathrm{ch}^9 x}{9} - \frac{\mathrm{ch}^7 x}{7} + C$.

АЗ-6

Знайти інтеграли:

1. $\int \frac{dx}{2 + 3\cos x}$. **2.** $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$. **3.** $\int \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} dx$. **4.** $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx$.

5. $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$. **6.** $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$. **7.** $\int \frac{1 - \mathrm{tg}\, x}{1 + \mathrm{tg}\, x} dx$. **8.** $\int x \sin^2 x^2 dx$.

9. $\int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos^4 x} dx$. **10.** $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$. **11.** $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx$. **12.** $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$.

13. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$. **14.** $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}$. **15.** $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$. **16.** $\int \sin^3 x dx$.

17. $\int \sin^4 x dx$. **18.** $\int \sin^6 x \cos^4 x dx$. **19.** $\int \sin^2 x \cos^6 x dx$. **20.** $\int \sin^{1/3} x \cos^{-13/3} x dx$.

21. $\int \frac{dx}{1 - 5\sin^2 x}$. **22.** $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. **23.** $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$. **24.** $\int \mathrm{tg}^5 x dx$. **25.** $\int \mathrm{ctg}^6 x dx$.

26. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$. **27.** $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$. **28.** $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx$. **29.** $\int \sin 2x \cos 5x dx$.

30. $\int \sin 2x \sin 7x dx$. **31.** $\int \cos 2x \cos 5x \cos 7x dx$. **32.** $\int \sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3} dx$.

33. $\int \mathrm{sh}^3 2x dx$. **34.** $\int \mathrm{ch}^4 x dx$. **35.** $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x - 4\mathrm{ch}^2 x}$.

Відповіді: 1. $\frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5} + \mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5} - \mathrm{tg}\frac{x}{2}} \right| + C$. **2.** $\frac{1}{\sqrt{5}} \mathrm{arctg} \frac{3\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C$.

3. $2\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{p}{4}\right) - x + C$. **4.** $\frac{\cos^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C$. **5.** $\ln\left|1 + \mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C$.

6. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x)+C$. **7.** $\ln|\sin x+\cos x|+C$. **8.** $\frac{x^2}{4}-\frac{\sin 2x^2}{8}+C$.

9. $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\cos^4 x}+\frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^{10} x}-\frac{3}{16}\sqrt[3]{\cos^{16} x}+C$. **10.** $\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C$.

11. $-\cos x-\frac{2}{\cos x}+\frac{1}{3\cos^3 x}+C$. **12.** $\operatorname{tg}x-2\operatorname{ctg}x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+C$.

13. $\frac{1}{48}\sin^3 2x+\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+C$. **14.** $2\sqrt{\operatorname{tg}x}+C$.

15. $\frac{1}{15}\cos^3 x(3\cos^2 x-5)+C$. **16.** $-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$.

17. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$. **18.** $\frac{1}{128}\left(\frac{3x}{2}-\frac{\sin 4x}{2}+\frac{\sin 8x}{16}\right)-\frac{\sin^5 2x}{320}+C$.

19. $\frac{1}{16}\left(\frac{5}{8}x+\frac{1}{3}\sin^3 2x-\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{1}{64}\sin 8x\right)+C$.

20. $\frac{3}{4}\operatorname{tg}^{4/3} x+\frac{3}{10}\operatorname{tg}^{10/3} x+C$. **21.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+2\operatorname{tg}x}{1-2\operatorname{tg}x}\right|+C$. **22.** $\operatorname{tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$.

23. $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+C$. **24.** $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x-\ln|\cos x|+C$.

25. $-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x+\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x-\operatorname{ctg}x-x+C$.

26. $-\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x}+3\ln|\operatorname{tg}x|+\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 x+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+C$. **27.** $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+C$.

28. $-\frac{3}{2}\cos x-\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x}-\frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$. **29.** $\frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{14}\cos 7x+C$.

30. $\frac{1}{10}\sin 5x-\frac{1}{18}\sin 9x+C$. **31.** $\frac{1}{4}x+\frac{1}{56}\sin 14x+\frac{1}{40}\sin 10x+\frac{1}{16}\sin 4x+C$.

32. $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{6}-\frac{3}{10}\cos\frac{5x}{6}-\frac{3}{14}\cos\frac{7x}{6}+\frac{3}{32}\cos\frac{11x}{6}+C$. **33.** $\frac{1}{6}\operatorname{ch}^3 2x-\frac{1}{2}\operatorname{ch}2x+C$.

34. $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\operatorname{sh}2x+\frac{1}{32}\operatorname{sh}4x+C$. **35.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{th}x-2}{\operatorname{th}x+2}\right|+C$.

Самостійна робота

Знайти невизначені інтеграли:

1. а) $\int\frac{\cos^3 x}{\sqrt[4]{\sin^3 x}}dx$; **б)** $\int\frac{dx}{3+5\cos x}$. **2. а)** $\int\sin^2 x\cos^2 x dx$; **б)** $\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

3. а) $\int\cos^3 2x dx$; **б)** $\int\frac{dx}{4-5\sin x}$. **4. а)** $\int\sin^3 3x dx$; **б)** $\int\frac{dx}{2-3\cos x}$.

1.8. ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ІРРАЦІОНАЛЬНОСТЕЙ

Якщо інтеграл вміщує ірраціональність і при цьому не табличний, завдання полягає в тому, щоб відповідною підстановкою раціоналізувати підінтегральний вираз.

1.8.1. Степеневі підстановки

Інтеграли вигляду $\int R\left(x, x^{p_1/k_1},..., x^{p_m/k_m}\right)dx$, (16)

де $R-$ раціональна функція; p_i, k_i $(i=\overline{1,m})-$ цілі додатні числа, зводять до інтегралів від раціональних функцій змінної t завдяки підстановці

$$\boxed{x=t^s}.$$

Тут s – найменше спільне кратне знаменників дробів ($s=$НСК$(k_1,...k_m)$).

Інтеграли вигляду $\int R\left(x, (ax+b)^{p_1/k_1},...,(ax+b)^{p_m/k_m}\right)dx$, (17)

де $a, b-$ сталі, раціоналізують за допомогою підстановки

$$\boxed{ax+b=t^s}.$$

Інтеграли загального вигляду

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1/k_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_m/k_m}\right)dx, \quad (18)$$

де a, b, c, d – сталі ($ad-cb\neq 0$), зводять до інтегралів від раціональної функції змінної t із застосуванням підстановки

$$\boxed{\frac{ax+b}{cx+d}=t^s}.$$

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int \frac{\sqrt{x}-1}{x(\sqrt[3]{x}-1)}dx$.

Розв'язання. Оскільки підінтегральна функція вміщує $x^{1/2}$ та $x^{1/3}$, то для раціоналізації використаємо підстановку $x=t^6$:

$$I=\int\frac{\sqrt{x}-1}{x(\sqrt[3]{x}-1)}dx=\left\{\begin{array}{l|l} x=t^6; & \\ & t=\sqrt[6]{x},\ \sqrt{x}=t^3, \sqrt[3]{x}=t^2 \\ dx=6t^5dt & \end{array}\right\}=$$

$$=\int\frac{t^3-1}{t^6(t^2-1)}6t^5dt=6\int\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{t(t-1)(t+1)}dt=6\int\frac{t^2+t+1}{t(t+1)}dt.$$

Здобули

$$I=6\int\left(1+\frac{1}{t(t+1)}\right)dt=6\left(t+\int\frac{dt}{t(t+1)}\right).$$

В останньому інтегралі розкладемо підінтегральну функцію на прості дроби

$$\frac{1}{t(t+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1},$$

звідки

$$1=A(t+1)+Bt.$$

Якщо змінній t надамо значення коренів знаменника, тоді при $t=0$ буде $A=1$; коли $t=-1$, то й $B=-1$. Після цього

$$I=6\left(t+\int\frac{dt}{t(t+1)}\right)=6\left(t+\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt\right)=6\big(t+\ln t-\ln(t+1)\big)+C.$$

Повертаючись до старої змінної, одержимо $I=6\left(\sqrt[6]{x}+\ln\sqrt[6]{x}-\ln(\sqrt[6]{x}+1)\right)+C$.

Приклад 2. Знайти інтеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{(\sqrt{x+7}-\sqrt[3]{x+7})\sqrt[6]{(x+7)^5}}$.

Розв'язання. Скористаємося підстановкою $x+7=t^6$:

$$I=\int\frac{dx}{(\sqrt{x+7}-\sqrt[3]{x+7})\sqrt[6]{(x+7)^5}}=\left\{\begin{array}{l|l} x+7=t^6; & t=\sqrt[6]{x+7};\ \sqrt{x+7}=t^3 \\ dx=6t^5dt & \sqrt[3]{x+7}=t^2;\ \sqrt[6]{(x+7)^5}=t^5 \end{array}\right\}=$$

$$=\int\frac{6t^5dt}{(t^3-t^2)t^5}=6\int\frac{dt}{t^2(t-1)}.$$

Розкладемо підінтегральну функцію на прості дроби:

$$\frac{1}{t^2(t-1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t-1}.$$

Помноживши обидві частини рівності на спільний знаменник та відкинувши його, отримаємо

$$1=At(t-1)+B(t-1)+Ct^2=t^2(A+C)+t(B-A)-B.$$

Складемо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів A, B, C:

$$\begin{array}{c|l} t^2 & A+C=0; \\ t=0 & -B=1; \\ t=1 & C=1. \end{array}\qquad \text{Звідси } A=-1;\ B=-1;\ C=1.$$

Тоді $I=6\displaystyle\int\left(-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t-1}\right)dt=6\left(-\ln t+\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}+C\right)=$

$$=6\left(-\ln\sqrt[6]{x+7}+\frac{1}{\sqrt[6]{x+7}}+\frac{1}{\sqrt[6]{x+7}-1}+C\right).$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int\sqrt{\frac{x}{x+2}}\cdot\frac{dx}{x^2}$.

Розв'язання. Застосуємо підстановку $\frac{x}{x+2}=t^2$:

$$\int\sqrt{\frac{x}{x+2}}\cdot\frac{dx}{x^2}=\left\{\frac{x}{x+2}=t^2 \ \Rightarrow\ x=\frac{2t^2}{1-t^2};\ dx=\frac{4t}{(1-t^2)^2}dt\right\}=$$

$$=\int\frac{t\cdot 4t\cdot(1-t^2)^2dt}{(1-t^2)^2\cdot 4t^4}=\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}+C=-\sqrt{\frac{x+2}{x}}+C.$$

1.8.2. Тригонометричні підстановки

Інтеграли вигляду

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx, \tag{19}$$

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx, \tag{20}$$

$$\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx \tag{21}$$

зводять до інтегралів від раціональних функцій, використовуючи тригонометричні підстановки, а саме: для інтеграла (19) – $x=a\sin t$ ($x=a\cos t$), для інтеграла (20) – $x=a\,\mathrm{tg}\,t$ ($x=a\,\mathrm{ctg}\,t$), а для інтеграла (21) – $x=a/\cos t$ ($x=a/\sin t$).

Інтеграли вигляду $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, $(a\neq 0)$ після виділення повного квадрата зводять до одного з інтегралів (19) – (21).

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}dx$.

Розв'язання. Заданий інтеграл належить до типу (19), отже, оберемо підстановку:

$$\left\{\begin{array}{l} x=2\sin t; \\ dx=2\cos t dt \end{array}\ \middle|\ \sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2 t}=2\sqrt{1-\sin^2 t}=2\cos t\right\}.$$

Унаслідок цього інтеграл набуває знайомого вигляду (п. 1.7.3, випадок І):

$$\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}dx=\int\frac{2\cos t}{16\sin^4 t}\cdot 2\cos t dt=\frac{1}{4}\int\mathrm{ctg}^2 t\cdot\frac{dt}{\sin^2 t}=-\frac{1}{4}\int\mathrm{ctg}^2 t\cdot d(\mathrm{ctg}\,t)=$$

$$=-\frac{\mathrm{ctg}^3 t}{12}+C=-\frac{1}{12}\mathrm{ctg}^3\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)+C.$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+16}}$.

Розв'язання. Застосування тригонометричної підстановки

$$\left\{\begin{array}{l} x = 4\operatorname{tg} t; \\ dx = \dfrac{4dt}{\cos^2 t} \end{array} \middle| \sqrt{x^2+16} = \sqrt{16\operatorname{tg}^2 t + 16} = 4\sqrt{\operatorname{tg}^2 t + 1} = \frac{4}{\cos t} \right\}$$

дозволяє надати заданому інтегралу типового вигляду (п. 1.7.3, випадок II) і доволі просто одержати результат:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+16}} = \int \frac{\frac{4dt}{\cos^2 t}}{16\operatorname{tg}^2 t \cdot \frac{4}{\cos t}} = \frac{1}{16}\int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t} = \left\{\begin{array}{l} z = \sin t \\ dz = \cos t dt \end{array}\right\} = \frac{1}{16}\int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{16z} + C =$$

$$= -\frac{1}{16\sin t} + C = \left\{ \sin t = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} = \frac{x/4}{\sqrt{1+(x/4)^2}} = \frac{x}{\sqrt{16+x^2}} \right\} = -\frac{1}{16}\frac{\sqrt{16+x^2}}{x} + C.$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-4}}$.

Розв'язання. У цьому разі доцільна підстановка типу (21)

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{\cos t}; \\ dx = \dfrac{2\sin t dt}{\cos^2 t} \end{array} \middle| \sqrt{x^2-4} = \sqrt{\frac{4}{\cos^2 t} - 4} = 2\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = 2\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t - 1} = 2\operatorname{tg} t \right\},$$

яка раціоналізує підінтегральну функцію, надавши їй вигляду, зазначеного в п. 1.7.2 (випадок I), після чого одержимо:

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-4}} = \int \frac{\frac{2\sin t dt}{\cos^2 t}}{\frac{8}{\cos^3 t} \cdot 2\operatorname{tg} t} = \frac{1}{8}\int \cos^2 t dt = \frac{1}{16}\int (1+\cos 2t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{16}t + \frac{1}{32}\sin 2t + C = \frac{1}{16}\arccos\frac{2}{x} + \frac{1}{32}\sin 2\left(\arccos\frac{2}{x}\right) + C.$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int \frac{\sqrt{x^2+4x-5}}{x+2}dx$.

Розв'язання. $\int \frac{\sqrt{x^2+4x-5}}{x+2}dx = \int \frac{\sqrt{(x+2)^2-9}}{x+2}dx = \left\{\begin{array}{l} x+2 = t \\ dx = dt \end{array}\right\} =$

$$=\int\frac{\sqrt{t^2-9}}{t}dt=\left\{t=\frac{3}{\cos z};\ dt=\frac{3\sin z}{\cos^2 z}dz\right\}=\int\frac{\sqrt{\frac{9}{\cos^2 z}-9}}{\frac{3}{\cos z}}\cdot\frac{3\sin z}{\cos^2 z}dz=$$

$$=3\int\frac{\sin^2 z}{\cos^2 z}dz=3\int\operatorname{tg}^2 z dz=3\int\left(\frac{1}{\cos^2 z}-1\right)dz=3\left(\operatorname{tg}z-z\right)+C=$$

$$=3\left(\operatorname{tg}\arccos\frac{3}{t}-\arccos\frac{3}{t}\right)+C=3\left(\operatorname{tg}\arccos\frac{3}{x+2}-\arccos\frac{3}{x+2}\right)+C.$$

1.8.3. Інтеграли вигляду $\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Тут $P_n(x)$ – многочлен степеня n; $a,b,c=const$. Будь-який інтеграл зазначеного типу можна подати як

$$\boxed{\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=R_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+l\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}},\qquad(22)$$

де $R_{n-1}(x)$ – многочлен степеня $n-1$ з невизначеними коефіцієнтами, $l\in R$ (***метод невизначених коефіцієнтів***). Коефіцієнти многочлена R_{n-1} і число l одержують із тотожності після диференціювання рівності (22).

Приклад 1. Знайти інтеграл $I=\int\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx$.

Розв'язання. Застосуємо метод невизначених коефіцієнтів:

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx=(Ax+B)\sqrt{1-2x-x^2}+l\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$$

Продиференціюємо останню рівність

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}=A\sqrt{1-2x-x^2}+(Ax+B)\frac{-2-2x}{2\sqrt{1-2x-x^2}}+\frac{l}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$$

Після множення обох частин рівності на $\sqrt{1-2x-x^2}$ отримаємо

$$x^2=A(1-2x-x^2)+(Ax+B)(-1-x)+l,$$

$$x^2=A-2Ax-Ax^2-Ax-B-Ax^2-Bx+l.$$

Далі прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x

$$\begin{array}{l|l} x^2 & -A-A=1; \\ x^1 & -2A-A-B=0; \\ x^0 & A-B+l=0, \qquad \text{звідки} \quad A=-1/2;\ B=3/2;\ l=2. \end{array}$$

Тепер заданий інтеграл зводимо до простого вигляду:

$$I=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\sqrt{1-2x-x^2}+2\int\frac{dx}{\sqrt{2-(x+1)^2}}=$$

$$=\frac{(3-x)\sqrt{1-2x-x^2}}{2}+2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int(4x^2-6x)\sqrt{x^2+1}\,dx$.

Розв'язання. Зведемо інтеграл до вигляду формули (22), помноживши і розділивши підінтегральну функцію на $\sqrt{x^2+1}$:

$$\int(4x^2-6x)\sqrt{x^2+1}\,dx=\int\frac{(4x^2-6x)\cdot(x^2+1)\,dx}{\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{(4x^4-6x^3+4x^2-6x)\,dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Відповідно до методу невизначених коефіцієнтів (п. 1.8.3) останній інтеграл подамо таким чином:

$$\int\frac{(4x^4-6x^3+4x^2-6x)\,dx}{\sqrt{x^2+1}}=(Ax^3+Bx^2+Cx+D)\sqrt{x^2+1}+l\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Диференціювання обох частин рівності

$$\frac{4x^4-6x^3+4x^2-6x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{(3Ax^2+2Bx+C)\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2+x(Ax^3+Bx^2+Cx+D)+l}{\sqrt{x^2+1}}$$

та множення на $\sqrt{x^2+1}$ дає можливість записати вираз

$$4x^4-6x^3+4x^2-6x=(3Ax^2+2Bx+C)(x^2+1)+x(Ax^3+Bx^2+Cx+D)+l,$$

$$4x^4-6x^3+4x^2-6x=4Ax^4+3Bx^3+x^2(3A+2C)+x(2B+D)+(C+l),$$

$$\begin{array}{l|l} x^4 & 4A=4; \\ x^3 & 3B=-6; \\ x^2 & 3A+2C=4; \\ x^1 & 2B+D=-6; \\ x^0 & C+l=0, \qquad \text{звідки} \quad A=1;\ B=-2;\ C=0{,}5;\ D=-2;\ l=-0{,}5. \end{array}$$

Отже, остаточно

$$\int (4x^2-6x)\sqrt{x^2+1}dx = \left(x^3-2x^2+0{,}5x-2\right)\sqrt{x^2+1}-0{,}5\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} =$$

$$=\left(x^3-2x^2+0{,}5x-2\right)\sqrt{x^2+1}-0{,}5\cdot\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C.$$

АЗ -7

Знайти інтеграли:

1. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$. **2.** $\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$. **3.** $\int\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}+1}dx$. **4.** $\int\frac{\sqrt[6]{2x+1}+1}{\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{2x+1}}dx$.

5. $\int\frac{\sqrt{x+2}-1}{(\sqrt[3]{x+2}+1)\sqrt{x+2}}dx$. **6.** $\int\sqrt{\frac{2x-5}{x+1}}dx$. **7.** $\int(x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$. **8.** $\int\sqrt{9-x^2}\,dx$.

9. $\int\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$. **10.** $\int\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+1)^5}}dx$. **11.** $\int\frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$. **12.** $\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}dx$.

13. $\int\frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{2-x^2}}$. **14.** $\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{-x^2+4x-3}}$. **15.** $\int\sqrt{1-2x-x^2}\,dx$.

16. $\int\frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx$. **17.** $\int\frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$.

Відповіді:

1. $2\left(\sqrt{x+1}-\ln\left|1+\sqrt{x+1}\right|\right)+C$. **2.** $6\left(\frac{\sqrt[6]{x^7}}{7}-\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5}+\frac{\sqrt{x}}{3}-\sqrt[6]{x}+\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}\right)+C$.

3. $6\left(\frac{\sqrt[6]{x^7}}{7}-\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4}-\frac{\sqrt[3]{x}}{2}+\sqrt[6]{x}-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt{3}}\right)+C$.

4. $3\left(\frac{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}{4}+\frac{2\sqrt{2x+1}}{3}+\sqrt[3]{2x+1}+2\sqrt[6]{2x+1}+2\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right|\right)+C$.

5. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-3\sqrt[3]{x+1}-6\sqrt[6]{x+1}+3\ln\left|\sqrt[3]{x+1}+1\right|+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+1}+C$.

6. $7\sqrt{2}\left(\frac{t}{\sqrt{2}(2-t^2)}-\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\arcsin\left(t/\sqrt{2}\right)}{2}+\frac{p}{4}\right)\right|\right)+C$, де $t=\sqrt{\frac{2x-5}{x+1}}$.

7. $\left(1-\frac{x}{2}\right)\sqrt{1-x^2}-\frac{3}{2}\arcsin x+C$. **8.** $\frac{9}{2}\left(\arcsin\frac{x}{3}+\frac{1}{9}x\sqrt{9-x^2}\right)+C$.

9. $2\left(\operatorname{tg}\arccos\frac{2}{x}-\arccos\frac{2}{x}\right)+C$. **10.** $\frac{1}{3}\sin^3(\operatorname{arctg}x)+C$. **11.** $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$.

12. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-9}+\frac{9}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-9}\right|+C$. **13.** $\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}+C$. **14.** $-\ln\left|\frac{1-\sqrt{-x^2+4x-3}}{x-2}\right|+C$.

15. $\frac{x+1}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$. **16.** $\frac{x^3+2x}{4}\sqrt{x^2+4}-2\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|+C$.

17. $(x^2-x-13)\sqrt{x^2-2x+5}-17\ln\left|(x-1)+\sqrt{x^2-2x+5}\right|+C$.

1.9. ПІДСТАНОВКИ ЕЙЛЕРА

Інтеграли вигляду $\int R(x,\sqrt{\left(ax^2+bx+c\right)}dx$ раціоналізують за допомогою однієї з таких підстановок:

1. Якщо $a>0$, то використовують ***першу підстановку Ейлера***:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a}\,. \qquad (23)$$

2. Коли $c>0$, то можна скористатися ***другою підстановкою Ейлера***:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}\,. \qquad (24)$$

3. У разі, якщо x_1 і x_2 – дійсні корені квадратного тричлена ax^2+bx+c, застосовують ***третю підстановку Ейлера***:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-x_1)t\,. \qquad (25)$$

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}}$ за допомогою однієї з підстановок Ейлера.

Розв'язання. Оскільки $a=1>0$, то підстановка (23) буде доречною: $\sqrt{x^2-1}=t-x$. Піднесемо обидві частини цієї рівності до квадрата й після зведення подібних членів отримаємо $t^2+1=2tx$, звідки $x=\frac{t^2+1}{2t}$. Тоді

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}}=\left\{x=\frac{t^2+1}{2t};\ dx=\frac{t^2-1}{2t^2}dt;\ x+\sqrt{x^2-1}=\frac{t^2+1}{2t}+t-\frac{t^2+1}{2t}=t\right\}=$$

$$=\int\frac{\left(t^2-1\right)dt}{2t^2\cdot t}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^3}\right)dt=\frac{1}{2}\left(\ln t+\frac{1}{2t^2}\right)+C=\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2-1}+x\right|+$$
$$+\frac{1}{4\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)^2}+C.$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$ з використанням підстановки Ейлера.

Розв'язання. Завдяки тому, що $c=1>0$, найбільш доцільна підстановка (24). А поклавши в основу $\sqrt{1+x-x^2}=tx-1$, матимемо $1+x-x^2=t^2x^2-2tx+1$, звідки $x=\frac{2t+1}{t^2+1}$.

У результаті

$$I=\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}=\left\{x=\frac{2t+1}{t^2+1};\ dx=\frac{2(t^2+1)-(2t+1)2t}{(t^2+1)^2}dt=-2\frac{t^2+t-1}{(t^2+1)^2}dt\right\}=$$
$$=-2\int\frac{(t^2+t-1)dt}{(t^2+1)^2\left(1+\frac{2t+1}{t^2+1}\right)\left(\frac{t(2t+1)}{t^2+1}-1\right)}=-2\int\frac{(t^2+t-1)dt}{(t^2+1)^2\cdot\frac{t^2+2t+2}{t^2+1}\cdot\frac{t^2+t-1}{t^2+1}}=$$
$$=-2\int\frac{dt}{t^2+2t+2}=-2\int\frac{dt}{(t+1)^2+1}=-2\operatorname{arctg}(t+1)+C=-2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+x-x^2}+1}{x}+1\right)+C.$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{-3+4x-x^2}}$ з урахуванням однієї з підстановок Ейлера.

Розв'язання. У цьому разі $a=-1<0$ і $c=-3<0$, а тому ні перша, ні друга підстановки Ейлера не підходять. Але оскільки квадратний тричлен $-3+4x-x^2$ має дійсні корені $x_1=1$; $x_2=3$, можна обрати підстановку (25): $\sqrt{-3+4x-x^2}=\sqrt{(x-1)(3-x)}=(x-1)t$, звідки $3-x=(x-1)t^2$. Після цього

$$I=\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{-3+4x-x^2}}=\left\{x=\frac{t^2+3}{t^2+1};\ dx=\frac{2t(t^2+1)-2t(t^2+3)}{(t^2+1)^2}dt=\frac{-4t}{(t^2+1)^2}dt;\right.$$
$$\left.\sqrt{-3+4x-x^2}=(x-1)t=\left(\frac{t^2+3}{t^2+1}-1\right)t=\frac{2t}{t^2+1}\right\}=\int\frac{-4t}{(t^2+1)^2\left(\frac{t^2+3}{t^2+1}-2\right)\frac{2t}{t^2+1}}dt=$$
$$=2\int\frac{dt}{t^2-1}=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C,\ \text{де}\ t=\frac{\sqrt{-3+4x-x^2}}{x-1}.$$

1.10. ІНТЕГРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ БІНОМІВ

Диференціальним біномом називаємо вираз

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx, \tag{26}$$

де m, n і p – раціональні числа.

Інтеграл типу $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ можна звести до інтеграла від раціональної функції, застосовуючи ***підстановки Чебишева***, якщо:

1) $p-$ ціле число; використовують підстановку

$$\boxed{x=t^q},$$

де $q-$ спільний знаменник дробів m і n;

2) $\dfrac{m+1}{n}-$ ціле число; користуються підстановкою

$$\boxed{a+bx^n=t^r},$$

де $r-$ знаменник дробу p;

3) $\dfrac{m+1}{n}+p-$ ціле число; обґрунтованою буде підстановка

$$\boxed{ax^{-n}+b=t^r},$$

де $r-$ знаменник дробу p.

Приклад 1. Знайти інтеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}$.

Розв'язання. Тут $m=-1$; $n=1/3$; $p=-2$ – ціле число, отже, має місце перший випадок інтегрованості. Тому цілком умотивована підстановка $x=t^3$:

$$I=\int\frac{dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}=\left\{x=t^3;\,dx=3t^2dt\right\}=\int\frac{3t^2dt}{t^3(1+t)^2}=3\int\frac{dt}{t(1+t)^2}.$$

Розкладемо підінтегральний дріб на прості дроби:

$$\frac{1}{t(1+t)^2}=\frac{A}{t}+\frac{B}{1+t}+\frac{C}{(1+t)^2}=\frac{A(1+t)^2+Bt(1+t)+Ct}{t(1+t)^2},$$

$$1=A(1+t)^2+Bt(1+t)+Ct,$$

$$1=(A+B)t^2+(2A+B+C)t+A.$$

$$\begin{array}{r|ll}
t=0 & A=1; & A=1; \\
t=-1 & -C=1; & C=-1; \\
t^2 & A+B=0; & B=-A=-1;
\end{array}$$

$$I=3\int\frac{dt}{t(1+t)^2}=3\left[\int\frac{dt}{t}-\int\frac{dt}{1+t}-\int\frac{dt}{(1+t)^2}\right]=3\left[\ln|t|-\ln|1+t|+\frac{1}{1+t}\right]+C=$$

$$=3\left[\ln\left|\frac{t}{1+t}\right|+\frac{1}{1+t}\right]+C=3\left[\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right|+\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\right]+C.$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}}{\sqrt{x}}dx$.

Розв'язання. У цьому разі $m=-1/2;\ n=1/4;\ p=1/3$. Таким чином, $(m+1)/n=2$ – ціле число, тобто маємо другий випадок інтегрованості. Оберемо підстановку $1+\sqrt[4]{x}=t^3$:

$$I=\int\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-1/2}(1+x^{1/4})^{1/3}dx=\Big\{\sqrt[4]{x}+1=t^3;\ x=(t^3-1)^4;$$

$$dx=4(t^3-1)^3 3t^2dt\Big\}=\int\frac{t}{(t^3-1)^2}12t^2(t^3-1)^3dt=12\int(t^6-t^3)dt=$$

$$=12\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)=\frac{12}{7}(\sqrt[4]{x}+1)^{1/3}-3(\sqrt[4]{x}+1)^{4/3}+C.$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int\frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[5]{x^2}}dx$.

Розв'язання. Тут $m=-7/5;\ n=1/3;\ p=1/5;\quad (m+1)/n+p=-1$ (ціле число). Маємо третій випадок інтегрованості.

Тоді

$$\int\frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[5]{x^2}}dx=\int x^{-7/5}(1+x^{1/3})^{1/5}dx=\Big\{x^{-1/3}+1=t^5;\ x=(t^5-1)^{-3};$$

$$dx=-15t^4(t^5-1)^{-4}dt\Big\}=-15\int t^5dt=-\frac{15}{6}t^6+C=-\frac{5}{2}\left(\frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)^{6/5}+C.$$

АЗ - 8

1. Знайти інтеграли за допомогою однієї з підстановок Ейлера:

а) $\int\frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}dx$; **б)** $\int\frac{1}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}dx$; **в)** $\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$.

Відповіді:

а) $2\ln|t|+\dfrac{3}{2(1+2t)}-\dfrac{3}{2}\ln|1+2t|+C$, де $t=x+\sqrt{x^2+x+1}$;

б) $-\ln|t|+\ln|t-1|-2\operatorname{arctg}t+C$, де $xt=1+\sqrt{1-2x-x^2}$;

в) $-\dfrac{16}{27}\ln|t-2|-\dfrac{17}{108}\ln|t+1|+\dfrac{1}{6}\dfrac{1}{t+1}-\dfrac{1}{6}\dfrac{1}{(t+1)^2}+\dfrac{13}{3}\ln|t-1|+C$,

де $\sqrt{x^2+3x+2}=(x+1)t$.

2. Знайти інтеграли від диференціальних біномів:

а) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx$; **б)** $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}dx$; **в)** $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}dx$.

Відповіді:

а) $\dfrac{6}{5}t^5-4t^3+18t+3\dfrac{t}{1+t^2}-21\operatorname{arctg}t+C$, $t=\sqrt[6]{x}$;

б) $\dfrac{3}{5}t^5-2t^3+3t+C$, $t=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$;

в) $\dfrac{1}{6}\ln\left|t^2+t+1\right|+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{3}\ln|1-t|-t+C$, $t=\dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$.

Самостійна робота

Знайти інтеграл:

1. $\displaystyle\int\frac{x^3dx}{\left(a-bx^2\right)^{3/2}}$. **2.** $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3\left(2-x^3\right)^{1/3}}$. **3.** $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\left(1+x^2\right)^{3/2}}$. **4.** $\displaystyle\int\frac{dx}{x\left(1+x^3\right)^{1/4}}$.

2. ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1. Знайти інтеграл:

1.1. $\int e^x(e^x+1)^3 dx$.

1.2. $\int x\sqrt{x^2+3}dx$.

1.3. $\int x^3\sqrt{1+4x^4}dx$.

1.4. $\int (2x-1)^{15} dx$.

1.5. $\int \dfrac{dx}{(3x+1)^5}$.

1.6. $\int x^2\sqrt{1+x^3}dx$.

1.7. $\int \dfrac{\ln^8 xdx}{x}$.

1.8. $\int \dfrac{xdx}{\left(3+x^2\right)^6}$.

1.9. $\int x^3\left(3x^4+2\right)^{11} dx$.

1.10. $\int \dfrac{\ln^6 x}{x}dx$.

1.11. $\int \cos x\cdot\sqrt[3]{2+\sin x}dx$.

1.12. $\int \dfrac{xdx}{\left(x^2+3\right)^5}$.

1.13. $\int x\sqrt{1-x^2}dx$.

1.14. $\int x^{14}(x^{15}+2)^9 dx$.

1.15. $\int (3-\cos x)^7 \sin xdx$.

1.16. $\int \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$.

1.17. $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}}dx$.

1.18. $\int(\sin x-5)^4 \cos xdx$.

1.19. $\int \dfrac{x}{\left(7+x^2\right)^{3/2}}dx$.

1.20. $\int \sqrt[6]{x+1}\, dx$.

1.21. $\int \dfrac{(\ln x+5)^4 dx}{x}$.

1.22. $\int\left(2-3x^{4/3}\right)x^{1/3}dx$.

1.23. $\int\dfrac{\sqrt{x}\,dx}{4+x^{3/2}}$.

1.24. $\int\dfrac{\ln^9 x}{x}dx$.

1.25. $\int\text{ctg}(\dfrac{p}{4}-x)dx$.

1.26. $\int\dfrac{3x-1}{x^2-9}dx$.

1.27. $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x}\, dx$.

1.28. $\int \sqrt[4]{8x+3}\, dx$.

1.29. $\int\dfrac{x^4}{\sqrt{4+x^5}}dx$.

1.30. $\int e^{3x}\left(1+e^{3x}\right)^5 dx$.

Завдання 2. Знайти інтеграл:

2.1. $\int \frac{2^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

2.2. $\int \cos x \cdot 3^{\sin x}dx$.

2.3. $\int \frac{3^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx$.

2.4. $\int 3^{-\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

2.5. $\int x^2 5^{x^3}dx$.

2.6. $\int \frac{3^{\arccos x}dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2.7. $\int x^4 \cdot 2^{x^5}dx$.

2.8. $\int e^{\sin x}\cos xdx$.

2.9. $\int 3^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

2.10. $\int 8^{-x^3+x}\left(1-3x^2\right)dx$.

2.11. $\int e^{2(x-5x^3)}(1-15x^2)dx$.

2.12. $\int \frac{3^{\ln x}}{x}dx$.

2.13. $\int \frac{2^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

2.14. $\int \frac{5^{\ln x}dx}{x}$.

2.15. $\int 5^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

2.16. $\int \frac{e^x dx}{e^x+3}$.

2.17. $\int 2^{\operatorname{tg} x}\sec^2 xdx$.

2.18. $\int 7^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

2.19. $\int \frac{\sin xdx}{e^{\cos x}}$.

2.20. $\int \frac{\cos xdx}{10^{\sin x}}$.

2.21. $\int \frac{3^{-\operatorname{arcctg} x}}{1+x^2}dx$.

2.22. $\int 6^{\sin x}\cos xdx$.

2.23. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx$.

2.24. $\int \frac{dx}{e^{\operatorname{tg} x}\cos^2 x}$.

2.25. $\int 5^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

2.26. $\int e^{-x^3+3x}(1-x^2)dx$.

2.27. $\int \frac{\sin xdx}{9^{\cos x}}$.

2.28. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx$.

2.29. $\int \frac{4^{\operatorname{ctg} x}dx}{\sin^2 x}$.

2.30. $\int \frac{dx}{5^{\operatorname{ctg} x}\sin^2 x}$.

Завдання 3. Знайти інтеграл:

3.1. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx$.

3.2. $\int \frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

3.3. $\int \frac{\arccos^6 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

3.4. $\int \frac{dx}{x\cdot \ln^2 x}$.

3.5. $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx$.

3.6. $\int \frac{1}{\sin^2 x\cdot(2-\operatorname{ctg} x)^5}dx$.

3.7. $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{11-5\operatorname{tg}^2 x}}dx$.

3.8. $\int \frac{\sqrt[4]{\arcsin x}dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

3.9. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$.

3.10. $\int \frac{(4+\operatorname{tg} x)^5}{\cos^2 x}dx$.

3.11. $\int \frac{dx}{\arcsin^5 x\sqrt{1-x^2}}$.

3.12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{\operatorname{ctg} x+4}}$.

3.13. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^3 x}$.

3.14. $\int \frac{\arcsin^8 3x dx}{\sqrt{1-9x^2}}$.

3.15. $\int \frac{dx}{\operatorname{arctg}^2 x(1+x^2)}$.

3.16. $\int \frac{dx}{x\cdot \sin^2(\ln x)}$.

3.17. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx$.

3.18. $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

3.19. $\int \frac{dx}{\arcsin^3 x\sqrt{1-x^2}}$.

3.20. $\int \frac{dx}{\arcsin^5 x\sqrt{1-x^2}}$.

3.21. $\int \operatorname{tg}^3 x\cdot \sec^2 x dx$.

3.22. $\int \frac{dx}{\arcsin^7 x\sqrt{1-x^2}}$.

3.23. $\int \frac{dx}{x\cdot \cos^2(1+\ln x)}$.

3.24. $\int \frac{\sqrt[6]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx$.

3.25. $\int \frac{dx}{x\cdot \cos^2(\ln x)}$.

3.26. $\int \frac{\sqrt[6]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx$.

3.27. $\int \frac{dx}{\arcsin^5 x\sqrt{1-x^2}}$.

3.28. $\int \frac{dx}{x\cdot \sin^2(\ln x)}$.

3.29. $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

3.30. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{9-\operatorname{arctg}^2 x}}$.

Завдання 4. Знайти інтеграл:

4.1. $\int \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}$.

4.2. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$.

4.3. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx$.

4.4. $\int \frac{dx}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}$.

4.5. $\int \frac{4^x}{1+4^x}dx$.

4.6. $\int \frac{\sin x}{(\cos x-6)}dx$.

4.7. $\int \frac{dx}{(3-\operatorname{arcctg} x)(1+x^2)}$.

4.8. $\int \frac{dx}{(\operatorname{ctg} x+3)\sin^2 x}$.

4.9. $\int \frac{e^x dx}{7+e^x}$.

4.10. $\int \frac{\sin 2x}{7-\sin^2 x}dx$.

4.11. $\int \frac{2^x}{1+2^x}dx$.

4.12. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$.

4.13. $\int \frac{dx}{\cos^2 x(1+\operatorname{tg} x)}$.

4.14. $\int \frac{e^{5x}}{e^{5x}+1}dx$.

4.15. $\int \frac{\sqrt{\ln x}dx}{x}$.

4.16. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x-4}$.

4.17. $\int \frac{\sin x\cdot\cos x dx}{\sin^2 x+3}$.

4.18. $\int \frac{dx}{\sin^2 x(3-\operatorname{ctg} x)}$.

4.19. $\int \frac{dx}{x\ln x}$.

4.20. $\int \frac{e^{5x}dx}{7+e^{5x}}$.

4.21. $\int \frac{2x^5-3x^2}{1+3x^3-x^6}dx$.

4.22. $\int \frac{e^{3x}dx}{e^{3x}-5}$.

4.23. $\int \frac{\sin x\cdot\cos x dx}{5-\sin^2 x}$.

4.24. $\int \frac{dx}{\arcsin 2x\sqrt{1-4x^2}}$.

4.25. $\int \frac{dx}{(1+9x^2)\operatorname{arcctg} 3x}$.

4.26. $\int \cos(\ln x)\frac{dx}{x}$.

4.27. $\int \frac{dx}{\sin^2 x(3-\operatorname{ctg} x)}$.

4.28. $\int \frac{3^x}{5+3^x}dx$.

4.29. $\int \frac{1}{x\sqrt[5]{\ln x}}dx$.

4.30. $\int \frac{\ln(3x-1)}{3x-1}dx$.

Завдання 5. Знайти інтеграл:

5.1. $\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x}dx$.

5.2. $\int \frac{e^x}{e^{2x}-9}dx$.

5.3. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x+7}}dx$.

5.4. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{\operatorname{ctg}^2 x+5}}$.

5.5. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{16-e^{2x}}}$.

5.6. $\int \frac{e^{2x}dx}{25+e^{4x}}$.

5.7. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}-16}$.

5.8. $\int \frac{xdx}{4+x^4}$.

5.9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x(9-\operatorname{tg}^2 x)}$.

5.10. $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{36-e^{4x}}}$.

5.11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\,(4+\operatorname{ctg}^2 x)}$.

5.12. $\int \frac{\sin x dx}{16-\cos^2 x}$.

5.13. $\int \frac{e^{3x}dx}{e^{6x}-9}$.

5.14. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^6}}$.

5.15. $\int \frac{e^{4x}dx}{e^{8x}-9}$.

5.16. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}dx}{\cos^2 x}$.

5.17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{16-\ln^2 x}}$.

5.18. $\int \frac{e^{2x}dx}{9+e^{4x}}$.

5.19. $\int \frac{4^x dx}{1+16^x}$.

5.20. $\int \frac{dx}{x(16+\ln^2 x)}$.

5.21. $\int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}$.

5.22. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3-\ln^2 x}}$.

5.23. $\int \frac{x^3}{4-x^8}dx$.

5.24. $\int \frac{2^x}{9+4^x}dx$.

5.25. $\int \frac{e^{5x}}{\sqrt{e^{10x}+1}}dx$.

5.26. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{4-\operatorname{ctg}^2 x}}$.

5.27. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}}$.

5.28. $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^4}}dx$, $a=const$.

5.29. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x+5}$.

5.30. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+5}}$.

Завдання 6. Знайти інтеграл:

6.1. $\int (x+2)\cos 3x dx$.

6.2. $\int (x+3)\sin 2x dx$.

6.3. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

6.4. $\int x\cdot \operatorname{arcctg} x^2 dx$.

6.5. $\int x\cdot \sin^2\frac{x}{2} dx$.

6.6. $\int x^2\cdot \sin x dx$.

6.7. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$.

6.8. $\int x\cdot \operatorname{arctg}^2 x dx$.

6.9. $\int \frac{x}{2}\cos x dx$.

6.10. $\int e^{2x}\cos 3x dx$.

6.11. $\int (x-3)\cdot \sin\frac{x}{2} dx$.

6.12. $\int x\cdot 7^x dx$.

6.13. $\int x^3 \ln x dx$.

6.14. $\int \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\sin^2 x} dx$.

6.15. $\int \arcsin x dx$.

6.16. $\int x\cdot 2^x dx$.

6.17. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx$.

6.18. $\int \frac{x\cdot \arccos x}{(1-x^2)^{3/2}} dx$.

6.19. $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{3/2}} dx$.

6.20. $\int x^2\cdot e^{4x} dx$.

6.21. $\int \sin\sqrt[3]{x} dx$.

6.22. $\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$.

6.23. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$.

6.24. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2(1+x^2)} dx$.

6.25. $\int x^3 e^{-x^2} dx$.

6.26. $\int \arcsin x dx$.

6.27. $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

6.28. $\int x\cdot \arcsin x dx$.

6.29. $\int x^2 3^x dx$.

6.30. $\int x\cdot 3^{2x} dx$.

Завдання 7. Знайти інтеграл:

7.1. $\int \frac{x \cdot \cos x dx}{\sin^3 x}$.

7.2. $\int x \cdot e^{7x} dx$.

7.3. $\int x^2 e^{-x} dx$.

7.4. $\int \frac{x}{2} \sin 3x dx$.

7.5. $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \frac{dx}{1+x}$.

7.6. $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

7.7. $\int x \cdot \operatorname{arctg} x dx$.

7.8. $\int x \cdot \sin \sqrt{x} dx$.

7.9. $\int x \cdot \operatorname{arcctg} x dx$.

7.10. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$.

7.11. $\int x \cdot \operatorname{arctg} x^2 dx$.

7.12. $\int \arcsin 2x dx$.

7.13. $\int x \cdot e^{\frac{x}{2}} dx$.

7.14. $\int x^2 \cdot e^{3x} dx$.

7.15. $\int 3^x x dx$.

7.16. $\int \arcsin 3x dx$.

7.17. $\int x^2 \cdot \sin 3x dx$.

7.18. $\int x \cdot 2^{-x} dx$.

7.19. $\int x^2 \cdot 3^x dx$.

7.20. $\int \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x} dx$.

7.21. $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$.

7.22. $\int x \cos^2 3x dx$.

7.23. $\int x^2 2^x dx$.

7.24. $\int x^2 e^{-x} dx$.

7.25. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$.

7.26. $\int x \cdot 5^x dx$.

7.27. $\int (\arcsin x)^2 dx$.

7.28. $\int e^{-3x} \cos \frac{x}{4} dx$.

7.29. $\int \arcsin 2x dx$.

7.30. $\int \arcsin 7x dx$.

Завдання 8. Знайти інтеграл:

8.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-3}}$.

8.2. $\int \frac{dx}{x^2+6x+4}$.

8.3. $\int \frac{3dx}{2x^2-3x+2}$.

8.4. $\int \frac{2dx}{7x^2-42x+3}$.

8.5. $\int \frac{dx}{x^2+4x+6}$.

8.6. $\int \frac{dx}{4x^2+8x-1}$.

8.7. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$.

8.8. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x-x^2}}$.

8.9. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+4x-3}}$.

8.10. $\int \frac{dx}{x^2-4x+15}$.

8.11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-1}}$.

8.12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}$.

8.13. $\int \frac{dx}{2x^2-6x+3}$.

8.14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$.

8.15. $\int \frac{dx}{x^2+4x-7}$.

8.16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$.

8.17. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-8x-x^2}}$.

8.18. $\int \frac{dx}{4x^2-8x+2}$.

8.19. $\int \frac{dx}{4x^2+4x-1}$.

8.20. $\int \frac{dx}{x^2+6x-7}$.

8.21. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-6x-1}}$.

8.22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x}}$.

8.23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x}}$.

8.24. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+4x-3}}$.

8.25. $\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$.

8.26. $\int \frac{dx}{3x^2+6x+8}$.

8.27. $\int \frac{dx}{6x^2+12x-3}$.

8.28. $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$.

8.29. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+1}}$.

8.30. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x-1}}$.

Завдання 9. Знайти інтеграл:

9.1. $\int \frac{3x-1}{x^2+5x+2}dx$.

9.2. $\int \frac{5x+2}{x^2+4x-1}dx$.

9.3. $\int \frac{xdx}{\sqrt{3x^2-11x+2}}$.

9.4. $\int \frac{xdx}{\sqrt{3x^2+6x-9}}$.

9.5. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

9.6. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{1-3x-2x^2}}$.

9.7. $\int \frac{(4-3x)dx}{5x^2-6x+18}$.

9.8. $\int \frac{(x+3)dx}{x^2+4x+7}$.

9.9. $\int \frac{(2x-3)dx}{3x^2-6x-2}$.

9.10. $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{-x^2+4x+20}}$.

9.11. $\int \frac{2xdx}{7x^2+14x+21}$.

9.12. $\int \frac{(3x+4)dx}{x^2+4x+3}$.

9.13. $\int \frac{3xdx}{\sqrt{4x^2-8x+5}}$.

9.14. $\int \frac{(2x+3)\,dx}{\sqrt{5x^2+10x-2}}$.

9.15. $\int \frac{(5x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$.

9.16. $\int \frac{(3x-1)\,dx}{x^2-x+2}$.

9.17. $\int \frac{(2x-6)\,dx}{2x^2+6x-7}$.

9.18. $\int \frac{(3x-1)\,dx}{\sqrt{x^2+4x+7}}$.

9.19. $\int \frac{(3x+2)\,dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$.

9.20. $\int \frac{(2x+1)\,dx}{\sqrt{2-x-x^2}}$.

9.21. $\int \frac{(5x-1)dx}{x^2+2x-2}$.

9.22. $\int \frac{(2x-3)dx}{4x^2+16x-2}$.

9.23. $\int \frac{3x-1}{x^2+7x-1}dx$.

9.24. $\int \frac{4x+3}{x^2+3x-2}dx$.

9.25. $\int \frac{xdx}{\sqrt{8x-x^2}}$.

9.26. $\int \frac{5x-1}{\sqrt{x^2+5x-2}}dx$.

9.27. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}}dx$.

9.28. $\int \frac{2x-7}{\sqrt{3x^2+x}}dx$.

9.29. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx$.

9.30. $\int \frac{x-2}{3x^2+6x-1}dx$.

Завдання 10. Знайти інтеграл:

10.1. $\int \frac{17-x}{(x-2)(x+3)(x+1)}dx$.

10.2. $\int \frac{20x+4}{(x+5)(x-3)(x+1)}dx$.

10.3. $\int \frac{6x+46}{(x+1)(x-4)(x+3)}dx$.

10.4. $\int \frac{13x+35}{(x+3)(x+2)(x-1)}dx$.

10.5. $\int \frac{28-20x}{(x+5)(x+1)(x-3)}dx$.

10.6. $\int \frac{6x-20}{(x-2)(x-3)(x-4)}dx$.

10.7. $\int \frac{6x+6}{(x-1)(x+2)(x+3)}dx$.

10.8. $\int \frac{4x+10}{(x+5)(x+1)(x-3)}dx$.

10.9. $\int \frac{4x+2}{(x+1)(x+2)(x-1)}dx$.

10.10. $\int \frac{14x-30}{(x+3)(x-1)(x-3)}dx$.

10.11. $\int \frac{16-14x}{(x-2)(x+1)(x-4)}dx$.

10.12. $\int \frac{10-14x}{(x-3)(x+1)(x-1)}dx$.

10.13. $\int \frac{8x+10}{(x+2)(x+3)(x-4)}dx$.

10.14. $\int \frac{6x+2}{(x+1)(x+2)(x-3)}dx$.

10.15. $\int \frac{3x+4}{x(x+1)(x+2)}dx$.

10.16. $\int \frac{7x+9}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$.

10.17. $\int \frac{19-7x}{(x+1)(x^2-2x+10)}dx$.

10.18. $\int \frac{20-15x}{(x+2)(x^2-4x+13)}dx$.

10.19. $\int \frac{32-2x}{(x^2-2x+10)(x-3)}dx$.

10.20. $\int \frac{19x+21}{(x^2+6x+13)(x-1)}dx$.

10.21. $\int \frac{9x+27}{(x^2+4x+13)(x-1)}dx$.

10.22. $\int \frac{6-10x}{(x^2-2x+5)(x+1)}dx$.

10.23. $\int \frac{26}{(x^2+2x+10)(x-2)}dx$.

10.24. $\int \frac{32-8x}{(x^2-6x+13)(x-3)}dx$.

10.25. $\int \frac{38-21x}{(x+2)(x^2-8x+20)}dx$.

10.26. $\int \frac{15x+43}{(x-1)(x^2+8x+20)}dx$.

10.27. $\int \frac{26x+106}{(x+1)(x^2+10x+29)}dx$.

10.28. $\int \frac{68-14x}{(x-2)(x^2-12x+40)}dx$.

10.29. $\int \frac{-34x-68}{(x+3)(x^2+12x+40)}dx$.

10.30. $\int \frac{21x-64}{(x+2)(x^2-10x+29)}dx$.

Завдання 11. Знайти інтеграл:

11.1. $\int \frac{x^3-2x^2+6x-1}{(x-1)^2(x^2+4)}dx$.

11.2. $\int \frac{x^2+x+1}{x^4+x^2}dx$.

11.3. $\int \frac{2+17x-3x^2}{(x-3)^2(x^2+4)}dx$.

11.4. $\int \frac{2x^2+9x+18}{x^4+9x^2}dx$.

11.5. $\int \frac{2x^2-7x+10}{(x-1)(x^3-x^2+4x-4)}dx$.

11.6. $\int \frac{8x+4}{x^4+4x^2}dx$.

11.7. $\int \frac{2x^3+6x^2+9x+5}{(x+2)^2(x^2+1)}dx$.

11.8. $\int \frac{7x^2-20x+8}{(x-4)(x^3-4x^2+4x-16)}dx$.

11.9. $\int \frac{4x^3+6x^2+12x+5}{(x+1)(x^3+x^2+4x+4)}dx$.

11.10. $\int \frac{9x+18}{(x^4+9x^2)}dx$.

11.11. $\int \frac{3x^2+20x+13}{(x+3)^3(x^2+1)}dx$.

11.12. $\int \frac{16x+32}{x^4+16x^2}dx$.

11.13. $\int \frac{4x^2+31x+26}{(x+4)(x^3+4x^2+x+4)}dx$.

11.14. $\int \frac{(x^2+x-10)}{(x+1)^2(x^2+4)}dx$.

11.15. $\int \frac{3x^2+12x-4}{(x+2)(x^3+2x^2+4x+8)}dx$.

11.16. $\int \frac{2x^2+11x-11}{(x+3)^2(x^2+4)}dx$.

11.17. $\int \frac{4x^2+4x-40}{(x-4)(x^3-4x^2+4x-16)}dx$.

11.18. $\int \frac{5x^2+36x+24}{(x+4)^2(x^2+4)}dx$.

11.19. $\int \frac{2x^2+10x+28}{(x+1)^2(x^2+9)}dx$.

11.20. $\int \frac{5x^2+4x+11}{(x-1)^2(x^2+9)}dx$.

11.21. $\int \frac{7x^2-7x+12}{(x-2)(x^3-2x^2+9x-18)}dx$.

11.22. $\int \frac{2x^2+3x-28}{(x+2)^2(x^2+9)}dx$.

11.23. $\int \frac{7x^2-12x+9}{(x-3)^2(x^2+9)}dx$.

11.24. $\int \frac{-3x^2+12x-27}{(x+3)^2(x^2+9)}dx$.

11.25. $\int \frac{-x^2-4x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$.

11.26. $\int \frac{4x^2-2x+2}{(x-2)^2(x^2+1)}dx$.

11.27. $\int \frac{2x^2-11x+4}{(x-2)^2(x^2+1)}dx$.

11.28. $\int \frac{2x+14}{(x-3)^2(x^2+1)}dx$.

11.29. $\int \frac{7x^2-23x+14}{(x-4)^2(x^2+1)}dx$.

11.30. $\int \frac{x^2-4x+20}{(x-2)^2(x^2+4)}dx$.

Завдання 12. Знайти інтеграл:

12.1. $\int \dfrac{dx}{x^{1/2}+x^{1/3}}$.

12.2. $\int \dfrac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$.

12.3. $\int \dfrac{dx}{(x+1)^{1/2}+(x+1)^{1/3}}$.

12.4. $\int \dfrac{(1+\sqrt[4]{x})dx}{x+\sqrt{x}}$.

12.5. $\int \dfrac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$.

12.6. $\int \dfrac{dx}{x-\sqrt[3]{x}}$.

12.7. $\int \dfrac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$.

12.8. $\int \dfrac{\sqrt{x}-1}{x+\sqrt[3]{x}}dx$.

12.9. $\int \dfrac{dx}{(\sqrt[3]{x}+4)\sqrt{x}}$.

12.10. $\int \dfrac{1+\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$.

12.11. $\int \dfrac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$.

12.12. $\int \dfrac{(\sqrt[6]{x}+1)dx}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[6]{x^5}}$.

12.13. $\int \dfrac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}$.

12.14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}$.

12.15. $\int \dfrac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$.

12.16. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

12.17. $\int \dfrac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$.

12.18. $\int \dfrac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

12.19. $\int \dfrac{dx}{(\sqrt{x+2}+1)\sqrt{\sqrt{x+2}-1}}$.

12.20. $\int \dfrac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$.

12.21. $\int \dfrac{\sqrt{x+1}dx}{(\sqrt{x+1}-1)^2}$.

12.22. $\int \dfrac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$.

12.23. $\int \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx$.

12.24. $\int \dfrac{x}{(x+1)^{1/2}+(x+1)^{1/3}}dx$.

12.25. $\int \dfrac{\sqrt{x+5}}{x}dx$.

12.26. $\int \dfrac{xdx}{(x-1)^{1/2}+(x-1)^{1/3}}$.

12.27. $\int \sqrt{\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}}\dfrac{dx}{x}$.

12.28. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}$.

12.29. $\int \dfrac{5dx}{2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

12.30. $\int \dfrac{2dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}$.

Завдання 13. Знайти інтеграл:

13.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

13.2. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

13.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+9)^3}}$.

13.4. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4+x^2}}$.

13.5. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

13.6. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}dx}{x^4}$.

13.7. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

13.8. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$.

13.9. $\int \frac{dx}{\sqrt{(2-x^2)^3}}$.

13.10. $\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{4-x^2}}$.

13.11. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

13.12. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$.

13.13. $\int \frac{dx}{(x^2-10)\sqrt{x^2-10}}$.

13.14. $\int \frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}$.

13.15. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

13.16. $\int \frac{x^3 dx}{3+\sqrt{9-x^2}}$.

13.17. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

13.18. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$.

13.19. $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$.

13.20. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

13.21. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+3}}$.

13.22. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{6-x^2}}$.

13.23. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$.

13.24. $\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

13.25. $\int \sqrt{25-x^2}dx$.

13.26. $\int \frac{dx}{(3-x^2)\sqrt{3-x^2}}$.

13.27. $\int \frac{1}{x^3\sqrt{1+x^2}}dx$.

13.28. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx$.

13.29. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx$.

13.30. $\int \frac{x^4}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Завдання 14. Знайти інтеграл:

14.1. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x-x^2}}$.

14.2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+6x+1}}$.

14.3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$.

14.4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+8x-9}}$.

14.5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{6x^2-x+5}}$.

14.6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+8x+1}}$.

14.7. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{6x-x^2-5}}$.

14.8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+2}}$.

14.9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+3x-2x^2}}$.

14.10. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$.

14.11. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+5}}$.

14.12. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2+3x+1}}$.

14.13. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2+3x-1}}$.

14.14. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+3x+4}}$.

14.15. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x-2x^2}}$.

14.16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+6x-1}}$.

14.17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x+3}}$.

14.18. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+3x-1}}$.

14.19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

14.20. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-12}}$.

14.21. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+8x+2}}$.

14.22. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x+7}}$.

14.23. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2+3x-1}}$.

14.24. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x-x^2}}$.

14.25. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$.

14.26. $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2+10x-2}}$.

14.27. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+3}}$.

14.28. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x+4}}$.

14.29. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-5}}$.

14.30. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+2x-3}}$.

Завдання 15. Знайти інтеграл:

15.1. $\int \sin^4 2x dx$.

15.2. $\int \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} dx$.

15.3. $\int \sin^4 x dx$.

15.4. $\int \sin^4 2x dx$.

15.5. $\int \sin^4 \frac{x}{3} dx$.

15.6. $\int \cos^4 3x dx$.

15.7. $\int \sin^4 \frac{x}{3} \cos^2 \frac{x}{3} dx$.

15.8. $\int \sin^2 2x \cos^2 2x dx$.

15.9. $\int \sin^4 \frac{x}{2} dx$.

15.10. $\int \frac{\sin^4 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

15.11. $\int \sin^2 3x \cos^2 3x dx$.

15.12. $\int \cos^4 2x dx$.

15.13. $\int \sin^4 5x dx$.

15.14. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$.

15.15. $\int \sin^2 2x \cos^4 2x dx$.

15.16. $\int \sin^2 \frac{x}{7} \cos^2 \frac{x}{7} dx$.

15.17. $\int \sin^4 2x \cos^2 2x dx$.

15.18. $\int \cos^4 3x \sin^2 3x dx$.

15.19. $\int \cos^4 \frac{x}{2} \sin^4 \frac{x}{2} dx$.

15.20. $\int \cos^4 \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{2} dx$.

15.21. $\int \sin^4 4x \cos^2 4x dx$.

15.22. $\int \sin^4 x \cos^4 x dx$.

15.23. $\int \sin^4 5x \cos^2 5x dx$.

15.24. $\int \sin^2 \frac{x}{4} cos^4 \frac{x}{4} dx$.

15.25. $\int \sin^2 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} dx$.

15.26. $\int \cos^4 \frac{x}{2} dx$.

15.27. $\int \sin^4 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} dx$.

15.28. $\int \sin^4 3x dx$.

15.29. $\int \sin^2 (x+1) \cos^4 (x+1) dx$.

15.30. $\int \sin^2 \frac{x}{8} \cos^2 \frac{x}{8} dx$.

Завдання 16. Знайти інтеграл:

16.1. $\int \cos^2 x \sin^3 x dx$.

16.2. $\int \cos^3 3x \sin^2 3x dx$.

16.3. $\int \cos^2 \frac{x}{2} \sin^3 \frac{x}{2} dx$.

16.4. $\int \cos^3 \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{2} dx$.

16.5. $\int \cos^5 x dx$.

16.6. $\int \cos^5 x \sin^2 x dx$.

16.7. $\int \sin^5 \frac{x}{3} dx$.

16.8. $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$.

16.9. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx$.

16.10. $\int \sin^3 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} dx$.

16.11. $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$.

16.12. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$.

16.13. $\int \cos^3 \frac{x}{3} \sin^2 \frac{x}{3} dx$.

16.14. $\int \frac{\cos^3 x/2}{\sin^4 x/2} dx$.

16.15. $\int \frac{\cos^3 3x}{\sin^2 3x} dx$.

16.16. $\int \sin^3 5x dx$.

16.17. $\int \sin^3 3x \cos^3 3x dx$.

16.18. $\int \frac{\cos^3 4x}{\sin^7 4x} dx$.

16.19. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx$.

16.20. $\int \sin^8 x \cos^3 x dx$.

16.21. $\int \sin^5 x \cos^2 x dx$.

16.22. $\int \frac{\sin^3 2x}{\sqrt[3]{\cos^2 2x}} dx$.

16.23. $\int \sin^5 x dx$.

16.24. $\int \cos^3 2x \sin^5 2x dx$.

16.25. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x} dx$.

16.26. $\int \cos^3 2x \sin^2 2x dx$.

16.27. $\int \frac{\cos^3 2x}{\sin^4 2x} dx$.

16.28. $\int \sin^5 x \sqrt{\cos^3 x} dx$.

16.29. $\int \sin^2 5x \cos^4 5x dx$.

16.30. $\int \sin^3 2x \cos^2 2x dx$.

Завдання 17. Знайти інтеграл:

17.1. $\int \mathrm{tg}^3 7x dx$.

17.2. $\int \mathrm{ctg}^3 7x dx$.

17.3. $\int \mathrm{ctg}^4 x dx$.

17.4. $\int \mathrm{tg}^3 x dx$.

17.5. $\int \mathrm{ctg}^4 \frac{x}{3} dx$.

17.6. $\int \mathrm{tg}^3 3x dx$.

17.7. $\int \mathrm{ctg}^3 4x dx$.

17.8. $\int \mathrm{ctg}^3 3x dx$.

17.9. $\int \mathrm{ctg}^4 3x dx$.

17.10. $\int \mathrm{tg}^3 6x dx$.

17.11. $\int \mathrm{ctg}^4 \frac{x}{4} dx$.

17.12. $\int \mathrm{tg}^4 x dx$.

17.13. $\int \mathrm{ctg}^3 \frac{x}{4} dx$.

17.14. $\int \mathrm{ctg}^5 \frac{x}{4} dx$.

17.15. $\int \mathrm{tg}^3 \frac{x}{4} dx$.

17.16. $\int \mathrm{ctg}^5 \frac{x}{2} dx$.

17.17. $\int \mathrm{tg}^7 \frac{x}{2} dx$.

17.18. $\int \mathrm{ctg}^5 2x dx$.

17.19. $\int \mathrm{ctg}^5 3x dx$.

17.20. $\int \mathrm{tg}^3 5x dx$.

17.21. $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^6 x} dx$.

17.22. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} dx$.

17.23. $\int \mathrm{ctg}^5 x dx$.

17.24. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x} dx$.

17.25. $\int \mathrm{tg}^4 2x dx$.

17.26. $\int \mathrm{ctg}^3 3x dx$.

17.27. $\int \mathrm{tg}^3 \frac{x}{2} dx$.

17.28. $\int \mathrm{tg}^4 \frac{x}{2} dx$.

17.29. $\int \mathrm{tg}^3 4x dx$.

17.30. $\int \mathrm{tg}^3 \frac{x}{3} dx$.

Завдання 18. Знайти інтеграл:

18.1. $\int \sin\frac{x}{2}\cos 3x dx$.

18.2. $\int \sin 2x\cos 3x dx$.

18.3. $\int \sin x\sin 2x\cos 3x dx$.

18.4. $\int \sin 5x\cos 3x dx$.

18.5. $\int \sin 2x\cos 3x dx$.

18.6. $\int \sin 4x\cos 2x dx$.

18.7. $\int \cos x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4} dx$.

18.8. $\int \sin x\cos\frac{x}{2} dx$.

18.9. $\int \sin 4x\cos 3x dx$.

18.10. $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{4} dx$.

18.11. $\int \sin\frac{x}{2}\sin 3x dx$.

18.12. $\int \sin 4x\cos\frac{x}{2} dx$.

18.13. $\int \sin\frac{x}{2}\cos 3x dx$.

18.14. $\int \cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{4} dx$.

18.15. $\int \sin 2x\sin 3x dx$.

18.16. $\int \sin x\cos 3x dx$.

18.17. $\int \sin 2x\cos x\cos 3x dx$.

18.18. $\int \sin 4x\cos 2x dx$.

18.19. $\int \sin x\cos 3x\sin 4x dx$.

18.20. $\int \sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2} dx$.

18.21. $\int \sin x\cos x\sin 4x dx$.

18.22. $\int \sin x\cos x\sin 2x dx$.

18.23. $\int \sin x\cos 9x\cos 3x dx$.

18.24. $\int \sin 3x\sin 2x dx$.

18.25. $\int \sin x\sin 2x\sin 3x dx$.

18.26. $\int \sin x\sin 2x\cos\frac{x}{4} dx$.

18.27. $\int \sin 2x\sin 3x\cos x dx$.

18.28. $\int \sin 5x\cos 6x dx$.

18.29. $\int \sin x\cos 5x dx$.

18.30. $\int \sin 2x\cos 3x dx$.

Завдання 19. Знайти інтеграл:

19.1. $\int \frac{dx}{2-5\sin x}$.

19.2. $\int \frac{dx}{1-4\cos x}$.

19.3. $\int \frac{dx}{4-5\sin x}$.

19.4. $\int \frac{dx}{3\sin x+5\cos x}$.

19.5. $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$.

19.6. $\int \frac{dx}{2+3\cos x}$.

19.7. $\int \frac{dx}{7+2\sin x+3\cos x}$.

19.8. $\int \frac{3dx}{7+\cos x}$.

19.9. $\int \frac{dx}{4-\cos x}$.

19.10. $\int \frac{dx}{1+\sin x+2\cos x}$.

19.11. $\int \frac{dx}{\sin x-2\cos x}$.

19.12. $\int \frac{dx}{2+\sin x-\cos x}$.

19.13. $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$.

19.14. $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

19.15. $\int \frac{dx}{5+2\cos x}$.

19.16. $\int \frac{dx}{\sin x+2\cos x}$.

19.17. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$.

19.18. $\int \frac{(7+\sin 2x)}{1-\sin 2x}dx$.

19.19. $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$.

19.20. $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x}$.

19.21. $\int \frac{1-\sin x}{2-\sin x}dx$.

19.22. $\int \frac{dx}{1-\sin x+\cos x}$.

19.23. $\int \frac{dx}{2-\sin x+\cos x}$.

19.24. $\int \frac{7+\cos x}{7-\cos x}dx$.

19.25. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x-4}$.

19.26. $\int \frac{dx}{7-5\sin x}$.

19.27. $\int \frac{dx}{7+2\cos x}$.

19.28. $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$.

19.29. $\int \frac{dx}{1-\sin x-\cos x}$.

19.30. $\int \frac{dx}{\sin x(2-\cos x)}$.

Завдання 20. Знайти інтеграл:

20.1. $\int e^{x^3} x^2 \sin x^3 dx$.

20.2. $\int e^{2x} \sin x dx$.

20.3. $\int x e^{x^2} \sin x^2 dx$.

20.4. $\int e^{x/2} \cos x dx$.

20.5. $\int 4^{x/2} \sin x dx$.

20.6. $\int \frac{e^{\arccos x} dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

20.7. $\int e^{x} \cos 2x dx$.

20.8. $\int e^{-x/2} \sin x dx$.

20.9. $\int 4^{-x} \sin x dx$.

20.10. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2(1+x^2)} dx$.

20.11. $\int e^{-4x} \cos 2x dx$.

20.12. $\int x \cdot \sin \sqrt{x} dx$.

20.13. $\int \frac{x \cdot \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2} dx$.

20.14. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^4} dx$.

20.15. $\int \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx$.

20.16. $\int \frac{dx}{4+5\sin^2 x}$.

20.17. $\int x \cdot e^{x^2} (x^2+1) dx$.

20.18. $\int \frac{x \cdot \ln x}{\sqrt{(x^2-1)^3}} dx$.

20.19. $\int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x - 4^x} dx$.

20.20. $\int e^{-3x} \sin 2x dx$.

20.21. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

20.22. $\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^x} dx$.

20.23. $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x}$.

20.24. $\int \frac{x e^{-1/\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx$.

20.25. $\int e^{2x} \cos 3x dx$.

20.26. $\int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx$.

20.27. $\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln \sin x} dx$.

20.28. $\int \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx$.

20.29. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

20.30. $\int e^{\sqrt[3]{x+1}} dx$.

3. РОЗВ'ЯЗОК ТИПОВОГО ВАРІАНТА

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int (7x+9)^{15}\,dx$.

Розв'язання. Цей інтеграл буде табличним, якщо під знаком диференціала стоятиме аргумент $7x+9$ підінтегральної функції $(7x+9)^{15}$. Оскільки $d(7x+9)=(7x+9)'dx=7dx$, то

$$\int (7x+9)^{15}\,dx=\frac{1}{7}\int (7x+9)^{15}\,\underbrace{d(7x+9)}_{7dx}.$$

Отже, підстановка $7x+9=t$ зводить заданий інтеграл до табличного

$$\int (7x+9)^{15}\,dx=\left\{\begin{aligned} &t=7x+9\\ &dt=(7x+9)'dx=7dx\end{aligned}\right\}=\frac{1}{7}\int t^{15}dt=\frac{1}{7}\cdot\frac{t^{15+1}}{15+1}+C=\frac{1}{7}\cdot\frac{t^{16}}{16}+C.$$

Повертаючись до старої змінної, остаточно отримаємо

$$\int (7x+9)^{15}\,dx=\frac{(7x+9)^{16}}{112}+C.$$

2. $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2+5}}\,dx$.

Розв'язання. Через те, що $d(x^2+5)=2xdx$, то

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{\sqrt{x^2+5}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+5)}{\sqrt{x^2+5}}=\sqrt{x^2+5}+C.$$

3. $\int \dfrac{dx}{\arcsin^7 x\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язання. Ураховуючи те, що $d(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, маємо

$$\int\frac{1}{\arcsin^7 x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\left\{\begin{aligned} &t=\arcsin x\\ &dt=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\end{aligned}\right\}=\int\frac{1}{t^7}dt=\int t^{-7}dt=\frac{t^{-7+1}}{-7+1}+C=$$

$$=-\frac{1}{6t^6}+C=-\frac{1}{6\arcsin^6 x}+C.$$

4. $\int \frac{dx}{\cos^2 x(5+\operatorname{tg} x)}$.

Розв'язання. Зважаючи на співвідношення $d(5+\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x}dx$, отримаємо

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x(5+\operatorname{tg} x)} = \left\{\begin{matrix} t = 5+\operatorname{tg} x \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx \end{matrix}\right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|5+\operatorname{tg} x| + C.$$

5. $\int \frac{e^x}{16+e^{2x}}dx$.

Розв'язання. Оскільки $d(e^x) = e^x dx$, маємо $\int \frac{e^x}{16+e^{2x}}dx = \int \frac{d(e^x)}{4^2+(e^x)^2}$.

Після підстановки $t = e^x$ табличний інтеграл набуває такої форми:

$$\int \frac{d(e^x)}{4^2+(e^x)^2} = \left\{\begin{matrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{matrix}\right\} = \int \frac{dt}{4^2+t^2} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{t}{4} + C = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{4} + C.$$

6. $\int (1-3x)\sin 2x dx$.

Розв'язання. Застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int (1-3x)\sin 2x dx = \left\{\begin{array}{l|c} u = 1-3x; & du = -3dx \\ dv = \sin 2x dx & v = \int \sin 2x dx = -\cos 2x/2 \end{array}\right\} =$$

$$= -(1-3x)\cos 2x/2 - \frac{3}{2}\int \cos 2x dx = -(1-3x)\cos 2x/2 - \frac{3}{4}\sin 2x + C.$$

7. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

Розв'язання

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \left\{\begin{array}{l|c} u = \ln x; & du = dx/x \\ dv = dx/\sqrt{x} & v = \int dx/\sqrt{x} = 2\sqrt{x} \end{array}\right\} = 2\sqrt{x}\ln x -$$

$$-\int \frac{2\sqrt{x}}{x}dx = 2\sqrt{x}\ln x - 2\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C.$$

8. $\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$.

Розв'язання. Виділимо в знаменнику дробу повний квадрат:

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+25} = \int \frac{dx}{x^2+2\cdot 3x+9-9+25} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+16} = \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+4^2} =$$
$$= \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{4} + C.$$

9. $\int \frac{2x-5}{\sqrt{1-4x-3x^2}}dx$.

Розв'язання. Виділимо в чисельнику підінтегральної функції доданок, що дорівнює похідній підкореневого виразу знаменника, і подамо даний інтеграл у вигляді суми двох інтегралів:

$$I = \int \frac{2x-5}{\sqrt{1-4x-3x^2}}dx = \left\{\begin{array}{l} (1-4x-3x^2)' = -4-6x \\ 2x-5 = -\frac{1}{3}(-6x-4+4+15) = -\frac{1}{3}(-6x-4) - \frac{19}{3} \end{array}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{-6x-4}{\sqrt{1-4x-3x^2}}dx - \frac{19}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x-3x^2}} = -\frac{1}{3}I_1 - \frac{19}{3}I_2.$$

У першому інтегралі виконаємо заміну змінної, а в знаменнику другого виділимо повний квадрат:

$$I_1 = \int \frac{-6x-4}{\sqrt{1-4x-3x^2}}dx = \left\{\begin{array}{l} t = 1-4x-3x^2 \\ dt = (-4-6x)dx \end{array}\right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{1-4x-3x^2} + C;$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x-3x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3}\sqrt{-(x+\frac{2}{3})^2+\frac{7}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(x+\frac{2}{3})}{\sqrt{\frac{7}{9}-(x+\frac{2}{3})^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x+\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{7}}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{3x+2}{\sqrt{7}} + C.$$

Остаточно $I = -\frac{2\sqrt{1-4x-3x^2}}{3} - \frac{19}{3\sqrt{3}}\arcsin\frac{3x+2}{\sqrt{7}} + C$.

10. $\int\frac{dx}{(x-2)(x^2+4x+3)}$.

Розв'язання. Розкладемо знаменник на множники: $x^2+4x+3=0$; $D=16-4\cdot 3=4$; $x_{1,2}=\frac{-4\pm 2}{2}$; $x_1=-3$, $x_2=-1$; $x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$. Тобто

$$\int\frac{dx}{(x-2)(x^2+4x+3)}=\int\frac{dx}{(x-2)(x+1)(x+3)}.$$

Подамо підінтегральний дріб у вигляді суми простих дробів:

$$\frac{1}{(x-2)(x+1)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+3}=$$

$$=\frac{A(x+1)(x+3)+B(x-2)(x+3)+C(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+1)(x+3)};$$

$$1=A(x+1)(x+3)+B(x-2)(x+3)+C(x-2)(x+1).$$

Надамо змінній x значень дійсних коренів знаменника і отримаємо систему рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{array}{r|l} x=-3 & 10C=1;\ \ C=1/10; \\ x=-1 & -6B=1;\ \ B=-1/6; \\ x=\ 2 & 15A=1;\ \ A=1/15. \end{array}$$

Тобто $\int\frac{dx}{(x-2)(x+1)(x+3)}=\int\left(\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{x+3}\right)dx=$

$$=\frac{1}{15}\ln\left|x-2\right|-\frac{1}{6}\ln\left|x+1\right|+\frac{1}{10}\ln\left|x+3\right|+C.$$

11. $\int\frac{dx}{(x-2)^2(x^2+1)}$.

Розв'язання. Розкладемо підінтегральну функцію на суму простих дробів:

$$\frac{1}{(x-2)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{Mx+N}{x^2+1}=$$

$$=\frac{A(x-2)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Mx+N)(x-2)^2}{(x-2)(x^2+1)}.$$

$$1 = A(x-2)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Mx+N)(x-2)^2;$$
$$1 = A(x^3-2x^2+x-2) + B(x^2+1) + (Mx+N)(x^2-4x+4);$$
$$1 = Ax^3 - 2Ax^2 + Ax - 2A + Bx^2 + B + Mx^3 - 4Mx^2 + Nx^2 + 4Mx - 4Nx + 4N. \qquad (27)$$

При $x = 2$ отримаємо $1 = 5B$, звідки $B = 1/5$. Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах рівності (27) і матимемо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів A, M, N:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A + M = 0; \\ x & A + 4M - 4N = 0; \\ x^0 & -2A + B + 4N = 1. \end{array}$$

Із першого рівняння отримаємо $A = -M$, а підставивши A в друге і третє рівняння, одержимо $\begin{cases} 3M - 4N = 0; \\ 2M + B + 4N = 1. \end{cases}$ Додамо до другого рівняння перше:

$\begin{cases} 4N = 3M; \\ 5M + 1/5 = 1 \end{cases}$, тобто $\begin{cases} N = 3M/4; \\ M = 4/25 \end{cases}$, звідки $N = 3/25;\ A = -4/25$.

Тоді $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)^2(x^2+1)} = \int \left(\frac{-\frac{4}{5}}{x-2} + \frac{\frac{1}{5}}{(x-2)^2} + \frac{\frac{4}{5}x + \frac{3}{25}}{x^2+1} \right) dx =$

$$= -\frac{4}{5}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{(x-2)^2} + \frac{4}{5}\int \frac{x}{x^2+1}dx + \frac{3}{25}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= -\frac{4}{5}\ln|x-2| - \frac{1}{5(x-2)} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + \frac{3}{25}\operatorname{arctg} x + C.$$

12. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-1}}dx$.

Розв'язання. $\displaystyle I = \int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-1}}dx = \begin{Bmatrix} x-1 = t^6 \\ dx = 6t^5dt \end{Bmatrix} = \int \frac{t^3}{t^3 - t^2}6t^5dt =$

$$= 6\int \frac{t}{t-1}t^5dt = 6\int \frac{t^6}{t-1}dt.$$

Виділивши цілу частину й правильний дріб із підінтегральної функції, матимемо

$$I = 6\int (t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1})dt =$$

$$=6\left(\frac{t^6}{6}+\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+C=\left\{t=\sqrt[6]{x-1}\right\}=$$

$$=6\left(\frac{x-1}{6}+\frac{\sqrt[6]{(x-1)^5}}{5}+\frac{\sqrt[6]{(x-1)^4}}{4}+\frac{\sqrt[6]{(x-1)^3}}{3}+\frac{\sqrt[6]{(x-1)^2}}{2}+\sqrt[6]{x-1}+\ln\left|\sqrt[6]{x-1}-1\right|\right)+C.$$

13. $\int\sqrt{9-x^2}\,dx$.

Розв'язання. $\int\sqrt{9-x^2}\,dx=\left\{\begin{matrix}x=3\sin t\\ dx=3\cos t\,dt\end{matrix}\right\}=\int\sqrt{9-9\sin^2 t}\;3\cos t\,dt=$

$$=3\int\sqrt{9(1-\sin^2 x)}\cos t\,dt=9\int\sqrt{\cos^2 t}\cos t\,dt=9\int\cos^2 t\,dt=9\int\frac{1}{2}(1-\cos 2t)\,dt=$$

$$=\frac{9}{2}\left(\int dt-\int\cos 2t\,dt\right)=\frac{9}{2}t-\frac{9}{4}\sin 2t+C=\left\{t=\arcsin\frac{x}{3}\right\}=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}-\frac{9}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{x}{3}\right)+C.$$

14. $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+4x-1}}$.

Розв'язання

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+4x-1}}=\left\{x-1=\frac{1}{t};\;x=1+\frac{1}{t};\;dx=-\frac{1}{t^2}dt;\;t=\frac{1}{x-1}\right\}=$$

$$=\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{t+1}{t}\right)^2+4\left(\frac{t+1}{t}\right)-1}}=-\int\frac{dt}{t\sqrt{\frac{t^2+2t+1+4t^2+4t-t^2}{t^2}}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{4t^2+6t+1}}=$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{4\left(t^2+\frac{6}{4}t+\frac{1}{4}\right)}}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+2\cdot\frac{3}{4}t+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}+\frac{1}{4}}}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{5}{16}}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t+\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\left(t+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{5}{16}}}=-\frac{1}{2}\ln\left|t+\frac{3}{4}+\sqrt{\left(t+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{5}{16}}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{x-1}+\frac{3}{4}+\sqrt{\left(\frac{1}{x-1}+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{5}{16}}\right|+C.$$

15. $\int \sin^2 \frac{x}{7} \cos^2 \frac{x}{7} dx$.

Розв'язання. Оскільки в інтегралі степені тригонометричних функцій парні, то використаємо формули зниження степеня:

$$\int \sin^2 \frac{x}{7} \cos^2 \frac{x}{7} dx = \int \left(\sin \frac{x}{7} \cos \frac{x}{7} \right)^2 dx = \int \frac{1}{4} \sin^2 \frac{2x}{7} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{4x}{7} \right) dx =$$
$$= \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos \frac{4x}{7} dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{4} \sin \frac{4x}{7} + C = \frac{1}{8} x - \frac{7}{32} \sin \frac{4x}{7} + C.$$

16. $\int \sin^2 5x \cos^3 5x dx$.

Розв'язання. Тут один із показників степеня – непарний, тому застосуємо метод відокремлення множника.

$$\int \sin^2 5x \cos^3 5x dx = \int \sin^2 5x \cos^2 5x \cos 5x dx = \int \sin^2 5x (1 - \sin^2 5x) \cos 5x dx =$$
$$= \{ t = \sin 5x;\ dt = 5 \cos 5x dx \} = \frac{1}{5} \int t^2 (1 - t^2) dt = \frac{1}{5} \int t^2 dt - \frac{1}{5} \int t^4 dt = \frac{t^3}{15} - \frac{t^5}{25} + C =$$
$$= \frac{\sin^3 5x}{15} - \frac{\sin^5 5x}{25} + C.$$

17. $\int \mathrm{tg}^3 \frac{x}{8} dx$.

Розв'язання. $\int \mathrm{tg}^3 \frac{x}{8} dx = \left\{ t = \mathrm{tg} \frac{x}{8};\ \frac{x}{8} = \mathrm{arctg}\, t;\ x = 8 \,\mathrm{arctg}\, t;\ dx = \frac{8}{1+t^2} dt \right\} =$

$$= \int t^3 \frac{8}{1+t^2} dt = 8 \int \frac{t^3 dt}{1+t^2} = 8 \int \left(t - \frac{t}{1+t^2} \right) dt = 8 \int t dt - 8 \int \frac{t dt}{1+t^2} = \left\{ z = 1 + t^2;\ dz = 2t dt \right\} =$$

$$= 8 \frac{t^2}{2} - 4 \int \frac{dz}{z} = 4t^2 - 4 \ln |z| + C = 4t^2 - 4 \ln \left| 1 + t^2 \right| + C = 4 \,\mathrm{tg}^2 \frac{x}{8} - 4 \ln \left| 1 + \mathrm{tg}^2 \frac{x}{8} \right| + C.$$

18. $\int \sin 5x \cos \frac{x}{3} dx$.

Розв'язання. $\int \sin 5x \cos \frac{x}{3} dx = \frac{1}{2} \int \left(\sin \frac{14x}{3} + \sin \frac{16x}{3} \right) dx = \frac{1}{2} \int \sin \frac{14x}{3} dx +$

$$+\frac{1}{2}\int\sin\frac{16x}{3}dx=\left\{\begin{array}{l} t=\frac{14x}{3};\ x=\frac{3}{14}t;\ dx=\frac{3}{14}dt \\ z=\frac{16x}{3};\ x=\frac{3}{16}t;\ dx=\frac{3}{16}dz \end{array}\right\}=\frac{1}{2}\int\sin t\frac{3}{14}dt+\frac{1}{2}\int\sin z\frac{3}{16}dz=$$

$$=-\frac{3}{28}\cos t-\frac{3}{32}\cos z+C=-\frac{3}{28}\cos\frac{14x}{3}-\frac{3}{32}\cos\frac{16x}{3}+C.$$

19. $\int\frac{dx}{6-\sin 4x}$.

Розв'язання. Скористаємося універсальною тригонометричною підстановкою

$$\int\frac{dx}{6-\sin 4x}=\left\{\operatorname{tg}\frac{4x}{2}=\operatorname{tg}2x=t;\ 2x=\operatorname{arctg}t;\ x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t;\ dx=\frac{dt}{2(1+t^2)};\ \sin 4x=\frac{2t}{1+t^2}\right\}=$$

$$=\int\frac{\frac{dt}{2(1+t^2)}}{6-\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{6+6t^2-2t}=\frac{1}{12}\int\frac{dt}{t^2-\frac{t}{3}+1}=\frac{1}{12}\int\frac{dt}{t^2-2\frac{t}{6}+\frac{1}{36}-\frac{1}{36}+1}=$$

$$=\frac{1}{12}\int\frac{dt}{\left(t-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{35}{36}}=\left\{z=t-\frac{1}{36};\ t=z+\frac{1}{36};\ dt=dz\right\}=\frac{1}{12}\int\frac{dz}{z^2+\left(\frac{\sqrt{35}}{6}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{12}\cdot\frac{6}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\frac{6z}{\sqrt{35}}+C=\frac{1}{2\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\frac{6\left(t-\frac{1}{36}\right)}{\sqrt{35}}+C=\frac{1}{2\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\left(\frac{36\operatorname{tg}2x-1}{6\sqrt{35}}\right)+C.$$

20. $\int\operatorname{arcctg}\sqrt{5x+1}\,dx$.

Розв'язання

$$\int\operatorname{arcctg}\sqrt{5x+1}\,dx=\left\{\begin{array}{l}\sqrt{5x+1}=t;\ 5x+1=t^2 \\ x=\frac{1}{5}(t^2-1);\ dx=\frac{2}{5}tdt\end{array}\right\}=\int\operatorname{arcctg}t\cdot\frac{2}{5}tdt=$$

$$=\left\{\begin{array}{l|l} u=\operatorname{arcctg}t; & du=-\frac{dt}{1+t^2} \\ dv=tdt & v=t^2/2\end{array}\right\}=\frac{2}{5}\left(\operatorname{arcctg}t\cdot\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\int\frac{t^2}{1+t^2}dt\right)=\frac{2}{5}\left(\operatorname{arcctg}t\cdot\frac{t^2}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int\frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt\right)=\frac{2}{5}\left(\frac{t^2\cdot\operatorname{arcctg}t}{2}+\frac{1}{2}\int dt-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2}\right)=\frac{2}{5}\left(\frac{t^2\operatorname{arcctg}t}{2}+\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t\right)+$$

$$+C=\frac{1}{5}\left((5x+1)\cdot\operatorname{arcctg}\sqrt{5x+1}+\sqrt{5x+1}-\operatorname{arctg}\sqrt{5x+1}\right)+C.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа: в 2-х т. / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1968. – Т. 1. – 440 с.

2. Сінайський Є.С. Вища математика: навч. посіб.: у 2-х ч. / Є.С. Сінайський, Л.В. Новікова, Л.І. Заславська; М-во освіти і науки України, Нац. гірн. ун-т. – Д.: НГУ, 2013. – Ч. 1. – 399 с.

3. Щипачев В.С. Высшая математика / В.С. Щипачев. – М.: Высш. шк., 1996. – 473 с.

4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по высшей математике / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1990. – 624 с.

5. Вища математика: зб. задач: навч. посіб. / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін.; за ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – К.: А.С.К., 2001. – 480 с.

6. Валєєв К.Г. Математичний практикум: навч. посіб. / К.Г. Валєєв, І.А. Джалладова; М-во освіти і науки України, Київ. нац. екон. ун-т. – К.: КНЕУ, 2004. – 682 с.

Зміст

Навчальне видання

Уланова Наталія Петрівна
Приходько Віра Володимирівна

ПРАКТИКУМ З ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Навчальний посібник

Видано в редакції авторів

Підп. до друку 17.10.2014. Формат 30×42/4.
Папір офсет. Ризографія. Ум. друк. арк. 4,7.
Обл.-вид. арк. 4,7. Тираж 100 пр. Зам. № .

Підготовлено до друку та видрукувано
в Державному вищому навчальному закладі
«Національний гірничий університет»

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004 р.
49027, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19.