УДК 621.85.01

© Н.А. Лубенец, Т.Н. Лубенец

ПЕРЕДАЧА ТЯГОВОГО УСИЛИЯ ГИБКОМУ ТЕЛУ ТРЕНИЕМ

Установлено влияние параметров трения гибкого тела по барабану на передачу тягового усилия трением.

Установлено вплив параметрів тертя гнучкого тіла по барабану на передачу тягового зусилля тертям.

The influence of the parameters of the friction traction flexible body of the drum to transfer driving force of friction.

Передача тягового усилия гибкому телу трением осуществляется за счет силы трения, возникающей между ним и поверхностью приводного барабана или шкива трения. Если в качестве гибкого тела выбирают конвейерную ленту, то она, обычно, огибает один или два приводных барабана, примерно на 180 – 240 градусов. Канат может охватывать шкив трения 1 - 3 и более раз с углом обхвата 180 – 900 и более градусов. Реакция между телами достигается, как правило, натяжением гибкого тела (рис. 1).

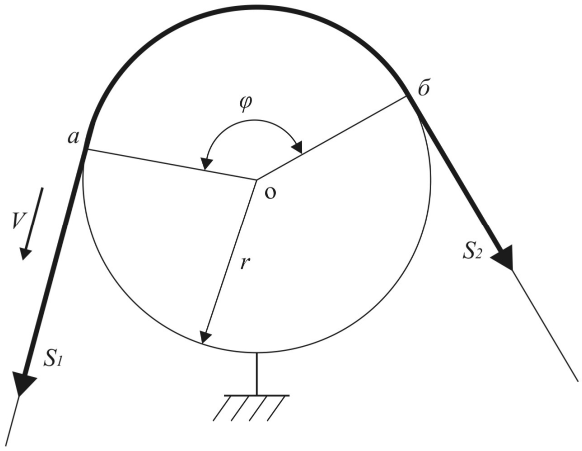

Рис. 1. Расчетная схема: S_2, S_1 – натяжения в набегающей и сбегающей с барабана ветвях гибкого тела; r – радиус барабана; φ – угол обхвата барабана гибким телом; v – направление и скорость движения гибкого тела; q – линейная масса гибкого тела

В основе передачи тягового усилия гибкому телу лежит известный закон трения гибких тел Эйлера (формула Эйлера), открытый в 1775 году. Формула Эйлера является фундаментальным законом трения гибких тел и широко используется в мировой и отечественной практике научных исследований, машиностроении и технике. А решение Эйлера классической задачи о скольжении гибкого тела по неподвижному блоку, из которого вытекает упомянутый выше закон, рассматривается учеными, преподавателями, инженерами и студентами как показательный классический пример решения задач механики аналитическими методами, основателем которых является Эйлер [1-3].

Закон трения гибких тел Эйлера устанавливает взаимосвязь между параметрами трения гибкого тела (идеальной нити) с некоторой линейной массой при скольжении по неподвижному блоку, под действием сил приложенных к его концам (рис. 1).

Согласно нему идеальная нить под действием приложенных к ее концам сил S_1 и S_2 скользит по неподвижному блоку в направлении большей силы, превышающей другую силу на величину суммарной силы трения, которая возникает между нитью и неподвижным блоком, а

$$\frac{S_1 - q \cdot v^2}{S_2 - q \cdot v^2} = e^{\omega \cdot \varphi},$$

где S_1 – натяжения в сбегающей с блока ветви идеальной нити; S_2 - натяжение в набегающей с блока ветви идеальной нити; φ – угол обхвата барабана идеальной нитью; ω – коэффициент трения скольжения между идеальной нитью и блоком, v – скорость скольжения нити; q – линейная масса идеальной нити.

Согласно этому закону без учета центробежных сил конвейерной ленты в режиме скольжения минимальное усилие натяжения конвейерной ленты в сбегающей с барабана ветви [4]

$$S_{2min} = \frac{F_0}{(e^{\omega \cdot \varphi} - 1)},$$

где S_{2min} – минимальное усилие натяжения конвейерной ленты в сбегающей с барабана ветви; F_0 – передаваемое тяговое усилие.

А в режиме сцепления

$$S_{2min} = \frac{F_0 \cdot k_T}{(e^{\omega \cdot \varphi} - 1)},$$

где k_T - коэффициент запаса тяговой способности.

Следовательно, предполагается, что для передачи тягового усилия необходимо обеспечить лишь усилие натяжения гибкого тела в сбегающей с барабана ветви. При этом не регламентируется усилие натяжения в набегающей на барабан ветви, от которых зависит реакция между гибким телом и барабана, что наводит на критические размышления.

Кроме того, в практике действующих расчетов конвейеров коэффициент запаса тяговой способности выбирают с запасом до 40% от необходимого в режиме скольжения, равного 1,4, и не учитываются центробежные силы конвейерной ленты [4].

Согласно данным Андреева А.В. [2], сила трения между барабаном и конвейерной лентой конвейера, которая может считаться гибким телом, полученная экспериментально, намного выше (до 30%) в сравнении с его расчетным значением, полученным с использованием формулы Эйлера. Следовательно, известный, так называемый, коэффициент запаса тяговой способности на 75% необходим для компенсации неправильности используемого в расчетах тяговой способности закона трения гибких тел Эйлера, и лишь оставшиеся 25% собственно для запаса.

А как осуществлять тяговые расчеты других машин с другими значениями параметров трения гибкого тела по блоку, например подьемных машин? Какое значение коэффициента запаса тяговой способности для них принимать? Очевидно, актуально знать правильное влияние параметров трения гибкого тела по блоку на передачу ему тягового усилия трением.

Следовательно, установление правильного влияния параметров трения гибкого тела по блоку на передачу тяговой способности трением, является актуальной проблемой, имеющей большое научное и практическое значение.

Целью статьи является установление влияния параметров трения гибкого тела по блоку на передачу ему тягового усилия трением.

Однако действующие подходы в передаче тягового усилия гибкому телу основаны на устаревших представлениях Эйлера о трении (закон о прямой пропорциональности между силой трения и нормальной реакцией между телами) и не используются принципы сохранения энергии, которые должны соблюдаться. Это обстоятельство привело к ошибочности формулы Эйлера, которая подтверждается практикой [2].

Упомянутый закон трения гибких тел Ейлера не подтверждается практикой [2] и не описывает условий, когда одно из усилий, приложенных к одному из концов гибкого тела, находится в пределах от нуля до $q \cdot v^2$. В окрестности верхнего предела указанного диапазона закон дает весьма противоречивую прогнозную оценку угла обхвата блока гибким телом с заданными фрикционными характеристиками, который стремится к бесконечности.

Все это породило сомнение в правильности закона трения гибких тел Эйлера и, отвечающее ему, необходимое условие для передачи заданного тягового усилия гибкому телу - минимальное усилие натяжения гибкого тела в сбегающей с барабана ветви [4].

Дискуссия ученых вокруг правильности формулы Эйлера не затухает вот уже два столетия [2]. Проблемой несовпадения между формулой Эйлера и данными практики занимались много выдающихся ученых в мире, в том числе основатели кафедры транспортних систем и технологий Державного ВНЗ «Національний гірничий університет» и «Інституту геотехнічної механіки НАН України» (Поляков Н.С., Штокман И.Г.). Но делали они и продолжают это реализовывать их последователи на основе устаревших представлений о трении тел, которые были признаными во время решения задачи Эйлером, и не учитывают развите знаний о трении и открытые принципы сохранения энергии. Многочисленные попытки увязать между собой данные практики и формулы Эйлера посредством учета гравитационных, инерционных, центробежных сил, физико-механических свойств гибкого тягового органа и других факторов, в том числе, путем введения эмпирических коэффициентов и использованием приближенных методов интегрирования, предпринимаемые учёными, не только не привели к существенным поправкам к формуле Эйлера, а, порой, и противоречат выводам некоторых исследователей по одному и тому же вопросу [2].

Вместе с тем, несмотря на данные практики и признание учеными отличия механизмов реализации тягового усилия в реальном тяговом органе и в идеальной нити до недавнего времени было принято считать, что в условиях скольжения они могут быть описаны формулой Эйлера.

Поэтому в 2007 году было предложено новое решение задачи Эйлера, которое учитывает изменившиеся после вывода формулы Эйлера представления о трении, а именно представления Кулона (закон о двухпараметрической линейной зависимости между силой трения и нормальной реакцией между телами) и сформулированный в 40-х годах 19-го столетия закон сохранения энергии, господствующие сейчас в науке [5].

Согласно ему

$$\frac{2\cdot(S_1 - S_2)}{S_1 + S_2 - 2\cdot q\cdot v^2} = \varphi\cdot\omega - const.$$

Для идеальной нити без учета гравитационных сил соответственно

$$\frac{2\cdot(S_1 - S_2)}{S_1 + S_2} = \varphi\cdot\omega - const.$$

Новое решение классической задачи Эйлера преодолевает противоречия между накопившимися данными практики по передаваемому гибкому телу усилию трением и формулой Эйлера [2].

Известно, что сила трения между телами определяется нормальной реакцией между ними и коэффициентом трения тел при этой реакции. Оба этих параметра влияют на передаваемое тяговое усилие гибкому телу. Однако о значении заданной нормальной реакции между гибким телом и блоком в соответствии с законом трения гибких тел Эйлера в технической литературе не упоминается, а ведется речь лишь о значении коэффициента трения для реализации необходимого тягового усилия. Хотя оба параметра очень важны.

Для определения нормальной реакции между телами рассмотрим уравнение равновесия элементарного участка гибкого тела (идеальной нити) в этом направлении (рис. 2).

Уравнение равновесия для элементарного участка гибкого тела *dl*, отвечающего элементарному углу обхвата *dα*, при скольжении гибкого тела по блоку, будет иметь вид

$$S(\alpha)\cdot sin\frac{d\alpha}{2} + \left[S(\alpha) + dS\right]\cdot sin\frac{d\alpha}{2} = dN + dC,$$

где *S(α) и [S(α)+dS]* – усилия натяжения гибкого тела на концах элементарного участка; *dC* – центробежная сила элементарного участка; *dN* – нормальная реакция между элементарным участком гибкого тела и блоком; *da* – приращение угла на элементарном участке гибкого тела.

Отсюда, пренебрегая малыми величинами высшего порядка малости, нормальная реакция между парой трения будет записана в виде уравнения

$$dN = S(\alpha)\cdot d\alpha - dC.$$

Указанная дифференциальная зависимость свидетельствует о том, что нормальная реакция *dN* между элементарным участком гибкого тела *dl* и неподвижным блоком обусловлена натяжением гибкого тела *S(a)* и кривизной поверхности, характеризующейся элементарным углом $d\alpha = \frac{dl}{r}$. С уменьшением радиуса кривизны нормальная реакция увеличивается. Причем, центробежная сила *dC* уменьшает нормальную реакцию *dN*.

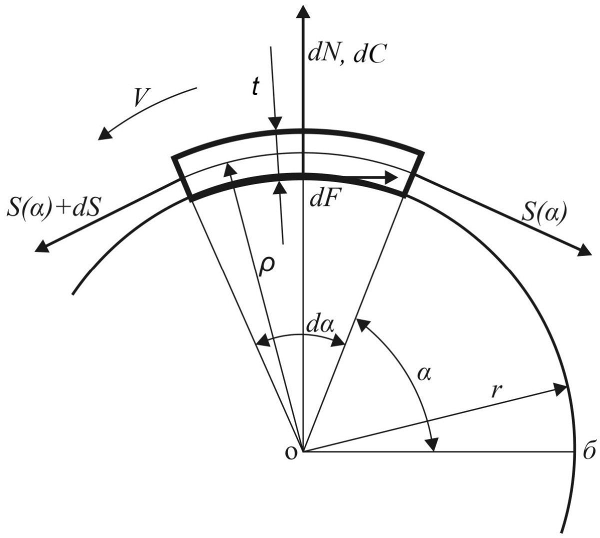

Рис. 1. Элементарный участок гибкого тела dl: S(α) и [S(α)+dS] – усилия натяжения гибкого тела на концах элементарного участка; dC – центробежная сила элементарного участка; dN – нормальная реакция между элементарным участком гибкого тела и барабаном; dF – сила трения скольжения между элементарным участком гибкого тела и барабаном; t – толщина гибкого тела; ρ – радиус условной (нейтральной) продольной линии гибкого тела; α – угол сечения гибкого тела, контактирующего с барабаном; da – элементарный угол на элементарном участке гибкого тела dl; v – направление и скорость движения гибкого тела; q – линейная масса гибкого тела

Если обозначить линейную массу гибкого тела через q, то величина соответствующей элементарной центробежной силы будет выглядеть следующим образом

$$dC = q \cdot \frac{v^2}{r} \cdot dl = q \cdot \frac{v^2}{r} \cdot r \cdot d\alpha = q \cdot v^2 \cdot d\alpha\,,$$

где q – линейная масса гибкого тела.

Поэтому

$$dN = S(\alpha)\cdot d\alpha - dC = S(\alpha)\cdot d\alpha - q\cdot v^2\cdot d\alpha = \left(S(\alpha) - q\cdot v^2\right)\cdot d\alpha.$$

Нормальную реакцию между телами для известного решения Эйлера можно определить из выражения

$$N = \int_0^{\varphi}(S(\alpha) - q\cdot v^2)\cdot d\alpha = \int_0^{\varphi}\left(S_2\cdot e^{\omega a} - q\cdot v^2\right)\cdot d\alpha = \left(\frac{S_2}{\omega}\cdot e^{\omega a} - q\cdot v^2\right)\Big|_0^{\varphi} = \frac{S_2}{\omega}(e^{\omega\varphi} - 1) - \varphi\cdot q\cdot v^2.$$

Отсюда следует, что нормальная реакция между телами согласно формуле Эйлера определяется в том числе и коэффициентом трения тел, который в общем случае неизвестен, и, к тому же, зависит от реакции между ними. Это обстоятельство свидетельствует о невозможности количественно обеспечить заданную нормальную реакцию между гибким телом и блоком, руководствуясь формулой Эйлера, что вызывает сомнение. Сомнительность полученного результата еще раз свидетельствует об ошибочности закона трения гибких тел Эйлера.

Из известного закона трения гибких тел Эйлера сила трения между телами составляет

$$F = (S_2 - q \cdot v^2) \cdot (e^{\omega \cdot \varphi} - 1).$$

По аналогии с предыдущими выкладками для нового решения классической задачи Эйлера (альтернативного формуле Эйлера закона трения гибких тел) в соответствии с принципом сохранения потенциальной энергии заданного натяжения гибкого тела с различными фрикционными характеристиками [5]

$$S(\alpha) = \frac{S_1 - S_2}{\varphi} \cdot \alpha + S_2.$$

Тогда нормальная реакция между гибким телом и блоком будет

$$N = \int_0^{\varphi} (S(\alpha) - q \cdot v^2) \cdot d\alpha = \int_0^{\varphi} \left(\frac{S_1 - S_2}{\varphi} \cdot \alpha + S_2 - q \cdot v^2 \right) \cdot d\alpha = \left(\frac{S_1 - S_2}{\varphi} \cdot \frac{\alpha^2}{2} + S_2 \cdot \alpha - q \cdot v^2 \right) \Big|_0^{\varphi} = \varphi \cdot \frac{S_1 + S - 2 \cdot q \cdot v^2}{2}.$$

Нормальная реакция не зависит от фрикционных свойств гибкого тела. Она определяется усилиями его натяжения в набегающей и сбегающей с барабана ветвях, его массой, скоростью движения и углом обхвата, что является логичным и понятным.

Поэтому, сила трения между телами составит

$$F = \omega \cdot N = \omega \cdot \varphi \cdot \left(\frac{S_1 + S_2 - 2 \cdot q \cdot v^2}{2} \right).$$

Если учесть, что на приводном барабане реализуется тяговое усилие, равное разности усилий натяжения в набегающей и сбегающей с барабана участках гибкого тела, то полученное уравнения отвечает альтернативному формуле Эйлера закону трения гибких тел.

Следовательно, для передачи заданного тягового усилия гибкому телу в режиме скольжения необходимо обеспечить необходимую реакцию между телами, что достигается натяжением гибкого тела

$$S_1 + S_2 = \frac{2 \cdot F_0}{\omega \cdot \varphi} + 2 \cdot q \cdot v^2.$$

А для передачи заданного тягового усилия гибкому тяговому органу в режиме сцепления необходим некоторый запас, который значительно меньший известного (коэффициент не призван компенсировать ошибочность используемого закона трения гибких тел)

$$S_1 + S_2 = \frac{2 \cdot F_0 \cdot k_T}{\omega \cdot \varphi} + 2 \cdot q \cdot v^2.$$

В табл. 1 приведены сравнительные данные оценки силы трения между неподвижным барабаном и конвейерной лентой согласно известным законам трения гибких тел, при различных скоростях скольжения.

Условия испытаний: ширина конвейерной ленты – 490 *мм*; толщина конвейерной ленты – 10 *мм*; погонная масса конвейерной ленты (q) – 7,6 *кг*; усилие натяжения конвейерной ленты ($S_1 + S_2$) – 311 *кГ;* коэффициент трения (ω) – 0,43; угол обхвата барабана конвейерной лентой (φ) – 3,14 *рад*; скорость скольжения (v) варьировалась в пределах от 0,5 до 8,0 *м/с.*

Таблица 1

Сравнительные данные оценки силы трения между конвейерной лентой и неподвижным барабаном при различных скоростях скольжения

Условия испытаний			Сила трения между гибким телом и барабаном, кГ			
Скорость скольжения, *(v)*, *м/с*	Силы, приложенные к концам гибкого тела, *кГ*		Согласно формуле. Эйлера		Согласно альтернативному решению задачи Эйлера	
	S_1	S_2	$S_2(e^{\omega\varphi}-1)$	$(S_2-qv^2)(e^{\omega\varphi}-1)$	$\omega\varphi(S_1+S_2)/2$	$\omega\varphi(S_1+S_2-2qv^2)/2$
0,5	259,2	51,8	148,1	142,7	209.9	207,9
1,0	256,0	55,0	157,3	135,6	209.9	199,7
2,0	240,0	71,0	203,1	116,1	209.9	168,9
4,0	178,4	132,6	379,2	31,5	209.9	45,8
8,0	155,5	155,5	444,7	0	209.9	0

Данные получены при испытании на испытательном стенде при скорости скольжения 1 *м/с* и экстраполированы на другие скорости. При этом влияние скорости скольжения на коэффициент трения не учитывалось, а определение коэффициента трения осуществлялось с использованием альтернативного решения задачи Эйлера, учитывающего центробежные силы.

Проведенный анализ данных эксперимента свидетельствует о том, что влияние центробежных сил на реализуемое тяговое усилие трением при некоторых условиях испытаний весьма существенно. Уже при скоростях 2 и 4 *м/с,* за счет центробежных сил реализуемое тяговое усилие согласно альтернативному решению задачи Эйлера снижается на 15 и 75% в сравнении с максимальным, а по формуле Эйлера меньше на 55 и 85 %, соответственно.

Критические значения скорости скольжения гибкого тела, для формулы Эйлера и альтернативного решения задачи Эйлера с учетом центробежных сил, при которых не реализуется тяговое усилие, равны соответственно

$$v_k\,/_{ф.Э} \geq \sqrt{\frac{S_2}{q}}\,;$$

$$v_k\,/_{альт.з-н} \geq \sqrt{\frac{(S_1+S_2)}{2\cdot q}}\,.$$

Откуда $v_k /_{ф.Э} = v_k /_{альт.з-н}$. Оно по формуле Эйлера и альтернативному решению задачи Эйлера одно и то же и составляет 4,52 *м/с*. Однако конвейерная лента иногда эксплуатируется при значительно больших скоростях (достигает 8 *м/с* для карьерных конвейеров), что требует отдельного рассмотрения и анализа.

Реализуемое тяговое усилие трением по альтернативному решению задачи Эйлера с учетом центробежных сил в сравнении с соответствующей формулой Эйлера на 30% больше. Это обстоятельство хорошо согласуется с данными практики о расхождении коэффициента трения гибкого тела (конвейерной ленты), установленного экспериментально на цилиндрической поверхности гибкого тела косвенным методом с использованием формулы Эйлера, и действительным значением, установленным прямым методом, которое также достигает 30% [2].

И наоборот, опосредованное через силу S_2 влияния центробежных сил на реализацию силы тяги трением по формуле Эйлера, не учитывающей центробежные силы, и в качественном и в количественном отношении выходит за пределы здравого смысла – увеличивается с увеличением скорости скольжения.

В табл. 2 приведены прогнозные оценки угла обхвата (φ) по задаче об уравновешивании большой силы *(Q)* маленькой *(P)*, приложенными к концам нити с заданными фрикционными характеристиками, которая навита на неподвижный блок [3], для известных решений задачи Эйлера.

Таблица 2

Прогнозные оценки угла обхвата нитью неподвижного блока

Угол обхвата, φ, *рад.*		Исходные данные		
По ф-ле Эйлера $\frac{1}{\omega}\cdot\ln\frac{S_1}{S_2}$	По альтернат. реш-ю задачи Эйлера $\frac{2\cdot(S_1-S_2)}{\omega\cdot(S_1+S_2)}$	Сила, S_1, *Н*	Сила, S_2, *Н*	Сила трения, *F*, *Н*
1,83	1,71	1000	400	600
2,41	2,15	1000	300	700
3,22	2,67	1000	200	800
4,61	3,27	1000	100	900
5,99	3,62	1000	50	950
7,82	3,84	1000	20	980
12,43	3,98	1000	2	998
17,03	3,9984	1000	0,2	999,8
21,64	3,9998	1000	0,02	999,08
$\to\infty$	4,0	1000	$\to 0$	1000
-	4,0	1000	0	1000

Анализ данных показал, что отличие прогнозных оценок уравновешивания большой силы *(Q)*, например, в 1000 *Н* маленькой силой *(P)*, достигающей всего 20 % от заданной ($P \geq$ в 200 *Н*), согласно рассматриваемым решениям задачи Эйлера не превышает 17%. Зато уравновешивание заданной силы *(Q)* несколько меньшими силами *(P),* по прогнозу согласно формулы Эйлера, требует несоизмеримо большего увеличения угла обхвата. Не поддается, например, пониманию то, что для увеличения силы трения всего на 0,2 % с 998 до 1000 *Н* угол обхвата нитью блока необходимо увеличить в бесконечное число раз с 12,43 до ∞ *рад*. Это обстоятельство, в конечном счете проявилось в ограниченном диапазоне применимости решения Эйлера и получении неадекватных результатов на его границе (когда маленькая сила P находится в диапазоне от нуля до $q \cdot v^2$ или в окрестности последнего) и свидетельствует в пользу альтернативного решения задачи Эйлера.

В целом результаты прогнозной оценки данных табл. 2 согласуются с данными табл. 1 в части реализуемого тягового усилия для заданного угла обхвата нитью неподвижного блока и наименьшей скорости скольжения. Ожидается, что с увеличением угла обхвата нитью неподвижного блока разница между реализуемыми тяговыми усилиями трением для альтернативного решения задачи Эйлера в том числе с учетом центробежных сил и соответствующей формулы Эйлера также будет возрастать.

Таким образом, для передачи заданного тягового усилия гибкому телу трением по барабану достаточно обеспечить необходимую реакцию между телами, которая определяется суммарным усилием натяжения гибкого тела в набегающей и сбегающей с барабана ветвях, углом обхвата, его массой и скоростью движения при известном коэффициенте трения.

Полученное выражение хорошо согласуется с современными представлениями о трении и практикой. Оно логично и понятно, устанавливает влияние параметров трения гибких тел по блоку на передачу ему тягового усилия трением, что позволяет производить объективный тяговый расчет средств транспорта с гибким тяговым органом. Оно способствует установлению истинных знаний о трении гибкого тела, правильному пониманию механизма передачи тягового усилия гибкому телу, совершенствованию теории трения гибких тел, теории и практики транспортирования грузов транспортными машинами с гибким тяговым органом, что имеет большее научное и практическое значение.

Список литературы.

1. Колчин Н.И. Механика машин. Т2. Кинетостатика и динамика машин. Трение в машинах / Колчин Н.И. - Л.: Машиностроение, 1972. - 455 с.

2. Андреев А.В. Передача трением / Андреев А.В. – М.: Машгиз, 1978. – 176 с.

3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для вузов. / Тарг С.М. – [12-е изд.] – М.: Высш. шк., 1998. – 416 с.

4. Біліченко М.Я. Основи теорії та розрахунки засобів транспортування вантажів шахт: Навч. посібник / Біліченко М.Я. – Дніпропетровськ: Національна гірнича академія України, 2002. – 103 с.

5. Лубенец Н.А. Альтернативный формуле Эйлера закон реализации тягового усилия трением / Лубенец Н.А.// Науковий вісник НГУ. – Днепропетровск, 2008. – № 11.- С. 67 – 70.

Рекомендовано до публікації д.т.н. Ширіним Л.Н.
Надійшла до редакції 30.10.2012