«ЗАГАДКА ЭЙЛЕРА» В РЕАЛИЗАЦИИ ТЯГОВОГО УСИЛИЯ ТРЕНИЕМ ГИБКОГО ТЕЛА ПО БЛОКУ

Н.А. Лубенец, Государственный ВУЗ «Национальный горный университет», Украина

Приводится новое условие реализации заданного тягового усилия трением гибкого тела по блоку, которое вытекает из альтернативного решения классической задачи о скольжении гибкого тела по блоку, полученного Эйлером в 1775 году. Это условие определяется коэффициентом трения гибкого тела, суммарным усилием его натяжения на приводном блоке и углом обхвата. Достоверность вывода впервые обусловлена соблюдением в нем фундаментального принципа природы - закона сохранения механической энергии в замкнутой механической системе и современными знаниями о трении тел.

Эффективное использование транспортных машин с гибким тяговым органом (гибким телом) на горных предприятиях сопряжено с рациональным определением их тяговой способности, что существенно зависит от правильного решения классической задачи Эйлера о скольжении гибкого тела по блоку, рис.1.

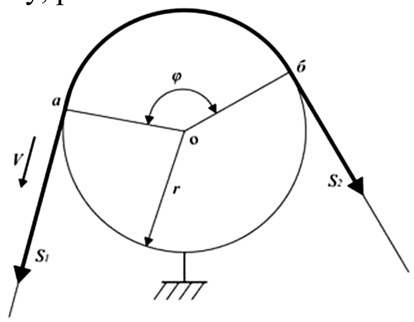

Рис. 1. Расчетная схема: S_2, S_1 – усилия натяжения в набегающей и сбегающей с барабана ветвях гибкого тела; r – радиус барабана; φ – угол обхвата барабана гибким телом; v – направление и скорость движения.

Описание проблемы скольжения гибкого тела по неподвижному блоку известно больше двух столетий и берет начало с 1775 года после вывода результатов решения этой задачи Эйлером. Из указанного вывода вытекает закон трения гибких тел Эйлера - уравнение Эйлера или Формула Эйлера.

Закон трения гибких тел Эйлера устанавливает взаимосвязь между параметрами трения нерастяжимого, абсолютно гибкого тела (идеальной нити - невесомой, нерастяжимой и абсолютно гибкой нити) при скольжении по неподвижному блоку, под действием сил, приложенных к его концам.

Согласно закону идеальная нить с коэффициентом трения μ, охватывающая неподвижный блок с центральным углом φ, под действием приложенных к ее концам сил S_1 и S_2 скользит по неподвижному блоку в направлении большей силы, превышающей другую силу на величину суммарной силы трения, которая возникает между нитью и неподвижным блоком:

$$\frac{S_1}{S_2} = e^{\mu\varphi} \tag{1}$$

Вывод Эйлера, ставший классическим, нашел всеобщее признание во всем мире и до сегодняшнего дня используется в образовании, научных исследованиях, технике и машиностроении. Он рассматривается учеными, преподавателями и студентами как показательный классический пример решения задач механики аналитическими методами, основателем которых является Эйлер. При этом правильность этого вывода, к сожалению, несмотря на данные практики, не подвергалась сомнению.

Поэтому задача о скольжении гибкого тела по неподвижному блоку и не принадлежала к «задачам тысячелетия», математических проблем, правильное решение которых не найдено за многие годы, к которым всего причислено семь задач. Пока решили только одну из этих задач. Григорий Перельман доказал гипотезу Пуанкаре, известную около 100 лет, над доказательством которой он начал работать со своим учителем-наставником профессором Ричардом Гамильтоном (США), поделившимся с учеником своими умозаключениями по этой проблеме. Однако по значимости и актуальности задача о скольжении гибкого тела по неподвижному блоку может соперничать с любой из известных задач.

Анализ известного решения задачи Эйлера и данные практики наводят на критические размышления. Известное уравнение Эйлера не описывает граничных условий скольжения гибкого тела по блоку, когда равно нулю меньшее усилие, приложенное к одному из его концов, и не отвечает действительному линейному натяжению гибкого тела вдоль линии контакта с барабаном, например, когда фрикционные свойства гибкого тела и блока определяются только межмолекулярным взаимодействием тел. Кроме того, сила трения между барабаном и гибким телом, полученная экспериментально, например, для ленточного конвейера до 30% выше в сравнении с его прогнозным значением, полученным по уравнению Эйлера.

Несмотря на это и многочисленные работы выдающихся ученых М. Кретца, М. Т. Уразбаева, Грастофа, М.К. Демьянова, Н.П. Петрова, Н.Е. Жуковского, О. Кеммерера, А. Фебера, А. Фридериха, Е.А. Иванова, В.А. Добровольского, Е.М. Гутьяра, Хамеля, М.В. Цепляева, В.С. Полякова, Е.Г. Глухарева, И.Г. Штокмана, П.М. Огибалова, А.Л. Рабиновича, М.Н. Федотова, Б.Л. Давыдова, Чжу-Ши-юй, Г.М. Бартенева, В.И. Чуканова, Л.В. Андреева, Л.И. Колчина, Н.С. Полякова, В.И. Моссаковского, А.Ю. Ишлинского, и многих др. в области уточнения, взятого ими за основу вывода Эйлера в задаче о трении гибкого тела по неподвижному блоку, решение Эйлера по-прежнему считалось самым совершенным [1,2].

Поэтому тяговая способность транспортных машин при проектировании и эксплуатации сейчас осуществляется по известному уравнению Эйлера со значительным запасом - коэффициентом запаса тяговой способности k_T равным отношению расчетного тягового усилия $F_{н\text{-}с}$ к действительному тяговому усилию F_0:

$$\frac{F_{н-с}}{F_0} = k_T \tag{2}$$

В практике расчет тяговой способности сейчас осуществляется по минимальному натяжению в набегающей S_{1min} или сбегающей с барабана ветвях гибкого тела S_{2min}, выбранному с запасом согласно известному уравнению Эйлера. Следовательно, предполагается, что для передачи тягового усилия необходимо обеспечить лишь усилие натяжения гибкого тела в сбегающей с барабана или набегающей на барабан ветви. При этом не регламентируется усилие натяжения в другой ветви барабана, от которых зависит реакция между гибким телом и барабана, что наводит на критические размышления:

$$S_{1min} = \frac{F_0 k_T e^{\mu\varphi}}{(e^{\mu\cdot\varphi} - 1)} \;; \tag{3}$$

$$S_{2min} = \frac{F_0 k_T}{(e^{\mu\cdot\varphi} - 1)} \tag{4}$$

Например, для ленточных конвейеров коефициент запаса тяговой способности k_T достигает значения, равного 1,4 (40 % запаса). А для подъемных машин со шкивом или барабаном трения коэффициент запаса от проскальзывания между тросом и шкивом уже достигает значения, равного 2,3 (130 % запаса), что вызывает много вопросов и сомнений [3,4].

Однако известное решение Эйлера на сегодняшний день не является правильным, поскольку оно не отвечает принципу сохранения механической энергии и современным представлениям о трении. Поэтому, уточнения, полученные многими ученными на протяжении двух столетий, принявших за основу вывод Эйлера, и, собственно, гениальный вывод Эйлера не отвечают этим современным знаниям [1]. Эйлер просто не знал, что в природе действует принцип сохранения энергии, о современной редакции которого стало известно в 40 годах 19 века, а ученные не использовали его в своих выкладках.

Следовательно, расчет тяговой способности транспортных машин с гибким телом необходимо осуществлять с учетом современных знаний о сохранении энергии и трении твердых тел Кулона, что является актуальной научной проблемой, которую трудно переоценить. Это необходимо для установления рациональной области применения гибкого тягового органа, правильного понимания механизма передачи тягового усилия, введения нового закона и создания теории трения гибких тел и др.

Одной из причин создавшегося положения, по нашему мнению, является использование учеными, взявшими за основу вывод Эйлера, представлений Амонтона о трении (закона о прямой пропорциональности между силой трения и нормальной силой прижатия между телами) [1,4].

Согласно этому закону коэффициент трения не зависит от нормальной силы внешнего прижатия – давления между телами. Сейчас господствует в науке впервые введенная Кулоном двухпараметрическая линейная зависимость между силой трения и нормальной силой внешнего прижатия между телами, к которой приводятся другие аналогичные версии, и общепризнано, что коэффициент трения зависит от нормальной силы внешнего прижатия. Поэтому, известные решения не являются корректными, т. к. коэффициент трения на различных участках контакта гибкого тела с блоком определяется его натяжением и поступать с ним как с постоянной величиной при интегрировании неправильно.

Рассмотрим расчетную схему элементарного участка гибкого тела длиной dl ($dl = rda$)которая приведена на рис. 2.

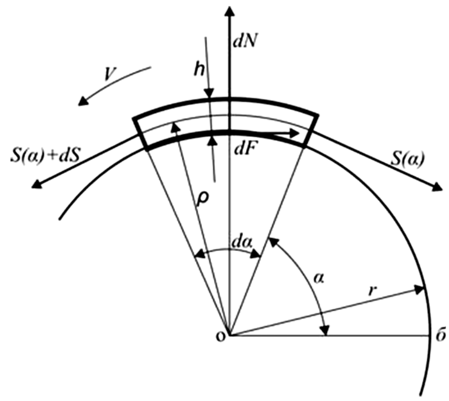

Рис. 2. Расчетная схема элементарного участка гибкого тела длиной dl: S(α) – функция натяжения гибкого тела вдоль линии контакта с барабаном, заданной в полярной системе координат, от полярного угла (a); dS – приращение усилия натяжения гибкого тела на элементарном участке гибкого тела; dN – нормальная сила внешнего прижатия - давления между элементарным участком гибкого тела и барабаном; dF – сила трения между элементарным участком гибкого тела и барабаном; t – толщина гибкого тела; r – радиус барабана; ρ – радиус условной (нейтральной) продольной линии гибкого тела; α – полярный угол (за начало отсчета полярного угла выбран луч, проходящий через точку набегания гибкого тела на барабан (б)); da – элементарный угол обхвата барабана, соответствующий элементарному участку гибкого тела длиной dl; б – точка набегания гибкого тела на барабан.

Итак, Кулон впервые установил, что сила трения F и нормальная сила прижатия N - давления между телами достаточно хорошо увязаны между собой двухпараметрической линейной зависимостью, которая может быть представлена и с помощью коэффициента трения μ, введенного Амонтоном (Леонардо да Винчи):

$$F = F_c + tg\beta N = \left(\frac{F_c}{N} + tg\beta \right) N = \mu N, \tag{5}$$

где F_c – сила трения между телами при нормальной силе внешнего прижатия N, равной нулю; $tg\beta$ - тангенс угла наклона β зависимости силы трения F от нормальной силы прижатия между телами N.

Отсюда, для элементарного участка гибкого тела dl:

$$dF = \frac{F_c}{r\varphi}dl + tg\beta dN = \frac{F_c}{r\varphi}rd\alpha + tg\beta dN = \frac{F_c}{\varphi}d\alpha + tg\beta dN \qquad (6)$$

где φ – угол обхвата барабана конвейерной лентой; dN – нормальная сила внешнего прижатия - давления между элементарным участком гибкого тела и барабаном; dF – сила трения между элементарным участком гибкого тела и барабаном; r – радиус барабана; da – элементарный угол обхвата барабана, соответствующий элементарному участку гибкого тела длиной dl.

Далее, уравнение равновесия для элементарного участка гибкого тела длиной dl, соответствующий элементарному углу обхвата $d\alpha$, имеет такой вид:

$$S(\alpha)\cdot\sin\frac{d\alpha}{2} + \left[S(\alpha)+dS\right]\cdot\sin\frac{d\alpha}{2} - dN = 0\,, \qquad (7)$$

где $S(\alpha)$ – функция натяжения гибкого тела вдоль линии контакта с барабаном, заданной в полярной системе координат, от полярного угла (a); dS – приращение усилия натяжения гибкого тела на элементарном участке гибкого тела.

Отсюда, полагая, что синус бесконечно малого угла равен самому углу и пренебрегая малыми величинами высшего порядка малости, получим:

$$dN = S(\alpha)\cdot d\alpha\,. \qquad (8)$$

Рассмотрим еще один важнейший фактор, влияющий на параметры трения гибкого тела по блоку – механическую энергию, на которую ранее не обращали внимания. В замкнутой механической системе суммарная механическая энергия, включающая потенциальную и кинетическую энергии, остается неизменной.

Пренебрегая тепловой энергией, выделяемой при трении, заданном суммарном усилии, приложенном к концам гибкого тела, и прочих равных условиях испытания полная энергия гибкого тела не зависит от фрикционных свойств пары трения. Поэтому можно записать:

$$\frac{\partial Э}{\partial \mu} = 0 \qquad (9)$$

где $\frac{\partial Э}{\partial \mu}$ - частная производная энергии гибкого тела по коэффициенту трения.

Согласно закону Гука для линейно-деформированного гибкого тела с различными фрикционными свойствами при трении тел постоянной будет и его удлинение. Отсюда потенциальная энергия и удлинение гибкого тела, контактирующего с блоком, также величины постоянные. Поэтому потенциальная энергия гибкого тела, контактирующего с блоком, составляет:

$$Э_{nk} = \frac{1}{2}\frac{S_c}{2}\Delta l_k = \frac{S_1+S_2}{4}\Delta l_k - const, \qquad (10)$$

где $Э_{пк}$ - потенциальная энергия гибкого тела, контактирующего с блоком; S_c – суммарное усилие натяжения на концах гибкого тела, контактирующего с блоком; Δl_k – удлинение гибкого тела, контактирующего с блоком.

Удлинение линейно-деформированного участка гибкого тела, контактирующего с блоком, соответственно, будет таким:

$$\Delta l_k = \frac{1}{E}\int_{б}^{в}\sigma(l)dl = \frac{r}{EF}\int_{0}^{\varphi}S(\alpha)d\alpha - const, \qquad (11)$$

где E – модуль Юнга гибкого тела; F – площадь сечения гибкого тела; $\sigma(l)$ – функция напряжения гибкого тела вдоль линии контакта с блоком от длины (l); *б* и *в* – точки набегания и сбегания гибкого тела с барабана.

Следовательно, потенциальная энергия гибкого линейно-деформированного тела, контактирующего с блоком, составляет:

$$Э_{nk} = \frac{S_1+S_2}{4}\Delta l_k = \frac{S_1+S_2}{4}\frac{r}{EF}\int_{0}^{\varphi}S(a)da - const, \qquad (12)$$

Анализ входящего в выражение интеграла $\int_0^{\varphi} S(\alpha)d\alpha$ показывает, что он и площадь фигуры, ограниченная функцией *S(α),*также величины постоянные для заданного натяжения гибкого тела с различными фрикционными свойствами.

Если представить нерастяжимое гибкое тело, как линейно-деформируемое, модуль Юнга которого стремится к бесконечности, то можно прогнозировать, что для нерастяжимой нити (идеальной нити) указанный выше интеграл также величина постоянная.

Поэтому можно обобщить и сформулировать необходимое условие равновесия натяжения гибкого тела вдоль линии контакта при трении по блоку, которое отвечает закону сохранения энергии:

$$\frac{\partial N}{\partial \mu} = \frac{\partial (\int_0^{\varphi} S(a)da)}{\partial \mu} = 0. \tag{13}$$

Следовательно, система дифференциальных уравнений, описывающих трение гибкого тела с нулевым сечением по блоку, представляется так:

$$\begin{cases} dN = S(a)da; \\ dS = dF; \\ dF = \dfrac{F_c}{\varphi} da + tg\beta dN; \\ \dfrac{\partial N}{\partial \mu} = \dfrac{\partial (\int_0^{\varphi} S(a)da)}{\partial \mu} = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Промежуточным решением трех первых уравнений новой системы дифференциальных уравнений для гибкого тела с нулевым сечением будет:

$$dS = \frac{F_c}{\varphi} da + tg\beta S(a)d\alpha\,; \tag{15}$$

$$\int_{S_2}^{S_1} dS = \int_0^{\varphi} (\frac{F_c}{\varphi} + tg\beta S(a))d\alpha\,; \tag{16}$$

$$S_1 - S_2 = F_c + tg\beta \int_0^{\varphi} S(a)d\alpha. \tag{17}$$

Дальнейшее решение системы уравнений сводится к нахождению интеграла $\int_0^{\varphi} S(\alpha)d\alpha$, который для заданного предварительного натяжения гибкого тела с различными фрикционными свойствами пары трения есть величина постоянная.

Из условия равновесия натяжения гибкого тела вдоль линии контакта с блоком и его геометрического толкования, отвечающее закону сохранения механической энергии, вытекает, что единственно возможным характером подинтегральной непрерывной гладкой монотонно возрастающей без перегибов функции *S(α)* является линейная зависимость [5]:

$$S(\alpha) = k \cdot a + b = \frac{S_1 - S_2}{\varphi}\alpha + S_2, \tag{18}$$

где *b* - постоянная величина, равная меньшему усилию натяжения гибкого тела (S_2); *k* - угловой коэффициент прямой линии.

Приводим графики функций натяжения гибкого тела вдоль линии контакта с блоком от полярного угла *S(a)* для различных фрикционных свойств пары трения при заданном суммарном усилии натяжения (S_1+S_2) *- const,* рис. 3.

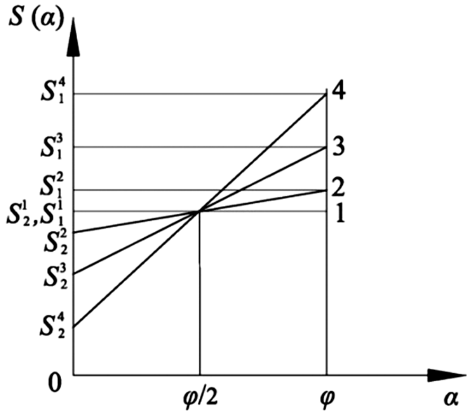

Рис. 3. Графики зависимостей натяжения гибкого тела вдоль линии контакта с блоком S(a) от полярного угла (a) для различных фрикционных свойств пары трения, введенных Кулоном (F_c и tgβ), при заданном суммарном усилии натяжения ($S_1 + S_2$) - const: 1 – для гибкого тела, когда $F_c = 0$ и $tg\beta_1 = 0$; 2 – для гибкого тела, когда $F_c > 0$ и $tg\beta_2 = 0$; 3 – для гибкого тела, когда $F_c > 0$ и $tg\beta_3 > 0$; 4 – для гибкого тела, когда $F_c > 0$ и $tg\beta_4 > tg\beta_3$.

С приведенным уравнением согласуются характерные очевидные линейные зависимости натяжения гибкого тела от угла *S(a)*, когда параметры трения тел по Кулону *tgβ и* F_c равны нулю, а также когда $tg\beta = 0$ и $F_c > 0$.

Отсюда, искомый интеграл и нормальная сила прижатия между телами:

$$\int_0^{\varphi} S(\alpha)\cdot d\alpha = \int_0^{\varphi}\left(\frac{S_1-S_2}{\varphi}\cdot\alpha+S_2\right)\cdot d\alpha = \left(\frac{S_1-S_2}{\varphi}\cdot\frac{\alpha^2}{2}+S_2\cdot\alpha\right)\Big|_0^{\varphi} = \varphi\cdot\frac{S_1+S_2}{2},\quad N=\int_0^{N} dN = \int_0^{\varphi} S(a)da = \varphi\cdot\frac{S_1+S_2}{2}. \tag{19}$$

Поэтому, окончательное решение системы дифференциальных уравнений в параметрах, которые ввел Кулон, представляется:

$$S_1 - S_2 = F_c + tg\beta\cdot\left(\int_0^{\varphi} S(a)\cdot da\right) = F_c + tg\beta\cdot\varphi\cdot\left(\frac{S_1+S_2}{2}\right) = F_c + tg\beta\cdot N = F. \tag{20}$$

При использовании коэффициента трения, введенного Леонардо да Винчи:

$$S_1 - S_2 = \mu\cdot N = \mu\left(\varphi\frac{S_1+S_2}{2}\right),\quad \frac{2(S_1-S_2)}{S_1+S_2} = \varphi\mu \text{ или } \mu = \frac{F}{N} = \frac{2(S_1-S_2)}{\varphi\cdot(S_1+S_2)}. \tag{21}$$

В табл. 1 приведены сравнительные расчетные параметры фрикционных свойств конвейерной ленты и барабана полученные на испытательном стенде. Условия испытаний: ширина конвейерной ленты – 0,49 *м*; линейная масса ленты = 7,6 *кг/м*; усилие натяжения ленты 311 *кГ*; угол обхвата – 3,14 *рад*; скорость относительного движения ленты и барабана при скольжении /сцеплении – 1/0 *м/с*.

Расчетное тяговое усилие для данной сухой конвейерной ленты по новому решению задачи Эйлера практически равно действительной силе трения между парой трения, а в сравнении с прогнозом по уравнению Эйлера до 20% больше (при этом впервые использовался не косвенный - фиктивный коэффициент трения $\mu_ф$, а действительный коэффициент трения μ, рассчитанный прямым методом по новому решению, как отношение силы трения *F* к нормальной силе прижатия *N*), что согласуется с данными практики и свидетельствует о достоверности [1]. С уменьшением коэффициента трения (достигалось смачиванием и режимом сцепления) разница тяговых усилий по рассматриваемым решениям снижалась.

Таблица 1.

Сравнительные расчетные параметры фрикционных свойств

№	Усл. испытания		Действ. сила трения	Расчетные параметры					
				Решение Эйлера			Новое решение		
	v, м/с	S_1/S_2, *кГ*	$S_1 - S_2$, *кГ*	*N, кГ,* $\frac{S_2(e^{\mu\varphi}-1)}{\mu}$	*F, кГ,* $S_2(e^{\mu\varphi}-1)$	$\mu_\phi = \frac{1}{\varphi}\ln\frac{S_1}{S_2}$	*N, кГ*	*F, кГ*	μ
1	1	256/55	201	367,7	159,2	0,490	464,4	201,1	0,433
2	1	193/118	75	482,0	77,6	0,157	464,4	74,8	0,161
3	0	246/65	181	400,5	156,2	0,424	464,4	181,1	0,390
4	0	187/124	63	485,7	66,1	0,131	464,4	63,2	0,136

Соответствующая расчетная нормальная сила прижатия между телами по новому решению задачи Эйлера не зависит от фрикционных свойств гибкого тела, а по формуле Эйлера наоборот зависит существенно, что вызывает сомнение.

При сцеплении конвейерной ленты и барабана (относительная скорость смещения между лентой и барабаном равна нулю) в качестве силы трения при расчетах использовалась неполная сила трения при сцеплении.

Следовательно, для реализации заданного тягового усилия достаточно обеспечить необходимую нормальную силу прижатия между гибким телом и блоком, которая в отличии от выводов Ейлера не зависит от фрикционных свойств гибкого тела, или соответствующее суммарное усилие его натяжения, что есть очевидным и понятным:

$$N = \frac{\varphi(S_1 + S_2)}{2} \geq \frac{F_0}{\mu} \quad \text{или} \quad (S_1 + S_2) = \frac{2N}{\varphi}, \quad \text{где } N \geq \frac{F_0}{\mu}. \tag{22}$$

Таким образом, обосновано новое условие для передачи заданного тягового усилия гибкому телу, которое вытекает из нового альтернативного решения классической задачи о скольжении гибкого тела по блоку, полученного Эйлером в 1775 году. Оно определяется коэффициентом трения гибкого тела, суммарным усилием его натяжения на приводном блоке и углом обхвата. Достоверность нового условия впервые обусловливается соблюдением в нем фундаментального принципа природы - закона сохранения механической энергии в замкнутой системе и современными знаниями о трении твердых тел.

Осуществление нового вывода результатов решения классической задачи Эйлера развивает знания о трении гибкого тела по блоку, способствуют прогрессу в научных исследованиях, образовании, машиностроении и народном хозяйстве - для эффективного использования транспортных машин с гибким тяговым органом в горном деле.

Список литературы

1. Андреев А.В. Передача трением. – М.: Машгиз, 1963. – 112 с.

2. Колчин Н.И. Механиика машин. Т2. Кинетостатика и динамика машин. Трение в машинах / Колчин Н.И. - Л.: Машиностроение, 1972. - 456 с.

3. РТМ 24.093.04-80. Проектирование стационарных ленточных конвейеров общего назначения. - 1980.

4. Картавый Н.Г. Стационарные машины. Учебник для вузов. - М.: Недра, 1981. - 327с.

5. Лубенец Н.А. Альтернативный формуле Эйлера закон реализации тягового усилия трением / Лубенец Н.А. // Науковий вісник НГУ–Д, 2008.–№ 11.- С.67–70.