

# АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ДИАГРАММ РАЗДАВЛИВАНИЯ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ ОБРАЗЦОВ ГОРНЫХ ПОРОД ПРИ ИХ КЛИНОВОЙ ФОРМЕ РАЗРУШЕНИЯ

*Л.М. Васильев, Д.Л. Васильев, А.А. Ангеловский, Институт геотехнической механики  
НАН Украины*

*Н.Г. Малич, Национальная металлургическая академия Украины*

Предложено совершенствование методики расчета предела прочности образцов горных пород для управления напряженно-деформированным состоянием горного массива и эффективного разрушения горных пород при дезинтеграции. Аналитически проведено моделирование процесса разрушения образцов горных пород при их клинковой форме разрушения с использованием экспериментальных значений четырех показателей свойств горных пород – предела сопротивляемости сдвигу, коэффициентов внутреннего и внешнего трения,  $E$  - модуля упругости.

Одной из важных информационных характеристик, необходимых для управления напряженно-деформированным состоянием массива горных пород и их эффективным разрушением при дезинтеграции, является предел прочности и остаточная прочность образцов, определяемые по диаграммам *нормальное напряжение–продольная деформация* их предельного разрушения. Эти характеристики могут сниматься на специальных прессах, которые имеются в отдельных НИИ, например, в ИГТМ и ИФГП НАН Украины. Однако эти работы требуют высококвалифицированного персонала, а оборудование находится вдали от потребителя, где как раз и нужна оперативная информация о свойствах горных пород.

Поэтому имеется необходимость в разработке аналитического метода расчета пределов и остаточной прочности образцов при знании показателей свойств горных пород, определяемых более простыми способами, доступными для предприятий горно-металлургического комплекса.

Известно, что при одноосном сжатии образца правильной геометрии образуется клиновидная форма его разрушения - наиболее распространенная из пяти общеизвестных.

Аналитическое определение прочности образцов при этой форме разрушения представляется возможным производить по следующей методике. По мере развития трещины часть материала выходит из-под нагрузки. При знании в каждый момент значения координат вершины одной или двух трещин можно определить несущую часть материала образца, которая равна первоначальной площади последнего за вычетом части, вышедшей из-под нагрузки. Вышедшая из-под нагрузки часть легко определяется по геометрии развития трещины по линиям скольжения (ЛС).

При знании напряжений в вершине трещины, ее координат и закономерности распределения контактных напряжений на несущей части образца можно построить диаграмму *нормальное напряжение–деформация* при наличии значений четырех показателей свойств – предела сопротивления сдвигу  $k_n$ , коэффициентов внешнего  $f$  и внутреннего  $\mu$  трения и  $E$  – модуль упругости.

На рисунке 1 показан образец. Центр осей координат располагаем в левом верхнем углу образца. На верхней плоскости левой продольной половины образца контактные касательные напряжения  $\tau_k$  имеют положительный знак, а на нижней – отрицательный. На правой половине знаки имеют противоположные значения.

Математическая модель формирования диаграмм *нормальное напряжение–деформация* может быть аналитически представлена на основании простых формул. Запишем текущее значение суммы нормальных напряжений – силу, действующую на контактной поверхности несущей площадки, в виде

$$P = 2 \int_0^{0,5a_1} \sigma_y \cdot F(x) dx, \quad (1)$$

где  $\sigma_y$  - нормальное напряжение в вершине трещины;  $F(x)$  – функция приращения нормального напряжения на единичной контактной поверхности части образца, не вышедшей из-под нагрузки.

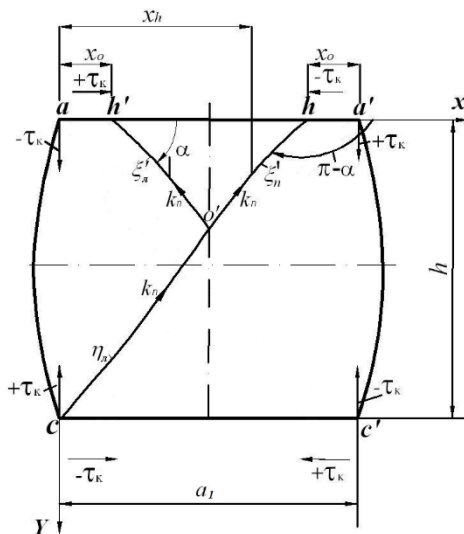


Рисунок 1 – Схема ЛС при клиновой форме разрушения

Коэффициент, равный двум, означает две симметричные половины образца. Вышедшая из-под нагрузки часть образца определяется по значениям абсциссы вершины трещины как  $x = n \cdot \Delta h \cdot \operatorname{ctg} \alpha$ , где  $n$  – число слоев по ординате  $y$ ,  $\alpha$  – угол наклона ЛС в вершине трещины относительно оси  $ax$ ,  $\Delta h$  – высота слоя.

Теперь, используя значение силы, действующей на несущей (не вышедшей из-под нагрузки) части образца, следует перейти к напряжениям по его начальной площади горизонтального сечения (длине  $a_1$ ). Тогда на основании (1) получим

$$\sigma_c = 2 \int_0^{0,5a_1} \sigma_y \frac{F(x)dx}{a_1}, \quad (2)$$

В работе [1] дан метод расчета прочности горных пород при линейной связи между контактными напряжениями применительно к разрушению призматических образцов в виде усеченного клина, особенностью которого является отсутствие пересечения линиями скольжения (ЛС) вертикальной оси симметрии. В отличие от этой формы клиновидная форма характеризуется пересечением ЛС этой оси. Но математические подходы для обеих форм являются общими. Распределение контактных нормальных напряжений принимается экспоненциальным согласно [2]

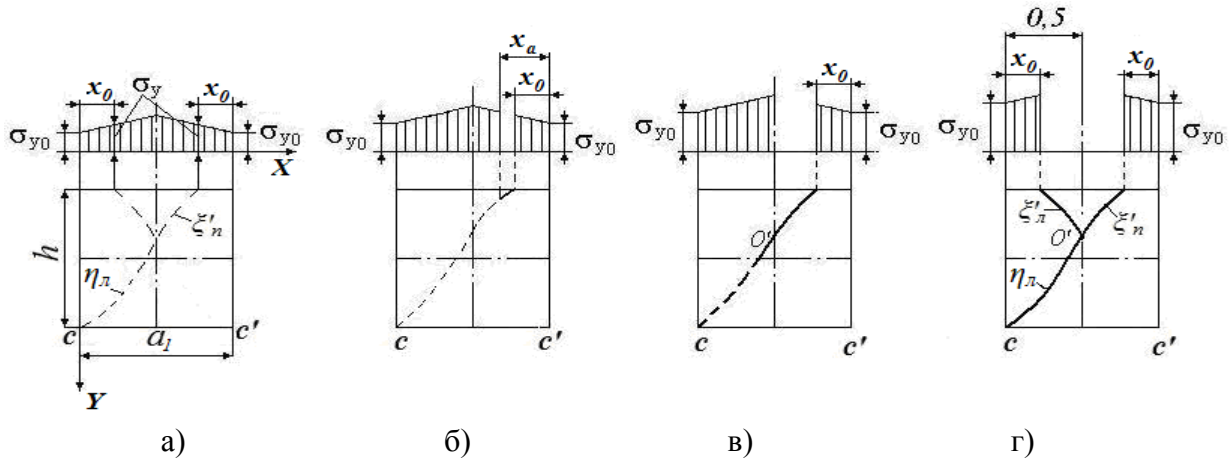
$$\sigma_{yi} = \sigma_y \cdot e^{\frac{2f \cdot x}{h}}, \quad (3)$$

$f$  – коэффициент контактного трения;  $h$  – высота образца,  $x$  – абсцисса точки.

Все ЛС пересекают среднюю линию вертикальной симметрии и выходят на противоположную половину контактной плоскости. В первую очередь необходимо определиться, в каком направлении будет развиваться трещина сверху вниз или снизу вверх, в данном случае по ЛС  $\xi_n'$  и  $\xi_n''$  или  $\eta_n'$  и  $\eta_n''$ . Трещина начинает развиваться в направлении меньшего значения необходимой нагрузки. Сущность задачи не меняется, если будем рассматривать развитие трещины по схеме (рис. 1), начиная с верхней горизонтальной плоскости правой половины образца. Так более наглядно. Для этого случая нами разработана программа на ЭВМ на основе метода итераций. Отметим, что под действием вертикальной нагрузки образец приобретает выпуклую форму. Поэтому в углах образца применимо правило парности касательных напряжений.

Тогда распишем конечные формулы для всего цикла развития трещины (рис. 2) для построения диаграммы *нормальное напряжение – деформация*.

Для этого используем правую ЛС  $\xi'_n$  и левую ЛС  $\eta_l$  или левую ЛС  $\xi'_l$  и правую ЛС  $\eta_n$ . Как видно из рисунка, имеем дело с разнородной парой линий скольжения (одна выпуклая,



а) – в момент предразрушения; б) – в момент образования стороны клина; в) – в момент формирования стороны клина; г) – в момент образования клина.

Рис. 2 – Схема образования клина при сжатии образца горной породы

другая – вогнутая), в точке встречи которых напряжения должны иметь одинаковые значения. Такой точкой встречи является точка  $O'$  на вертикальной линии симметрии (рис.1), на которой контактные касательные напряжения равны нулю. Представим себе, что сначала трещина образуется в точке  $h$  (Рис.1). По нашим представлениям формируется в первую очередь ЛС  $\xi'_n$  (или ЛС  $\xi'_l$ ), вторая из них подключается (рис. 2), когда трещина выходит на ЛС  $\eta_l$  (или ЛС  $\eta_n$ ), так как нагрузка на ней возрастает и достигает значения, превышающего на первой ЛС  $\xi'_n$ . Распишем формулы расчета предела давления (прочности) при развитии трещин по правой ЛС  $\xi'_n$  и левой ЛС  $\eta_l$ , определяемые с учетом выхода части образца из-под нагрузки согласно выражению (2) с использованием уравнения (3) и схемы рис. 2, в. Для построения диаграмм нужно знать прочность образца  $\sigma_c$  в процессе развития трещины по соотношению к начальной площади образца единичной ширины  $a_1$  и значение деформации, связь которой определяется согласно закону Гука по формуле

$$\varepsilon = \frac{p}{E}, \quad (4)$$

где  $p$  – удельное усилие на площадке образца, не вышедшей из-под нагрузки в процессе развития трещины.

Прочность образца  $\sigma_c$  с использованием выражения (4) образца определяется по формулам:

для правой половины образца, при  $x \geq 0.5 a_1$

$$\sigma_{c_n} = \sigma_{y_{\xi}} \frac{h}{f} \left( \exp\left(\frac{f \cdot a_1}{h}\right) - 0,5 \exp\left(\frac{2f \cdot (a_1 - x_{\xi'_n})}{h}\right) + 0,5 \exp\left(\frac{2f \cdot x_o}{h}\right) - 1 \right) / a_1, \quad (5)$$

для левой – ,при  $x \leq 0.5 a_1$

$$\sigma_{c_s} = \sigma_{y_{\eta_n}} \frac{h}{2f} \left( \exp\left(\frac{2f \cdot x_{\eta_n}}{h}\right) + \exp\left(\frac{2f \cdot x_o}{h}\right) - 2 \right) / a_1, \quad (6)$$

где  $\sigma_{y_\xi}$  и  $\sigma_{y_\eta}$  – вертикальные нормальные напряжения в вершине трещины на ЛС  $\xi'_n$  и ЛС  $\eta_l$ ;

$x_{\xi'_n}$  и  $x_{\eta_l}$  – значения абсцисс вершин трещин на ЛС  $\xi'_n$  и ЛС  $\eta_l$ ;

$x_o$  – абсцисса начальной точки разрушения.

Распишем формулы расчета удельного усилия на площадке, не вышедшей из-под нагрузки: при  $x \geq 0,5a_l$

$$p = \sigma_{c_n} \frac{a_1}{(x_o + x_{\xi'_n})}, \quad (7)$$

при  $x \leq 0,5a_l$

$$p = \sigma_{c_n} \left( \frac{a_1}{x_o + x_{\eta_l}} \right) \quad (8)$$

Теперь необходимо определить напряжения  $\sigma_y$  по методу, изложенному в статье [1]. Тогда систему расчета напряжений для правой ЛС  $\xi'_n$  следует записать в виде

$$\begin{cases} \sigma_{y_\xi} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{k_n (1 + \sin \rho \sqrt{1 - b_{\xi'_n}^2}) \cdot \exp(-2\mu \cdot \beta_{\xi'_n})}{1 - \sin \rho} - k_o \right); \\ k_o = \frac{(\mu \sigma_{y_\xi} + k_n) (1 - \sin \rho \sqrt{1 - b_{\xi'_n}^2})}{(1 + \sin \rho)}, \end{cases} \quad (9)$$

где  $\rho = \arctg \mu$  – угол внутреннего трения;

$\beta_{\xi'_n}$  – угол поворота ЛС  $\xi'_n$  от контактного трения в вершине трещины;

$k_o$  – эффективное касательное напряжение в точке  $O'$ ;

$$b_{\xi'_n} = \frac{f \cdot \sigma_y \left(1 - \frac{2y}{h}\right) \cdot \exp\left(\frac{2f \cdot (a_1 - x_{\xi'_n})}{h}\right)}{k_n + \mu \sigma_y \cdot \exp\left(\frac{2f \cdot (a_1 - x_{\xi'_n})}{h}\right)}; \quad \beta_{\xi'_n} = -\frac{1}{2} \arctg \frac{b_{\xi'_n} \cos \rho}{\sin \rho - \sqrt{1 - b_{\xi'_n}^2}},$$

При этом необходимо соблюдать условие:  $x \geq 0,5a_l$   $x_{\xi'_n} = a_l - x$ .

Угол наклона ЛС  $\xi'_n$  определяется по формуле

$$\alpha_{\xi'_n} = \frac{3\pi}{4} - \rho/2 + \beta_{\xi'_n}. \quad (10)$$

Теперь рассмотрим развитие трещины по левой ЛС  $\eta_l$  при  $x \leq 0,5a_l$ . Напряжения  $\sigma_{y_\eta}$  определяются по системе уравнений

$$\begin{cases} \sigma_{y_\eta} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{k_n (1 + \sin \rho \sqrt{1 - b_{\eta_l}^2}) \cdot \exp(-2\mu(\beta_{\eta_l} + \beta_c))}{1 - \sin \rho \sqrt{1 - b_c^2}} - k_c \right); \\ k_c = \frac{(\mu \sigma_{y_\eta} + k_n) (1 - \sin \rho \sqrt{1 - b_{\eta_l}^2})}{(1 + \sin \rho \sqrt{1 - b_c^2}) \cdot \exp(-4\mu\beta_c)}, \end{cases} \quad (11)$$

где

$$b_{\eta_n} = \frac{f \left(1 - \frac{2y}{h}\right) \cdot \sigma_{y_{\eta_n}} \exp\left(\frac{2f \cdot x_{\eta_n}}{h}\right)}{k_n + \mu \sigma_{y_{\eta_n}} \exp\left(\frac{2f \cdot x_{\eta_n}}{h}\right)}; \quad b_c = -\frac{f \cdot \sigma_{y_{\eta_n}}}{k_c + \mu \sigma_{y_{\eta_n}}}.$$

$\beta_{\eta_n}$  и  $\beta_c$  - углы поворота ЛС  $\eta_n$  от контактного трения самой линии и на нижней контактной плоскости в точке  $c$ ;

$$\beta_{\eta_n} = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{b_{\eta_n} \cos \rho}{\sin \rho - \sqrt{1 - b_{\eta_n}^2}}; \quad \beta_c = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{b_c \cos \rho}{\sin \rho - \sqrt{1 - b_c^2}}.$$

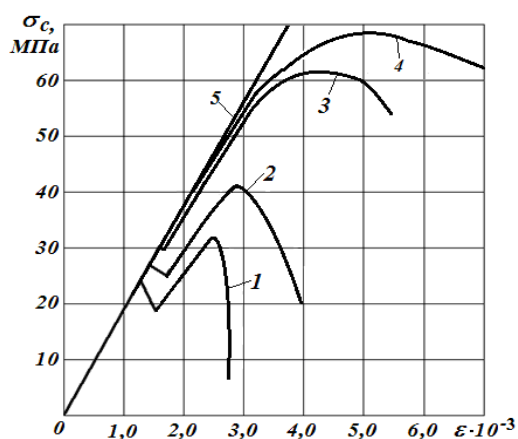
Угол наклона ЛС  $\eta_n$  описывается формулой

$$\alpha_{\eta_n} = \frac{3\pi}{4} - \rho/2 - \beta_{\eta_n}. \quad (12)$$

При этом необходимо соблюдать условие:  $x_{\eta} \leq 0,5a_1$   $x_{\eta} = x$ .

Теперь по изложенным формулам (4 – 12) проведем построение запредельных кривых диаграмм *напряжение-деформация* кубического образца со сторонами  $a_1 = h = 1.0$  при  $k_n = 10$  МПа,  $f = 0.25$ ,  $E = 2000$  МПа и различных значениях угла внутреннего трения. На рисунке 3 приведены теоретические диаграммы «напряжение – продольная деформация». По внешнему виду они хорошо согласуются с диаграммами, полученными на прессах при разрушении образцов из слабых пород алевролита и аргиллита [3]. По характеру запредельных кривых нетрудно установить, что модуль спада и остаточная прочность образца зависят от фрикционных параметров горных пород. Анализ запредельных кривых разрушения (рис. 3) свидетельствует, что имеет место сброс напряжения  $\sigma_c$  в момент перехода с ТМЭКН  $\zeta$  на ТМЭКН  $\eta$ . Это свидетельствует о том, что развивается одна трещина до пересечения оси симметрии. Вторая (левая) трещина, формирующая клин, примыкает к правой последовательно с некоторым небольшим опозданием. Согласно наблюдениям Б. Поля [4], в «испытаниях на сжатие косо и коническое (клиновое) разрушение происходит почти одновременно». С этого можно сделать вывод, что процесс формирования клина идет одновременно, с некоторой задержкой во времени, вторая грань клина примыкает к правой последовательно с некоторым небольшим опозданием.

Как видно на рис. 3, имеет место перегиб кривых и линейность их заканчивается при низких значениях  $\sigma_c$ . В.В. Виноградов [3] отмечает, что при конусообразной (клиновой) форме разрушения и нагрузке свыше 70 % максимальной имеет место существенная нелинейность. От себя добавим, что в запредельной кривой идет так называемое упрочнение материала согласно возрастающей кривой с последующим ее спадом.



1 –  $\rho=20^\circ$ ; 2 –  $\rho=30^\circ$ ; 3 –  $\rho=38^\circ$ ; 4 –  $\rho=39^\circ$ ;  
5 – истинная диаграмма

Рис. 3 – Запредельные кривые клиновой формы разрушения образцов при  $k_n = 10$  МПа,  $f = 0.25$ ,  $E = 2000$  МПа

Следует отметить, что закон Гука соблюдается на грузонесущей части образца (линия 5), т.е. истинная диаграмма имеет вид прямой линии, несмотря на то, что условные диаграммы имеют сбросы. Проведем сравнение расчетных значений предела прочности с экспериментальными данными, позаимствованными из кадастра [5] (табл. 1). Средняя сходимость составила 85,2 %, что соответствует о хорошей сходимости для горных пород согласно методике оценки сходимости расчетных и экспериментальных данных Л. И. Барона [6].

Таблица 1

Сопоставление расчетных пределов прочности с экспериментальными данными, заимствованными из кадастра горных пород, при клиновой форме разрушения

Тип породы	Экспериментальные			Расчетные		Кадастр [5], стр.
	$\tau_{ср}$ , МПа	$\square\square$ , град	$\sigma_{сж}$ , МПа	$\sigma_{сж}$ , МПа	Сходимость, %	
1	2	3	4	5	6	7
аргиллит	4,0	35	24,0	20,3	84,6	172
песчаник	6,63	36	32,5	36,3	88,3	172
роговик	25,0	39	138,0	153,0	89,1	66
сланец	6,7	35	35,0	33,9	96,9	159
аргиллит	7,85	35	46,5	39,2	84,3	172
порфирит скарнированный диабазовый	15,0	37	78,5	85,0	91,7	66
аргиллит	5,0	30	24,0	21,2	88,3	171
алевролит	6,5	31	35,0	27,6	78,9	174
песчаник	10,0	30	55,0	40,8	74,2	158
известняк	12,0	30	60,0	49,3	82,2	158
известняк мраморизованный	8,0	35	37,0	41,8	87,0	66
магнетит окисленный	20,0	32	97,0	91,0	93,8	66
моноцит сильноизменённый	28,0	22	16,4	20,1	77,4	104
туф гематитизированный	25,0	36	134,0	136,9	97,8	67
скарн гранатовый	20,0	39	112,0	131,0	83,0	67
скарн магнетит- гранатовый	10,0	39	68,0	65,4	96,2	67
роговик	16,0	34	84,0	81,0	96,5	67

## Выводы

1. Разработан аналитический метод расчета диаграмм *напряжение – деформация* при клиновой форме разрушения горных пород с использованием четырех показателей их свойств ( $k_n$  – предела сопротивления материала сдвигу,  $f$  и  $\mu$  – коэффициентов контактного и внутреннего трения,  $E$  – модуля упругости), доступных для экспериментального определения в лабораториях производственных предприятий простыми техническими средствами.

2. Запредельные кривые диаграмм имеют сбросы напряжений, подтверждающиеся экспериментальными наблюдениями. В момент сброса возникают площадки в виде так называемого *зуба текучести*, образование которых мы объясняем переходом процесса разрушения с выпуклой линии скольжения на вогнутую, формирующих разный характер запредельных кривых. В средней части запредельные кривые имеют кривые упрочнения, не получившие пока теоретического обоснования. Мы это явление объясняем переходом процесса разрушения с выпуклой линии скольжения на вогнутую линию скольжения, характеризующуюся такой особенностью.

3. По максимальным и минимальным значениям нормальных напряжений запредельных кривых диаграмм могут быть определены значения пределов и остаточной прочности образцов, которые по значению равноценны получаемым по диаграммам *нормальное напряжение–продольная деформация*, получаемые на прессах. Сопоставление расчетных пределов прочности с экспериментальными данными подтвердило достоверность разработанного метода в пределах 82-85 %. Это позволит улучшить методы управления горным массивом, а также даст возможность повысить эффективность дезинтеграции горных пород и уменьшить при этом энергозатраты.

4. В перспективе планируется проверка метода при других формах разрушения (диагональной, продольной и взрывоподобной).

## Список литературы

1. Васильев, Л.М. Аналитическое построение диаграмм «напряжение – деформация» образцов горных пород при их усеченно – клиновой форме разрушения / Л.М. Васильев, Д.Л. Васильев, О.А. Усов //Металлургическая и горнорудная промышленность, № 6, 2013 – С. 81 – 84.
2. Сторожев, М.В. Теория обработки металлов давлением / М.В. Сторожев, Е.А. Попов. – М.: Машиностроение, 1967. – 423 с.
3. Виноградов В.В. Геомеханика управления состоянием массива вблизи горных выработок. – К.: Наук. думка, 1989. – 190 с.
4. Поль Б. Макроскопические критерии пластического течения и хрупкого разрушения// Разрушение. – М.: Мир, 1975, т. 2.– С. 336–520.
5. Справочник (кадастр) физических свойств горных пород. – М.: Недра, 1975. – 277 с.
6. Барон Л.И. Горно–техническое породоведение. –М.: Наука, 1977. – 324 с.

УДК 624.131.37:519.25

## ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МЯГКИХ ВСКРЫШНЫХ ПОРОД

*Е.А. Сдвижкова, А.С. Ковров, Т.В. Мнишенко, Национальный горный университет, Украина  
Б.Р. Ракишев, Казахский национальный исследовательский технический университет  
им. К. Сатпаева, Казахстан*

В работе представлены результаты исследований физико-механических характеристик мягких вскрышных пород с использованием одноплоскостного срезного прибора П10-С. По результатам лабораторных испытаний пород построены статистические распределения изучаемых количественных признаков – угла внутреннего трения и сцепления.