

УДК 622.73

И.К. МЛАДЕЦКИЙ, д-р техн. наук,

Я.Г КУВАЕВ канд. техн. наук

(Украина, Днепр, Государственное ВУЗ "Национальный горный университет")

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СРОСТКОВ В ХАРАКТЕРИСТИКУ КРУПНОСТИ

В обогащении вкрапленных полезных ископаемых является аксиомой утверждение, что размер вкрапления ценного компонента в руде – d_{BK} . и крупность помола этой руды d для достижения высокого качества концентрата, должны быть соизмеримы. Исходя из этого, были получены зависимости показателей раскрытия от крупности частиц [10] Известно, что для оценки обогатимости руд необходимо иметь функции гранулометрического и фракционного состава. Сепарация в водной среде зависит от размера частиц и разделительного признака, например плотности. Кроме того, в тонких классах больше открытых рудных и нерудных зерен. В результате сепарация по разделительному признаку сопровождается сепарацией и по крупности, что приводит к изменению распределения классов крупности в продуктах разделения по сравнению с распределением в исходном продукте.

Таким образом, моделируя любую сепарацию, необходимо преобразовывать две функции: распределение по качественному показателю и распределение по крупности. А для этого дополнительно должна быть задана функция связи крупности частиц с содержанием в них ценного минерала, т.е.

$$d = f(\alpha).$$

Кроме того, полностью открытая фракция может быть только среди частиц, размер которых $d \leq d_{BK}$. Таким образом, между размером частиц и возможным содержанием в них ценного минерала существует тесная зависимость.

Структура рудного вкрапления состоит из зерен магнетита различной формы: шарообразной, эллиптической и полосчатой. При измельчении руд получают частицы, близкие по форме к эллипсоиду и шару. Частицы другой формы практически отсутствуют. В связи с этим модель структуры рудного вкрапления можно представить как некоторую пространственную решетку, в узлах которой находятся зерна рудного минерала – матрично (рис. 1). На основе такой модели в работах [6-10] получено несколько аналитических зависимостей, описывающих степень раскрытия ценного минерала. Однако, функцию распределения сrostков по известным зависимостям получить не представляется возможным. С целью получения такой функции рассмотрим некоторые положения о строении руды и особенностях измельчения, согласно которым можно будет сделать обобщающие выводы о закономерностях раскрытия ценного минерала.

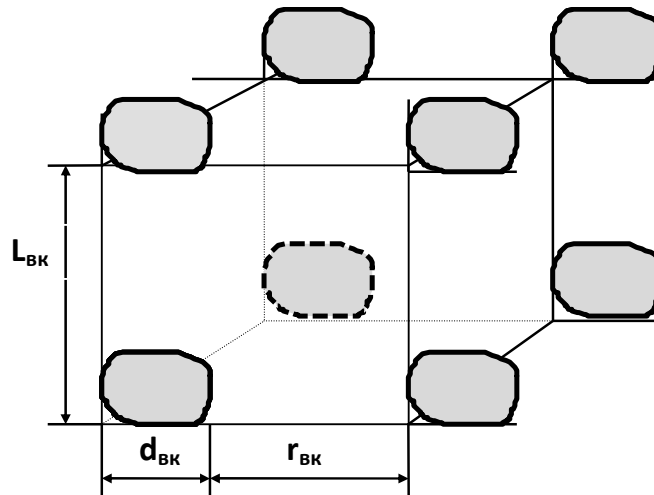


Рис. 1. Схема структури вкраплення

Руду первоначально рассмотрим как двухкомпонентную систему ценного минерала и пустой породы, соотношение между которыми определяется содержанием α_M одного из них, например ценным минералом. Характер распределения ценного минерала зависит от крупности вкрапления d_{BK} . Величина α_M не оказывает влияния на d_{BK} . Если α_M увеличивается от нуля, то преобладающая фаза будет представлена породой, а рудная – вкраплением. Дальнейшее увеличение ведет к сближению зерен вкрапления и появления контактов между ними: рудная фаза становится преобладающей, а нерудная – вкрапленной. Среднее расстояние между частицами рудного вкрапления при условии матричного строения руды (рис. 1) можно определить следующим образом. Содержание ценного минерала в куске руды

$$\alpha_u = V_{маг} / V_{кр}, \quad (1)$$

где $V_{маг} = n_0 k_{\phi 1} d_{BK}^3$ – объем магнетита в куске руды; $V_{кр} = k_{\phi 2} d_{кр}^3$ – объем куска руды; n_0 – количество зерен вкрапления в объеме $V_{кр}$; $k_{\phi 1}$ – коэффициент формы зерен вкрапления; d_{BK} – средняя крупность вкрапления рудного минерала; $k_{\phi 2}$ – коэффициент формы куска руды.

На основании данных рис. 1 находим

$$n_0 = \frac{k_{\phi 2} \cdot d_{кр}^3}{(d_{BK} + r_{BK})^3 \cdot k_{\phi 2}}$$

На основании рис. 1 определяем $\alpha_u = (d_{BK} / (d_{BK} + r_{BK}))^3$,

Откуда среднее расстояние между двумя соседними включениями

$$r_{вк} = d_{вк} \cdot \left(\sqrt[3]{\alpha_u^{-1}} - 1 \right).$$

Для реальных условий необходимо вместо единицы, стоящей под корнем, ввести некоторый коэффициент k_5 . Когда зерно вкрапления имеет шарообразную форму, то $k_5 = \pi/6$, что являются нижним предельным значением. Следовательно, пределы изменения коэффициента k_5 составляют $\pi/6 \leq k_5 \leq 1$. По физическому смыслу k_5 определяет такое значение α_u , при котором ценный минерал уже нельзя считать вкрапленным. Если $\alpha_u > k_5$, рудная фаза становится непрерывной (преобладающей), а нерудная – вкрапленной. Этот коэффициент по физическому смыслу представляет собой коэффициент заполнения объема шарообразными частицами и наиболее вероятное его значение составляет $k_5 = 0,65$. Величину $L_{вк} = d_{вк} + r_{вк}$ назовем элементарной длиной вкрапления. Кроме того, анализ экспериментальных данных показывает, что между крупностью частиц и содержанием в них ценного минерала существует определенная зависимость. Для ее выявления следует рассмотреть функцию распределения частиц по размерам d . Диапазон изменения d разобьем на 3 участка.

Первый участок включает весьма тонкие (мелкие) частицы. Если измельченная частица имеет размер больше зерна вкрапления или расстояния между зернами вкрапления, то она не может быть открытым зерном, так как обязательно содержит рудную и нерудную фазы. Следовательно, количество открытых рудных зерен в долях единицы определяется величиной $d_{вк}$, а нерудных – значением $r_{вк}$. Величина $L_{вк}$ является правой границей первого участка в котором находятся все виды частиц: открытые зерна и сростки.

Второй участок диапазона изменения величины d состоит из сростков. С увеличением крупности измельченных частиц они включает все большее количество элементарных объемов. При достижении определенного размера $d = n_1 L_{вк}$ (n_1 – количество элементарных длин вкрапления в поперечнике частицы – достаточно большое), частицы мало отличаются друг от друга содержанием в них ценного минерала и приближаются по свойству к монолиту.

Третий участок включает частицы крупностью $d > n_1 L_{вк}$. Они будут иметь одинаковое содержание ценного минерала, которое соответствует содержанию его в исходной руде. Для определения величины n_1 необходимо установить, в каких пределах колеблется содержание ценного компонента в частицах крупности $L_{вк} < d < n_1 L_{вк}$.

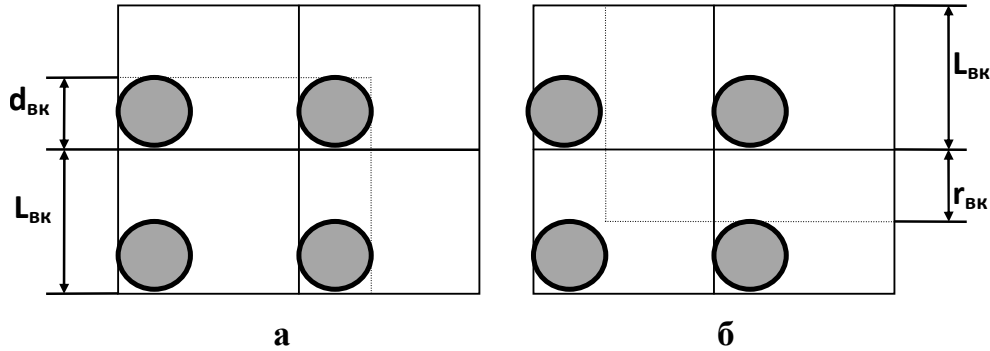


Рис. 2. Схемы формирования возможных видов сростков

Рассмотрим модель структуры рудных вкраплений (рис. 2). Когда размеры частиц лежат в пределах $L_{BK} < d < 2L_{BK}$, то содержание ценного компонента будет максимальным при $d = L_{BK} + d_{BK}$. В этом случае соседнее зерно вкрапления принадлежит частице с максимально возможным содержанием в ней ценного минерала (рис. 2, б) –

$$\alpha_{\max} = \left(\frac{2d_{BK}}{r_{BK} + 2d_{BK}} \right)^3.$$

Если в частице всего одно зерно, а расстояние между зернами вкрапления двойное, то минимальное содержание ценного минерала (рис. 2, б) –

$$\alpha_{\min} = \left(\frac{d_{BK}}{2r_{BK} + d_{BK}} \right)^3.$$

При размерах частицы $2L_{BK} < d < 3L_{BK}$ максимально возможное содержание в ней ценного минерала ($n = 2$) –

$$\alpha_{\max} = \left(\frac{3d_{BK}}{2r_{BK} + 3d_{BK}} \right)^3,$$

а минимальное –

$$\alpha_{\min} = \left(\frac{2d_{BK}}{3r_{BK} + 2d_{BK}} \right)^3.$$

Обобщив полученные данные для частиц любого дискретного размера

Загальні питання технологій збагачення

(nL_{BK}) , определим пределы изменения содержания в них ценного минерала:

$$\left(\frac{nd_{BK}}{r_{BK} + nL_{BK}} \right)^3 \leq \alpha \leq \left(\frac{(n+1)d_{BK}}{d_{BK} + nL_{BK}} \right)^3. \quad (2)$$

Рассмотрим, каким образом распределяются частицы между фракциями.

Допустим имеем руду со вкраплением $d_{BK} = 0,4$ мм, $\alpha_{II} = 0,4$, $r_{BK} = 2d_{BK} (\sqrt[3]{0,65/\alpha_{II}} - 1) = 0,14$ мм. Расчетные параметры функций (2) приведены в табл. 1.

Таблица 1

Показатели расчета граничных содержаний ценного минерала в сростках

n , шт	nL_{BK} , мм	$(n+1)L_{BK}$	nd_{BK}	Знамен мин	Знамен. макс	α_{\min}	α_{\max}
1	0,54	0,8	0,4	0,68	0,94	0,2	0,61
2	1,08	1,2	0,8	1,22	1,48	0,28	0,54
3	1,62	1,6	1,2	1,76	2,02	0,31	0,53
4	2,16	2	1,6	2,3	2,46	0,33	0,5
5	2,7	2,4	2	2,84	3,1	0,35	0,46
7	3,78	3,2	2,8	3,92	4,18	0,36	0,45
10	5,4	4,4	4	5,54	5,8	0,38	0,43
20	10,8	8,4	8	10,94	11,2	0,39	0,42
40	21,6	16,4	16	21,74	22	0,398	0,414

Как следует из табл. 1 отличие в значениях максимального и минимального содержаний при крупности частиц $d > 22$ мм составляет около 3% и на этом основании можно считать, что данный размер частиц является таким, при котором все куски полезного ископаемого не отличаются по содержанию ценного минерала от бесконечно больших. Если же размеры частиц не достигают предельных значений, тем не менее, частицы максимального размера содержат ценный минерал в количестве, равном среднему его содержанию в продукте.

Определим теперь, каким образом связаны между собой функции распределения частиц по крупности и по содержанию ценного минерала.

Предположим, что функция распределения частиц по крупности имеет вид:

d , мм	1	2	3	4	7	8	13	17	20
$F(d)$	0,2	0,52	0,65	0,8	0,9	0,93	0,95	0,97	1

Распределение частиц по сросткам выполним в соответствии с формулами [10]:

$$P_{P3} = \alpha_{II} \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{X}{X_{BK}}\right) \Delta F(X), \quad (3)$$

$$P_{H3} = (1 - \alpha_{II}) \sum_{i=1}^{k_1} \left(1 - \frac{X}{r_{BK}}\right) \Delta F(X), \quad r_{BK} = X_{BK} \left(\sqrt[3]{\frac{0,65}{\alpha_{II}}} - 1\right), \quad (4)$$

$$P_{HC} = (1 - \alpha_{II}) \left(\sum_{i=1}^{k_1} \frac{X}{r_{BK}} \Delta F(X) + \sum_{k_1}^{k_2} \Delta F(X)\right), \quad (5)$$

$$P_{PC} = \alpha_{II} \left(\sum_{i=1}^k \frac{X}{X_{BK}} \Delta F(X) + \sum_k^{k_3} \Delta F(X)\right) + \sum_{k_3}^{k_4} \Delta F(X). \quad (6)$$

Все нижеследующие величины округляются до ближайшего целого числа:

$$k = \frac{X_{BK}}{\Delta X}; \quad k_1 = \frac{r_{BK}}{\Delta X}; \quad k_2 = \frac{10L_{BK} - r_{BK}}{\Delta X}; \quad k_3 = \frac{10L_{BK} - X_{BK}}{\Delta X}; \quad k_4 = \frac{15L_{BK}}{\Delta X}; \quad L_{BK} = X_{BK} + r_{BK}.$$

Расчетная функция распределения частиц по сроткам $F(\alpha)$ имеет вид, показанный на рис. 3 (сплошная линия), т.е. представлена в виде ломаной линии, поскольку строится по трем точкам.

Как следует из приведенных выражений, распределение по качественному признаку на сротки осуществляется путем разделения по крупности. Поэтому шкалы крупности и содержания ценного минерала могут быть согласованы в соответствии с зависимостями рис.3 (пунктирные линии). Опорными точками являются размер вкрапления – d_{BK} , максимальная крупность и размер нерудной части между вкраплениями – r_{BK} . Соответствие между содержанием ценного минерала и крупностью частиц осуществляется с помощью зависимостей (2) в соответствии с правилом сопоставления шкал, на рис. 4 (от периферии к центру).

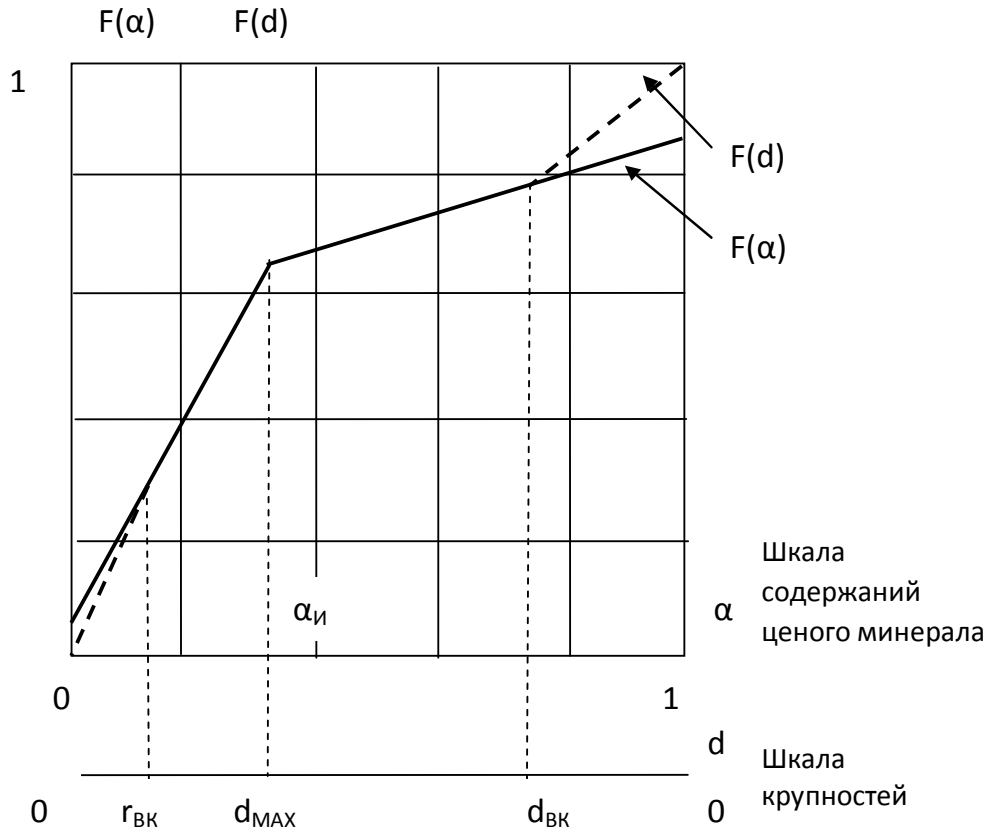


Рис. 3. Кривая распределения сростков по содержанию в них ценного минерала

Таким образом, если по оси абсцисс рис. 3 отложить не только шкалу содержаний ценного минерала α , но и соответствующие этим содержаниям значения крупностей (шкалу крупностей), то график на рис. 3 будет отражать одинаковые количественные приращения как для крупности так и для содержания ценного минерала. Отличие будет заключаться в том, что содержание ценного минерала может быть нулевым и поэтому функция $F(\alpha)$ имеет разрывы первого рода, а крупность частиц не может быть нулевой, поэтому от значений аргумента, связанных со структурными параметрами: r_{BK} и d_{BK} кривая распределения изменяет свой характер: начинаясь из нуля и заканчиваясь в единице (рис. 3).

Таким образом, для получения кривой распределения частиц по крупности достаточно иметь кривую распределения по содержанию ценного минерала в частицах, затем в соответствии с рис. 4 определить соответствие крупности частиц и содержания в них ценного минерала сформировать шкалу крупности. На этой шкале обозначить структурные признаки полезного ископаемого и далее формально провести отрезки касательных к кривой $F(\alpha)$ в конечные точки распределения: 0 и 1.

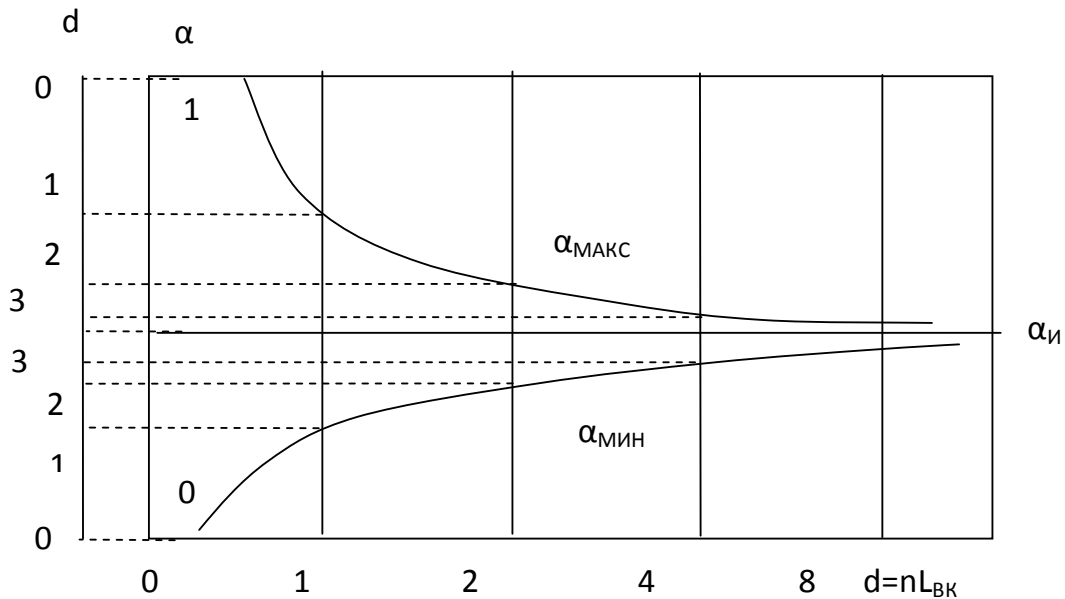


Рис. 4. Графики к постановке соответствия содержания ценного минерала в сродках с крупностью сродков

Рассмотренная методика определения функций распределения частиц по крупности и по содержанию получаемых после разделения по некоторому разделительному физическому признаку, может быть применена для всего диапазона изменения содержания ценного минерала в полезном ископаемом $0 < \alpha_{II} < 1$. Когда содержание ценного минерала становится более $\alpha_{II} > 0,65$, то рудная

фаза становится непрерывной и в нее вкраплена нерудная фаза. Размер нерудной фазы охарактеризуем d_H , а расстояние между этими вкраплениями – r_M . Представив распределение вкрапления матричной формой, можно определить объемное содержание ценного компонента через линейные размеры вкрапленности

$$\alpha_{II} = \left(\frac{r_M}{r_M + d_H} \right)^3.$$

Величина r_M сложно зависит от распределения нерудного материала и поэтому выражение (1) перепишем в ином виде $\alpha_{II} = \frac{L_M^3 - d_H^3}{L_M^3}$. Отсюда

$$L_M = \frac{d_H}{\sqrt[3]{1 - \alpha_{II}}}.$$

В зависимости от размера частиц в них может быть различное содержание ценного компонента от некоторого минимума до максимума. Так, если частица имеет размер $L_{BK} < d < 2L_{BK}$, то этот класс частиц может включать частицы с

содержанием ценного компонента в количестве:

$$\alpha_{MIN} = \frac{(2d_H + r_M)^3 - 2d_H^3}{(r_M + 2d_H)^3}, \quad \alpha_{MAX} = \frac{(d_H + 2r_M)^3 - d_H^3}{(2r_M + d_H)^3}.$$

Класс частиц размером $2L_{BK} < d < 3L_{BK}$ характерен

$$\alpha_{MIN} = \frac{(3d_H + 2r_M)^3 - (3d_H)^3}{(2r_M + 3d_H)^3}, \quad \alpha_{MAX} = \frac{(2d_H + 3r_M)^3 - (2d_H)^3}{(3r_M + 2d_H)^3}.$$

Продолжив аналогичные рассуждения далее, получаем выражение для любого класса крупности

$$\alpha_{MIN} = \frac{((n+1)d_H + nr_M)^3 - ((n+1)d_H)^3}{(nr_M + (n+1)d_H)^3},$$

$$\alpha_{MAX} = \frac{(nd_H + (n+1)r_M)^3 - (nd_H)^3}{((n+1)r_M + nd_H)^3},$$

$$n = \text{integer}\left(\frac{d_{\text{ч}}}{L_{BK}}\right).$$

Подготовленное к разделению полезное ископаемое разделяют в сепарационном блоке или отдельном сепараторе, который наиболее удобно для расчетов формализуется сепарационной характеристикой $P(\alpha)$ [11]. В этом случае выходные показатели разделения вычисляются в соответствии с очевидными математическими выражениями[10]:

Таблица 2

Результаты расчета граничных содержаний в частицах								
n	nr_M	$(n+1)r_M$	$(nd)^3$	$((n+1)d)^3$	$(nr+(n+1)d)^3$	$(nd+(n+1)r)^3$	α_{\min}	α_{\max}
0	0	0,07	0	0,001	0,001	0,0003	0	1
1	0,07	0,14	0,001	0,008	0,02	0,014	0,6	0,93
2	0,14	0,21	0,008	0,027	0,08	0,07	0,66	0,88
3	0,21	0,28	0,027	0,064	0,22	0,195	0,71	0,86

– общий выход продукта складывается из элементарных выходов

$$\gamma_{\beta} = \sum_{i=1}^k \Delta\gamma(\alpha_i) = \sum_{i=1}^k \Delta F(\alpha_i)P(\alpha_i).$$

Загальні питання технологій збагачення

– выход обедненного продукта

$$\gamma_v = \sum_{i=1}^k \Delta F(\alpha_i)(1 - P(\alpha_i)).$$

Функции распределения частиц по содержанию в них ценного минерала в продуктах разделения составят

$$\Delta\gamma_\beta(\alpha_i) = \frac{1}{\gamma_\beta} \Delta F(\alpha_i)P(\alpha_i),$$

$$\Delta\gamma_v(\alpha_i) = \frac{1}{\gamma_v} \Delta F(\alpha_i)(1 - P(\alpha_i)).$$

Общее содержание ценного минерала в этих продуктах определяется как средневзвешенная величина

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^k \Delta\gamma(\alpha)\alpha}{\sum_{i=1}^k \Delta\gamma(\alpha)} = \frac{\sum_{i=1}^k \alpha_i \Delta F(\alpha_i)P(\alpha_i)}{\gamma_\beta},$$

$$v = \frac{\sum_{i=1}^k \alpha_i \Delta F(\alpha_i)(1 - P(\alpha_i))}{\sum_{i=1}^k \Delta F(\alpha_i)(1 - P(\alpha_i))}.$$

Выполняя аналогичные вычисления с функциями $P(\alpha)$ и $F(d)$ получим качественно-количественные показатели разделения по крупности. Для этого обозначим функцию $P(\alpha) \equiv P(\alpha/d)$ и расчетные соотношения примут вид:

$$\gamma_v(d_i) = \sum_{i=1}^k \Delta F(d_i)(1 - P(\alpha_i / d_i)),$$

$$\gamma_\beta(d_i) = \sum_{i=1}^k \Delta F(d_i)P(\alpha_i / d_i),$$

$$\bar{d}_\beta = \frac{\sum_{i=1}^k d_i \Delta F(\alpha_i)P(\alpha_i / d_i)}{\gamma_\beta(d)},$$

$$\bar{d}_v = \frac{\sum_{i=1}^k d_i \Delta F(d_i) P(\alpha_i / d_i)}{\gamma_v(d)},$$

$$\Delta \gamma_v(d_i) = \frac{1}{\gamma_v(d)} \Delta F(d_i) (1 - P(\alpha_i / d_i)),$$

$$\Delta \gamma_\beta(d_i) = \frac{1}{\gamma_\beta(d)} \Delta F(d_i) P(\alpha_i / d_i).$$

Выполним расчет характеристики распределения частиц по крупности в обогащенном и обедненном продуктах после распределения продукта, например в магнитном сепараторе. Исходные данные для расчета следующие: $d_{BK} = 0,2$ мм, $\alpha_{II} = 0,35$, $r_{BK} = d_{BK} (\sqrt[3]{0,65/\alpha_{II}} - 1) = 0,046$ мм. $\bar{d} = 0,2$ мм, $F(d) = 1 - \exp(-\frac{d}{\bar{d}})$.

Расчет функции распределения сrostков, дал такие показатели раскрытия: $P_{H3} = 0,0471$; $P_{P3} = 0,1$, на основании которых определена функция распределения сrostков $F(\alpha)$ [10]. Задана также некоторая сепарационная характеристика разделительного аппарата $P(\alpha)$ (табл. 3).

Решение задачи выполним следующим образом.

Зададимся исходными данными относительно показателей руды: вкрапление, содержание ценного минерала и распределение частиц по крупности.

Определим зависимость возможного содержания ценного минерала в частицах от крупности частиц.

Выполним расчет показателей раскрытия и определим функцию распределения частиц по содержанию в них ценного минерала – распределение сrostков.

Выполним преобразование функции распределения сrostков в функцию распределения по крупности. Начальная гранулометрическая характеристика и расчетная должны быть одинаковы.

Распределение частиц по крупности в продуктах разделения определим на основании полученного доказательства. Для этого, задавшись сепарационной характеристикой, выполним расчет показателей разделения и функции распределения сrostков в этих продуктах.

Выполнив преобразование функций распределения сrostков в функции распределения по крупности, получим решение задачи преобразования функции распределения сrostков в функцию распределения частиц по крупности.

Результаты расчета крупности частиц продуктах разделения.

α	0	0,05	0,15	0,25	0,35	0,45	0,55	0,65	0,75	0,85	0,95	1
$F(\alpha)$	0,05	0,21	0,4	0,57	0,67	0,71	0,75	0,78	0,82	0,86	0,9	1
$\Delta F(\alpha)$	0,05	0,16	0,19	0,17	0,1	0,04	0,04	0,03	0,04	0,04	0,04	0,1
$P(\alpha)$	0,1	0,11	0,17	0,29	0,44	0,55	0,65	0,75	0,82	0,87	0,92	0,94
d , мм	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05

По результатам расчетов получены функции распределения частиц по крупности, графики которых приведены на рис. 5.

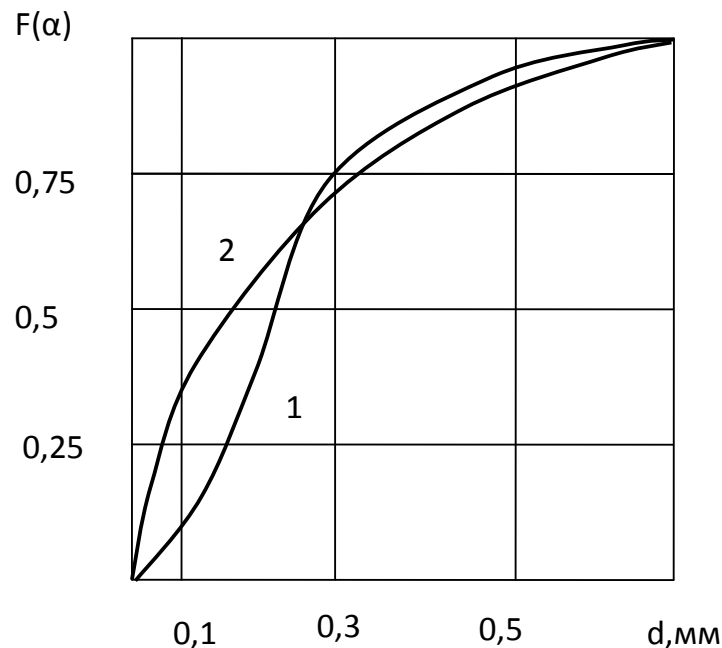


Рис. 5. Функции распределения частиц по крупности в продуктах разделения:
1 – в обогащенном продукте; 2 – в обедненном продукте

Список литературы

1. Половинкина Ю.И. Куммингтонитовые и щелочные амфиболы Кривого Рога // Минералог: Сб. Львовского геолог. общества, Из-во Львовского университета. –1955. – №8. – 80 с.
2. Аммосов И.И., Звягин Б.И., Тодес О.М., Юровский А.З. Инженерные расчеты теории раскрытия минералов в процессе обогащения углей. – М: Изд-во АН СССР, 1955– 76 с.
3. Тодес О.М., Юровский А.З., Зарубин Л.С., Основы теории раскрытия минералов // Труды МГИ, Обогащение полезных ископаемых: сб. 9. Углетехиздат, 1952 – С. 31-39.
4. Гершойг Ю.Г. Вещественный состав и оценка обогатимости бедных железных руд. – М: Недра, 1968 – 200 с.
5. Залата Л.Ф. О характере и степени раскрытия минеральных зерен при дроблении в железистых породах Криворожского бассейна // Сб. науч. трудов Крив. НИГРИ Геология и горное дело. – 1959. – №2.
6. Новые направления глубокого обогащения тонковкрапленных железных руд / И.Н. Плаксин, В.И. Кармазин, Н.Ф. Олофинский и др. – М: Наука, 1964. – 203 с.

7. Вигель Р.Л. Совокупная модель измельчения и раскрытия минералов // Transactions Society Mining Eng. AIME – 1976-V. 260.
8. Чернуха В.И., Русская Э.И. Расчет степени раскрытия руд, представленных биминеральными системами // Изв. Вузов, Горный журнал. – 1978. – № 8. – С. 154-159.
9. Петрак У. Применение количественного минералогического анализа руд при обогащении // Canadian Mining and Metallurgical Bulletin. – 1976. – V.69, № 767. – P. 146-153.
10. Младецкий И.К. Синтез технологий обогащения полезных ископаемых. – Днепропетровск, 2006. – 154 с.
11. Тихонов О.Н. Теория разделения минералов. – С. Пб, 2008. – 514 с.

© Младецкий И.К., Куваев Я.Г., 2017

*Надійшла до редколегії 21.09.2017 р.
Рекомендовано до публікації д.т.н. П.І. Піловим*