

110-летию
Национального горного
университета
ПОСВЯЩАЕТСЯ

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

А.Н. ШАШЕНКО, Е.А. СДВИЖКОВА, С.Н. ГАПЕЕВ

**ДЕФОРМИРУЕМОСТЬ
И ПРОЧНОСТЬ
МАССИВОВ ГОРНЫХ ПОРОД**

МОНОГРАФИЯ

Днепропетровск
НГУ
2008

УДК 622.023.2:553.061.4
ББК 33.1:26.34
Ш 32

Рекомендовано вченою радою НГУ (протокол № 8 від 24.12.2007 р.)

Рецензенти:

Б.М. Усаченко, доктор технічних наук, професор, завідувач відділу механіки гірських порід Інституту геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України;

В.Д. Петренко, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри основи і фундаменти Дніпропетровського державного технічного університету залізничного транспорту;

В.В. Левіт, доктор технічних наук, професор кафедри будівництва шахт і підземних споруд Донецького національного технічного університету.

Шашенко О.М., Сдвижкова О.О., Гапєєв С.М.

Ш 32 Деформованість та міцність масивів гірських порід: Монографія. – Д.: Національний гірничий університет, 2008. – 224 с. – Рос. мовою.

ISBN 978-966-350-099-7

Викладено фізичні основи міцності гірських порід і породного масиву. Проаналізовано найбільш уживані критерії міцності. Досліджено вплив масштабного ефекту на міцність породного масиву. Наведено приклади чисельного моделювання пружно-пластичних задач в геомеханіці.

Може бути корисною для студентів та аспірантів гірничих спеціальностей у технічних вузах.

Изложены физические основы прочности горных пород и породного массива. Проанализированы наиболее употребляемые критерии прочности. Исследовано влияние масштабного эффекта на прочность породного массива. Приведены примеры численного моделирования упругопластических задач в геомеханике.

Может быть полезна для студентов и аспирантов горных специальностей технических вузов.

УДК 622.023.2:553.061.4
ББК 33.1:26.34

© О.М. Шашенко, О.О. Сдвижкова, С.М. Гапєєв,
2008

ISBN 978-966-350-099-7

© Національний гірничий університет, 2008

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. Физические основы прочности и разрушения твердых тел	8
1.1. Микродефектные теории разрушения	9
1.2. Термофлуктуационная теория разрушения	18
1.3. Термодинамические теории прочности	21
1.4. Феноменологические теории разрушения	24
1.5. Статистические теории прочности	27
2. Закономерности разрушения горных пород за пределом прочности	30
2.1. Особенности разрушения горных пород за пределом прочности	31
2.2. Связь между напряжениями и деформациями за пределом прочности	40
2.3. О виде функции снижения прочности горных пород за пределом прочности	43
3. Критерии прочности в геомеханике	49
3.1. Аналитический критерий прочности	49
3.2. Эмпирический критерий прочности Хоека-Брауна	57
3.3. Угол внутреннего трения в задачах геомеханики	62
4. Оценка прочности неоднородных сред с дефектной структурой	68
4.1. О подобии деформирования твердых тел	68
4.2. Неоднородность горных пород	70
4.3. Гипотезы о природе масштабного эффекта	77
4.4. Коэффициент структурного ослабления как количественная оценка масштабного эффекта в горных породах	82
4.5. Аналитические исследования масштабного эффекта	86
5. Определение коэффициента структурного ослабления на основе вероятностно-статистических моделей	94
5.1. Вероятностно-статистическая модель прочности породного массива	94
5.2. Исследование влияния макродефектов на распределение прочности структурных элементов массива	105
5.2.1. Учет наличия элементов, содержащих макродефекты, при определении характеристик выборки	110
5.2.2. Исследование влияния структурных неоднородностей на величину дисперсии прочности структурных элементов массива	114

5.2.3. Влияние наличия в выборке элементов, нарушенных макродефектами, на вероятностное распределение прочности структурных элементов породного массива	117
5.3. Исследование влияния параметров трещиноватости на вид распределения прочности структурных элементов	123
5.3.1. Исследование влияния угла наклона трещин	123
5.3.2. Исследование влияния изменчивости расстояния между трещинами на вид распределения прочности структурных элементов	132
6. Вероятностно-статистическая модель прочности породного массива с учетом макродефектов	138
6.1. Обоснование закона распределения прочности породного массива с учетом влияния макродефектов	138
6.1.1. Границы применимости логнормального закона распределения, его свойства и связь с другими распределениями	145
6.2. Определение коэффициента структурного ослабления на основе гипотезы о логарифмически нормальном распределении прочности структурных элементов породного массива	150
7. Численные решения упругопластических задач применительно к устойчивости подземных выработок	155
7.1. Упругопластическая задача плоского деформирования для среды с разупрочнением вокруг горизонтальной выработки круглой формы	155
7.2. Алгоритм численного решения упругопластической задачи	168
7.3. Конечноэлементная реализация алгоритма решения упругопластической задачи	176
7.4. Пример численного решения	180
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	187
ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК	188
ПРИЛОЖЕНИЕ А. Значения нормированной интегральной функции нормального распределения	211
ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Гистограммы частот пределов прочности на одноосное сжатие углевмещающих пород Донбасса	215
ПРИЛОЖЕНИЕ В. Сводка непрерывных распределений	218

ВВЕДЕНИЕ

Освоение человеком земных недр всегда связано с образованием в породном массиве искусственных полостей – выработок различного назначения. При небольших глубинах расположения выработок и достаточно прочных вмещающих породах обеспечение их устойчивости не составляет особых затруднений. Как только же условие благоприятного сочетания глубины и прочности пород нарушается, обеспечение устойчивости выработок, в особенности подземных, приобретает черты сложной инженерной и научной проблемы.

Характерной особенностью выработок, находящихся на больших глубинах, является наличие зоны разрушенных пород, образующейся между упруго деформированной частью породного массива и его контуром (крепью). Эта зона, как правило, является замкнутой, она играет роль своеобразного демпфера, снижающего уровень напряжений в приконтурном пространстве. Размеры зоны разрушения, величина смещений породного контура, наличие пучения пород почвы или динамических проявлений горного давления в немалой степени зависят от того, каким образом протекает процесс разрушения массива в окрестности выработки.

Горные породы являются, по сути, специфическим конструкционным материалом, в котором проходится выработка. Общим свойством практически всех конструкционных материалов является их твердость, что следует понимать как способность сохранять исходные размеры и целостность, т.е. быть прочными, при небольших (не более 1-3%) относительных деформациях.

Проблема прочности и неразрывно связанное с ней явление разрушения твердых тел существуют с тех пор, когда, создавая то или иное сооружение, человек стал задумываться над соответствием его надежности затратам, связанным со строительством. В особенности эта проблема обострилась к первой четверти двадцатого столетия, когда бурная индустриализация общества стала

сопровождаться такими катастрофическими явлениями, как разрушение мостов, паровых котлов, подъёмных кранов, оружия разного калибра, подземных выработок в результате горных ударов, внезапных выбросов угля, породы, газа, а также многих других инженерных конструкций и сооружений.

Эти события вызвали необходимость выполнения экспериментальных и теоретических исследований, обобщение которых в 20-30-е годы прошлого столетия привело к возникновению новой науки – механики разрушения. По этому поводу существуют сотни книг и статей [1, 2].

Механика разрушения находится на стыке таких естественных наук, как математика, механика, теоретическая и экспериментальная физика, химия. Сложность этой области науки, ее фундаментальность и практическая важность наиболее полно представлены в семитомном изложении, которое вышло в США в 1968 году под редакцией крупного специалиста в этой области Г. Либовица. В русском переводе это издание увидело свет в 1973 году под редакцией А.Ю. Ишлинского [3]. Применительно же к горным породам наиболее полные исследования в области природы их прочности были выполнены в работах А.Н. Ставрогина [4], Г.Т. Кирничанского [5], В.В. Виноградова [6], Кука [7], Е. Хоека [8], З. Бенявского [9] и др. авторов.

Настоящая книга состоит из трех частей. В первой (разделы 1-3) излагаются физические основы прочности и разрушения горных пород, как обширного класса твердых тел. Предложен локальный критерий прочности, оценены его достоинства и область применения на основе сравнения с результатами экспериментальных исследований. Во второй части книги (разделы 4-6) исследования посвящены проблеме перехода от прочности породного образца к породному массиву. Эта проблема связана с масштабным эффектом, оценка которого выполнена на основе вероятностно-статистических моделей. В третьей части (раздел 7) показаны некоторые подходы к решению геомеханических задач численными методами.

Авторы выражают свою признательность к.т.н. Н.В. Хозяйкиной и аспиранту А.С. Иванову за техническую помощь в процессе работы над

настоящим изданием, их помощь значительно сократила время работы над книгой.

Мы полагаем также, что книга будет полезна студентам, аспирантам и практическим инженерам, занимающимся оценкой и обеспечением прочности подземных сооружений.

Авторы с благодарностью примут все замечания и советы по настоящему изданию.

Работа выполнена при поддержке Фонда гражданских исследований и развития США (U.S. Civilian Research and Development Foundation) – CRDF, грант USB1-021-DP-07.

1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРОЧНОСТИ И РАЗРУШЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Механическое разрушение вследствие силового воздействия можно определить как результат некоторого деформирования и разрыва структурных связей материала конструкции. Исследование этого явления, как и решение любой задачи, происходит на основе физических моделей, имитирующих реальные твердые тела. В зависимости от целей исследования изучению и анализу можно подвергнуть сравнительно небольшое количество моделей (рис. 1.1). К ним относятся структурные модели, рассматривающие твердые тела на атомно-молекулярном уровне, и бесструктурные (континуальные), когда объект изучения представляется в виде сплошного однородного тела.

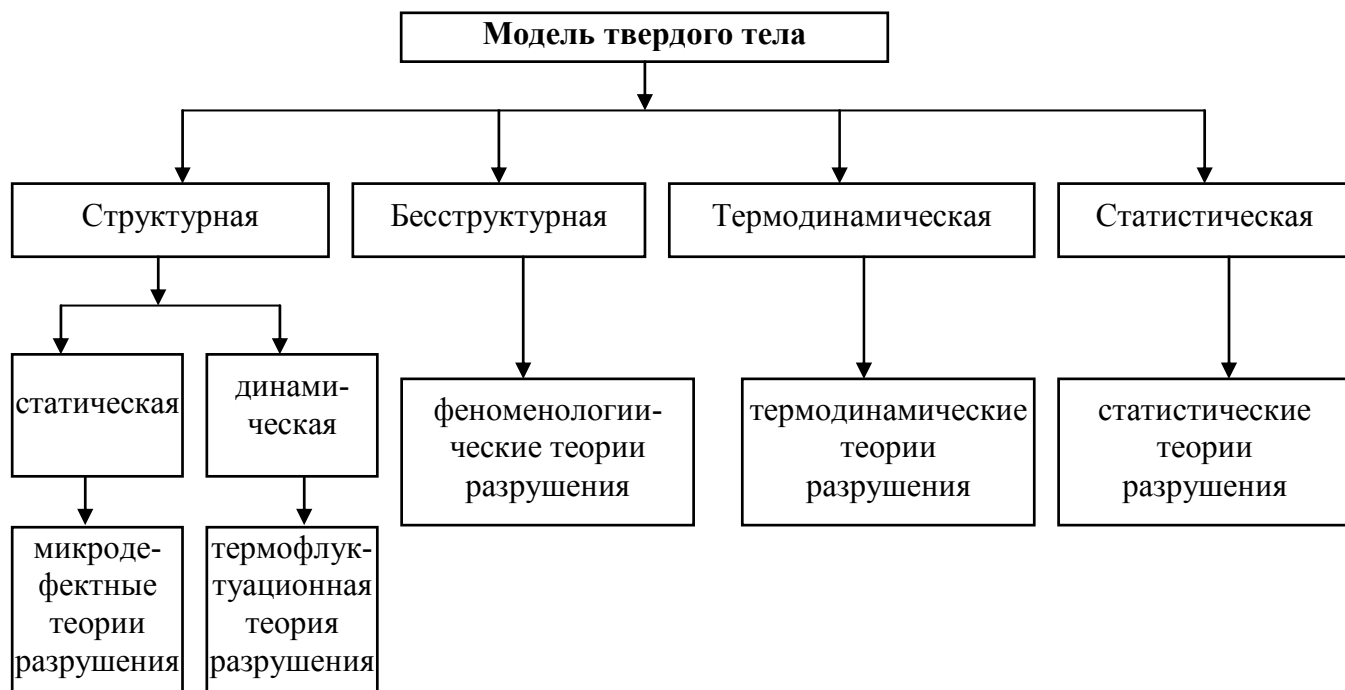


Рис. 1.1. Модели твердого тела

Структурные модели, как статические, так и динамические, изучаются методами физики твердого тела; бесструктурные – методами механики сплошной среды.

Существуют также комбинированные модели, с помощью которых среду представляют как сплошное тело, состоящее из хаотически расположенных структурных элементов, обладающих, в свою очередь, микроструктурой более низкого уровня. При этом структурные элементы и на макро-, и на микроуровне имеют отличающиеся физико-механические характеристики. Изучение таких моделей ведется также на основе механики сплошной среды, но с привлечением методов теории вероятностей.

Отдельный класс представляют так называемые термодинамические модели, изучаемые на основе положений термодинамики.

1.1. Микродефектные теории разрушения

Рентгеноструктурные исследования горных пород позволили достаточно точно установить их строение, в соответствии с чем они могут быть разделены на кристаллические и аморфные. Причем, подавляющее число литологических разновидностей, в том числе все породы осадочного типа, относятся к группе поликристаллических твердых тел.

Основным свойством кристаллического состояния вещества является геометрически правильное расположение частиц в пространстве. Частицами могут быть атомы, ионы или молекулы. Кристаллы имеют строение так называемой пространственной решетки, представляющее собой периодическое повторение одной и той же группы частиц. Такая группа частиц образует элементарную ячейку, являющуюся исходной структурной единицей.

Принимая в качестве основной структурную модель твердого тела в виде идеальной кристаллической решетки, по углам которой находятся частицы, удерживаемые силами связи, можно рассчитать величину усилия, которое потребуется, чтобы разорвать эту связь и тем самым разрушить деформируемое тело. Впервые эту задачу для хрупких материалов удалось решить А.А. Гриффитсу [10], опираясь на аналитические исследования Г.В. Колосова и Инглиса [11]. А.А. Гриффитс показал, что прочность хрупких твердых тел определяется прочностью на разрыв структурных связей, существенно ослабленных за

счет микродефектов. Эти микродефекты (трещины) неизбежно, по разным причинам, присутствуют в исходном материале. В осадочных породах, например, их наличие связано с генезисом и последующим метаморфизмом.

Разрыв путём растяжения межатомных связей в твердом теле требует наличия напряжения порядка $0,2E$, где E – модуль упругости материала. Реальные же хрупкие тела разрушаются при напряжениях, равных, примерно, $0,002E$. Идея А.А. Гриффитса состояла в том, что действующие напряжения от внешних нагрузок многократно увеличиваются благодаря концентрации напряжений на кончиках микродефектов – трещин.

Для решения поставленной задачи им был применен энергетический подход, который имеет тот недостаток, что в случае трещины с притупленными краями дает условие, которое является необходимым, но не достаточным для перемещения трещины. В этой связи позже Эллиотом и Г.И. Баренблаттом было показано, что кончик трещины А.А. Гриффитса должен быть максимально заострен, тогда перемещение трещин становится возможным.

При этом очень существенным обстоятельством является способ нагружения твердого тела: заданная деформация или заданная нагрузка. В первом случае продвижение трещины приводит к высвобождению энергии упругой деформации, которая покрывает дополнительную поверхностную энергию. Во втором случае появление трещины вызывает удлинение образца и дополнительная работа, совершаемая постоянной нагрузкой при таком удлинении, покрывает прирост поверхностной энергии и энергии деформации.

А.А. Гриффитс рассмотрел второй случай, как явно приводящий к разрушению образца при приложении некоторых критических нагрузок.

Пусть образец с сечением в единицу площади и длиной Y испытывает продольное растяжение внешней нагрузкой P , порождающей напряжения σ . В данном случае $P = \sigma$. Тогда энергия упругой деформации образца будет равна $Y\sigma^2/2E$. Если образец содержит трещину, которая расположена перпендикулярно к линии действия силы и имеет длину $2c$, то образец удлинится, что на

основе решения Инглиса, увеличит энергию деформации на $\pi\sigma^2 c^2/E$. Таким образом, полная энергия деформации станет равной

$$\frac{Y\sigma^2}{2E} + \frac{\pi\sigma^2 c^2}{E} = \frac{\sigma^2}{2E}(Y + 2\pi c^2). \quad (1.1)$$

Из выражения (1.1) следует, что эффективный модуль упругости образца с трещиной равен $YE/(Y + 2\pi c^2)$. Трещина также привносит поверхностную энергию $Y = c\gamma$, где γ – удельная поверхностная энергия.

Работа ω , совершаемая напряжением σ при удлинении образца, вызванном появлением трещины, равна

$$\omega = \sigma Y(\varepsilon_c - \varepsilon),$$

где ε – относительная продольная деформация образца при отсутствии трещины, а ε_c – то же, но после появления трещины.

Следовательно

$$\omega = \sigma^2 Y \left(\frac{Y + 2\pi c^2}{YE} - \frac{1}{E} \right) = \frac{2\pi\sigma^2 c^2}{E}. \quad (1.2)$$

Энергетический критерий разрушения требует, чтобы работа, совершаемая действующим напряжением при увеличении длины трещины, была достаточной для покрытия соответствующего увеличения поверхностной энергии и энергии упругой деформации. Таким образом, разрушающее напряжение определится следующим соотношением:

$$\frac{d(2\pi\sigma_p^2 c^2 E^{-1})}{dc} = \frac{d(4c\gamma E^{-1} + \pi\sigma_p^2 c^2 E^{-1})}{dc},$$

откуда

$$\sigma_p = \left(\frac{2E\gamma}{\pi c} \right)^{0,5}. \quad (1.3)$$

Выражение (1.3) и есть основное соотношение А.А. Гриффитса в условиях плоского напряженного состояния. Для случая плоской деформации выражение (1.3) примет вид

$$\sigma_p = \left(\frac{2E\gamma}{(1-\nu^2)\pi c} \right)^{0,5} \quad (1.4)$$

Основные элементы энергетического баланса при образовании трещины в растягиваемом образце представлены на рис. 1.2.

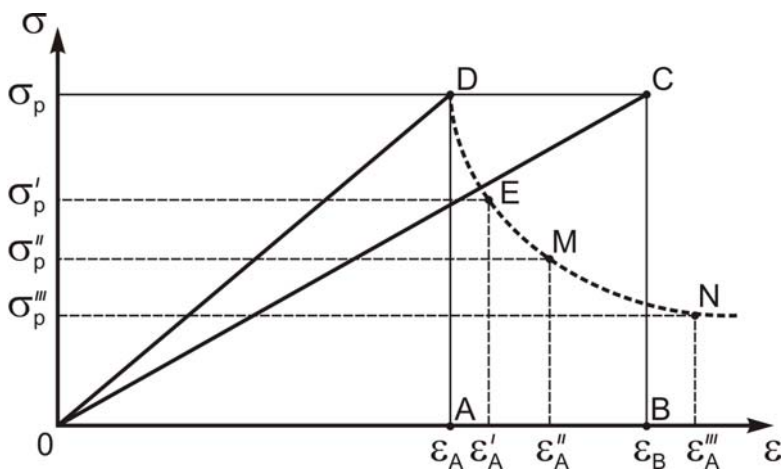


Рис. 1.2. Связь напряжений и деформаций при наличии трещины в растягиваемом образце

При отсутствии трещины образец получает относительное удлинение ϵ_A , чему соответствует напряжение σ_p . При образовании трещины относительное удлинение увеличивается до ϵ_B при постоянном напряжении σ_p .

Полная работа, совершаемая приложенным напряжением при образовании трещины, численно равна площади прямоугольника $ABCD$. При этом увеличение упругой энергии соответственно равно разности площадей треугольников $OBC-OAD=0,5ABCD$. Таким образом, на покрытие прироста поверхностей энергии идет также $0,5ABCD$.

В случае же заданной деформации действующее напряжение упало бы после образования трещины до величины σ'_p . При этом в пределе для малого приращения длины трещины уменьшение энергии деформации, численно равное площади треугольника OED , равно увеличению упругой энергии (треугольник OCD) при постоянном напряжении. Во время роста трещины при постоянной деформации приложенное напряжение не совершает никакой работы. Таким образом, критерий начала роста трещины вновь дается выражением (1.3). Од-

нако падение напряжения со временем приведёт к остановке трещины. Для ее дальнейшего роста необходимо приложить новую порцию деформации ε'_A , затем ещё одну ε''_A и так до полного исчерпания несущей способности образца.

Позднее Е. Орован предложил силовой критерий разрушения. В его модели радиус кривизны у кончика трещины равен атомному размеру a . В этом случае максимальное растягивающее напряжение равно $2\sigma\left(\frac{c}{a}\right)^{0,5}$. При разрушении эта величина должна быть равна теоретической прочности, величина которой составляет $\left(\frac{E\gamma}{a}\right)^{0,5}$. Отсюда следует

$$\sigma_p = \left(\frac{E\gamma}{4c}\right)^{0,5}, \quad (1.5)$$

что очень близко к формуле (1.3), полученной А.А. Гриффитсом. В отличие от энергетического критерия А.А. Гриффитса, силовой критерий Е. Орована является не только необходимым, но и достаточным для перемещения трещины.

Поскольку $\gamma \approx \frac{Ea}{30}$, то обычно наблюдаемые значения прочности, равные примерно $\frac{E}{500}$, можно объяснить, исходя из (1.3), наличием трещин в твердых телах длиной $2c=10^{-6}$ м.

Для удобства математического описания микродефекты у А.А. Гриффитса имели форму узких эллипсов, хотя физически более правильно, по мнению П.А. Ребиндера, предполагать плавное смыкание стенок трещин. Соображения П.А. Ребиндера о форме трещин были развиты в работах Я.И. Френкеля [12].

Я.И. Френкель ввел понятие минимума энергии, полученной телом от действия внешних сил, необходимой для роста трещин.

Г.И. Баренблатту [13] принадлежит гипотеза о постоянстве формы устья трещины.

А.Ф. Иоффе [14], производя опыты с каменной солью, установил, исходя из предположения А.А. Гриффитса, что наиболее опасными являются микротрещины, расположенные на поверхности нагружаемого объекта. Растворяя эти

дефекты в воде, ему удалось получить прочность на разрыв кристаллов каменной соли, близкую к теоретической.

А.В. Степанов [15, 16] внес в эти представления поправку, согласно которой поверхностные трещины становятся опасными только в том случае, если они встречаются с выходом кристаллографического сдвига, который всегда предшествует распространению трещины.

Существенное развитие микродефектная теория разрушения твердых тел получила в работах А. Смекала и его школы [17], а также Е. Орована [18].

В работах Дж. Р. Ирвина [19] критерий прочности А.А. Гриффитса получил эквивалентную формулировку в виде так называемого силового критерия. Им же введено понятие вязкости разрушения и коэффициента интенсивности напряжений, которые связаны зависимостью [20], аналогичной известной формуле А.А. Гриффитса.

Учет пластической деформаций в теории А.А. Гриффитса был независимо предложен Дж. Р. Ирвином, Е. Орованом и позднее рассматривался А. Котреллом [19]. В этих работах поверхностная энергия упругого тела заменена на более реальную для разрушения величину удельной энергии поверхности, учитывающую пластическую деформацию у кончика трещины. Эти рассуждения позже были развиты А. Кобаяси и др. [21]. Сведения о модификациях представлений А.А. Гриффитса о разрушении твердых тел содержатся также в работах [22-28].

Свои умозаключения относительно ослабляющего влияния микродефектов на прочность твердых тел А.А. Гриффитс воплотил в стройную теорию, составившую основу дальнейших исследований в области так называемых микродефектных теорий прочности.

Критерий А.А. Гриффитса, пользуясь которым можно определить, произойдет или не произойдет разрушение твердого тела, имеет вид [29]:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + 8R_p(\sigma_3 + \sigma_1) = 0, \text{ если } 3\sigma_3 + \sigma_1 > 0, \quad (1.6)$$

$$\sigma_3 = R_p, \text{ если } 3\sigma_3 + \sigma_1 < 0. \quad (1.7)$$

Положив в выражении (1.6) $\sigma_3 = 0$, получим соотношение между пределом прочности на одноосное сжатие и пределом прочности на одноосное растяжение,

$$R_c = -8R_p, \quad (1.8)$$

что вполне отвечает результатам экспериментов с горными породами.

Теория прочности, разработанная А.А. Гриффитсом в начале 20-х годов, вполне отвечает современным представлениям о механизме разрушения твердых тел и достаточно хорошо согласуется с опытными данными. Именно по этой причине ей уделяется так много внимания в специальных исследованиях других авторов, где она получила свое дальнейшее развитие.

Так, например, Мюррель на основании формального анализа поведения твердого тела с микродефектами в процессе нагружения предложил для условий трехосного сжатия критерий прочности [30], по форме сходный с выражением (1.3). По Мюреллю предел прочности на одноосное сжатие связан с пределом прочности на одноосное растяжение зависимостью

$$R_c = -12R_p. \quad (1.9)$$

Ф. Маклинток и И. Уолш [31] высказали предположение, что стенки узких микродефектов в процессе нагружения могут сблизиться и возникающие при этом силы трения необходимо учитывать при расчетах. Авторами предложено соответствующее условие разрушения и методика определения коэффициента трения стенок трещин.

Г.П. Черепановым для условий всестороннего сжатия предложен критерий прочности более общего вида, также учитывающий эффект трения стенок трещин при их сближении [32]. Разрушение при сжатии по Г.П. Черепанову проявляется в виде образования зигзагообразной трещины. Экспериментально на оптически активных материалах подобный характер разрушения был зафиксирован З.Т. Беньевским [9] и Н.А. Филатовым и др. [33].

Энергетический подход, положенный в основу микродефектных теорий прочности, с физической точки зрения имеет много преимуществ. В связи с дополнительными соображениями, вытекающими из закона сохранения энергии, можно рассчитать баланс процессов деформирования и разрушения и определить направление развития процесса. Реализация последнего обстоятельства оказывается возможной благодаря применению вариационных принципов, которые основаны на уравнениях и закономерностях протекания процессов, исходящих из одного общего положения. Вариационные принципы являются одними из основных в физике и находят широкое применение при изучении различных видов деформаций [34].

В последнее время делаются попытки применения этих принципов и к изучению разрушения твердых тел [35-37].

Микродефектные теории едины в том, что они рассматривают разрушение как результат дезинтеграции твердого тела вдоль одной магистральной трещины. Так разрушаются, например, породные откосы, склоны, борта карьеров и тому подобные объекты. В подземных горных выработках хрупкое разрушение происходит иначе, оно реализуется в виде системы трещин. Для описания такой модели трещинообразования необходимо введение в рабочие гипотезы специальных предпосылок.

При деформировании твердых тел всегда существует два механизма, благодаря которым происходит разрушение материала – пластическое течение (сдвиг) и хрупкое растрескивание (отрыв). На это обстоятельство указывал еще Прандтль [38], подчеркивая, что следует различать два типа разрушения: хрупкое, которое происходит путем отрыва по плоскостям, перпендикулярным к растягивающей силе, и вязкое – от сдвига.

Эти вопросы получили широкое развитие в трудах Н.Н. Давиденкова [38], Я.Б. Фридмана [39], Г.В. Ужика [40] и др. Понятие о хрупком и вязком разрушении служит физической основой для разработки тех или иных критериев прочности.

В настоящее время можно считать установленным, что разрушение только путем отрыва или только путем сдвига невозможно в принципе. Если пластиче-

ская деформация, вызываемая касательными напряжениями, разрыхляет материал и готовит его к разрыву, то нарушение сплошности происходит под действием нормальных растягивающих напряжений.

Механизм пластического деформирования твердых тел в результате деформаций сдвига был раскрыт в 1934 г. Дж. Тейлором, который первый пришел к мысли о существовании линейных дефектов в кристаллических решетках – дислокаций [41]. Дислокации зарождаются у кончиков трещин или иных концентраторов напряжений, они могут взаимодействовать друг с другом и существенно при этом размножаться (источник Франка-Рида).

Процесс распространения дислокаций в кристалле математически был описан Я.И. Френкелем и Т.А. Канторовой [42]. Дальнейшей разработкой теории дислокаций занимались и занимаются исследователи как у нас в стране, так и за рубежом [43-49].

В твердых телах типа горных пород пластические деформации начинаются при сравнительно небольших нагрузках. Среди множества хаотически расположенных кристаллов всегда найдется некоторое число наименее выгодно ориентированных по отношению к внешним усилиям и имеющих внутренние дефекты типа дислокаций. Эти кристаллики деформируются пластически уже при сравнительно небольших внешних усилиях. Число этих кристалликов сравнительно невелико и местные пластические деформации заметно не сказываются на общей зависимости между силой и перемещением, свойственной начальной стадии нагружения.

При больших внешних усилиях пластические деформации становятся преобладающими. Необратимые сдвиги происходят в большинстве кристаллов по наиболее слабым поверхностям, в особенности, если они имеют направление, близкое к поверхностям максимальных касательных напряжений. Это находит свое отражение в образовании полос скольжения (линии Чернова-Людерса) на полированных боковых поверхностях деформируемых породных образцов.

В результате приложения внешних сил в кристаллах возникают смещения атомов не только на целое число позиций, но и происходит также неко-

торое искажение кристаллической решетки. Таким образом, наряду с пластической деформацией существует и упругая. Установлено, что пластическое деформирование в результате сдвига необратимо и протекает без изменения объема материала.

1.2. Термофлуктуационная теория разрушения

Второй важный этап в развитии представлений о прочности, вслед за учетом атомного строения, заключался в учете влияния теплового движения в твердом теле на процесс разрушения. Переход к этапу учета теплового движения был связан, в частности, с накоплением экспериментальных данных о свойствах «пределов» упругости, прочности и текучести, когда было выяснено, что эти пределы нестабильны и их величина существенно зависит от условий измерений. Такое непостоянство «пределов» упругости, прочности и текучести указывало на какую-то общую физическую причину, делающую их неоднозначными, а всеми принятую статическую модель среды – неполной. Этой причиной оказалось тепловое движение атомов в твердом теле.

Учет теплового движения атомов внес серьезные изменения в чисто «механическую» постановку задачи. Ведь в этом случае внешним усилиям сопротивляется уже не статический ансамбль связанных атомов, а некоторая система, находящаяся в колебательном движении.

Систематическое изучение температурно-временной зависимости прочности было начато С.Н. Журковым в 1952 году [50-53]. В основном работам этой школы обязана своему становлению и развитию термофлуктуационная теория прочности твердых тел.

Опыты на растяжение твердых тел с самой различной структурой (монокристаллы, поликристаллы, полимеры, композиционные материалы), выполненные в разных условиях, показали, что зависимость долговечности τ от действующего напряжения σ и температуры T всегда описывается эмпирической формулой одного и того же вида

$$\tau = \tau_0 \exp(u_0 - \gamma\sigma)/kT, \quad (1.10)$$

где k – постоянная Больцмана; u_0 , τ_0 и γ – некоторые константы испытуемого материала.

Фундаментальные исследования Я.И. Френкеля [42, 54], в которых он детализировал характер теплового движения атомов в твердых телах и жидкостях, позволили однозначно определить физический смысл и численное значение констант, входящих в зависимость (1.10): τ_0 – период колебаний атома вблизи положения равновесия ($\tau_0 \approx 10^{-13}$ с); u_0 – энергия межатомных связей; γ – величина, связанная со структурными особенностями деформируемого тела.

Таким образом, основное уравнение термофлуктуационной теории прочности имеет реальный физический смысл и отражает закономерности процессов, протекающих в нагруженном твердом теле на атомном уровне. Причиной разрушения служат энергетические флуктуации атомов при тепловом движении.

Соотношение (1.10) получено в условиях одноосного растяжения. Переход к долговечности при различных способах нагружения под действием изменяющейся во времени нагрузки осуществляется на основе принципа суммирования повреждений (принцип Бейли). Если твердое тело подвергнуто действию произвольной последовательности напряжений σ_i , каждому из которых соответствует долговечность $\tau(\sigma_i)$, а время действия равно Δt_i , то разрушение произойдет при условии

$$\sum_{i=1}^n \frac{\Delta t_i}{\tau(\sigma_i)} = 1.$$

В пределе при $\Delta t_i \rightarrow 0$ будет иметь место интеграл:

$$\int_0^{t'} \frac{dt}{\tau[\sigma(t)]} = 1, \quad (1.11)$$

где t' – время от момента приложения нагрузки до разрушения твердого тела.

С помощью уравнения (1.11) можно предсказать время разрыва t' и действующее в момент разрыва механическое напряжение для различных режимов нагружения $\sigma = \sigma(t)$, если только известна временная зависимость и ее пара-

метры. С одним из подходов к решению этих задач можно ознакомиться в монографии¹.

Кроме описанной выше, существует еще одна теория термофлуктуационной прочности, активно развивающаяся в последнее время [55-57]. В рамках этой теории зарождение трещины происходит в результате накачки энергии из окружающей среды в разрушающую флуктуацию плотности – дилатон. Это приводит к разогреву и тепловому расширению дилатонов до критической величины, распаду дилатонов и образованию в твердом теле микротрещин.

При разрыве на границе дилатона возникает перепад давлений. В результате дилатон оказывается не только очагом локального разрушения, но одновременно является и точечным флуктуационным источником дислокаций. Таким образом, элементарные механизмы разрушения и пластической деформации оказываются взаимосвязанными и действующими одновременно.

Дилатонная теория прочности позволяет объяснить причину разрушения бездефектных структур в силу внутренней, присущей любому ансамблю атомов, неустойчивости. Эта неустойчивость необратимым образом приводит к разрушению твердого тела в области зародышевой флуктуации плотности, энергия в которой увеличивается в 5-10 раз за счет накачки тепла извне.

Кинетическая теория прочности, как и микродефектная, ничего не говорит о том, как будут сливаться микродефекты в магистральные трещины, являющиеся признаком разрушения твердого тела. Этот недостаток можно было бы устранить, если бы существовал способ суммировать отдельные акты разрушения. Идея суммирования повреждений была сформулирована Больцманом и получила существенное развитие в механике разрушения. Так, например, Л.М. Качанов [57] ввел в качестве меры разрушения количественную характеристику сплошности материала γ^* , которая представляет собой отношение неразрушенной площади поперечного сечения к полной площади сечения.

¹ Скипочка С.И., Усаченко Б.М., Куклин В.Ю. Элементы геомеханики углепородного массива при высоких скоростях подвигания лав.– Днепрпетровск: Изд-во «Лира ЛТД», 2006.– 247 с.

Ю.Н. Работнов [58], продолжив работы в этом направлении, ввел понятие повреждаемости материала ω^* как отношение площади трещин к исходной площади сечения и предложил для случая сложного напряженного состояния тензорный параметр поврежденности вместо скалярного γ^* . Условием разрушения считается достижение определенными инвариантами этого тензора критических значений.

Общим недостатком двух описанных выше подходов к оценке прочности твердых тел является отсутствие физического обоснования появления элементарных актов разрушения. Соединив концепции термофлуктуационной теории прочности с идеей о суммировании различных актов разрушения, Г.Г. Литвинский [59, 60] получил обобщенное уравнение прочности твердых тел.

1.3. Термодинамические теории прочности

Следствием первого закона термодинамики является вывод о том, что ни количество работы, ни количество теплоты, ни параметры, их определяющие (в том числе тензоры напряжений и деформаций, температура, объем тела и т.д.), или их соотношения не могут быть приняты в качестве критериев разрушения твердых тел, поскольку каждый из них в отдельности не является параметром, однозначно или интегрально оценивающим их состояние. В наиболее общем случае в качестве такого параметра может быть принята удельная величина (плотность) внутренней энергии или энтропия деформируемого тела. В некоторых частных случаях в качестве такого параметра могут быть выбраны и другие термодинамические функции состояния, например, энтальпия, энергия Гиббса, энергия Гельмгольца, являющиеся производными от первообразной функции внутренней энергии.

В соответствии с термодинамической теорией разрушения, которая получила своё развитие благодаря трудам И.И. Гольденבלата, В.В. Федорова, В.Л. Бажанова и др., разрушение твердого тела наступает в момент t' , когда хо-

тя бы в одном его микрообъеме, ответственном за разрушение, плотность внутренней энергии достигнет некоторой критической величины U' (рис. 1.3).

Этот факт проявляется в наличии экспериментально установленной С.Н. Журковым температурно-временной зависимости (1.10). Условие разрушения при этом имеет вид

$$U(r', t') = U_0(r') + \Delta U(r', t') = U' = const, \quad (1.12)$$

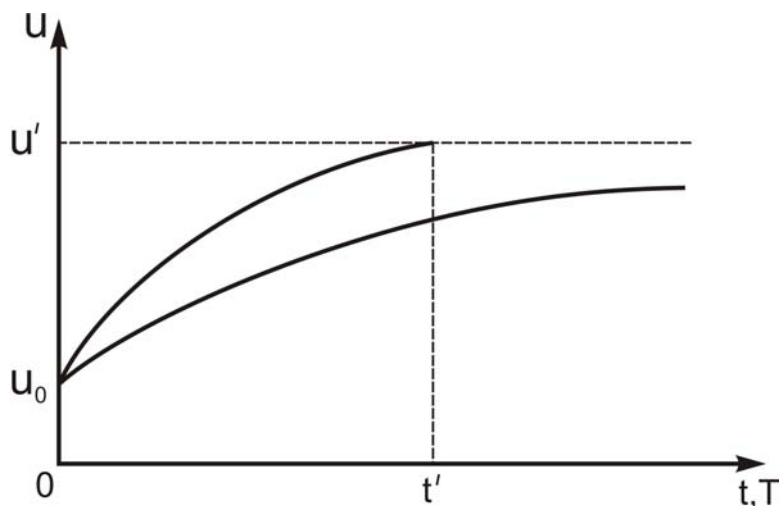


Рис. 1.3. Зависимость внутренней энергии (U) образца твердого тела от времени (t) и температуры (T)

где $U_0(r')$ – плотность внутренней энергии тела в исходном (до деформирования) состоянии, учитывающая его наследственные свойства и предысторию нагружения; $\Delta U(r', t')$ – изменение плотности внутренней энергии в локальных объемах тела за время деформирования t' ;

r' – параметр, характеризующий координаты локального объема тела, ответственного за разрушение, поскольку энергия в общем случае распределяется в теле неравномерно по его объему.

Наряду с описанным выше подходом в термодинамике необратимых процессов вводится энтропийный критерий разрушения. Это направление исследований получило развитие в трудах А.И. Чудновского, Д.А. Киялбаева, И.И. Новикова, Х.З. Бакенова, С.С. Вялова, В.Н. Разбегина и др. В этом случае строится структура внутреннего производства энергии, которая позволяет выделить процессы ползучести и разрушения твердых тел (горных пород, грунтов).

Условие разрушения на основе энтропийного критерия имеет вид

$$S(t'_p) = S_0 + \Delta S', \quad (1.13)$$

где $S(t'_p)$ – энтропия деформируемого образца в момент разрушения t'_p ; S_0 – начальная энтропия; $\Delta S'$ – приращение энтропии образца при его деформировании от начального состояния до разрушения.

Графически смысл энтропийного критерия показан на рис. 1.4.

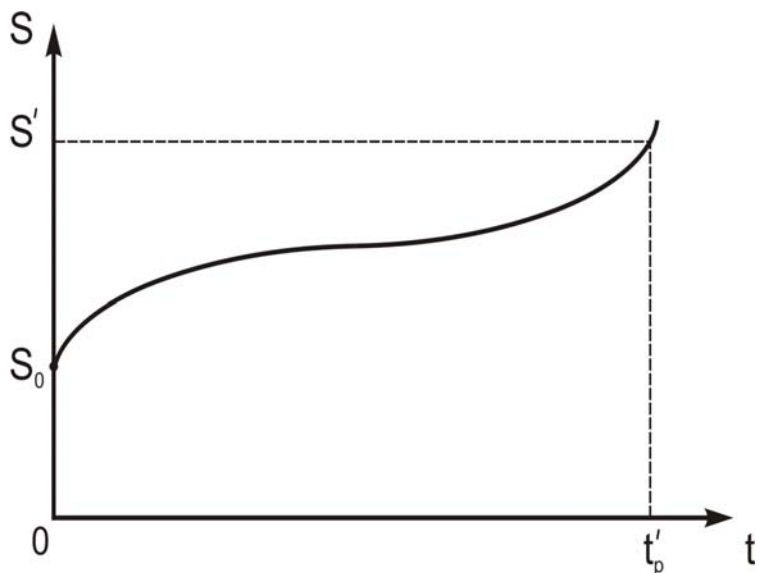


Рис. 1.4. Зависимость изменения энтропии образца от времени

$K_{II} \geq 1$ происходит его разрушение.

С помощью энтропийного критерия может быть выражен коэффициент накопления повреждений K_{II} в деформируемом образце

$$K_{II}(t) = \Delta S(t) / S'. \quad (1.14)$$

При $0 < K_{II} < 1$ состояние деформируемого образца будет устойчивым, при

Экстремальный принцип, по Х.З. Бакенову и Д.А. Киялбаеву, позволяет вывести кинетическое уравнение для введенных параметров состояния, в качестве полной системы которых принимаются $\{T_\sigma, T'_\varepsilon, T, W\}$. Здесь T_σ, T'_ε – соответственно компоненты тензора напряжений и необратимых деформаций, T – температура, W – влажность.

В качестве термодинамических потоков принимаются векторы скоростей потоков тепла – q и влаги – W , скорости необратимой деформации – T'_ε и температуры – T , а соответствующими термодинамическими силами будут $\Delta T, \Delta W, T_\sigma = \partial f / \partial T'_\varepsilon$, где f – плотность свободной энергии.

Для постоянного уровня напряжений в изотермических условиях, в однородном поле влажности связь между тензором напряжений и тензором полной деформации имеет вид

$$T_\varepsilon(t) = GT_\sigma(t_0) + \int_0^t k(t, \tau) F[T_\sigma(\tau)] d\tau, \quad (1.15)$$

где $k(t, \tau)$ – мера ползучести, G – модуль сдвига.

Для описания вязкого разрушения твердого тела (породы, грунта) с использованием энтропийного критерия принимается, что разрушение происходит через время t'_p при достижении плотности энтропии критического значения S' , которая является характеристикой твердого тела (см. рис. 1.4), определяемой опытным путем.

Более подробные сведения о применении термодимического подхода к оценке устойчивости горных пород и грунтов можно найти в книгах [61, 62].

1.4. Феноменологические теории разрушения

Исследования твердых тел на основе структурных моделей позволили понять механизм, лежащий в основе их прочности, и высказать основные концепции теории разрушения. Однако реальные твердые тела существенно отличаются от тех идеализированных представлений, которые лежат в основе рассмотренных выше теорий. Инженерная же практика требует наличия конкретных формул, позволяющих оценивать прочность проектируемых конструкций.

Именно это обстоятельство способствовало разработке практических теорий прочности, в основе которых лежат бесструктурные модели сплошного деформируемого твердого тела. На настоящий момент из всех представленных на рис. 1.1 моделей этот класс изучен наиболее полно.

Бесструктурная, или континуальная, модель сплошного твердого деформируемого тела с точки зрения связи между внешним воздействием и полученным результатом представляет собой так называемый «черный ящик». «Черным ящиком» принято называть любую систему со стохастической структурой, которая преобразует внешний сигнал (воздействие) и выдает результат (итог опыта) в виде некоторой случайной величины. Теории разрушения, основанные на изучении бесструктурных моделей, получили название феноменологических.

Инженерные теории прочности исходят из предположения, что разрушение твердых тел происходит в том случае, когда определенная комбинация компонентов напряжений (деформаций) достигает критического уровня. В самом общем виде условие разрушения для главных компонентов напряжений (деформаций) может быть представлено в виде

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq k \quad (1.16)$$

или

$$F'(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \leq k', \quad (1.17)$$

где F – некоторая функция, связывающая в одно соотношение компоненты напряжений (деформаций), и которая в предельном состоянии равна критерию разрушения k , зависящему обычно от основных прочностных характеристик материала: пределов прочности на сжатие, растяжение, сдвиг или предельных деформационных характеристик.

Длительное время были известны четыре, так называемые классические, теории прочности. Две из них (Кулона-Треска-Сен-Венана и Губера-Мизеса) не потеряли своей актуальности и в настоящее время применительно к пластичным материалам.

Достаточно подробный анализ классических теорий прочности приведен в [63].

Дальнейшее развитие теорий прочности шло, в основном, по пути обоснования аналитических критериев, которые позволяли бы наиболее точно устанавливать предельное состояние в любых конструкционных материалах, в том числе и относящихся к хрупким, неодинаково сопротивляющихся усилиям растяжения и сжатия, какими в подавляющем большинстве являются горные породы.

Были разработаны общие подходы к оценке прочности на феноменологическом уровне, на основе которых получены теории В.П. Баландина [64], И.Н. Миролубова [65], К.И. Ягна [66], Плейхера [67], Бужинского [65], А.И. Боткина [68], Г.А. Дошинского [69], А.Ю. Ишлинского [68], Зенделя [70],

А.Ф. Липатова [71], Давиденкова-Фрийдмана [72], Писаренко-Лебедева [65], и многие другие, подробный анализ которых можно найти в работах [73, 74].

Применительно к горным породам О. Мор [75] предложил теорию прочности, суть которой заключается в следующем: разрушение происходит в том случае, если касательные напряжения, являющиеся функцией нормальных, достигнут определенного уровня. При этом прочность горных пород практически не зависит от величины среднего по величине напряжения σ_2 .

Специально поставленные опыты для выяснения степени влияния среднего по величине нормального напряжения σ_2 показали, что ошибка от неучета σ_2 [76, 77] не превышает 10-15% и находится в пределах точности измеряемых параметров. Для хрупких анизотропных пород влияние σ_2 несколько увеличивается [78].

Таким образом, предпосылка, принятая Мором, подтверждается в целом опытами и существенно упрощает исследование поведения горных пород в сложном напряженном состоянии.

Теория О. Мора не имеет аналитического критерия прочности. Она базируется полностью на экспериментальных данных, что делает ее весьма надежной.

Для решения упругопластических задач огибающие предельных кругов в теории прочности О. Мора необходимо аппроксимировать каким-то уравнением. Имеются такие описания в виде гиперболы, экспоненты [2, 79], параболы, циклоиды, кривой Перлина и др. [80]. Очень большое количество задач в механике горных пород решено с применением прямолинейной огибающей. Следует отметить, что замена криволинейной огибающей прямой является грубым упрощением, не имеющим под собой физического обоснования [65, 71].

Отличаясь большой широтой в смысле охвата явлений, обнаруженных при опытах, теория О. Мора продолжает совершенствоваться и развиваться.

Теории прочности О. Мора, Треска-Сен-Венана и Губера-Мизеса являются наиболее употребляемыми при решении упругопластических задач в механике горных пород.

Значительные объемы исследований прочности и разрушения горных пород в сложном напряженном состоянии выполнены под руководством А.Н. Ставрогина. Им предложено экспоненциальное условие прочности. Результаты работ этого направления обобщены в монографиях [4, 81].

Упругопластическая задача при экспоненциальном условии прочности детально исследована в работе Б.Д. Аннина [82].

Исследования разрушения горных пород в условиях жесткого нагружения позволили сформулировать целый ряд теорий прочности, учитывающих неоднородность материалов, проявляющуюся в процессе разрушения [5, 6, 81, 83, 84, 71]. Для учета этого обстоятельства, отраженного в параметрах ниспадающего участка кривой на графике деформирования, в условие прочности обычно вводят так называемую функцию снижения прочности. Тогда условие прочности (1.7) может быть записано следующим образом:

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq k(x, y, z), \quad (1.18)$$

где $k(x, y, z)$ – критерий прочности, величина которого различна в разных точках области разрушения.

Общие требования, предъявляемые к феноменологическим теориям прочности, сформулированы Г.С. Писаренко и А.А. Лебедевым в работах [65, 71].

1.5. Статистические теории прочности

Авторы всех рассмотренных выше теорий прочности исходили из предположения об идеальном строении твердого тела, которое либо обладает структурой, либо является сплошным, однородным. Реальные же конструкционные материалы и горные породы далеко не так совершенны.

По этой причине, в частности, от теорий прочности нельзя требовать идеального совпадения с данными экспериментов. Особенно велико это отклонение в том случае, если изучаемый материал содержит достаточно крупные дефекты – включения, поры и т.п., существенно отличающиеся по своим физико-

механическим свойствам. К таким материалам с несовершенной структурой и относятся, прежде всего, горные породы.

Для неоднородных твердых тел детерминированная модель сплошной среды оказывается недостаточной. Поскольку места концентрации напряжений являются локальными и приурочены к неоднородностям, которые размещены в материале случайным образом, то существенное значение приобретает статистическая трактовка прочности.

Мысль о статистической природе прочности впервые была высказана советскими физиками А.П. Александровым и С.И. Журковым в 1933 г. [85]. Дальнейшее развитие статистические теории прочности получили в работах Вейбулла [86], Т.А. Конторовой и Я.И. Френкеля [87], Фишера и Холломона [49], С.Д. Волкова [88], Н.Н. Афанасьева [89], Л.Г. Седракияна [90, 91], Б. Бреди [92], В.В. Болотина [93, 94], Б.М. Струнина [95-97] и др.

Общий подход к описанию прочности неоднородных сред предложен И.М. Лифшицем и Л.Н. Розенцвейг [98] на основе метода Дж. Гиббса. Наиболее удачными разработками в этом направлении являются статистические теории прочности С.Д. Волкова и Л.Г. Седракияна.

Таким образом, современные представления о разрушении твердых тел в своем становлении прошли три этапа. На феноменологическом этапе считалось, что разрушение наступает при достижении некоторыми комбинациями компонентов тензора напряжений (деформаций) определенных предельных значений.

На структурном уровне разрушение представляется как преодоление межатомного притяжения приложенным напряжением, существенно усиленным различного рода дефектами структуры.

Современный термофлуктуационный этап рассматривает разрушение как процесс, хотя и зависящий от параметров дефектной структуры, но осуществляемый флуктуациями теплового движения.

Этапный характер развития представлений о разрушении отражается в наличии трех соответствующих подходов к решению проблемы прочности, которые сосуществуют, взаимно дополняя и обогащая друг друга. По мере совер-

шенствования этих методов и подходов все три направления позволят, видимо, со временем разработать некоторую общую теорию прочности твердых тел.

2. ЗАКОНОМЕРНОСТИ РАЗРУШЕНИЯ ГОРНЫХ ПОРОД ЗА ПРЕДЕЛОМ ПРОЧНОСТИ

Как было показано выше, на феноменологическом уровне полагается, что разрушение твердого тела произойдет в том случае, если компоненты тензора напряжений в локальной точке исследуемой области достигнут определенных предельных значений. Критическое поле напряжений в горных породах, окружающих выработку, возникает в результате некоторого внешнего силового воздействия на объект. Это воздействие может быть осуществлено двумя путями.

Первый, традиционный, путь состоит в том, что напряжения формируются в режиме заданных нагрузок. Измеряя соответствующие нагрузкам деформации, для случая одноосного нагружения получают известный график деформирования (рис. 2.1,а), обрывающийся в точке, соответствующей пределу прочности материала. Так нагружаются, например, породы кровли при движении лавы. При этом пролет зависающей кровли изменяется от некоторого минимального значения до максимального.

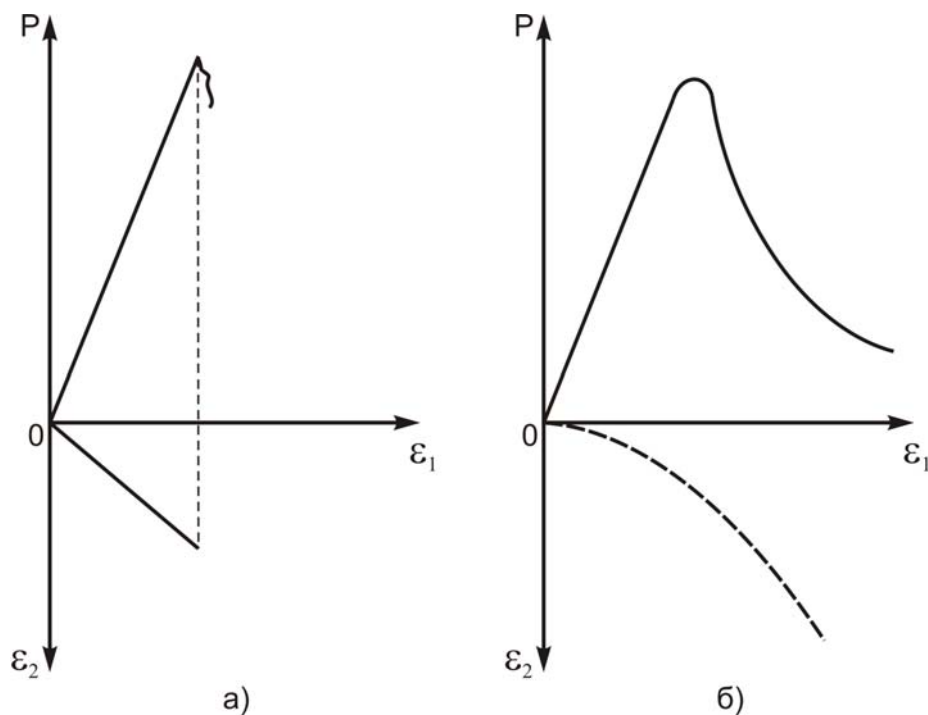


Рис. 2.1. Графики деформирования горных пород: а) деформирование в режиме заданных нагрузок; б) деформирование в режиме заданных деформаций

Особенность второго подхода состоит в том, что напряженное состояние объекта создают путем «жестко» заданной деформации. С помощью специальных датчиков регистрируют соответствующую деформации нагрузку и получают график деформирования материала, имеющий ниспадающую ветвь (рис. 2.1,б). Разрушение материалов в режиме заданных деформаций получило название деформирования за пределом прочности, или контролируемого разрушения. Таким образом нагружаются предохранительные целики, приконтурный породный массив вокруг протяженных выработок.

2.1. Особенности разрушения горных пород за пределом прочности

Целенаправленные исследования деформирования различных материалов за пределом прочности были начаты в 30-е годы [99], хотя впервые, пожалуй, типичные графики с ниспадающей ветвью были получены в известных опытах Кармана с каррарским мрамором [100, 101]. Винтовой пресс, которым он пользовался, обладал достаточной жесткостью по отношению к слабому испытываемому материалу – мрамору. В 1960 г. появилась работа Л. Фридмана, в которой исследовалась жесткость нагружающей системы по отношению к жесткости деформируемого образца. В 1964 г. П. Барнард на специально сконструированном прессе повышенной жесткости провел испытания бетонных образцов и установил наличие ниспадающей ветви на графике деформирования при одноосном сжатии. В 1965 г. Ф. Дейст и Н. Гук на примере горных пород теоретически описали механизм деформирования за пределом прочности, а Ф. Дейст сделал попытку учесть его особенности при исследовании напряженно-деформированного состояния породного массива в окрестности горной выработки.

Отмеченные выше работы положили начало интенсивному изучению поведения горных пород и иных материалов в процессе контролируемого разрушения. Большой вклад в изучение этого вопроса внесли такие отечественные и зарубежные ученые, как В.Т. Глушко и В.В. Виноградов [84], Г.Т. Кирничанский [5], Н.И. Немчин [102], Б.З. Амусин, К.А. Ардашев,

В.Ф. Кошелев, Л.И. Линьков [103, 104], И.В. Баклашов и Б.А. Картозия [83], А.Н. Ставрогин и А.Г. Протосеня [4], Е.И. Шемякин и А.Ф. Ревуженко [105, 106], Д. Хоббос, З. Бенявский, Б. Бреди, К. Файерхурст, Н. Гук и многие другие.

Получение запредельных характеристик горных пород требует наличия испытательных машин повышенной жесткости. Принципы создания таких машин достаточно подробно изложены в работах [4, 82]. Для увеличения жесткости серийно выпускаемых прессовых установок используют различные приспособления, например, параллельно испытываемому образцу устанавливают стальные брусья [107], слоистые опоры, набранные из чередующихся каленых стальных дисков и дисков из оргстекла [84]; испытуемый образец помещают под стальную балку и деформируют их совместно [108]; параллельно образцу располагают предварительно нагретые колонны, которые в процессе остывания осуществляют «жесткое» деформирование [109, 110]; применяют специальные клиновые механические устройства [4]; создают предварительный распор нагружающей системы дополнительными гидродомкратами [84, 5].

Для испытаний горных пород за пределом прочности в той или иной мере пригодны все перечисленные выше способы, однако наиболее удобным является использование дополнительных гидродомкратов, включенных параллельно испытываемому образцу. По этому принципу создана жесткая испытательная установка конструкции ИГТМ им. Н.С. Полякова. В качестве базового нагружающего устройства используются гидравлический пресс ПСУ-500. Предварительный распор с усилием 50-100 тонн создается двумя гидродомкратами, подключенными к автономной насосной станции НСВД-2500. Жесткость испытательной машины достигает $3,79 \cdot 10^9$ Н/м. Информация о нагрузке и деформациях – вертикальных и горизонтальных – записывается непрерывно с помощью специальной регистрирующей аппаратуры, подробное описание которой имеется в работах [84, 5].

Для установления закономерностей деформирования осадочных горных пород за пределом прочности были испытаны аргиллиты, алевролиты, камен-

ная соль и известняки Крыма. Для последующего анализа, кроме того, привлекались результаты исследований В.Т. Глушко и В.В. Виноградова [84], Г.Т. Кирничанского [5], В.С. Лесникова [111], Н.А. Ставрогина [4] и др.

Нагружение образцов и обработка результатов испытаний проводились в соответствии с существующими методиками [112, 113]. Образцы подвергались ступенчатому нагружению в режиме «нагрузка-разгрузка». Интервал между повышением и уменьшением нагрузки составлял 5-10 с. Скорость нагружения при нагрузке и разгрузке оставалась постоянной.

Характерные графики запредельного деформирования испытанных литологических разностей – аргиллитов, алевролитов, известняков, каменной соли и глины зеленой – показаны соответственно на рис. 2.2-2.6.

Как следует из представленных графиков, при нагружении породных образцов от нуля и до полного разрушения отчетливо выделяются две стадии: А – допредельного, и В – запредельного деформирования (рис. 2.7). Стадия допредельного деформирования не имеет особенностей по сравнению с обычным способом испытаний. Здесь Г.Т. Кирничанский [5] выделяет четыре характерные области: I – закрытие пор и трещин, притирка граней образца к плитам пресса; II – упругое деформирование при сохранении постоянства модуля Юнга и коэффициента Пуассона; III – увеличение коэффициента Пуассона, микрорастрескивание образца; IV – коэффициент Пуассона примерно равен 0,5, активное ветвление и слияние микротрещин.

Существенный интерес представляет изучение стадии запредельного деформирования. Разрушение на этом уровне характеризуется, прежде всего, тем, что коэффициент бокового расширения становится больше 0,5 и при этом происходит увеличение объема деформируемого тела (дилатансия). Явление дилатансии впервые наблюдалось и было исследовано Бриджменом [60].

Увеличение объема деформируемых образцов горных пород происходит вплоть до полной их дезинтеграции и достигает 10-15 %.

На стадии запредельного деформирования можно выделить три характерные области: V – пластического течения, VI – разупрочнения и разрыхления материала и VII – эквиволюмиального течения.

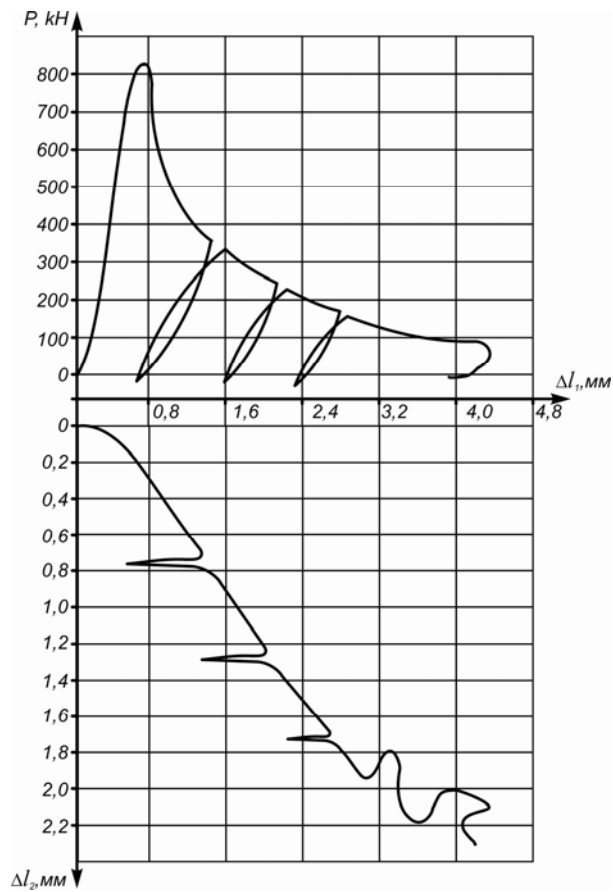


Рис. 2.2. Графики деформирования аргиллита

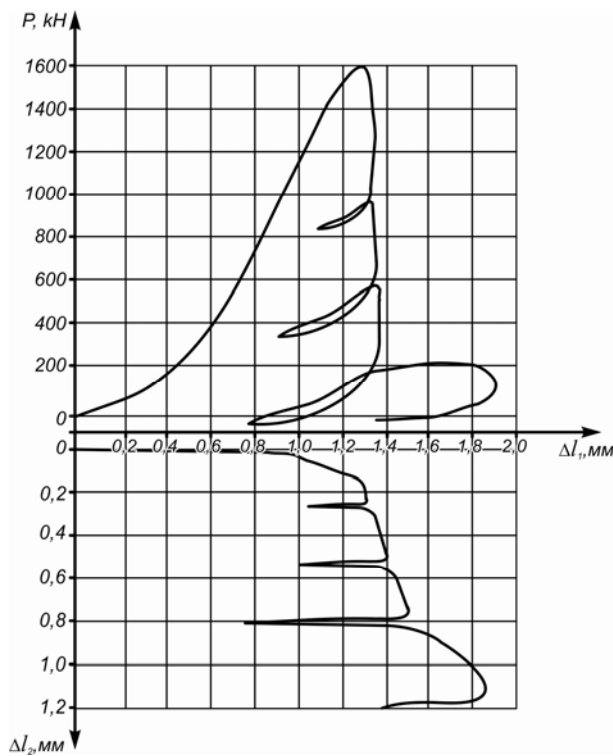


Рис. 2.3. Графики деформирования алевролита

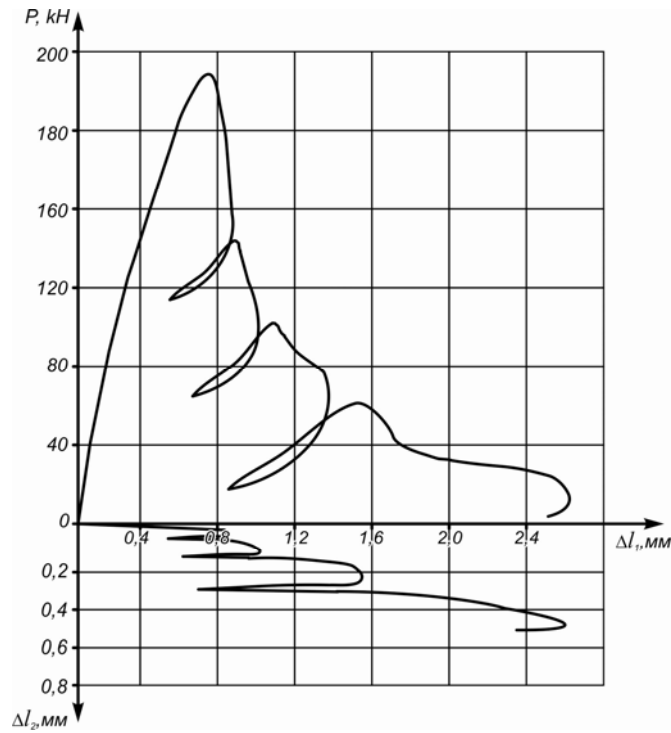


Рис. 2.4. Графики деформирования пыльных известняков Крыма (известняк М)

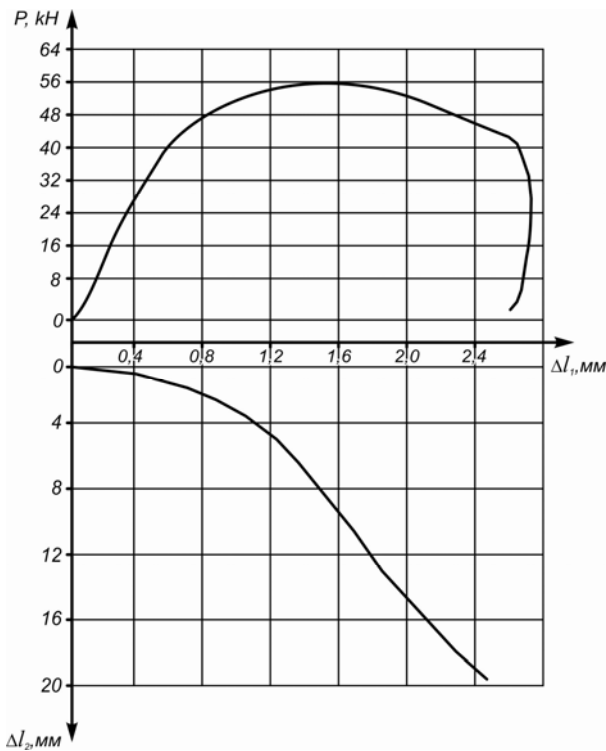


Рис. 2.5. Графики деформирования каменной соли

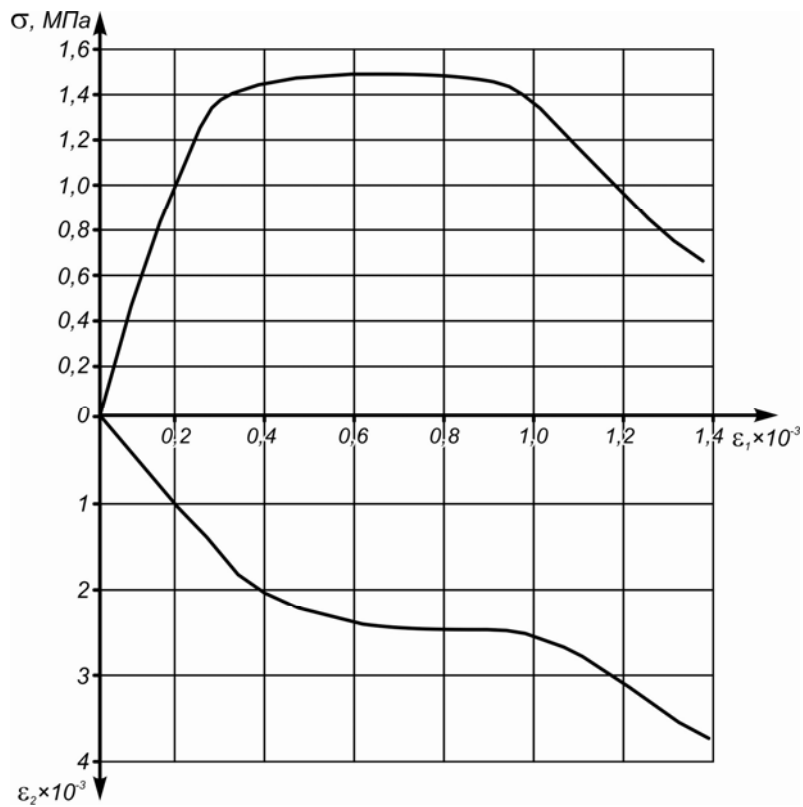


Рис. 2.6. Графики деформирования осадочных пород Никополь-Марганецкого месторождения [117] (глина зеленая)

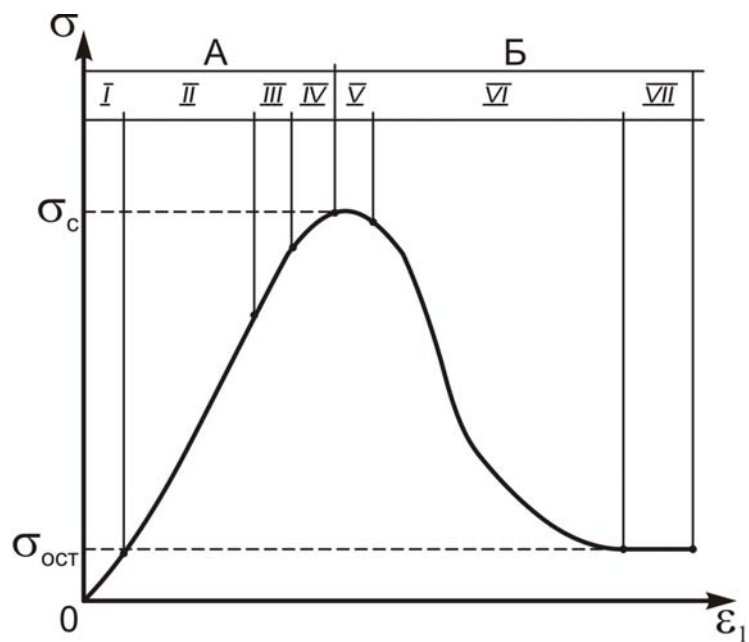


Рис. 2.7. Этапы деформации горных пород за перелом прочности

В области V коэффициент Пуассона равен 0,5, деформирование материала происходит без увеличения объема ($\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$). Эта область очень мала для хрупких материалов, к которым относится большинство горных пород, и достаточно велика для пластичных материалов с выраженными вязкими свойствами, например, металлов, каменной соли или марганецких глин (см. рис. 2.5 и 2.6).

В области VI происходит постепенное разрушение структурных связей, поворот и сдвиг отдельных кристаллов. Коэффициент Пуассона здесь больше 0,5, деформирование материала сопровождается увеличением объема ($\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 > 0$). Прочность образцов падает, однако на любом уровне нагружения оставшиеся структурные связи обеспечивают их прочность и способность к упругому деформированию, о чем свидетельствуют петли гистерезиса, получаемые при циклическом нагружении и разгрузке (см. рис. 2.2-2.4). Приблизительная параллельность петель гистерезиса позволяет и в запредельной области использовать ту же величину модуля Юнга, что и в упругой. Следует отметить также, что при деформировании пластичных пород петли гистерезиса имеют меньшую площадь, т.е. диссипация упругой энергии для них ниже, чем для хрупких пород.

Крутизна ниспадающей ветви графиков « $\sigma - \varepsilon$ » отражает структурные особенности горных пород, их склонность к хрупкому разрушению. Часто эту часть диаграммы линеаризируют и тогда крутизна ее может быть оценена численно с помощью так называемого модуля спада, или хрупкости. Величина эта определяется как отношение $M = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ в наиболее крутой части ниспадающей ветви графика $\sigma - \varepsilon$. Если $M=0$, то испытуемый материал будет идеально пластичен, а если $M \rightarrow \infty$, то – идеально хрупок. Ваверсик, Файрхурст и Браун утверждают [114, 115], что существуют горные породы, способные накапливать в себе потенциальной энергии больше, чем этого требуется для их разрушения (рис. 2.8), что с физической точки зрения объяснить очень непросто. По этому признаку авторы работ [114, 115] выделяют два соответствующих типа горных

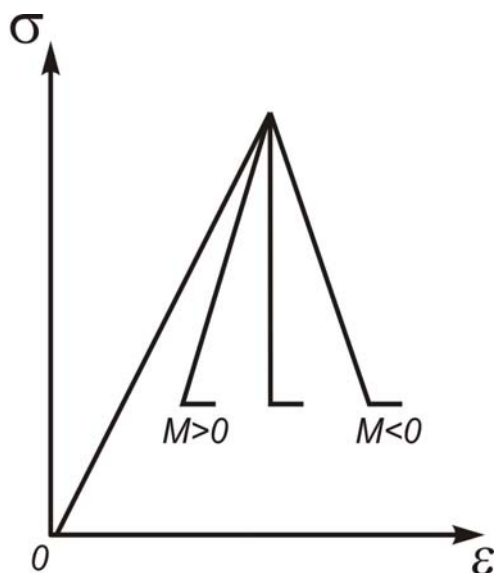


Рис. 2.8. Характерные графики за-
предельного деформирования горных
пород разной степени хрупкости
[114, 115]

пород: обычные, для разрушения которых требуется ровно столько энергии, сколько способны выдержать структурные связи ($M < 0$), и склонные к бурному разрушению, для разрушения которых требует больше энергии, чем способны выдержать структурные связи ($M > 0$).

Область VII (см. рис. 2.7) характеризуется полной дезинтеграцией испытуемых образцов, некоторая целостность которых обеспечивается благодаря внутреннему трению и зацеплению соприкасающихся частей.

Дальнейшего увеличения объема не происходит. На этом уровне нагружения говорят о так называемой остаточной прочности $R_{ост}$ горных пород и о максимальном значении величины объемного разрыхления ε_v^* . Для учета эффекта остаточной прочности при решении задач механики горных пород удобно пользоваться коэффициентом остаточной прочности $k_{ост} = \frac{R_{ост}}{R_c}$, где R_c — предел прочности на одноосное сжатие. Эта величина отражает структурные особенности деформируемого материала, число, характер и вид поверхностей разрушения.

В совокупности с модулем Юнга, коэффициентом Пуассона, коэффициентом дилатансии ($1 + \varepsilon_v^*$) и пределом прочности на одноосное сжатие коэффициент остаточной прочности дополняет информацию об исследуемой литологической разности с точки зрения ее прочности, структуры и поведения в обнажениях.

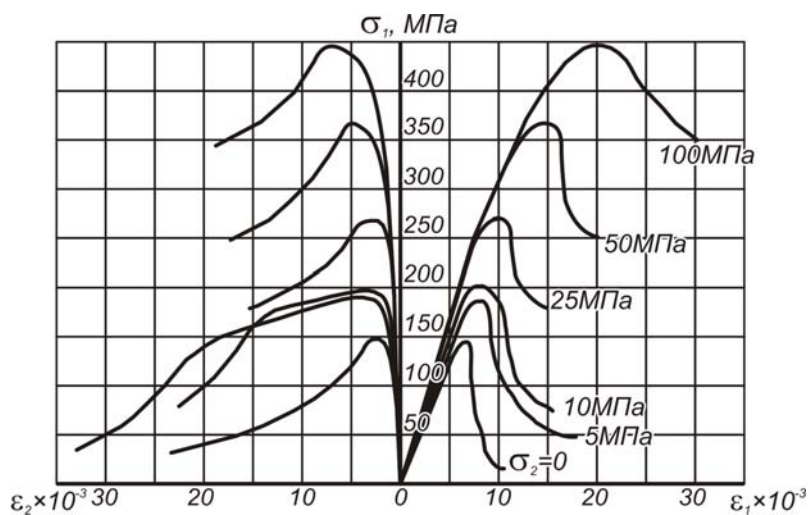


Рис. 2.9. Типичные графики запредельного деформирования горных пород в условиях объемного сжатия [4]

Имеется также ряд работ [4, 115, 116], в которых исследуется поведение горных пород в объемном напряженном состоянии при «жестком» их нагружении. Типичные графики « $\sigma - \epsilon$ », полученные в результате таких испытаний, показаны на рис. 2.9. Они свидетельствуют о том, что в условиях

объемного сжатия хрупкость горных пород снижается.

Описанный выше процесс деформирования горных пород за пределом прочности наглядно может быть представлен в виде механической модели, изображенной на рис. 2.10, а.

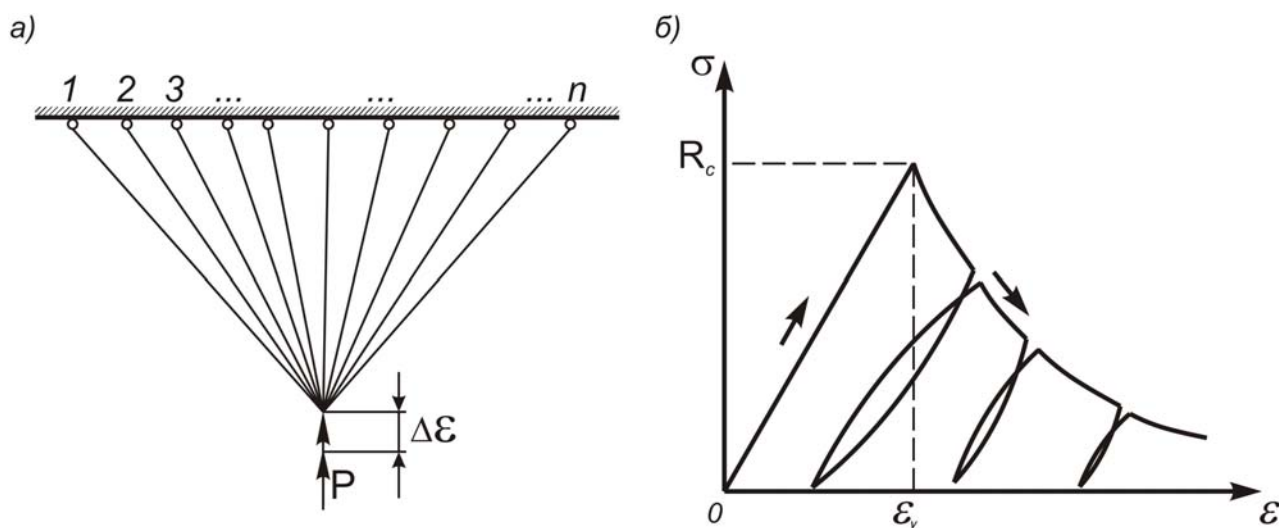


Рис. 2.10. Структурная механическая модель деформирования горных пород за пределом прочности: а) структурная модель; б) модельный график деформирования

Модель представляет собой стержневую статически неопределимую систему, нагружаемую в режиме заданных деформаций. Прочность стержней и угол их наклона являются величинами случайными. Прочность всей системы определяется суммарной прочностью стержней. По мере их разрушения прочность механической системы снижается, однако на любом уровне нагружения ее упругие свойства сохраняются. Подбирая соответствующим образом стержни с заданными деформационными и прочностными характеристиками, можно получить модель практически любого твердого тела. График деформирования такой модели показан на рис. 2.10, б.

2.2. Связь между напряжениями и деформациями за пределом прочности

В упругой области напряжения и деформации связаны известными соотношениями Гука. В области же запредельного деформирования эти соотношения нарушаются. В известной мере можно говорить о пропорциональности между приращениями напряжений и деформаций [4]. Однако решение задач геомеханики в перемещениях с использованием таких зависимостей сталкивается со значительными математическими трудностями.

Гораздо проще ввести в рассмотрение некоторую эмпирическую зависимость между напряжениями и деформациями, которая обеспечивала бы достаточную точность решения. Такая зависимость может быть получена, если воспользоваться предположением о подобии механических явлений, происходящих при «жестком» разрушении породного образца и произвольной локальной точки массива в окрестности горной выработки. Роль «жесткого» нагружающего устройства при этом играет упруго деформирующаяся область породной среды, расположенная за областью неупругих деформаций. Нагружение каждой локальной точки массива происходит медленно, примерно со скоростью, пропорциональной скорости проведения выработки.

Напряженное состояние в пределах выделенной элементарной области является сложным, трехкомпонентным. Прямой анализ его затруднителен. Здесь

уместно воспользоваться понятием об эквивалентном напряженном состоянии, которое применяется при разработке аналитических теорий прочности [73]. Введение этого понятия позволяет от оценки сложного напряженного состояния перейти к оценке простого одноосного сжатия либо растяжения. Суть такого перехода сводится к следующему. Пусть образец нагружается объемно и компоненты нагрузок возрастают от нуля до каких-то критических значений. Параллельно станем нагружать такой же образец в условиях одноосного сжатия (растяжения), увеличивая нагрузку от нуля до предела. Если оба образца потеряют прочность одновременно, то одноосное напряженное состояние считается с точки зрения разрушения эквивалентным трехосному. Тогда законы разрушения породной среды, находящейся в окрестности выработки в условиях объемного сжатия (растяжения), можно исследовать, изучая закономерности деформирования породного образца в условиях одноосного напряженного состояния. Для одиночных горных выработок, пройденных в осадочных углевмещающих породах, удобным напряженным состоянием является, как правило, одноосное

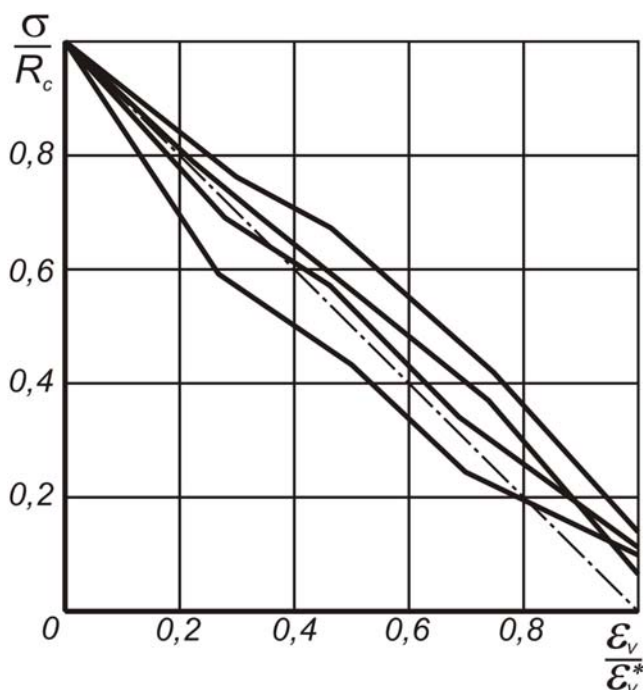


Рис. 2.11. Зависимость относительной прочности от величины относительного объемного разрыхления

сжатие.

При изучении графиков деформирования горных пород в условиях «жесткого» нагружения отмечалось, что на любой стадии разрушения структурных связей (ниспадающая ветвь) образец сохраняет упругие свойства и некоторую прочность, которая всегда ниже начальной. При этом образец благодаря пластическим деформациям увеличивается в объеме. Объемная деформация ε_v равна сумме радиальной ε_r и осевой ε_θ

деформаций ($\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = \varepsilon_v$). На рис. 2.11 показана зависимость между относительным снижением прочности на одноосное сжатие σ/R_c и соответствующим относительным увеличением объемного разрыхления $\varepsilon_v/\varepsilon_v^*$ для исследуемых литологических разностей. Здесь ε_v^* – максимальное относительное увеличение объема в условиях одноосного сжатия; σ – текущее значение прочности.

На рис. 2.12, а, б приведены такие же зависимости, полученные Г.Т. Кирничанским [5], В.Т. Глушко и В.В. Виноградовым [84] и А.Н. Ставрогиным [4]. Анализ приведенных графиков разупрочнения и разрыхления показал, что они могут быть достаточно близко описаны зависимостью [117]

$$\frac{\sigma - R_{ocm}}{R_c - R_{ocm}} = 1 - \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_v^*}, \quad (2.1)$$

где ε_v – текущее значение величины объемного разрыхления.

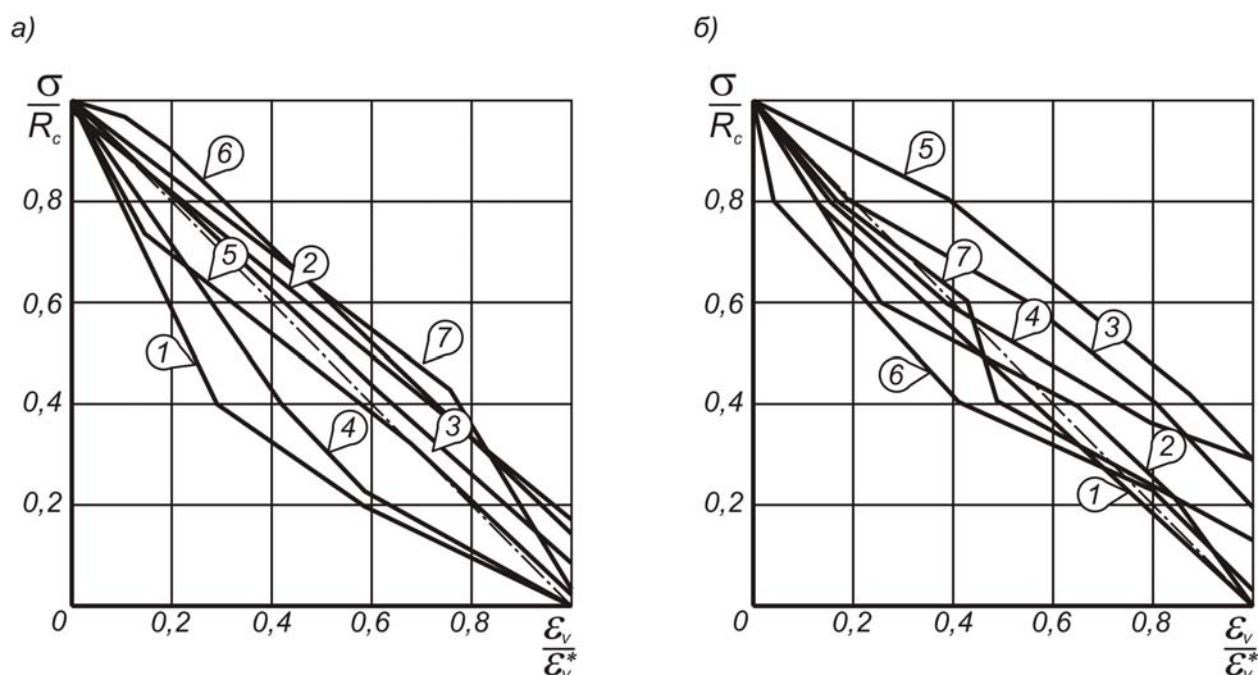


Рис. 2.12. Зависимость относительной прочности образцов углевмещающих пород от величины относительного объемного разрыхления [84, 5]: а) 1-7 образцы аргиллита, алевролита, песчаника; б) 1 – коелганский мрамор; 2 – биотитовый гранит; 3 – биотитовый плагиогранит; 4 – песчаник НВО; 5 – плагиогранит; 6 – диабаз; 7 – талькохлорит

Деформирование произвольной точки породного массива в окрестности горной выработки происходит аналогично деформированию породного образца в режиме контролируемого нагружения. При этом роль «жесткого» пресса выполняет упруго деформирующаяся часть породного массива. Для такой модели в случае плоской деформации зависимость (2.1) в полярных координатах может быть представлена в следующей форме

$$\varepsilon_{\theta} + \varepsilon_r = \varepsilon_v^* \left(1 - \frac{\sigma - R_{ocm}}{R_c - R_{ocm}} \right), \quad (2.2)$$

или, переходя к перемещениям,

$$\frac{dU}{dr} + \frac{U}{r} = \varepsilon_v^* \left(1 - \frac{\sigma - R_{ocm}}{R_c - R_{ocm}} \right). \quad (2.3)$$

Дифференциальное уравнение (2.3) представляет собой физическое уравнение состояния, которое определяет зависимость между радиальными перемещениями U и прочностью породного массива на расстоянии r от центра выработки. Значение прочности массива на одноосное сжатие $\sigma(r)$ в процессе деформирования породной среды изменяется от величины R_c на границе раздела упругой и пластической областей до величины остаточной прочности R_{ocm} на контуре выработки. Закон, по которому происходит это изменение, может быть установлен на основе гипотезы о сплошности среды в окрестности горной выработки.

2.3. О виде функции снижения прочности горных пород за пределом прочности

Существуют разные способы учета пластической неоднородности горных пород при аналитическом исследовании упругопластического состояния породного массива. Все они могут быть разделены на три группы.

Способы первой группы основаны на суммировании элементарных актов разрушения: чем их больше, тем выше степень разупрочнения. При этом ис-

пользуют либо метод Больцмана с привлечением интегральных уравнений Вольтерра, либо какой-нибудь другой вариант последовательных приближений.

Другой способ учета запредельного деформирования при решении задач геомеханики был предложен А.М. Линьковым [118]. Он заключается в том, что совместно решаются уравнения неразрывности деформаций и равновесия с одновременным введением экспериментально установленной зависимости между продольными и поперечными относительными деформациями. Известно несколько работ, в которых исследования напряженно-деформированного состояния вокруг выработки выполнены подобным образом [119].

Более простыми являются способы третьей группы, суть которых состоит в том, что в условие прочности вводится некоторая функция снижения прочности $f(r)$, определяющая закон, по которому изменяется прочность пород на одноосное сжатие или сцепление в окрестной горной выработки в зависимости от относительного радиуса r ($r = R/R_0$, где R_0 – радиус выработки; R – текущий радиус).

М.Т. Алимжанов приводит самые разные аналитические выражения функций снижения прочности, принадлежащие различным авторам [120].

Принцип выбора аналитического выражения функции снижения прочности по сути дела один. Например, в системе координат « $\sigma - r$ » экспериментальные данные аппроксимируются монотонной кривой, ординаты которой увеличиваются от некоторой близкой или равной нулю величины прочности на контуре выработки до прочности нетронутого массива R_c на границе раздела пластической и упругой областей. В той или иной мере известные аналитические выражения функции снижения прочности отвечают этому принципу. Но совершенно очевидно, что если при построении исходной физической модели породная среда полагается сплошной, то и вид функции $f(r)$ должен соответствовать этому первоначальному условию. В частности, в пластической области, так же как и в упругой, функция напряжений $F(r)$ должна быть бигармонической, тогда она будет иметь единственное конкретное выражение.

Для выяснения вида функции снижения прочности поступим следующим образом. Запишем в полярной системе координат исходные соотношения. Уравнения равновесия и совместности деформаций имеют вид [11]

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0, \quad (2.5)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right) \cdot (\sigma_\theta + \sigma_r) = 0, \quad (2.6)$$

где r, θ – полярные координаты. Здесь и далее все величины, имеющие размерность длины, отнесены к величине радиуса выработки R_0 .

Условие прочности в достаточно общей форме может быть представлено в виде

$$(\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + 4\tau_{r\theta}^2 = 4k^2 f^2(r), \quad (2.7)$$

где k – некоторая константа, зависящая от исходных физических предпосылок, заложенных в условие прочности.

Введем функцию напряжений таким образом, чтобы в пластической области выполнялись следующие соотношения

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{dF}{dr}; \quad \sigma_\theta = \frac{d^2 F}{dr^2}; \quad \tau_{r\theta} = 0. \quad (2.8)$$

Очевидно, что в таком виде функция напряжений всегда удовлетворяет уравнениям равновесия.

Для определения аналитического выражения функции снижения прочности подставим выражения (2.8) в (2.6) и (2.7). Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} - \frac{d^2 F}{dr^2} = \pm 2kf(r), & (2.9) \\ \nabla \nabla F = 0, & (2.10) \end{cases}$$

где ∇ – оператор Лапласа.

Решая уравнение (2.9) методом вариации постоянной, получим следующее выражение для функции напряжений

$$F(r) = r^2 k \int f(r) \cdot r^{-1} dr - k \int r f(r) dr + C_1 r^2 + C_2, \quad (2.11)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные интегрирования.

Применим к функции напряжений $F(r)$ дважды оператор Лапласа, приравняем, согласно (2.10), полученное выражение нулю и получим уравнение для определения функции $f(r)$:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{3}{r} \frac{df}{dr} = 0. \quad (2.12)$$

Его решение имеет вид

$$f(r) = \frac{A}{r^2} - B. \quad (2.13)$$

Константы A и B определяются из условия равенства значения функции $f(r)$ предельным значениям прочности породной среды на контуре выработки и на границе L раздела упругой и пластической областей:

$$R_{c r=1}^* = k_{ocm} \quad \text{и} \quad R_{c r=r_L}^* = 1. \quad (2.14)$$

С учетом условия (2.14) получим

$$A = \frac{r_L^2}{1 - r_L^2} (1 - k_{ocm}); \quad B = \frac{r_L^2 - k_{ocm}}{1 - r_L^2}, \quad (2.15)$$

где r_L – безразмерный радиус области неупругих деформаций.

С учетом значений постоянных интегрирования (2.15) функция снижения прочности имеет вид

$$f(r) = \frac{1}{1 - r_L^2} \left[\frac{r_L^2 (1 - k_{ocm})}{r^2} - r_L^2 + k \right] = \frac{r_L^2 (1 - k_{ocm}) - r^2 (r_L^2 - k_{ocm})^2}{r^2 (1 - r_L^2)}. \quad (2.16)$$

Для хрупких пород величина $k_{осм}=0,1$ и ею без существенного ущерба для точности можно пренебречь, тогда выражение (2.16) примет более простой вид

$$f(r) = \frac{r_L^2 r^2 - 1}{r^2 r_L^2 - 1}. \quad (2.17)$$

Подставив соотношение (2.13) в (2.11), получим выражение для функции напряжений в пластической области

$$F(r) = r^2 \left[k \left(\frac{1}{2} - \ln r \right) \left(\frac{A}{r^2} - B \right) + C_1 \right]. \quad (2.18)$$

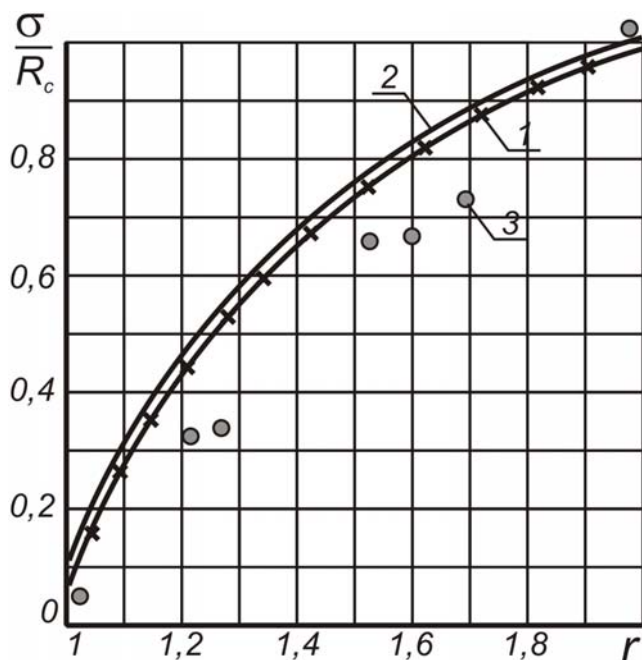


Рис. 2.13. Сравнение вида функции снижения прочности с результатами натурных измерений: 1 – аналитическая зависимость; 2 – данные Б.А. Картозии [83]; 3 – данные В.В. Виноградова [6]

По аналогии с функцией снижения прочности введем в рассмотрение функцию разрыхления $f'(r)$. Если особенности потери прочности приконтурного массива отражаются на размерах зоны неупругих деформаций, то возникающее при этом разрыхление определяет величину перемещений на контуре выработке. Исследования, приведенные выше, показывают, что разупрочнение и разрыхление протекают одновременно и имеют линейную связь вида (2.1), в соответствии с чем функция разрыхления должна быть определена следующей зависимостью:

$$f'(r) = 1 + B - Ar^{-2}. \quad (2.19)$$

На рис. 2.13 показана степень соответствия аналитической зависимости (2.17) данным результатов натурных измерений, выполненных Б.А. Карто-

зия [120] и В.В. Виноградовым [121]. Сравнение выполнено при следующих данных: $r_L = 2$, $k_{ост} = 0,1$. Как следует из рис. 2.13, совпадение достаточно близкое.

Аналогичную картину дают измерения сцепления, выполненные В.В. Смирняковым [122] и группой авторов [123]. Изменение модуля деформации в окрестности выработки [124] также в известной мере подчиняются зависимости (2.16).

Таким образом, функция снижения прочности (2.16), а, следовательно, и функция разрыхления (2.19), могут быть в таком виде рекомендованы для использования в механике горных пород при решении упругопластических задач с бигармоническим пластическим состоянием.

3. КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ В ГЕОМЕХАНИКЕ

Предпосылка о малом влиянии промежуточного по величине напряжения на разрушение горных пород является единственной в теории Мора, которая в остальном не требует проверки, поскольку полностью основывается на экспериментальных данных. Однако аналитический критерий прочности получается путем подбора соответствующего эмпирического выражения и его применение ограничивается по существу той областью напряженных состояний, для которой выполнены эксперименты.

Таким образом, экспериментальный характер обеспечивает достаточно точное описание предельного состояния материала, эмпирический же подбор условия прочности не дает возможности в полной мере воспользоваться этим преимуществом. Поэтому представляется интересным вывод аналитического критерия теории на основе анализа процесса разрушения в локальной области твердого тела, который может быть представлен следующим образом. Касательные напряжения, величина которых достаточно полно характеризуется интенсивностью напряжений σ_i , разрыхляют материал путем сдвига, а под действием нормальных напряжений, уровень которых определяется шаровым тензором I , происходит раскрытие трещин. Совместное действие двух видов разрушения (сдвиг и отрыв) приводит, как было уже отмечено выше, к потере прочности материала. Подобная схема разрушения находится в хорошем соответствии с дислокационной и дилатонной теориями возникновения хрупкой трещины.

3.1. Аналитический критерий прочности

Ряд теорий прочности был получен на основе отмеченной модели разрушения твердых тел из общей функциональной зависимости [73], объединяющей в одно соотношение интенсивность напряжений σ_i и компоненты шарового тензора I :

$$\sigma_i^2 + aI^2 + bI = c, \quad (3.1)$$

где a, b, c – некоторые параметры, определяемые из испытаний при простейших напряженных состояниях,

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \quad (3.2)$$

$$I = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3. \quad (3.3)$$

Здесь: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные напряжения.

Следуя гипотезе Мора, предположим, что прочность материала практически зависит только от тех членов выражений (3.2) и (3.3), которые определяют разность и сумму наибольшего и наименьшего компонентов напряжений. Тогда, из (3.1) при $a=0$ получим следующее выражение:

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + b(\sigma_1 + \sigma_3) = c. \quad (3.4)$$

Параметры b и c определим из (3.4) в результате испытаний горных пород при простейших напряженных состояниях. Получим:

– при одноосном сжатии в предельном состоянии

$$\frac{1}{2}R_c^2 + bR_c = c; \quad (3.5)$$

– при одноосном растяжении

$$\frac{1}{2}R_p^2 - bR_p = c. \quad (3.6)$$

Решая совместно уравнения (3.5) и (3.6), находим, что

$$b = \frac{1}{2}R_c(\psi - 1); \quad c = \frac{1}{2}R_c^2 \cdot \psi, \quad (3.7)$$

где $\psi = \frac{R_p}{R_c}$.

Подставив значения параметров (3.7) в соотношение (3.4), получим следующее условие прочности²:

² Условие прочности (3.8) было получено Л.Я. Парчевским и А.Н. Шашенко в статье: «О размерах области пластических деформаций вокруг выработок // Изв. ВУЗов. Горный журнал. – 1998. – №3. – С. 39-42».

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - R_c^2 \psi - (1 - \psi) R_c (\sigma_1 + \sigma_3) = 0, \quad (3.8)$$

или в общем случае напряженного состояния

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 - R_c^2 \psi - (1 - \psi) R_c (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (3.9)$$

Из выражения (3.8) получим

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k, \quad (3.10)$$

где

$$k = 0,5 \sqrt{R_c^2 \psi + (1 - \psi) R_c (\sigma_1 + \sigma_3)}. \quad (3.11)$$

Заметим, что при осесимметричном распределении напряжений

$$\sigma_1 + \sigma_3 = \sigma_r + \sigma_\theta = \text{const.}$$

Из этого следует, что выражение (3.10) является по своей сути условием прочности Треска-Сен-Венана. В общем же случае напряженного состояния правая часть условия (3.10) зависит от значений компонентов напряжения.

Для материалов, одинаково сопротивляющихся сжатию и растяжению, $\psi = 1$. В этом случае из выражения (3.8) получим теорию прочности Кулона.

Обозначим соответственно максимальное касательное напряжение и величину, характеризующую вид напряженного состояния, как $\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ и $\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$. Тогда выражение (3.8) с учетом принятых обозначений примет вид

$$4\tau^2 - 2\sigma(1 - \psi)R_c - R_c^2\psi = 0. \quad (3.12)$$

Зависимость (3.12) в системе координат « $\tau - \sigma$ » представляет уравнение параболы, которая является выпуклой и непрерывной кривой.

В системе же координат « $\sigma_1 - \sigma_3$ » уравнение (3.8) имеет вид параболы, равнонаклоненной к осям и открытой со стороны сжимающих напряжений, что соответствует требованию симметричности условия возникновения предельного напряженного состояния (рис. 3.1).

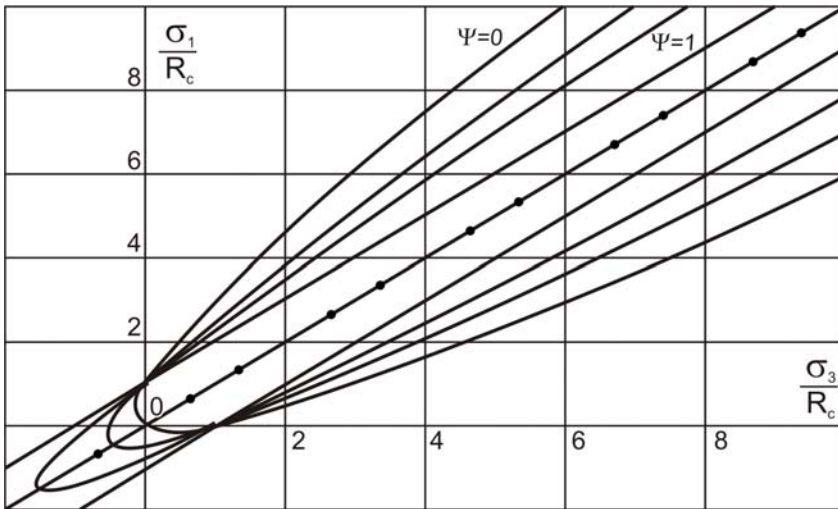


Рис. 3.1. Поверхность предельных состояний

соответствующие теории «энергии формоизменения».

Таким образом, полученное условие прочности отвечает требованиям постулата Друккера [74] и соответствует современным представлениям о природе разрушения твердых тел [73, 65].

Если в изложенных выше рассуждениях не прибегать к гипотезе Мора о независимости прочности материала от среднего по величине касательного напряжения σ_2 , то на основе зависимости (3.1) при $a = 0$ может быть получена теория прочности П.П. Баландина [74], аналитический критерий которой для предельного состояния имеет вид:

$$R_c = \frac{(\psi - 1)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{2\psi} + \frac{\sqrt{(\psi - 1)^2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + 4\psi[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}}{2\psi} \quad (3.13)$$

Выражение (3.8) можно привести к такому же виду

$$R_c = \frac{(\psi - 1)(\sigma_1 + \sigma_3) + \sqrt{(\psi - 1)^2(\sigma_1 + \sigma_3)^2 + 4\psi(\sigma_1 - \sigma_3)^2}}{2\psi} \quad (3.14)$$

Из (3.13) при $\sigma_2 = 0$ получим критерий прочности для плоского напряженного состояния

С увеличением величины ψ от 0 до 1 парабола вытягивается в сторону всестороннего растяжения, что подтверждается опытами Г.В. Ужика [40]. И, наконец, при $\psi = 1$ парабола вырождается в две параллельные прямые,

$$R_c = \frac{\psi - 1}{2\psi}(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{1}{2\psi} \sqrt{(\psi - 1)^2(\sigma_1 + \sigma_3)^2 + 4\psi[\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}. \quad (3.15)$$

Сравнение выражений (3.14) и (3.15) показывает, что это разные критерии, различие между которыми увеличивается по мере роста пластических свойств материала ($\psi \rightarrow 1$). Поведение же хрупких материалов ($\psi \rightarrow 0$) оба критерия описываются примерно одинаково и достаточно хорошо [73]. В аналитических же исследованиях упругопластического состояния более удобным является выражение (3.8), которое симметрично относительно входящих в него компонентов напряжений σ_1 и σ_3 .

Величина ψ для большинства горных пород редко превышает 0,1-0,2. Как показывает анализ зависимости (3.8), даже при столь высоком значении ψ ее можно принять равной нулю, обеспечивая при этом в области сжимающих напряжений достаточную точность. Это обстоятельство отражено на рис. 3.2, где в системе безразмерных координат показаны предельные кривые для различных значений ψ . Уравнение предельных огибающих получено из (3.12) путем деления всех его членов на R_c .

При $\psi = 0$ из (3.9) получим следующее частное выражение прочности

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{R_c(\sigma_1 + \sigma_3)}. \quad (3.16)$$

Рассмотрим поведение кривых в области растяжения (см. рис. 3.2). При значении $\psi < 0,5$ графики пересекают ось абсцисс в точке, находящейся от начала координат на расстоянии, меньшем R_p . Точка пересечения соответствует двухосному равнокомпонентному растяжению ($\sigma_1 = \sigma_3$). Следовательно, прочность горных пород, которые по структурным особенностям приближаются к хрупким, при двухосном равнокомпонентном растяжении определяется значением одного из компонентов напряжения, меньшим величины прочности на одноосное растяжение. Таким образом, двухосному чистому растяжению такие материалы сопротивляются хуже, чем одноосному растяжению. Эта особенность для хрупких горных пород нашла отражение в работе [125].

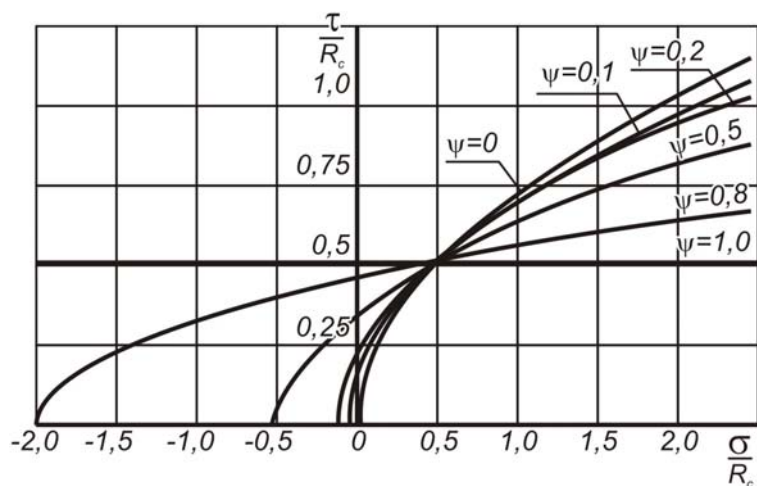


Рис. 3.2. Огибающие предельных напряженных состояний для горных пород разной степени хрупкости

При значении $\psi > 0,5$ предельные кривые пересекают ось абсцисс в точке, находящейся на расстоянии от начала координат, большем величины R_p , т.о., с увеличением пластических свойств сопротивление материала двухосному чистому растяжению становится больше сопротивления одноосному

растяжению. Это обстоятельство было подтверждено известными опытами Г.В. Ужика с пластичными металлами [40]. Подобное же поведение кривых в области растягивающих усилий применительно к горным породам предположил и обосновал М.М. Протодяконов [126]. В частности, с точки зрения сопротивляемости внешним усилиям влажные глины ведут себя как пластичные металлы: на диаграмме деформирования выражена площадка текучести, при небольшом значении предела прочности на одноосное сжатие глины имеют практически линейную зависимость « $\sigma - \epsilon$ » (см. рис. 2.6).

Анализ выражения (3.12) показывает, что при $\sigma = 0$ из него вытекает простое состояние, связывающее основные прочностные характеристики: пределы прочности на одноосное сжатие R_c , растяжение R_p и сдвиг R_τ :

$$R_\tau = 0,5\sqrt{R_c R_p} . \tag{3.17}$$

Таким образом, по двум известным предельным характеристикам всегда можно определить третью. Это обстоятельство может быть полезным при установлении величины R_p , определение которой в экспериментальных условиях сопряжено со значительными трудностями.

Разрушение хрупких материалов, как уже отмечалось, достаточно хорошо описывается теорией Гриффитса. В системе координат « $\tau - \sigma$ » основное уравнение теории Гриффитса может быть представлено следующим образом

$$4\tau^2 - 2R_c\sigma - 0,25R_c^2 = 0. \quad (3.18)$$

Если в зависимости (3.12) положить, согласно Гриффитсу, $\psi = 1/8$ и сравнить ее с зависимостью (3.18), то окажется, что аналитические выражения двух теорий прочности, полученных на основе разных физических представлений о природе разрушения, являются практически идентичными.

Условие прочности (3.8) при $\psi = 1$ было проверено Баушингером, который показал, что оно хорошо описывает процесс разрушения пластичных материалов. Еще ранее аналогичные опыты были проведены Треска [31].

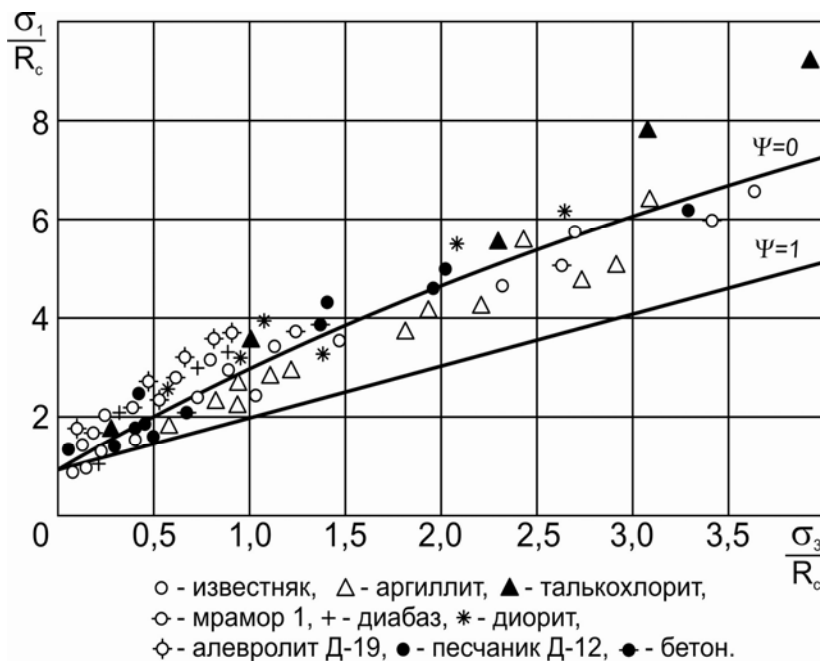


Рис. 3.3. Сравнение аналитического критерия (3.8) с результатами испытаний горных пород и бетона [4]

На рис. 3.3 и рис. 3.4 показана теоретическая кривая зависимости (3.8) в системе безразмерных координат ($X = \sigma_1/R_c$; $Y = \sigma_3/R_c$) и результаты испытаний горных пород, полученные А.Н. Ставрогиным [4] и Х. Куком [7].

Несмотря на некоторый имеющийся разброс экспериментальных точек, неизбежный при испытаниях столь струк-

турно неоднородных материалов, какими являются горные породы и бетоны, из рисунков следует, что предлагаемое условие прочности (3.8) достаточно хоро-

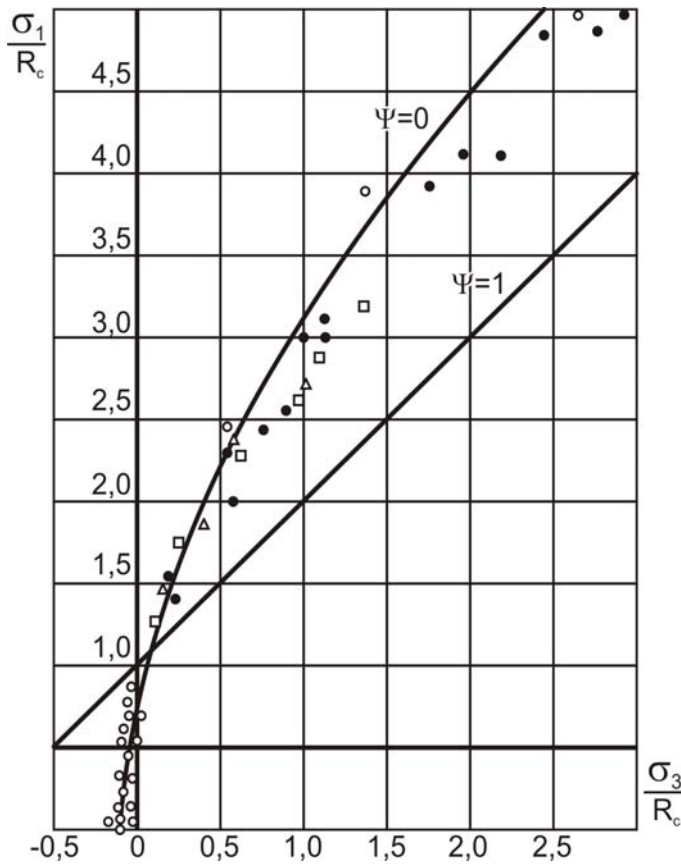


Рис. 3.4. Сравнение аналитического критерия (3.8) с результатами испытаний горных пород [7]

шо описывает процесс их разрушения при объемном сжатии и сжатии с растяжением.

Основной задачей любой теории прочности является установление критерия, позволяющего сравнивать между собой опасность различных напряженных состояний материала. Этот критерий должен быть проверен экспериментально путем проведения испытаний при различных напряженных состояниях.

Сравнение напряженных состояний удобно производить, если одно, наиболее типичное и легко осуществимое на экспериментальных установках, напряженное состояние

выбрать за основу и, пользуясь принятым критерием, сопоставлять с ним все другие напряженные состояния. Это основное напряженное состояние называется, как было показано выше, эквивалентным. По причинам, рассмотренным выше, для горных пород удобнее всего принять одноосное сжатие, максимальное значение которого характеризуется пределом прочности на одноосное сжатие.

Из выражения (3.8) может быть получена формула для приведения сложного напряженного состояния к простому одноосному. Она имеет следующий вид:

$$\sigma_e = \frac{(\psi - 1)(\sigma_1 + \sigma_3) + \sqrt{(\psi - 1)^2(\sigma_1 + \sigma_3)^2 + 4\psi(\sigma_1 - \sigma_3)^2}}{2\psi} \leq R_c. \quad (3.19)$$

Здесь σ_e – так называемое эквивалентное напряжение, т.е. напряжение, эквивалентное одноосному напряженному состоянию.

Используя формулу (3.19), можно посредством коэффициента запаса прочности n оценить степень опасности разрушения породной среды для любой точки однородного породного массива в окрестности выработки, сравнивая величину σ_e с пределом прочности на одноосное сжатие R_c :

$$n = \frac{R_c}{\sigma_e}. \quad (3.20)$$

3.2. Эмпирический критерий прочности Хоека-Брауна

По способу получения критерии прочности можно разделить на две большие группы: аналитические и эмпирические. Известны аналитические критерии прочности – Треска–Сен-Венана, Ю.И. Ягна, П.П. Баландина, И.Н. Миролубова и т.п. К ним же относится и критерий (3.19), полученный Л.Я. Парчевским и А.Н. Шашенко. К наиболее популярным эмпирическим относятся критерии О. Мора, З.Т. Бенявского, Хоека-Брауна и некоторые другие.

Эмпирические критерии прочности получают на основе обработки лабораторных испытаний горных пород в сложных напряженных состояниях и натуральных измерений. Строго говоря, их применение должно ограничиваться теми горными породами и горно-геологическими условиями эксперимента, которые впоследствии подвергались обобщению на основе статистического и математического анализа.

Рассмотрим подробнее очень популярный в геомеханике эмпирический критерий прочности Хоека-Брауна [127]. Его обобщенная формула имеет вид

$$\sigma_1 = \sigma_3 + R_c \left(m_b \frac{\sigma_3}{R_c} + s \right)^a, \quad (3.21)$$

где σ_1 и σ_3 – максимальное и минимальное действующие напряжения, R_c – среднее значение предела прочности на одноосное сжатие породных об-

разцов, m_b – константа Хоека-Брауна, учитывающая генезис и состояние (качество) породного массива, s и a – некоторые константы.

Для нетронутого (ненарушенного) породного массива зависимость (3.21) превращается в следующую формулу

$$\sigma_1 = \sigma_3 + R_c \left(m_i \frac{\sigma_3}{R_c} + 1 \right)^{0,5}. \quad (3.22)$$

Здесь константа m_i , в отличие от константы m_b , учитывает только генезис и текстуру горных пород ($4 \leq m_i \leq 33$). Большая величина m_i соответствует хрупким породам, чем она меньше, тем пластичнее порода, а при $m_i = 0$ имеет место идеальная пластичность.

Для нарушенного породного массива константа m_b определяется следующим образом:

$$m_b = m_i \exp\left(\frac{GSI - 100}{28}\right). \quad (3.23)$$

Здесь GSI (Geological Strength Index) – параметр, учитывающий геологические особенности породного массива, в частности его структуру и наличие трещин ($5 \leq GSI \leq 100$). Параметр GSI во многом аналогичен параметру RMR (Rock Mass Rating) З.Т. Бенявского.

Для породного массива «хорошего» качества ($GSI > 25$) имеем

$$s = \exp\left(\frac{GSI - 100}{9}\right), \quad a = 0,5. \quad (3.24)$$

Для породного массива «плохого» качества ($GSI < 25$)

$$s = 0, \quad a = 0,65 - \frac{GSI}{200}. \quad (3.25)$$

С целью более плавного перехода от прочных пород (хорошего качества) к очень слабым (плохого качества) введен в рассмотрение дополнительный параметр D , учитывающий нарушенность породного массива, например, вследст-

вие проведения взрывных работ. С учетом параметра D – «disturbance factor», константы m_b , s , a определяются следующими соотношениями:

$$m_b = m_i \exp\left(\frac{GSI - 100}{28 - 14D}\right), \quad (3.26)$$

$$s = \exp\left(\frac{GSI - 100}{9 - 3D}\right), \quad (3.27)$$

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left(e^{-GSI/15} - e^{-20/3} \right). \quad (3.28)$$

Здесь параметр D принимает значения от 0 для ненарушенной породы до 1 для очень нарушенной породы. Числовые значения GSI и D выбираются из таблиц, приведенных авторами [135] на основе визуального обследования пород «in situ» и заключении об их качестве и степени нарушенности.

Представляется интересным сравнить критерии прочности, полученные на основе разных подходов и разных физических предпосылок.

Выполним эту процедуру применительно к разрушению породных образцов, принимая во внимание крайние, с точки зрения структуры пород, ситуации, т.е. при $\psi = 0$ (идеально хрупкие породы) и $\psi = 1$ (идеально пластичные породы).

Для сравнения приведем выражения (3.16) и (3.22) к следующему виду:

$$\frac{\sigma_1}{R_c} - \frac{\sigma_3}{R_c} = 1 \quad \text{при } \psi = 1; \quad (3.29)$$

$$\frac{\left(\frac{\sigma_1}{R_c} - \frac{\sigma_3}{R_c}\right)^2}{\frac{\sigma_1}{R_c} + \frac{\sigma_3}{R_c}} = 1 \quad \text{при } \psi = 0; \quad (3.30)$$

$$\frac{\sigma_1}{R_c} - \frac{\sigma_3}{R_c} = 1 \quad \text{при } m_i = 0 \text{ (что соответствует } \psi = 1); \quad (3.31)$$

$$\left(\frac{\sigma_1}{R_c} - \frac{\sigma_3}{R_c} \right)^2 - m_i \frac{\sigma_3}{R_c} = 1 \text{ при } m_i \neq 0 \text{ (что соответствует } \psi = 0). \quad (3.32)$$

На рис. 3.5 в системе координат $\left(\frac{\sigma_1}{R_c}; \frac{\sigma_3}{R_c} \right)$ приведены результаты испытаний различных горных пород (хрупких при $\psi \leq 0,1$), полученные по данным А.Н. Ставрогина [4]. Разрушению при объемном сжатии в приборе Кармана были подвергнуты хрупкие породы различного генезиса: талькохлорит, мрамор, диабаз, песчаник, алевролит, аргиллит, уголь, уртит, диорит, известняк, а также бетон и цемент. Здесь же показана результирующая кривая, построенная

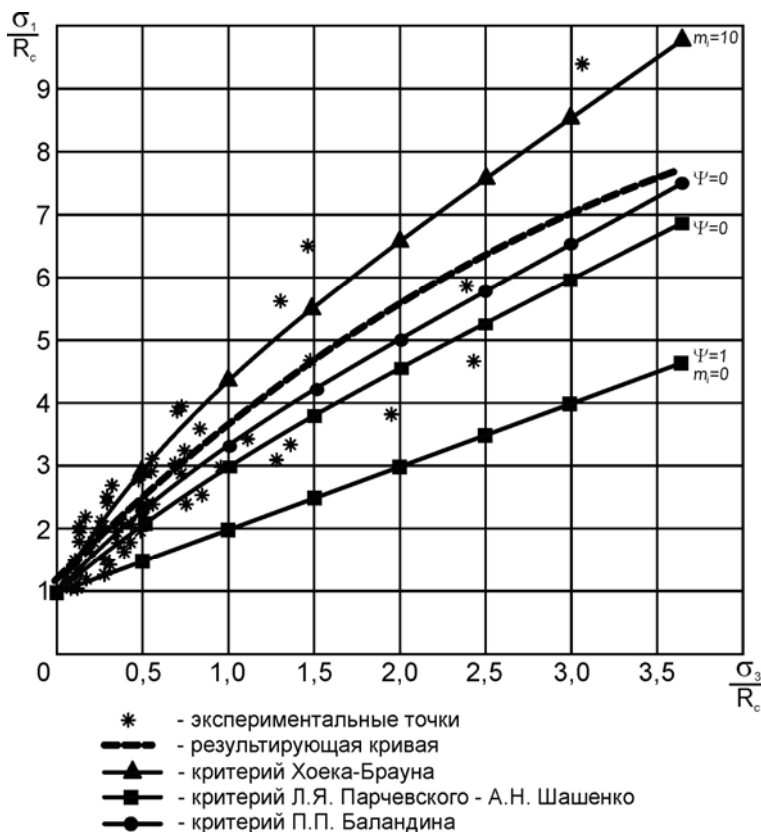


Рис. 3.5. Сравнение критериев прочности с результатами испытаний горных пород (по А.Н. Ставрогину [4])

по результатам статистической обработки (метод наименьших квадратов). Логично предположить, что кривая, соответствующая тому или иному предлагаемому критерию прочности, должна находиться как можно ближе к результирующей кривой.

Сразу же отметим, что оба сравниваемые критерии (Л.Я. Парчевского – А.Н. Шашенко и Хоека-Брауна) для пластичных пород с коэффициентом хрупкости ψ близким к 1,

или при m_i близким к 0, сводятся к одному общему выражению – (3.29), (3.31), которое, как было показано выше, наилучшим образом описывает поведение твердых тел, одинаково сопротивляющихся усилиям растяжения-сжатия и склонных к вязкому разрушению.

Для хрупких пород сравниваемые критерии прочности дают отличающиеся результаты. Чуть ниже результирующей кривой располагается кривая критерия Л.Я. Парчевского-А.Н. Шашенко. Кривая, соответствующая критерию Хоека-Брауна, при $m_i = 10$, что отвечает тестируемым породам в исследованиях А.Н. Ставрогина, располагается выше результирующей кривой. При $m_i > 10$ кривая уходит резко вверх. Поле рассеяния точек практически полностью охватывается двумя кривыми: снизу – по Л.Я. Парчевскому-А.Н. Шашенко, сверху – по Хоеку-Брауну.

Расчеты, выполняемые по критерию Хоека-Брауна, будут тем точнее, чем слабее, пластичнее рассматриваемые породы. В случае же крепких, хрупких пород расчеты, выполняемые по этому критерию, будут несколько завышены, что должно корректироваться при оценке прочности проектируемых сооружений введением соответствующего запаса прочности.

В двух рассматриваемых выше критериях прочности Л.Я. Парчевского-А.Н. Шашенко и Хоека-Брауна предусмотрен переход от оценки прочности ненарушенного породного массива и породного массива, содержащего структурные дефекты в виде трещин.

В первом случае это достигается введением в основную зависимость коэффициента структурного ослабления, учитывающего масштабный эффект, наличие в реальных породах внутренней неоднородности и блочной структуры. Компактная формула для его расчета предложена ниже, в разделе 4. Для определения величины коэффициента структурного ослабления достаточно знать два параметра: среднее расстояние между трещинами и вариацию испытаний породных образцов на одноосное сжатие. Физический смысл этих величин ясен и понятен, а их получение не представляет никакой трудности.

Во втором случае в обобщенный критерий прочности вводится пять параметров: m_b , s , a , GSI , D , определение которых является достаточно сложной и в известной степени субъективной процедурой. Стремление максимально учесть в аналитическом выражении особенности рассматриваемого породного массива неизбежно делает эмпирические зависимости все более громоздкими и менее точными, учитывая разброс значений каждого из вводимых параметров.

Таким образом, критерии прочности, полученные как аналитическим, так и эмпирическим путем, при определенных условиях могут достаточно хорошо моделировать нелинейный процесс разрушения породных образцов.

Критерий Хоека-Брауна при оценке прочности подземных сооружений, расположенных на больших глубинах в крепких породах, дает погрешность, которая тем меньше, чем пластичнее породы и которую можно исправить, вводя в расчеты соответствующий коэффициент запаса прочности.

Критерий Л.Я. Парчевского-А.Н. Шашенко при прогнозе прочности хрупких горных пород позволяют сделать это с некоторым заранее заложенным в структуре формул запасом прочности.

При переходе к оценке прочности реальных породных массивов, имеющих структурные дефекты в виде трещин, плоскостей ослабления критерий Хоека-Брауна становится все более громоздким. Входящие в обобщенные уравнение параметры определяются приблизительно, их получение на практике весьма затруднительно.

Возможный компромисс на пути дальнейшего развития критериев прочности породных массивов лежит, видимо, в разумном сочетании двух подходов – аналитического и эмпирического, когда ясные физические модели корректируются обобщенными результатами лабораторных и натурных измерений. При этом лабораторные и натурные тесты должны быть максимально простыми, доступными и лишены возможности субъективной оценки.

3.3. Угол внутреннего трения в задачах геомеханики

При аналитических исследованиях параметров упругопластического состояния чаще всего используется критерий прочности Мора с прямолинейной

огибающей предельных кругов главных напряжений. Его применение удобно, прежде всего, тем, что практически всегда обеспечивает получение решения задачи в замкнутом виде.

Несмотря на очевидное удобство использования такого критерия в геомеханике, его применение вызывает обоснованные серьезные возражения. Во-первых, замена криволинейной огибающей на прямолинейную не имеет под собой никакого физического обоснования [65]. В соответствии с постулатом Друккера [74], граница, разделяющая область опасных и неопасных состояний, является предельной, после чего начинается неустойчивое разрушение материала. Во-вторых, исследования, выполненные С.А. Батугиным и В.А. Похилько в работе [128], показали, что упругопластические задачи весьма чувствительны к виду условия прочности. Особенно неустойчивы их решения в случае применения именно прямолинейной огибающей кругов главных напряжений.

Прочностными характеристиками, входящими в условие прочности, основанное на прямолинейной огибающей предельных кругов главных напряжений, являются угол внутреннего трения ρ и сцепление C , либо пределы прочности на одноосное сжатие R_c и растяжение R_p . В механику горных пород, объектом исследований которой являются как правило породы скального типа, угол внутреннего трения и величина сцепления как прочностные характеристики были перенесены из механики грунтов, науки более старой, чем геомеханика. Так, при оценке предельного состояния широко используется линейное соотношение Кулона-Мора, имеющее вид:

$$\tau = C + \sigma_n \operatorname{tg} \rho. \quad (3.33)$$

Здесь τ – напряжение сдвига, σ_n – нормальное напряжение. С известным допущением условие прочности Кулона может применяться, когда речь идет о грунтах или сыпучих породах, хотя, как показал М.М. Протодяконов [126], огибающая предельных кругов Мора даже при испытаниях песка имеет все же криволинейную форму. Для связных пород в области сжатия отличие реальной криволинейной огибающей от прямолинейной весьма существенно [4, 81].

Угол внутреннего трения для горных пород представляет собой сложную и во многом противоречивую характеристику. Существенно разнятся высказывания о физической природе этой величины. На настоящий момент нет даже убедительного ее определения. Неоднозначность его толкования, несовершенство методики испытаний приводят к тому, что эта величина очень нестабильна даже для одной литологической разности [129-134], о чем свидетельствуют данные таблицы 3.1.

Таблица 3.1

Значения угла внутреннего трения

Порода	Угол внутреннего трения, град.					
	К.В. Рупенейт [129]	П.М. Цимбаревич [137]	В.Д. Слесарев [134]	Ж. Талобр [135]	Э. Айзаксон [136]	Р. Квапил [138]
Пластичные глины	5-10	38	45	15-27	15-20	20-60
Слабые глинистые сланцы	20	60	63	30	37	60-70
Песчанистые сланцы	25-30	75	78	-	30-65	70-85
Песчаники	30	82	81	50-70	30-65	70-85

Расходятся мнения ученых и по поводу того, как должна изменяться с глубиной эта характеристика. Так, например, Ж. Талобр [135] считал, что для твердых горных пород угол внутреннего трения увеличивается с ростом глубины. Р. Квапил [138], наоборот, полагал, что с увеличением глубины разработки его величина становится меньше. Он предложил формулу для определения степени этого уменьшения.

К.В. Рупенейт [129] утверждает, что при изменении напряжений в процессе деформирования материала, обладающего внутренним трением и сцеплением, его угол внутреннего трения не изменяется.

Начиная с П.М. Цимбаревича [133], исследователи все чаще приходили к выводу о том, что угол внутреннего трения не может выступать как механическая характеристика горных пород.

Однако при всех недостатках, прямолинейная огибающая предельных кругов Мора, как уже отмечалось, обладает тем достоинством, что ее использование в задачах геомеханики позволяет применять достаточно простые математические приемы.

Ю.М. Либерман, изучая упругопластическое состояние породного массива в окрестности горных выработок, заметил [139], что прямолинейная огибающая должна быть касательной к реальной криволинейной. Если знать в какой точке ее провести, то точность расчетов будет обеспечена. В такой интерпретации угол внутреннего трения уже представляется не как механическая константа материала, а как геометрический параметр прямой в заданной системе координат.

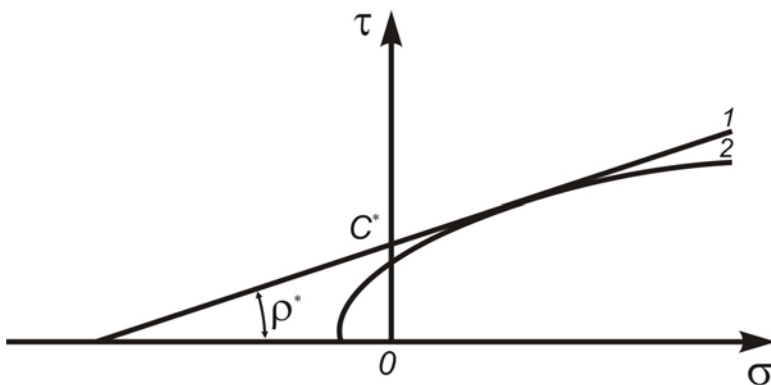


Рис. 3.6. Переход от криволинейной огибающей предельных кругов Мора к прямолинейной:

1 – прямолинейная; 2 – криволинейная

Для этого перепишем зависимость (3.12) следующим образом

$$\tau = 0,5\sqrt{R_c^2\psi + 2R_c(1-\psi)\sigma} . \quad (3.34)$$

Исходя из того, что прямолинейная огибающая представляет собой касательную к реальной кривой разрушения, продифференцируем выражение (3.34) по

Покажем, каким образом с помощью подхода, предложенного Ю.М. Либерманом, можно осуществить переход от криволинейной огибающей к прямолинейной, не искажая при этом физических закономерностей разрушения горных пород (рис. 3.6).

σ и с учетом (3.33) получим формулу для определения угла внутреннего трения ρ^* , с помощью которой осуществляется связь между линейной (3.33) и нелинейной (3.12) огибающей:

$$\rho^* = \arctg \frac{1 - \psi}{2 \sqrt{\frac{2\sigma}{R_c} (1 - \psi) + \psi}}.$$

В гидростатически сжатом породном массиве

$$\sigma = 2\gamma H,$$

где γ – объемный вес пород, H – расстояние от рассматриваемой точки массива до поверхности Земли. С учетом этого получим

$$\rho^* = \arctg \frac{1 - \psi}{2 \cdot \sqrt{\psi + (1 - \psi) \frac{\gamma H}{R_c}}}. \quad (3.35)$$

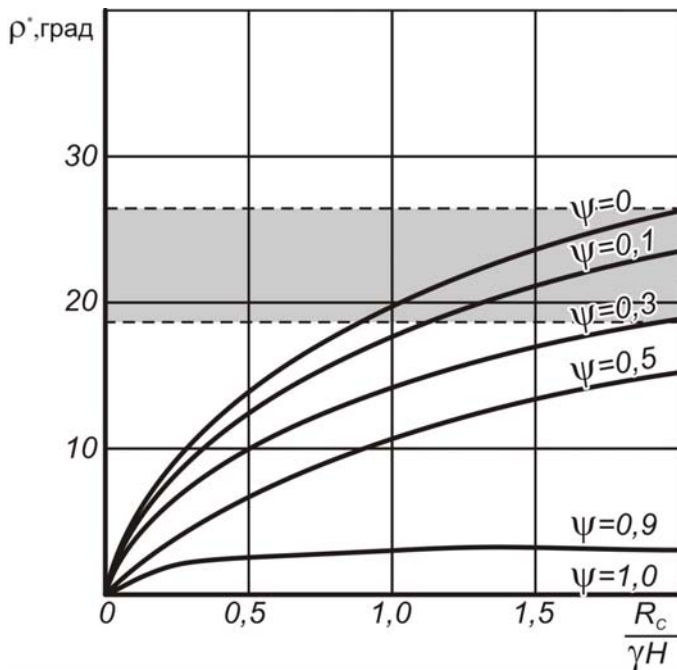


Рис. 3.7. Зависимость величины угла внутреннего трения от безразмерного показателя условий разработки

Величина сцепления C^* определяется зависимостью (см. рис. 3.6)

$$C^* = R_c \frac{1 - \sin \rho^*}{\cos \rho^*}. \quad (3.36)$$

На рис. 3.7 и 3.8 показаны зависимости величины угла внутреннего трения ρ^* и сцепления C^* от безразмерного параметра $\frac{R_c}{\gamma H}$. Как следует из рис. 3.7, угол внутреннего трения уменьшается с глубиной как следствие увеличения пластических свойств горных пород. Кроме того, его величина существ-

венно зависит от структурных особенностей среды, определяемых параметром $\frac{R_c}{\gamma H}$. И только при отсутствии компонентов шарового тензора напряжений угол внутреннего трения становится константой, функционально связанной с основными прочностными показателями горных пород – пределом прочности на одноосное сжатие R_c и растяжение R_p :

$$\rho_{H=0}^* = \arctg \frac{1-\psi}{\sqrt{\psi}}. \quad (3.37)$$

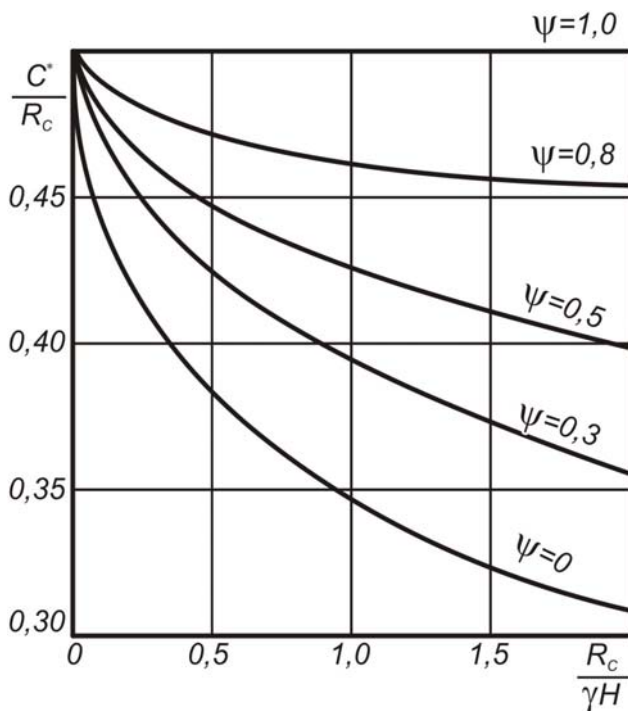


Рис. 3.8. Зависимость величины сцепления от безразмерного показателя условий разработки

На рис. 3.7 показано (заштрихованная часть), что полученная экспериментально величина угла внутреннего трения для подавляющего большинства горных пород должна лежать в пределах $15-30^\circ$, исходя из того, что отношение ψ находится, как правило, в пределах 0,1-0,2. Сравнение полученных расчетным путем значений ρ_H^* с данными испытаний показывает достаточно близкое совпадение.

скими константами, имеющая вид выражения (3.17).

Из (3.34) при $\sigma = 0$ следует зависимость между основными механическими

Зависимости, полученные выше, позволяют, исходя из характера и сложности решаемых геомеханических задач, обосновано применять в качестве условия разрушения линейную огибающую кругов предельных напряжений, а также глубже понять природу таких широко распространенных и часто применяемых в практических расчетах прочностных показателей, как угол внутреннего трения и сцепление.

4. ОЦЕНКА ПРОЧНОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД С ДЕФЕКТНОЙ СТРУКТУРОЙ

В процессе многолетних исследований было установлено, что прочность геометрически подобных объектов не остается постоянной. Это явление было названо масштабным эффектом, а причины его вызывающие – масштабными факторами. Особенно сильно масштабный эффект проявляется в том случае, если материал изучаемого объекта является структурно неоднородным. К таким материалам относятся, прежде всего, массивы горных пород, в которых сооружаются выработки разного, в том числе и долговременного, назначения. Породные массивы содержат неоднородности структуры различных размеров, трещины и текстурные особенности, которые в совокупности оказывают на него ослабляющее влияние с точки зрения прочности.

4.1. О подобии деформирования твердых тел

При решении задач геомеханики, исследованиях устойчивости выработок, расчетах крепи первостепенное значение имеют оценки предельного состояния породного массива, которые зависят от основного показателя – прочности горных пород на одноосное сжатие. Испытания образцов пород производятся в соответствии с существующим стандартом [112]. Переход от результатов таких испытаний к прочности пород массива является сложной задачей. Объясняется это тем, что образцы горных пород имеют ограниченные размеры и не воспроизводят всей сложности структурного строения и тектонических нарушений, имеющих в больших породных массивах. Эта задача связана с масштабным эффектом и является предметом серьезных исследований в механике горных пород.

Впервые для горных пород определение масштабного эффекта в развернутом виде было сформулировано М.И. Койфманом [163].

Оно выглядит следующим образом: «Масштабный эффект – это принципиальные закономерности, а также конкретные для различных пород и углей количественные зависимости, характеризующие изменение в зависимости от линейных размеров (площади сечения, объема) образцов горных пород или частей горного массива механических свойств реальных, всегда в той или иной степени неоднородных, трещиноватых и пористых пород и углей со всеми присущими им природными структурными дефектами и поверхностными изменениями».

Закон подобия деформирования твердых тел впервые был установлен В.П. Кирпичевым в 1874 г. на основе теоретических исследований закономерностей изменения напряженно-деформированного состояния при нагружении геометрически подобных объектов [140, 141]. Записывается он следующим образом: **подобным называют такое деформирование, при котором отношение линейных деформаций геометрически подобных тел равно отношению их линейных размеров.**

Из закона подобия следует, что отношение необходимых усилий для создания таких деформаций должно равняться квадрату линейных соотношений.

Учение В.П. Кирпичева о пропорциональности механических изменений в геометрически подобных телах было развито впоследствии в работах Барба и Фр. Кика [141].

Н.Н. Давиденковым было выполнено подробное исследование условий, при которых должен выполняться закон В.П. Кирпичева [142].

Примерно в это же время И. Баушингер, анализируя результаты испытаний на прочность образцов песчаника, самостоятельно приходит к выводу, что «геометрически подобные тела из одинакового материала в одинаковых условиях при одинаковых напряжениях имеют одинаковое временное сопротивление» [143].

Установление закона подобия деформирования при нагружении геометрически подобных твердых тел имело большое значение при выполнении практических расчетов на прочность элементов сложных конструкций, позволяя ис-

пользовать удельные характеристики материала, такие, например, как предел прочности на одноосное сжатие, растяжение, сдвиг и т.п.

Непременным условием, которое должно обеспечивать подобное деформирование, является идеальная однородность и изотропность материала сравниваемых геометрически подобных тел. Реальные же материалы и среды, с которыми сталкивается человек в своей деятельности, чаще всего обладают определенной неоднородностью внутреннего строения (структуры). В связи с этим и некоторыми другими причинами практический опыт получения удельных характеристик различных материалов на геометрически подобных образцах показал, что наряду с фактами, подтверждающими закон подобия, имеет место и существенное отклонение от него. Особенно велико оно при испытаниях горных пород, обладающих значительной неоднородностью структуры.

4.2. Неоднородность горных пород

Состояние породного массива определяется совокупностью внутренних свойств: плотности, влажности, внутренней энергии, теплопроводности и внешних условий: величины объемных и поверхностных сил, температуры, времени и характера приложения нагрузок. В зависимости от этих условий горные породы разнятся между собой условиями залегания, составом, структурой, механическим состоянием. Сложный характер неоднородности горных пород связан как с неоднородностью исходного материала, так и с его последующими преобразованиями. Поэтому считается, что горная порода – это среда, неоднородная по структуре, текстуре и свойствам [144].

Неоднородность горных пород проявляется посредством изменчивости их физических свойств и вещественного состава в пространстве. Эти изменения могут создавать анизотропию, образовывать физические границы раздела, вызывать случайные вариации значений изучаемых параметров физических полей.

Имеется много форм нарушений породного массива, связанных с генезисом пород, последующими дислокациями (дизъюнктивными и пликативными),

интрузиями и денудацией [145]. Наиболее важными из них являются слоистость, микро- и макротрещиноватость, наличие зон дробления, рассланцевания, даек, включений, изменений элементов залегания (например, углов падения, мощности), непостоянство сил связей по контактам между различными породами и прочее.

Для оценки степени неоднородности породных массивов используют формальное описание с помощью геометризации их элементов, а также применяют качественные характеристики неоднородности. Такой подход позволяет классифицировать естественные неоднородности горных пород (массивов) и представить их следующими порядками или уровнями (рис. 4.1):

1 – микроскопический: среда рассматривается на уровне кристаллов,

размер элементов неоднородностей составляет $10^{-8} - 10^{-5}$ м;

2 – субмакроскопический: среда рассматривается на уровне элементарного объема литологической разности, размер элементов неоднородностей составляет $10^{-5} - 10^{-2}$ м;

3 – макроскопический: среда рассматривается на структурном уровне, размер элементов неоднородностей составляют $10^{-2} - 10^1$ м;

4 – мегаскопический: среда рассматривается как сложноструктурное образование, обладающее текстурой и находящееся под действием гравитационных и тектонических сил, размер элементов неоднородностей составляет более 10,0 м.

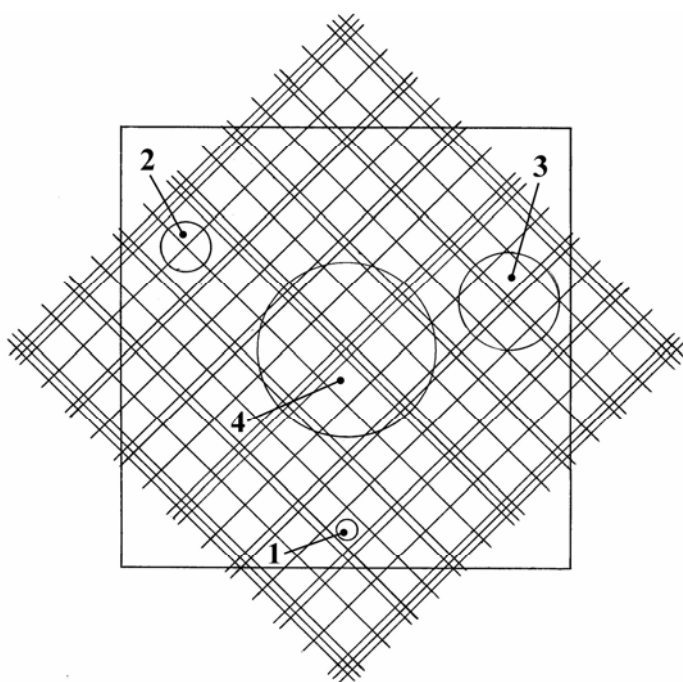


Рис. 4.1. Уровни неоднородности в породных массивах: 1 – микроскопический; 2 – субмакроскопический; 3 – макроскопический; 4 – мегаскопический

Очевидно, что понятие неоднородности относительно. В зависимости от геометрических размеров рассматриваемой области массива и уровня силового воздействия на эту область может быть весомым тот или иной порядок неоднородности. В частности, при решении некоторых задач, связанных с оценкой устойчивости горных выработок, область воздействия эксперимента такова, что неоднородностями первого и второго порядков можно пренебречь и ввести допущение о его квазиоднородности на этом уровне. По отношению к неоднородностям третьего и четвертого порядков такое допущение спорно и требует серьезного обоснования в зависимости от целей исследований.

К основным геологическим факторам, определяющим поведение пород и влияющим на устойчивость горных выработок, относятся: слоистость и расслоение пород, трещиноватость пород и угольного пласта, тектонические нарушения, обводненность массивов, литологический состав вмещающих пород и их физико-химические свойства, мощность, угол падения и текстура угольного пласта, его физико-механические свойства. Степень влияния перечисленных факторов на устойчивость породных обнажений различна. Также различен и уровень изученности этого влияния. Последнее обстоятельство связано с различной возможностью проведения наблюдений в натуральных условиях, постановки лабораторных экспериментов, выполнения аналитических исследований.

Устойчивость кровли в угольных шахтах зависит от мощности пластовой отдельности, которая тесно связана со слоистостью. По ней отходят крупные слои породы, которые затем подвергаются дальнейшему расслоению. Слоистость следует отнести к неоднородностям третьего и четвертого уровней. Влияние слоистости на устойчивость горных выработок достаточно хорошо изучено. Разработана общая классификация горных пород по слоистости и, в частности, классификация слоистых пород кровли угольных пластов по их строению [145], учитывающая характер обрушения пород слоя.

Гораздо менее изучено влияние на устойчивость выработок трещиноватости пород и углей, которую также следует отнести к неоднородностям третьего и четвертого уровней в зависимости от размеров трещин и области их распро-

странения. Трещины, наблюдаемые в горных породах, принято делить по генетическому признаку на три типа:

а) **естественные** (прирожденные, первичные) – возникающие в процессе формирования породных толщ;

б) **тектонические** – образовавшиеся в результате горообразовательных процессов;

в) **искусственные** – появляющиеся в процессе осуществления подготовительных и очистных работ в шахтах, буровзрывных работ и образования заколов, а также вследствие других причин.

Из имеющихся генетических классификаций трещин наиболее универсальной является классификация, предложенная В.В. Белоусовым. Несколько измененная для более удобного практического использования, эта классификация выглядит следующим образом [146].

1. Нетектонические трещины:

- первичные (естественные, природные) трещины;
- трещины выветривания;
- трещины оползней, обвалов и провалов;
- трещины расширения пород при разгрузке;
- искусственные трещины.

2. Тектонические трещины:

- трещины с разрывом сплошности пород;
- кливаж.

Из нетектонических трещин основное значение имеют первичные (естественные, природные), как повсеместно распространенные и определяющие строение породного массива. При повсеместном распространении первичных трещин в осадочных породах наиболее четко они выражены в областях с горизонтальным залеганием. Первичные трещины не пересекают сколько-нибудь мощные слои пород, а тесно связаны с отдельными литологически однородными слоями. По отношению к слоистости природные трещины могут располагаться различно, но преимущественно они являются нормальносекущими

трещинами отрыва. В совокупности такие трещины ограничивают блоки (отдельности) в форме различных многогранников. В мергелях и глинах эти трещины могут образовывать и более сложные контуры.

По своим морфологическим признакам и положению в пространстве естественные трещины подразделяются на три вида:

- *основные;*
- *торцевые;*
- *параллельные напластованию пород.*

Основная трещиноватость имеет субмеридианальное простирание, торцевая – субширотное. Угол между этими основными направлениями трещин колеблется от 60 до 90 градусов. Основные трещины чаще бывают перпендикулярными или почти перпендикулярными к плоскости наслоения пород (85–90⁰). Торцевые имеют бóльшее отклонение от перпендикулярности и достигают 60⁰. Наибольшее практическое значение имеет основная, наиболее ярко выраженная, прирожденная трещиноватость, по которой породы легко распадаются. Направление основных трещин отличается значительной выдержанностью. Торцевая трещиноватость проявляется обычно слабо и имеет второстепенное значение. Расположение торцевых и основных трещин в породе определяет форму пластовой отдельности.

Тектонические трещины развиваются в горных породах под влиянием тектонических сил, проявляющихся в земной коре в процессе ее эволюции. Возникающие при этом деформации почти всегда сопровождаются развитием в горных породах трещин, образующихся как на сравнительно малых площадях, так и на огромных пространствах [147]. Отличие их от нетектонических трещин заключается, прежде всего, в том, что тектонические трещины обладают большей выдержанностью в ориентировке и развиваются сравнительно одинаково в различных по составу породах. В областях, претерпевших тектонические нарушения, направления основной и торцевой прирожденной трещиноватости несколько отличаются от субмеридианального и субширотного направления. Тектонические трещины наклонены к плоскостям напластования под разными уг-

лами; этим они отличаются от трещин прирожденных (естественных). Поверхности тектонических трещин обычно покрыты бороздами скольжения, так как очень часто они являются плоскостями смещения пород.

Создавая дополнительные плоскости ослабления, тектонические трещины при значительном их развитии вызывают аварийные обрушения кровли в рабочем пространстве. Тектоническая трещиноватость бывает представлена обычно двумя системами трещин, наклоненных в разные стороны и взаимноперпендикулярных. Направление тектонических трещин совпадает с направлением основных разрывных нарушений данного района. Тектонические явления содействуют раскрытию ранее скрытых естественных трещин. При тектонических подвижках может происходить сдвигание блоков друг относительно друга. Различают тектонические трещины с разрывом сплошности (трещины отрыва, трещины скалывания) и кливаж.

Кливаж в породах и углях (от французского *clivage* – делимость) представляет собой особую структурную форму породного массива. Под этим термином понимают способность породы или угля разделяться по плоскостям, несовпадающим с первичной текстурой пород (для осадочных пород не совпадающим со слоистостью). Кливаж является разновидностью трещиноватости. Он проявляется в виде параллельных едва заметных плоскостей ослабления в пласте угля, а также во вмещающих породах кровли и почвы.

Кливаж различными исследователями понимается неодинаково как по морфологическим признакам, так и по происхождению, что обусловлено большим разнообразием классификации этого явления. Различают кливаж первичный и вторичный.

Первичный кливаж в горных породах возникает под влиянием внутренних причин, зависящих от вещества самой породы, от внутреннего сокращения ее объема в процессе литификации и метаморфизма. В осадочных породах первичный кливаж выражается обычно в образовании двух перпендикулярных друг другу и к наслоению систем параллельных трещин.

Вторичный кливаж является результатом деформации горных пород под влиянием внешних, в основном тектонических, воздействий. Вследствие различной направленности возникающих при этом напряжений трещины кливажа располагаются под различными углами к первичным текстурным элементам породы (в осадочных породах – к слоистости). Расстояние между соседними плоскостями кливажа зависит от мощности и прочности породных слоев, и составляют от нескольких миллиметров до нескольких метров (обычно 10-30 см).

Каждая отдельная трещина характеризуется длиной, шириной, извилистостью стенок, а также положением трещины в пространстве, которое в геологии принято обозначать углом падения и азимутом направления падения. Трещины различаются также наличием или отсутствием в них заполнителей, в соответствии с чем они подразделяются на открытые (зияющие) и заполненные.

По раскрытости или мощности заполнения выделяются трещины видимые невооруженным глазом (открытые, закрытые и «волосные») и микротрещины. Ширина открытых трещин или мощность их заполнения определяется непосредственными замерами, ширину закрытых трещин можно считать равной 0,8...0,5 мм, «волосных» – 0,5...0,2 мм.

Заполнитель в трещинах может быть представлен рыхлыми отложениями типа песчано-глинистых грунтов либо образованиями, отличающимися от пород массива по минералогическому составу, но сходными с ними по структуре и физическим свойствам.

Частота трещин зависит от мощности и состава пласта. Например, чем меньше мощность пластов и прочность пород, тем чаще трещины. По данным многих исследователей [148], в карбонатных породах многих районов в пластах мощностью от 0,5 до 2,0 м эта связь прямолинейна. М.В. Рац [149] считает ее параболической.

В зависимости от того, как трещины ориентированы, различают упорядоченную (одно-, двухсистемную) и неупорядоченную трещиноватость. Пересекаясь, трещины разбивают породный массив с некоторым характерным размером H на отдельные структурные блоки со средним размером h_{cp} . Отношение

H/h_{cp} называется интенсивностью трещиноватости. Кроме того, для количественной оценки трещиноватости используют линейный, площадной и объемный коэффициенты интенсивности трещиноватости. Они представляют собой соответственно отношение единицы длины, площади, объема к среднему расстоянию между соседними трещинами l_{cp} , к площади S_{cp} и объему структурного блока V_{cp} .

М.В. Рац приводит слова известного математика Г.П. Покровского, еще в 30-е годы начавшего развивать статистическое направление в механике грунтов и указывавшего, что «...система совершенно устойчивая с точки зрения теории идеально однородных тел кажется неустойчивой с точки зрения статистической теории неоднородного тела».

Согласно принципам статистической механики, развиваемой в работах Дж. Гиббса [150], микроструктура массива образуется в результате сложных физико-химических процессов, для ранней стадии которых характерно равновесие и строгое соблюдение соотношений между компонентами, фазами и степенями свободы. Однако эти равновесные состояния неодинаково реализуются в каждой точке породной среды, что порождает статистическую совокупность ее свойств и признаков.

Таким образом, неоднородность является естественным свойством горных пород.

4.3. Гипотезы о природе масштабного эффекта

Неоднородность реальных твердых тел, в том числе и горных пород, является главной причиной того, что по отношению к ним наблюдается существенное отклонение от закона подобия. Это невыполнение является следствием геометрических размеров деформируемых твердых тел, и в связи с этим, причины, его вызывающие, называют масштабным фактором, а само явление - масштабным эффектом.

Известен масштабный эффект давно. Еще в 1907 г. Дэниэлс и Мур [151] показали, что с увеличением линейных размеров образцов антрацита прочность

их существенно снижается. Первой аналитической работой, объясняющей масштабный эффект, имевший место в опытах со стеклом, была работа А. Гриффитса [152], появившаяся в 1921 г. Позднее, в 1933 г., А.П. Александров и С.Н. Журков [85] также, экспериментируя подобно А. Гриффитсу со стеклянными нитями, наиболее полно исследовали зависимость их удельной прочности от диаметра. Было показано, что с увеличением диаметра средняя прочность нитей уменьшается с одновременным уменьшением разброса данных.

Работами А.Ф. Иоффе и его учеников [14] было установлена интересная и важная особенность: масштабный эффект существенно проявляется при деформировании материалов, склонных к хрупкому разрушению, и значительно менее выражен при испытаниях материалов, разрушающихся вязко.

Обширные исследования проявлений масштабного эффекта по отношению к металлам были выполнены В.В. Чечулиным [141], а применительно к углям – С.Е. Чирковым [153]. В последней работе отмечается, что все исследователи масштабного эффекта в углях приходят к единому выводу: увеличение размеров испытываемых образцов приводит к существенному снижению их прочности.

Результаты же испытаний горных пород и некоторых иных материалов, выполненных различными авторами на геометрически подобных образцах, далеко не столь однозначны. По итогам их можно разделить на четыре группы:

– с увеличением размеров образцов относительная прочность их падает [85, 154, 155 и др.];

– с увеличением размеров образцов относительная прочность их растет [156-158];

– с увеличением размеров образцов до определенного предела относительная прочность их растет, а затем асимптотически падает до некоторой постоянной величины [159];

– с изменением размеров образцов прочность их остается постоянной [160-162].

Результаты второй группы опытов были получены при испытаниях образцов каменной соли, обладающей существенной вязкостью. Они требуют, види-

мо, особого анализа и трактовки. Испытания других литологических разностей не показали однозначного увеличения относительной прочности с увеличением размеров образцов. Результаты опытов, отнесенные к четвертой группе, немногочисленны и резко отличаются от большинства известных аналогичных исследований.

Анализируя результаты своих опытов и известных в литературе, М.И. Койфман в 1959 г. предложил различать масштабные эффекты первого и второго рода.

Масштабный эффект первого рода, или объемный, связан со структурной неоднородностью испытываемого материала, наличием случайно распределенных по объему дефектов.

Масштабный эффект второго рода, или поверхностный, связан с качеством обработки поверхности испытываемых образцов и степенью разрушения (деструкции) приповерхностного слоя.

Масштабный эффект первого рода М.И. Койфман назвал главным [163]. Поверхностный масштабный эффект существенно сказывается при испытаниях образцов малых размеров. В зависимости от характера поверхностных дефектов он может в одних случаях усилить главный масштабный эффект, а в других – уменьшить. При переходе же от образца к массиву основным является главный масштабный эффект.

Интересная классификация проявлений масштабного эффекта предложена М.В. Рацем [149, 164]. В горных породах выделяются неоднородности четырех порядков в зависимости от размеров исследуемой области (от 10^{-6} до 10^6 см). Масштабный эффект проявляется в том, что все моменты вероятностного распределения конкретного признака изменяются с изменением размеров области воздействия. В соответствии с этим выделяются масштабные эффекты I, II и III рода, которые характеризуются, соответственно, распределениями Вейбулла, логарифмически нормальным и нормальным. Масштабный эффект I рода соответствует тому, который имеет место при испытаниях породных образцов разных размеров.

Одна из первых гипотез, объясняющих природу масштабного эффекта, принадлежит А.П. Александрову и С.Н. Журкову [85]. Реальные твердые тела всегда содержат внутренние дефекты в виде вакансий, дислокаций, трещин, включений микрообъемов разной прочности, распределенных по объему случайным образом. Чем больше объем тела, тем больше в нем дефектов, тем ниже его прочность.

Особенно отчетливо статистическая природа прочности твердых тел отражена в работе В. Вейбулла [86].

Гипотезы, объясняющие масштабный эффект с позиций наиболее слабого звена, получили названий статистических. Согласно статистической гипотезе, всегда существует закономерный разброс экспериментально определяемых значений прочности, причем, чем мельче образцы, тем меньше вариация значений прочности.

Имеются и иные объяснения природы масштабного эффекта. Так, например, А. Уэлс и Н.Н. Давиденков [165] высказали предположение, что причина снижения прочности крупных образцов заключается в том, что система «испытательная машина-образец» накапливает больше упругой энергии, чем при разрушении образцов малого размера.

И.А. Одинг [166] объяснил масштабный эффект неодинаковой технологией изготовления образцов разного размера.

В.В. Лавров [167], производя опыты со льдом, пришел к выводу, что причина снижения прочности крупных образцов кроется в наличии микротрещин, которых всегда больше в большем объеме.

Б.В. Матвеев связал масштабный эффект со структурой и видом напряженного состояния деформированного твердого тела. Им рассмотрен ряд статистических задач, в которых функция вероятности разрушения структурных элементов принимается по В. Вейбуллу [168]. Сам процесс разрушения зависит от вида напряженного состояния и от склонности материала к хрупкому или вязкому разрушению. Рассматривая часто встречающийся в геомеханике случай объемного сжатия хрупкого тела, Б.В. Матвеев существенно опирается на рабо-

ту Л.Г. Седракияна [90]. Конечные формулы подтверждают выявленную экспериментально тенденцию снижения прочности при испытаниях крупных образцов.

Более общие аналитические работы, направленные на оценку масштабного эффекта в твердых телах со статистической точки зрения, были выполнены С.Д. Волковым [169] и В.В. Болотиным [170]. В них отмечается, что масштабный эффект имеет место во всех материалах при любых напряженных состояниях, но особенно ярко он выражен для хрупких материалов, находящихся в условиях объемного сжатия.

Г.П. Черепанов [32], исходя из анализа размерностей, показал, что наличие в неоднородном хрупком материале с гипотетическими дефектами поверхностной энергии разрушения приводит к зависимости прочности от размера структурного элемента как на квантово-механическом, так и на макроуровне. Зависимость эта однозначна: увеличение объема испытываемого материала всегда ведет к снижению его относительной прочности.

А.Н. Полипов [171], также используя энергетический подход, объясняет масштабный эффект тем, что упругая энергия, накапливаемая в теле, пропорциональна объему, а разрушение материала происходит по некоторой поверхности и работа разрушения пропорциональна площади сечения; это неизбежно приводит к зависимости относительной прочности от абсолютных размеров тела. Поскольку волны напряжений и деформаций, а, следовательно, и энергия, не могут распространяться в материале со скоростью, большей скорости упругих волн, то при некоторой критической длине образца должна исчезнуть зависимость прочности от размеров тела.

Подводя итоги исследований, посвященных объяснению природы масштабного эффекта, можно отметить следующие важные положения:

- теоретические и лабораторные исследования в подавляющем своем большинстве показывают, что с увеличением объема прочность твердых тел падает;
- масштабный эффект существенно зависит от структуры материала и вида напряженного состояния.

4.4. Коэффициент структурного ослабления как количественная оценка масштабного эффекта в горных породах

Горные породы в окрестности капитальных и подготовительных подземных выработок находятся в состоянии неравнокомпонентного всестороннего сжатия. Их разрушение в этих условиях протекает, как правило, хрупко, за исключением литологических разностей, содержащих большое количество увлажненных глинистых частиц. Кроме того, массив в зависимости от генезиса имеет определенную структуру и текстуру, разбит системами случайно ориентированных трещин соответствующей степени раскрытия, разные участки его имеют различную степень обводненности и т.д. Эти обстоятельства приводят к тому, что прочностные характеристики горных пород в образце и массиве имеют существенное отличие. Это отличие в геомеханике оценивается коэффициентом структурного ослабления – k_c , который равен отношению значения удельной прочностной характеристики в массиве к ее значению, полученному при испытании образцов стандартных линейных размеров. Как правило, это отношение предела прочности на одноосное сжатие в массиве R_m к среднему пределу прочности образцов горной породы $\overline{R_c}$, то есть

$$k_c = \frac{R_m}{\overline{R_c}}.$$

Поскольку с этой характеристикой связан уровень предельных напряжений и параметры упругопластического состояния породного массива вокруг выработок, то установление объективного значения коэффициента структурного ослабления представляет собой важную и сложную задачу, связанную с рациональным проектированием подземных сооружений.

В зависимости от применяемых методов исследования, направленные на установление объективного значения k_c , проводились и проводятся в нескольких направлениях.

Прежде всего следует отметить фундаментальные аналитические работы А.П. Александрова и С.Н. Журкова [85], В. Вейбулла [86], Л.Г. Седракяна [90],

С.Д. Волкова [169], Т.А. Канторовой и И.И. Френкеля [87, 172], В.В. Болотина [170] и некоторых других авторов, основанные на статистическом объяснении природы прочности твердых тел. Конечные формулы, отличаясь степенью сложности, отражают качественную картину снижения прочности образцов большого размера. Количественная же оценка степени снижения прочности затруднительна ввиду отличия исходных идеализированных физических моделей от реальных массивов горных пород.

Большое число исследований основано на методах статистического анализа результатов испытаний горных пород, отобранных при проходке горных выработок, а также их физических моделей, создаваемых в лабораториях. В этом направлении выполнены работы М.М. Протодяконова, М.И. Койфмана и С.Б. Чиркова [173, 84, 153], М.В. Раца [149, 164, 174], Г.П. Фисенко [175-177], Д.Н. Кима [178, 179], Г.Т. Рубца [180-183], Ю.И. Мартынова [184], В.Т. Глушко [185]. Учет ослабляющего действия дефектов производится в этом случае путем введения поправочных коэффициентов, выбор которых затруднителен.

Работы В.В. Ржевского и Г.Н. Новика [186], Л.В. Шаумян [187], С.В. Ветрова [188], О.С. Алферова [189] направлены на установление корреляционной связи между прочностью породы в образце и массиве и скоростью распространения упругих волн. Это направление весьма перспективно, поскольку оно позволяет учесть на основе одного комплексного показателя, каким является скорость продольной акустической волны, всю природную неоднородность массива. Исследованиями могут быть охвачены блоки очень больших размеров в десятки, сотни метров. Отсутствие серьезных аналитических описаний поведения упругой волны в существенно неоднородном теле, связанное с математической сложностью описания этого процесса, пока сдерживает широкое использование корреляционного метода.

Целый ряд работ по оценке прочностных свойств породного массива основан на непосредственных испытаниях крупных блоков в местах их естественного залегания – «*in situ*» [190, 191-194]. Этот наиболее простой с точки зрения методологии подход сопряжен со сложностью и трудоемкостью выполнения

экспериментальных работ, а также отсутствием серийно выпускаемого оборудования для оконтуривания блоков и их нагружения. Результаты же, получаемые при его осуществлении, наиболее близки к конкретным горно-геологическим условиям.

Существует также сравнительно небольшое количество исследований, в которых коэффициент структурного ослабления определяется путем анализа процесса разрушения массива при достаточно точно известных обстоятельствах. Этот метод получил название метода обратных расчетов. Коэффициент структурного ослабления в данном случае требует осторожной оценки, поскольку метод учитывает не только неучтенные в исходной модели структурные особенности среды, но неизбежно отражает и все логические несовершенства модели, особенно в части функциональной зависимости между входящими в конечную формулу параметрами. К этому направлению относятся работы А.В. Кондратова и А.А. Баряха [195], Г.П. Фисенко [196], Г.Т. Нестеренко и др. [197].

На этапе проектирования горных предприятий и их структурных элементов (выработок) весьма полезными могут быть эмпирические формулы, связывающие прочность образца с прочностью пород в массиве. Достаточно полный обзор работ этого направления выполнен в [116]. Учет геологического строения массива в этом случае производится путем введения целого ряда коэффициентов, имеющих существенный разброс. Последнее обстоятельство приводит к тому, что, варьируя значения коэффициентов, можно получить значение искомой величины, изменяющееся в широких пределах. В работе [116] приводятся значения коэффициентов структурного ослабления, полученные по данным ВНИМИ на основе анализа результатов натуральных наблюдений, испытаний и обратных расчетов.

Для углевмещающих пород по оценкам большинства авторов [134, 199-202 и др.] величина коэффициента структурного ослабления составляет 0,2-0,6.

Интересно отметить, что, оценивая прочность стержневой системы со случайно распределенной прочностью отдельных элементов, Б.В. Матвеев получил

для случая объемного сжатия значение коэффициента структурного ослабления равно $0,369-0,428$ [202].

В США и ряде других стран широко применяется методика оценки трещиноватости горных пород по показателю качества породы RQD (Rock Quality Designation), который определяется как произведение величины выхода керна, выраженного в процентах (Z), на отношение суммарной длины ненарушенных кусков керна, каждый из которых имеет длину не менее 10 см ($\sum l_i$), ко всей длине исследуемого интервала (L), т.е. $RQD = Z (\sum l_i / L)$.

Если, например, из исследуемой скважины с интервалом 9 м извлечен керн общей длиной 8 м, а суммарная длина ненарушенных кусков керна (каждый длиной 10 см и более) составляет 7 м, то $RQD = 78\%$. На основе показателя качества RQD составлены графики, таблицы, определяющие характер условий проведения выработок, тип и стоимость крепления [202].

В отличие от показателя RQD, методы Дири и Хансаги [203, 204], незначительно отличаясь друг от друга, позволяют определять коэффициент структурного ослабления, учитывая при этом число образцов, диаметр и длину керна. Заметим, что и метод RQD, и метод Хансаги и Дири не имеют под собой никакого аналитического обоснования. По сути дела, это способ получения некоторой величины меньше единицы, которая годится только для качественной оценки горных пород по степени их нарушенности.

Коэффициент структурного ослабления является очень важной характеристикой массива. На стадии проектирования именно с этой величиной связан прогноз возможной области предельного состояния пород в окрестности выработки, а, следовательно, и нагрузки на крепь, поскольку, как было показано выше, именно предел прочности на сжатие фигурирует в качестве основной физической константы в критериальных соотношениях наиболее распространенных феноменологических теорий прочности. Поэтому величина коэффициента структурного ослабления должна быть достаточно обоснована, включая в себя как объективные предпосылки формирования физической константы, так и субъективные, присущие конкретным горно-геологическим условиям.

4.5. Аналитические исследования масштабного эффекта

Аналитическое описание отличия прочности системы (агрегата) от прочности его структурных элементов дано в работах, основанных на статистических теориях прочности. Так, опираясь на асимптотическое выражение В. Вейбулла для плотности распределения наименьших значений прочности (прочности дефектов) в некотором объеме, В.В. Болотин [94] получил следующую формулу для математического ожидания прочности тела, имеющего заданный объем V :

$$\bar{R} = \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{g(R)}{V_0}\right] dR. \quad (4.1)$$

Здесь функция $g(R)$ определяет некоторую область, в которой функция напряжений $R(x, y, z)$, определенная во всей рассматриваемой области пространства, превышает минимальную прочность дефекта s_0 :

$$g(R) = \int_{R\varphi(x,y,z) > 0} \left[\frac{R(x, y, z) - \sigma_0}{\sigma_c} \right]^\alpha dV, \quad (4.2)$$

где $\sigma_0 = aR_c$ – минимальная прочность дефекта; $\sigma_c = (b\bar{R}_c) / \Gamma^{(1+1/\alpha)}$ – параметр, имеющий размерность напряжений; R_c – средний предел прочности эталонного образца; a, b, α – коэффициенты статистического представления, определяемые на основании испытания образцов различного объема, $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция.

Интеграл (4.2) представляет собой некоторый приведенный объем V^* . После ряда преобразований выражение для математического ожидания прочности тела принимает вид:

$$\bar{R} = b \bar{R}_c \left(\frac{V_0}{V^*} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (4.3)$$

где V_0 – эталонный объем испытываемого образца.

Величина $b \left(\frac{V_0}{V^*} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$ представляет собой, по сути, коэффициент структурно-

го ослабления. Применительно к горному массиву сложно трактовать понятие приведенного объема. Массив изначально напряжен, т.е., если положить прочность дефекта равной нулю, то в любой точке тела (массива) напряжения будут превосходить прочность дефекта, т.е. V^* будет стремиться к бесконечности. Следовательно, прочность всего тела, т.е. массива, будет стремиться к нулю. Этот результат абсурден, и, очевидно, не должен рассматриваться. Но если даже положить прочность дефектного элемента равной некоторой константе, отличной от нуля, область, где действующие напряжения превосходят минимальную прочностную характеристику, согласно известным решениям [205-208] будет сопоставима с размерами обнажения, но во много раз превышать величину эталонного образца. Отношение V_0/V^* опять таки будет близким к нулю.

Уравнения, полученные В.В. Болотиным, хорошо описывают масштабный эффект для тел ограниченных объемов и широко используются в машиностроении. Однако автоматическое перенесение их в геомеханику не дает желаемых результатов.

Большой вклад в развитие статистических теорий прочности внесли труды Л.Г. Седракяна [90], следуя которым породную среду можно рассматривать как конструкцию, состоящую из отдельных параллельно работающих элементов различной прочности. При разрушении одного из них нагрузка перераспределяется между уцелевшими элементами. Пусть на конструкцию действует нагрузка

$$P = nR_m. \quad (4.4)$$

Элементы с пределом прочности, меньшим R_m , разрушаются. Число этих элементов n_R . Вероятность встречи такого элемента в конструкции по классическому определению вероятности равна:

$$P(R) = \frac{n_R}{n}. \quad (4.5)$$

При известной функции распределения предела прочности элементов $F(R)$ вероятность того, что элемент имеет прочность, меньшую R_m , равна

$$P(R < R_m) = F(R_m). \quad (4.6)$$

Тогда

$$n_R = nF(R_m). \quad (4.7)$$

Число неразрушенных элементов составит $n(1 - F(R_m))$. Значение напряжений в уцелевших элементах после перераспределения нагрузки между ними возрастает и станет равным

$$nR_m / n(1 - F(R_m)). \quad (4.8)$$

Теперь разрушатся элементы, предел прочности которых хотя и больше R_m , но меньше последнего выражения. После разрушения этой группы элементов нагрузка передается на еще меньшее количество элементов. Процесс постепенного разрушения элементов прекратится, когда напряжения в уцелевших элементах станут меньше предела их прочности. Значение напряжений в уцелевшем элементе обозначим R . Число разрушенных элементов, соответствующее устойчивому состоянию конструкции, равно $nF(R)$. Число уцелевших элементов определится выражением $n(1 - F(R))$. С другой стороны

$$R = P / n(1 - F(R)) = nR_m / n(1 - F(R)). \quad (4.9)$$

Отсюда

$$R_m = R(1 - F(R)) \quad (4.10)$$

или

$$R_m = R \left[1 - \int_0^R P(R) dR \right], \quad (4.11)$$

где $P(R)$ – плотность распределения прочности элементов.

Соотношение (4.11) дает связь между средним напряжением R_m и местным напряжением R . Значение предела прочности конструкции равно максимальному значению R_m , определенному из (4.11). Таким образом, предел проч-

ности породного массива в варианте Л.Г. Седракияна определится выражением

$$R_m = \max\{R(1 - F(R))\}. \quad (4.12)$$

Конкретный вид выражения (4.12) зависит от выбора функции распределения прочности структурных элементов массива, в отношении которой могут выдвигаться различные гипотезы. Например, авторы [116], связывая масштабный эффект со структурой и видом напряженного состояния деформированного твердого тела, рассмотрели ряд статистических задач, в которых функция вероятности разрушения принимается по В. Вейбуллу [215]. Разрушение структурного элемента можно рассматривать как «отказ» системы, связанный с выходом из строя наиболее слабого звена. Распределение Вейбулла получено именно как распределение крайних значений в выборке и широко используется в статистических моделях, связанных с надежностью систем, например, как распределение времени безотказной работы системы.

Интегральная функция распределения Вейбулла имеет вид:

$$F(R) = \int_0^R P(R)dR = 1 - \exp(-(R/\sigma_0)^\xi), \quad (4.13)$$

где ξ, σ_0 – параметры распределения.

Тогда, средняя прочность системы (массива) в соответствии с выражением (4.12) равна:

$$R_m = \max\{R \cdot \exp(-(R/\sigma_0)^\xi)\}.$$

Минимизируя выражение в фигурных скобках, получим:

$$R_m = \sigma_0 \exp(-1/\xi) \xi^{-1/\xi}. \quad (4.14)$$

Выражение (4.14) определяет прочность пород в массиве с учетом случайно распределенных дефектов. Используя его, можно получить коэффициент структурного ослабления. Лабораторные образцы пород можно рассматривать как структурные элементы системы. Их средняя прочность в соответствии с

принятой гипотезой равна математическому ожиданию случайной величины, распределенной по закону Вейбулла.

Математическое ожидание и дисперсия для распределения Вейбулла выражаются через параметры распределения следующим образом [212]:

$$M(R) = \sigma_0 \Gamma(1/\xi + 1),$$

$$D = \sigma_0^2 \left\{ \Gamma(2/\xi + 1) - [\Gamma(1/\xi + 1)]^2 \right\},$$

где $\Gamma(t)$ – гамма-функция [85]

Тогда коэффициент структурного ослабления равен:

$$k_c = R_m / M(R) = \frac{\exp(-1/\xi) \xi^{-1/\xi}}{\Gamma(1/\xi + 1)}.$$

Полученное выражение определяет коэффициент структурного ослабления массива только в зависимости от параметра формы ξ распределения Вейбулла. С одной стороны, простота в математическом плане является достоинством полученной зависимости, но с другой – снижает эффективность величины k_c как характеристики объекта: степень снижения прочности системы по отношению к прочности ее элементов зависит только от параметра, физическая сущность которого не очевидна.

В работе А.Н. Шашенко [209] также используется подход Л.Г. Седракяна для определения средней прочности массива. Однако в отношении распределения прочности структурных элементов им выдвинута гипотеза о нормальном законе распределения.

Интегральная функция нормального распределения имеет вид [210]:

$$F(R) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^R \exp\left(- (R - a)^2 / 2\sigma^2\right) dR,$$

где a, σ – параметры распределения, соответственно равные математическому ожиданию и среднеквадратическому отклонению случайной величины.

Путем замены переменной эту функцию приводят к нормированному виду и выражают через табулированные в справочниках так называемые интегралы вероятностей [210]. Поскольку в данном случае идет речь о величине, принимающей только положительные значения, автор счел возможным использовать в качестве функции распределения интеграл:

$$\operatorname{erf} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{R-a}{\sqrt{2}\sigma}} \exp(-t^2) dt, \quad (4.15)$$

где t – параметр, определяемый выражением:

$$t = \frac{R-a}{\sqrt{2}\sigma}. \quad (4.16)$$

Продифференцировав выражение (4.11) с учетом (4.15) по t и приравняв его к нулю, получим уравнение

$$\sqrt{2}\pi(1 - \operatorname{erf} t^*) - \left(\sqrt{2}t^* + \frac{1}{\eta}\right) \exp(-t^{*2}) = 0, \quad (4.17)$$

где t^* – решение уравнения (4.17), η – коэффициент вариации прочности, равный σ/a .

Интеграл вероятностей (4.15) табулирован в [211]. Решая уравнение (4.17) методом приближений, получим зависимость $t^*=f(\eta)$. С ошибкой, не превышающей 8 %, эта кривая может быть представлена в аналитическом виде

$$t^* = -0,5\eta^{-0,5} \exp(-0,25\eta). \quad (4.18)$$

При $t = t^*$ заменим в выражении (4.16) R на R_m и получим

$$t^* = \frac{R_m - a}{\sigma\sqrt{2}}. \quad (4.19)$$

Приравнивая правые части уравнений (4.18) и (4.19) получим выражение для определения средней прочности массива на одноосное сжатие

$$R_m = \left[1 - \sqrt{0,5\eta} \exp(-0,25\eta)\right]a. \quad (4.20)$$

Полученное выражение для средней прочности массива использовалось для определения коэффициента структурного ослабления.

Поскольку математическое ожидание нормально распределенной величины равно параметру a , формула для определения коэффициента структурного ослабления, в случае принятия гипотезы о нормальном распределении прочности структурных элементов, имеет вид:

$$k_c = \frac{R_M}{a} = 1 - \sqrt{0,5\eta} \exp(-0,25\eta). \quad (4.21)$$

Полученная зависимость связывает коэффициент структурного ослабления с реальной характеристикой – вариацией значений прочности относительно своего среднего. Для идеально однородной среды $\eta=0$ и коэффициент структурного ослабления равен единице. По мере увеличения вариации данных, то есть с ростом неоднородности среды, величина k_c уменьшается.

Исследуем подробнее поведение функции (4.21). Предел функции при $\eta \rightarrow \infty$, найденный по правилу Лопиталя, равен единице. Это значит, что в области своего определения функция (4.21) должна иметь экстремум. Действительно, исследование первой производной показывает, что при $\eta=2$ имеет место минимум, значение которого составляет 0,39. То есть, в соответствии с формулой (4.21), коэффициент структурного ослабления не может быть ниже значения $k_c=0,39$ даже при сколь угодно больших значениях относительной вариации прочности. Очевидно, что этот факт не соответствует реальности. Выше упоминалось, что для углевмещающих пород величина коэффициента структурного ослабления может принимать значения 0,2...0,6. Значения коэффициента структурного ослабления, получаемые из выражения (4.21), завышены, поскольку автором искусственно исключена из рассмотрения вероятность появления отрицательных величин путем использования функции Лапласа, ограниченной слева, в то время как график плотности распределения вероятностей в соответствии с законом Гаусса простирается и в отрицательную область, что должно быть учтено при интегрировании. Эта ошибка тем больше, чем выше

неоднородность рассматриваемого объекта, т.е. чем выше значение дисперсии случайной выборки.

Завершая обзор работ, посвященных количественной оценке масштабного эффекта в горных породах, следует отметить, что на настоящий момент по сути дела нет общепринятой методики определения коэффициента структурного ослабления, в основе которой лежала бы адекватная физическая модель, учитывающая основные ослабляющие микро- и макродефекты, структуру и тектоническую нарушенность породных массивов, а также особенности их нагружения.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА СТРУКТУРНОГО ОСЛАБЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ВЕРОЯТНОСТНО- СТАТИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

5.1. Вероятностно-статистическая модель прочности породного массива

Следуя статистическим теориям прочности [90, 170], породный массив можно представить как некоторый агрегат, состоящий из структурных элементов. В силу неоднородности породной среды прочность структурных элементов является случайной величиной и подчиняется тому или иному закону распределения вероятностей с

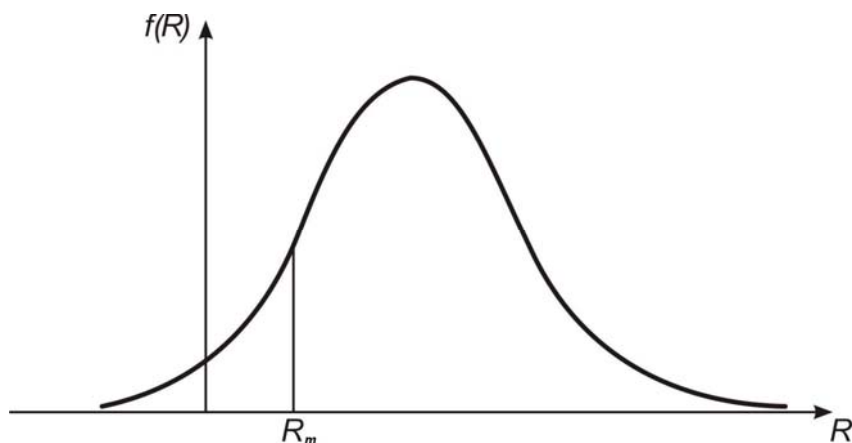


Рис.5.1. Гипотетическое распределение прочности структурных элементов породного массива

плотностью распределения $f(R)$ (рис. 5.1).

Отличие прочности массива (агрегата) R_m (рис. 5.1) от математического ожидания прочности структурных элементов $M(R)$ оценивается коэффициентом

структурного ослабления, равным

$$k_c = \frac{R_m}{M(R)}. \quad (5.1)$$

Прочность массива должна оцениваться такой величиной R_m , чтобы прочность его структурных элементов, в т.ч. лабораторных образцов, с заданной надежностью были не меньше этого значения. Вероятность такого события определяется выражением

$$p(R \geq R_m) = 1 - F(R_m), \quad (5.2)$$

где $F(R) = \int_{-\infty}^R f(x)dx$ - интегральная функция распределения величины R .

Разрешим это неравенство относительно величины R_m :

$$R_m = \arg F(1-P), \quad (5.3)$$

где $\arg F(1-P)$ – аргумент функции $F(R)$ при ее значении равном $1-P$.

Тогда коэффициент структурного ослабления определяется выражением:

$$k_c = \frac{\arg F(1-P)}{M(R)}, \quad (5.4)$$

конкретный вид которого зависит от выбора функции распределения вероятностей $F(R)$ случайной величины R – прочности структурных элементов.

Как правило, выбор закона распределения осуществляют исходя из физической сути случайной величины и анализа статистической информации. Чаще всего, особенно в случае, когда объем такой информации невелик, исследователи в качестве вероятностной модели исследуемого количественного признака выбирают нормальный закон распределения. При этом руководствуются центральной предельной теоремой и законом больших чисел, из которых следует вывод: если варьирование случайной величины происходит под воздействием большого числа независимых факторов, причем влияние каждого из них незначительно по сравнению с совокупным воздействием других факторов, то распределение случайной величины подчиняется нормальному закону. Поскольку условия, определяющие нормальное распределение, встречаются часто, последнее получило широкое распространение. Достоинством нормального распределения является и то, что его параметры имеют ясный физический смысл.

Действительно, плотность распределения случайной величины, подчиненной закону Гаусса, имеет вид:

$$f(R) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(R-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad (5.5)$$

где a – математическое ожидание величины R ; σ – ее среднеквадратическое отклонение.

Получим величину коэффициента структурного ослабления в предположении, что прочность структурных элементов массива распределена по нормальному закону. В этом случае неравенство (5.2) принимает вид

$$P(R \geq R_m) = 1 - F_0\left(\frac{R_m - a}{\sigma}\right), \quad (5.6)$$

где

$$F_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (5.7)$$

нормированная функция нормального распределения.

Разрешим уравнение (5.6) относительно величины R_m :

$$\begin{aligned} F_0\left(\frac{R_m - a}{\sigma}\right) &= 1 - P, \\ \frac{R_m - a}{\sigma} &= \arg F_0(1 - P), \end{aligned}$$

где $t = \arg F_0(1 - P)$ – аргумент функции (5.7) при ее значении $F_0(t)$, равном $1 - P$.

Далее получим:

$$R_m = \sigma \cdot \arg F_0(1 - P) + a.$$

Учитывая, что $M(R) = a$, разделив обе части полученного выражения на величину a , получим:

$$k_c = \frac{\sigma}{a} \cdot \arg F_0(1 - P) + 1.$$

Здесь $\sigma/a = \eta$ – относительная вариация прочности структурных элементов. Окончательно выражение для коэффициента структурного ослабления принимает вид:

$$k_c = \eta \cdot \arg F_0(1 - P) + 1. \quad (5.8)$$

Итак, мы получили коэффициент структурного ослабления как величину, зависящую, во-первых, от относительной вариации η , которая по сути характеризует степень неоднородности среды; во-вторых – от вероятности P , которая характеризует собой уровень значимости объекта.

Определим, например, расчетное значение прочности на одноосное сжатие алевролита, если по данным испытаний среднее значение прочности лабораторных образцов \bar{R}_c составляет 40 МПа, вариация значений составляет 30 % ($\eta=0,3$)

Из равенства (5.1) следует, что:

$$R_{расч} = R_m = \bar{R}_c \cdot k_c.$$

Зададимся вероятностью $P=0,95$. Определим значение аргумента t нормированной нормальной функции $F_0(t)$ при ее значении, равном $1 - 0,95 = 0,05$. По таблице 1 Приложения А определяем, что значению интегральной функции

$F_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, равном $F_0(t) = 0,05$, соответствует значение аргумента $t = -1,64$, то есть $\arg F_0(0,05) = -1,64$. Тогда коэффициент структурного ослабления равен:

$$k_c = 0,3 \cdot (-1,64) + 1 = 0,508.$$

Таким образом, расчетное значение прочности равно $R_{расч} = 0,508 \cdot 40 = 21$ МПа.

Анализируя график зависимости (5.8) (рис.5.2), заметим, что при $\eta > 0,4$, коэффициент структурного ослабления может принимать отрицательные значения, что, естественно, противоречит физической сути данной величины. Очевидно, что это недостаток вероятностной модели. Действительно, интегрирование плотности нормального распределения автоматически предполагает наличие отрицательных значений величины R в пределах $-\infty < R < 0$. Именно ко-

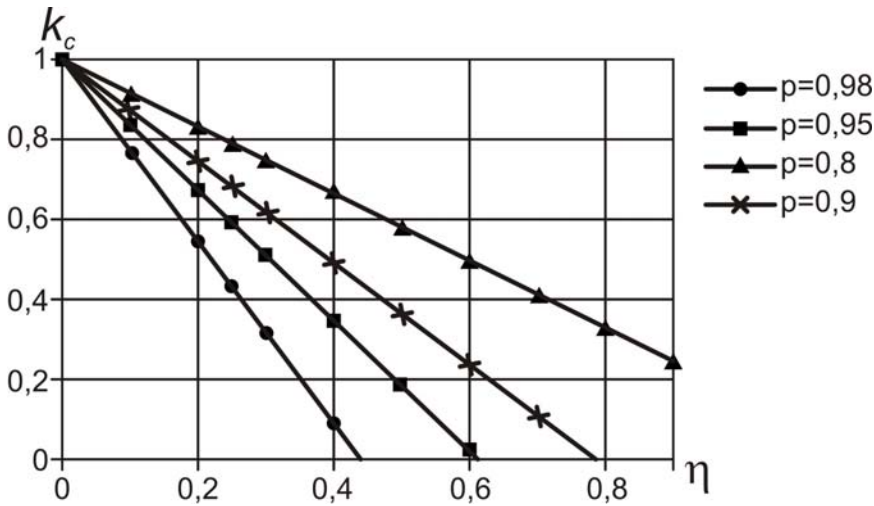


Рис. 5.2. Зависимость коэффициента структурного ослабления от вариации прочности структурных элементов в предположении нормального закона распределения их прочности

личественная оценка в виде коэффициента структурного ослабления показывает недостаток нормального распределения: предел прочности на одноосное сжатие не может иметь отрицательных значений. Исходная вероятностная модель, привлекающая своей простотой, неадекватна

рассматриваемому объекту и требует замены более совершенной. Такой более универсальной вероятностной моделью является нормальный усеченный закон распределения [97].

Плотность распределения случайной величины x для усеченного нормального закона имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < x_1; \\ A \left[(2\pi)^{\frac{1}{2}} \sigma \right]^{-1} \exp\left[-(x-x_0)^2 (2\sigma^2)^{-1}\right], & x_1 < x < x_2; \\ 0, & x_2 < x < \infty. \end{cases} \quad (5.9)$$

где x_0, σ^2 – соответственно первый начальный и второй центральный моменты статистического распределения.

Параметр A в уравнении (5.9) определяется из условия

$$A \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = 1, \quad (5.10)$$

где $u = \frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}$.

Среднее значение прочности и дисперсия находятся из выражений

$$M(x) = x_0 + B\sigma, \quad (5.11)$$

$$D = \sigma^2 \left\{ 1 - B^2 - A \left[\begin{array}{l} (x_2 - x_0)\sigma^{-1}(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-(x_1 - x_0)^2 / 2\sigma^2\right] - \\ - (x_1 - x_0)\sigma^{-1}(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-(x_1 - x_0)^2 / 2\sigma^2\right] \end{array} \right] \right\}. \quad (5.12)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{(x_i - x_0)/\sigma} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du &= \Phi[(x_1 - x_0)/\sigma], \\ \exp\left[-(x_i - x_0)^2 (2\sigma^2)^{-1}\right] &= (2\pi)^{\frac{1}{2}} f[(x_i - x_0)\sigma^{-1}] \end{aligned} \quad (5.13)$$

Тогда величины A , B , D определяются выражениями

$$\begin{aligned} A &= 1 / \left[\Phi\left(\frac{x_2 - x_0}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - x_0}{\sigma}\right) \right], \\ B &= f\left(\frac{x_1 - x_0}{\sigma}\right) - f\left(\frac{x_2 - x_0}{\sigma}\right) / \left[\Phi\left(\frac{x_2 - x_0}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - x_0}{\sigma}\right) \right], \\ D &= \sigma^2 \left\{ 1 - B^2 - A \left[\frac{x_1 - x_0}{\sigma} f\left(\frac{x_2 - x_0}{\sigma}\right) - \left(\frac{x_2 - x_0}{\sigma}\right) f\left(\frac{x_1 - x_0}{\sigma}\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Решим задачу об оценке прочности породного массива для усеченного нормального закона распределения. Прочность массива, как и в предыдущем случае, оценивается величиной x с такой надежностью, чтобы при расчетах она с вероятностью p не принимала значений меньше x_m . Вероятность того, что случайная величина x не окажется ниже значения x_m , равна:

$$p(x_m < x < x_2) = 1 - A(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{(x_1 - x_0)/\sigma}^{(x_m - x_0)/\sigma} \exp(-u^2/2) du.$$

С учетом обозначений (5.13) и (5.14) получим

$$p = 1 - \left[\Phi\left(\frac{x_m - x_0}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - x_0}{\sigma}\right) \right] / \left[\Phi\left(\frac{x_2 - x_0}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - x_0}{\sigma}\right) \right].$$

Решим последнее равенство относительно x_m – основной характеристики прочности массива:

$$x_m = x_0 + \sigma \arg \Phi \left[(1 - p)\Phi\left(\frac{x_2 - x_0}{\sigma}\right) + p\Phi\left(\frac{x_1 - x_0}{\sigma}\right) \right]. \quad (5.15)$$

Полученная формула прочности породного массива должна определиться относительно статистических характеристик для усеченного нормального закона распределения, т.е. в формуле (5.15) вместо x_0 необходимо взять величину $M(x)$ из (5.11), а вместо σ соответственно \sqrt{D} из (5.14). Получим

$$x_m = M(x) + \sqrt{D} \arg \Phi \left[(1 - p)\Phi\left(\frac{x_2 - x_0}{\sqrt{D}}\right) + p\Phi\left(\frac{x_1 - x_0}{\sqrt{D}}\right) \right].$$

Поделив все члены полученного выражения на математическое ожидание $M(x)$, найдем формулу для определения коэффициента структурного ослабления:

$$k_c = 1 + \eta \arg \Phi \left[(1 - p)\Phi\left(\frac{x_2 - x_0}{\sqrt{D}}\right) + p\Phi\left(\frac{x_1 - x_0}{\sqrt{D}}\right) \right]. \quad (5.16)$$

Таким образом, получены формулы, позволяющие определить расчетную прочность породного массива и коэффициент структурного ослабления, показывающий, насколько необходимо уменьшить прочность горной породы, найденную при испытании выборки образцов как математическое ожидание усеченного нормального закона, чтобы иметь расчетное значение прочности. Уровень надежности полученных оценок определяется заданием вероятности p , которая зависит от технической или производственной значимости проектируемого объекта. На рис. 5.3 приведены графики, показывающие, как зависит ошибка, возникающая при использовании нормального закона распределения вместо усеченного нормального закона, более адекватно описывающего реаль-

ный породный массив. Из графиков следует, что в зависимости от уровня надежности, при коэффициенте вариации, не превышающем 0,2-0,3, ошибка составляет 10-13% и в этих условиях можно применять нормальный закон распределения и вытекающие из него более простые зависимости. При более же высоком уровне неоднородности породного массива ошибка становится существенной и следует использовать зависимости (5.15), (5.16), полученные на основе усеченного нормального закона распределения.

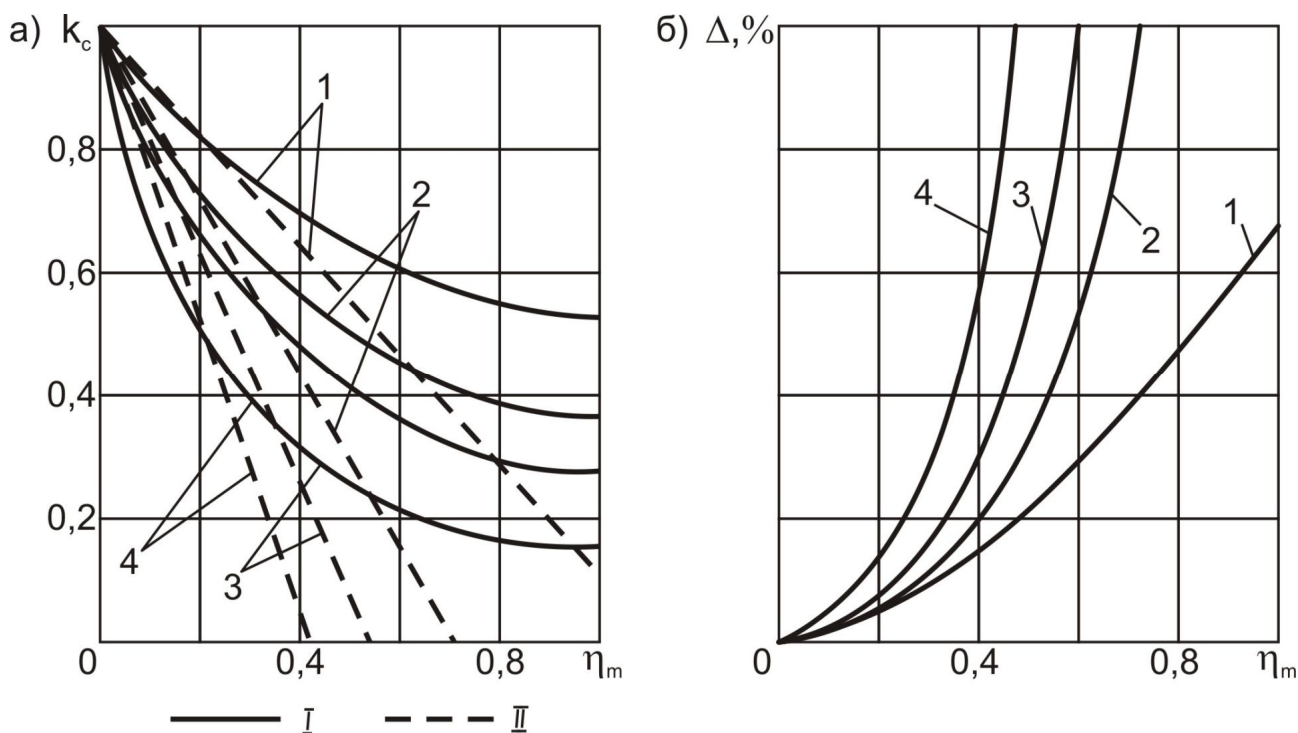


Рис. 5.3. Зависимость коэффициента структурного ослабления (а) и относительной ошибки вычисления (б) от относительной вариации прочности и уровня надежности: I – усеченный нормальный закон распределения; II – нормальный закон распределения; 1,2,3,4 – $p=0,8; 0,9; 0,95; 0,99$ соответственно

Практическое использование усеченного нормального распределения связано только с одним неудобством: для определения параметров теоретического распределения кроме средней выборочной и выборочной дисперсии (именно эти величины приводят исследователи как результат статистической обработки стандартных испытаний образцов) необходимо располагать крайними выбо-

рочными значениями x_1 и x_2 , которые, будучи полученными только из одной серии испытаний, не являются несмещенными оценками своих теоретических аналогов.

Нормальный закон распределения удовлетворительно описывает только те величины, вариация которых не превышает 33 % (это вытекает из правила «трех сигм»). Обычно для результатов лабораторного опробования образцов большой разброс данных не характерен. Вариация прочности образцов при этом не превосходит 30-35%, а статистическое распределение, построенное по выборке, близко к нормальному.

Так, большой объем испытаний образцов для углевмещающих пород Донбасса был выполнен в лабораториях Национального горного университета. Гистограммы относительных частот значений прочности образцов пород приведены в Приложении Б.

Для статистических данных были определены эмпирические начальные m_k и центральные μ_k моменты распределения:

$$m_k = \frac{1}{n_B} \sum_{i=1}^n R_i^k, \quad (5.17)$$

$$\mu_k = \frac{1}{n_B} \sum_{i=1}^n (R_i - m_1)^k, \quad (5.18)$$

где n_B – объем выборки, k – порядок момента, R_i – значения прочности образцов.

С центральными моментами второго, третьего и четвертого порядков связаны нормированные показатели асимметрии β_1 и эксцесса β_2 :

$$\beta_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}; \quad \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}. \quad (5.19)$$

Обобщенные результаты обработки статистических данных в виде квадрата показателя асимметрии β_1 и показателя островершинности β_2 , сведены в таблицу 5.1.

Таблица 5.1

Параметры статистического распределения

Марки углей	Вмещающие породы	Параметры распределения	
		β_1^2	β_2
Д-ДГ	Аргиллит	0,261	3,099
	Алевролит	0,336	2,970
	Песчаник	0,213	2,421
Г-ГЖ	Аргиллит	0,637	2,623
	Алевролит	0,545	2,875
	Песчаник	0,470	3,123
Ж, КЖ, ОС	Аргиллит	1,043	5,029
	Алевролит	0,336	2,970
	Песчаник	0,514	3,003

В [212] подбор распределений по экспериментальным данным рекомендуется осуществлять с помощью графика Пирсона, на котором в осях координат β_1^2 , β_2 построены кривые, соответствующие различным теоретическим распределениям. В работе [181] этот график дополнен точками и кривыми, представляющими распределения: параболическое, логистическое, Берра, Максвелла, Релея, Гумбеля, Бернштейна и Фреше. Распределения, имеющие только два параметра (положения и масштаба), изображаются на графике точкой. К ним относятся распределения: равномерное, параболическое, нормальное, Максвелла, Релея, логистическое, минимальных и максимальных значений Гумбеля.

Кривые с тремя параметрами (третий – параметр формы) изображены линиями $\beta_1^2 = \varphi(\beta_2)$. К ним относятся распределения: минимальных и максимальных значений Вейбулла, гамма, Бернштейна, логарифмически нормальное (Гальтона), Берра, минимальных и максимальных значений Фреше. Бета-распределение, имеющее два параметра формы, занимает на этом графике определенную область.

Точки с координатами (β_1^2, β_2) , полученные как результат обработки испытаний образцов, нанесены на график Пирсона (рис. 5.4).

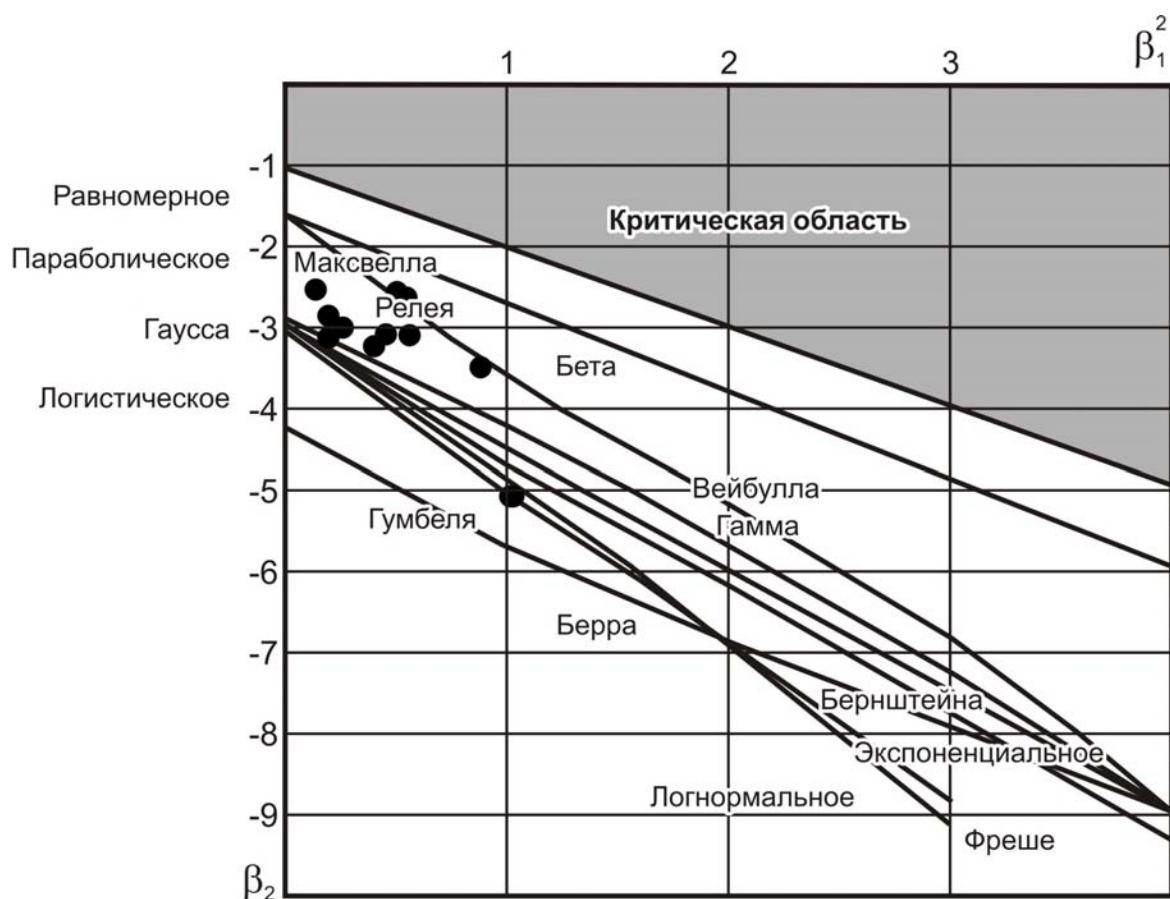


Рис. 5.4. График Пирсона для различных распределений случайных величин

Видно, что большинство эмпирических точек группируются в некоторой области, близко расположенной к точке, соответствующей нормальному распределению (для нормального распределения $\beta_1^2 = 0$, $\beta_2 = 3$). На этом основании можно выдвинуть гипотезу о распределении прочности образцов на одноосное сжатие по нормальному закону.

При этом, очевидно, что кривая Гаусса не вполне отвечает физической природе тех величин, которые по своей сути не могут быть отрицательными. В [213] отмечается, что теоретически хорошо обоснованный нормальный закон распределения является скорее исключением, чем правилом, которому следуют природные явления.

Исследуя прочность структурных элементов породного массива, реальными «представителями» которых являются образцы, изготовленные из отобранных проб, следует обратить внимание на следующие обстоятельства.

Действительно ли выборка, полученная как результат опробования образцов горной породы, отражает природу генеральной совокупности? Выполняется ли основное требование, предъявляемое к выборке – равенство шансов для всех элементов генеральной совокупности попасть в выборку?

Известно, что горной породе присуща естественная трещиноватость. При изготовлении образцов те из них, которые пересечены трещиной, разрушаются до начала испытаний. Таким образом, структурные элементы, содержащие макродефекты, в обычных испытаниях не участвуют, но как реально существующие должны быть включены в статистику опробования. Очевидно, наличие нарушенных элементов, то есть элементов, прочность которых значительно ниже прочности ненарушенных элементов, изменит все характеристики выборки, а, следовательно, все моменты распределения, для которых характеристики выборки являются точечными оценками. Соответственно изменится и закон распределения прочности структурных элементов. Исследуем тенденцию этих изменений.

5.2. Исследование влияния макродефектов на распределение прочности структурных элементов массива

Роль естественных трещин в изменении механической характеристики массива горных пород являлась предметом многолетних исследований коллективов ученых разных стран. В СССР широкие работы в этом направлении проводились в Донецком политехническом институте – Г.Н. Кузнецовым и в других организациях [214, 215].

М.М.Протодьяконов, указывая на различие между прочностью лабораторных образцов и прочностью массива, в качестве основной причины рассматривал именно трещиноватость пород и углей [216].

Г.Л. Фисенко [176] отмечает, что при изучении механических свойств массивов горных пород как среды, в которой проводятся горные выработки, т.е. создаются полости, необходимо различать поверхности ослабления:

а) большой протяженности, по которым происходит скольжение одной части деформируемого массива относительно другой, являющиеся поверхностями разрыва сплошности массива;

б) небольшой протяженности, расположенные ступенчато относительно друг друга и образующие системы определенным образом ориентированных трещин.

При деформировании больших областей массива (линейные размеры которых на порядок больше линейных размеров блоков, ограниченных смежными трещинами) структурные ослабления небольшой протяженности не являются поверхностями скольжения и разрыва непрерывности деформаций и смещений, а являются лишь элементами структуры массивов горных пород, снижающими прочность (или сопротивление сдвигу) массива горных пород.

В [217] отмечается, что определение характеристик сопротивления сдвигу по поверхности ослабления первого типа не представляет особых трудностей: для определения сцепления проводятся натурные испытания призм больших размеров с наиболее простой схемой приложения сдвигающих сил. Большой объем таких экспериментов был выполнен во ВНИМИ [218], что позволило сделать общие выводы о величинах сцепления и углах внутреннего трения по контактам слоев осадочных пород с выраженными зеркалами скольжения. Для дислоцированных пород сцепление по контактам составляет $1 \dots 3 \text{ т/м}^2$, для слабодислоцированных пород – 18 т/м^2 , по контактам слоев метаморфизованных пород, по тектоническим нарушениям и неровным тектоническим трещинам – $5 \dots 10 \text{ т/м}^2$. Углы внутреннего трения по контактам слоев, в зависимости от степени шероховатости и неровности, изменяются от 9° до 31° .

Определение сопротивления сдвигу в массиве, ослабленном ступенчато расположенными системами трещин, является более сложной задачей, так как на его величину оказывает влияние множество факторов: неоднородность отдельных блоков по прочности, размер испытываемых призм, ориентировка трещин к направлению наибольшего напряжения. Отличие сцепления такой структурной модели массива от сцепления монолитной породы оценивается ко-

эффицентом структурного ослабления k_c , который может быть определен из выражения

$$k_c = \frac{1}{1 + a \ln(H/l)}. \quad (5.20)$$

Здесь H – высота призмы, l – размер блока.

В табл. 5.2 приведены значения коэффициентов структурного ослабления для сопротивления сдвигу (по испытаниям ВНИМИ) для прочных и средней прочности пород при их интенсивной трещиноватости. При проведении одиночных выработок в слаботрещиноватых породах, например, в мощных слоях известняков, песчаников или алевролитов, коэффициент структурного ослабления для сцепления значительно больше.

Таблица 5.2

Значения коэффициента структурного ослабления трещиноватых пород при изменении предела прочности на сжатие (МПа)

10	10...20	20...35	35...75	75...200	200...350	350...700	>700
0,68	0,63	0,59	0,32	0,26	0,126	0,107	0,068
0,64	0,43	0,44	0,29	0,24	0,126	0,07	0,05
0,62	0,42	0,42	0,26	0,21	0,083	0,060	0,036
0,58	0,32	0,34	0,22	0,15	0,070	0,052	0,030
0,50	0,28	0,34	0,18	0,11	0,045	0,050	0,022
0,48	0,27	0,30	0,17	0,085	0,036	0,045	0,019
0,45	0,27	0,26	0,15	0,077	0,030	0,042	0,013
0,40	0,26	0,23	0,13		0,038	0,030	0,013
0,36	0,23	0,15			0,029	0,019	

В [218] приводится классификация ВНИМИ, в которой суммированы немногочисленные данные о прочности на одноосное сжатие массивов, ослабленных одной и более системами трещин. Отличие прочности таких структурно

нарушенных массивов от прочности монолитной породы также оценивается коэффициентом структурного ослабления (табл. 5.3).

Таблица 5.3

Коэффициент структурного ослабления пород
в зависимости от мощности слоев

Породы	Характерные классификационные признаки	Коэффициент ослабления
Неослабленные	А) вполне монолитные слои мощностью > 1 м Б) слои мощностью более 1 м, имеющие не более одной системы трещин, расположенных друг от друга на расстоянии, большем радиуса выработки	1,0
Умеренно ослабленные	А) слои мощностью от 0,5 до 1,0 м Б) имеется не более двух систем трещин, отстоящих друг от друга на расстоянии не менее 0,5 радиуса выработки	0,7
Существенно ослабленные	А) слои мощностью 0,5 м Б) имеется три и более систем трещин с расстоянием между трещинами менее 0,5 радиуса выработки	0,3

В СНиП [219] приведены значения коэффициента структурного ослабления в зависимости от расстояния между трещинами (табл. 5.4).

Таблица 5.4

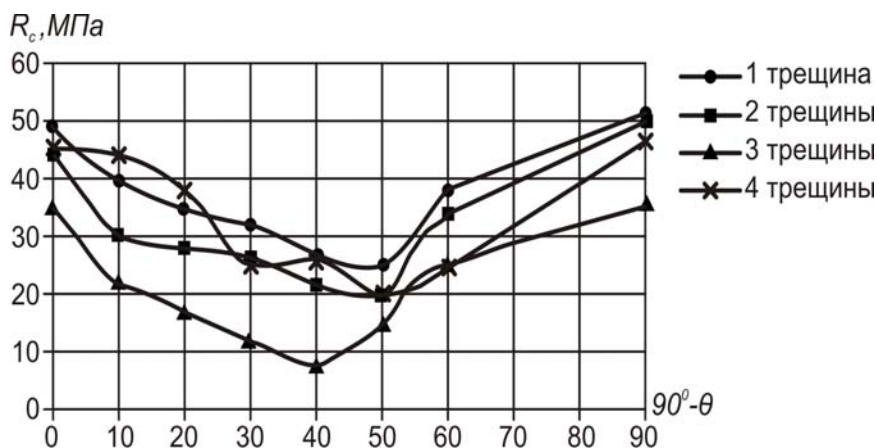
Коэффициент структурного ослабления
в зависимости от расстояния между трещинами [219]

Среднее расстояние между поверхностями ослабления пород, м	Коэффициент k_c
Более 1,5	0,9
От 1,5 до 1	0,8
От 1 до 0,5	0,6
От 0,5 до 0,1	0,4
Менее 0,1	0,2

Большинство исследователей отмечают ослабляющее влияние на прочность массива систем трещин, особенно косесекущих, однако количественно это влияние почти не описано. Это связано со сложностью отбора проб и получения из нее образцов с заданным падением трещин.

В лаборатории механики горных пород НГУ испытывались модели из песчано-цементной смеси, имитирующие структурные элементы твердого тела, ослабленного системой трещин. Плоскости ослабления моделировались слоями вощенной бумаги по аналогии с опытами М. Hayashi [220] по сжатию гипсовых моделей с различным числом прерывистых и сплошных трещин. Испытания проводились на прессе ПГ-50. Было испытано 20 партий образцов кубической формы с длиной ребра 25 см, по 10 образцов в каждой партии, содержащих 1...4 плоскости ослабления, расположенные под углом $\theta = 0^{\circ}, 10^{\circ}, 30^{\circ}, 45^{\circ}, 60^{\circ}, 90^{\circ}$ к оси нагружения.

Результаты испытаний указывают на уменьшение прочности образцов с увеличением числа трещин. Наиболее четко эта тенденция прослеживается при изменении числа трещин от нуля (монолитный образец) до трех. Для четырех трещин указанная закономерность нарушается. Во всех случаях, за исключением положения плоскости ослабления под углом 60° , наблюдалось некоторое



вышение разрушающей нагрузки по сравнению с вариантами двух и трех плоскостей.

В отношении влияния на прочность образца угла наклона трещины к оси нагружения следует вполне

Рис. 5.5. Изменение прочности образцов из цементно-песчаной смеси в зависимости от числа моделируемых трещин

определенный вывод: плоскости ослабления, расположенные под углом $\theta = 30^0, 45^0, 60^0$ к оси нагружения, снижают прочность образца в 2-5 раз в зависимости от числа моделируемых плоскостей (рис. 5.5).

Исследуем теперь, как изменятся характеристики выборки из генеральной совокупности, если учесть, что среди структурных элементов есть такие, прочность которых намного ниже прочности тех образцов, которые испытывались в лабораторных условиях.

5.2.1. Учет наличия элементов, содержащих макродефекты, при определении характеристик выборки

Для решения поставленной задачи рассмотрим неоднородный породный массив, содержащий несколько систем трещин (рис. 5.6). Пусть в этом массиве в произвольном направлении проходится горная выработка. Выделим вдоль продольной ее оси блок длиной L_1 , шириной L_2 и высотой L_3 . Блок имеет такие размеры, что все системы трещин, независимо от их ориентировки по отношению к оси X (L_i), пересекут его стороны.

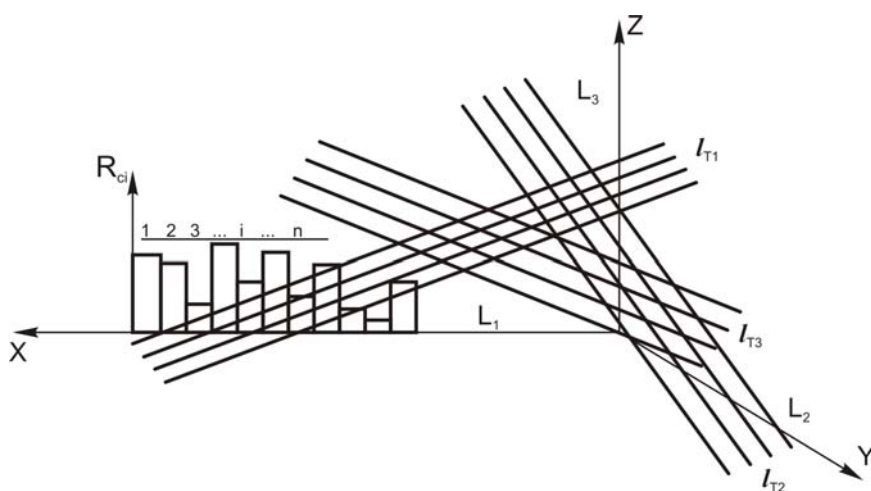


Рис. 5.6. Расчетная схема к решению задачи о структурно-механическом ослаблении породного массива

пересекут его стороны. При этом среднее расстояние между трещинами, подсчитанное по длинам L_i , равно l_{mi} , а соответствующая интенсивность трещиноватости составит $q_{mi} = l_{mi}^{-1}$.

При идеальной обработке из этого

блока могут быть изготовлено n образцов с линейным размером l_0 . ($l_0 \ll L_i$). Результаты испытаний этих образцов на сжатие представляли бы выборку из генеральной совокупности значений прочности структурных элементов. Однако,

испытаниям подвергаются не все образцы, а лишь та часть, количеством n_g , которая не содержит макродефекты и реально может быть изготовлена. Таким образом, будет получена совокупность значений прочности R_i ($i=1..n_g$), для которых среднее значение (начальный момент первого порядка) равно:

$$m_1 = \frac{1}{n_g} \sum_{i=1}^{n_g} R_i. \quad (5.21)$$

Однако, в генеральной совокупности в соответствии с принятой гипотезой содержатся структурные элементы, прочность которых значительно меньше прочности ненарушенных образцов и оценивается некоторой функцией снижения прочности $f(\alpha)$, зависящей от угла наклона трещины α к горизонтальной плоскости ($\alpha = 90^\circ - \theta$). Их присутствие должно быть отражено и в выборке из генеральной совокупности. Таким образом, к исходной совокупности из n_g образцов должны быть добавлены n_m нарушенных образцов, прочность которых равна

$$R_{i_m} = f(\alpha)R_i \quad (i=1..n_m). \quad (5.22)$$

Статистическая обработка должна выполняться для нового, «исправленного», вариационного ряда из $n=n_m+n_g$ данных.

Следует отметить, что в поставленной задаче вместо исследуемого предела прочности на одноосное сжатие может фигурировать любая другая физико-механическая характеристика породного массива: плотность, модуль Юнга, коэффициент Пуассона, скорость распределения упругих волн и др. Суть и ход рассуждений от этого принципиально не меняются.

Определим параметры статистического распределения для такого ряда. Среднее значение прочности (начальный момент первого порядка) равно:

$$m_1' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i = \frac{\sum_{i=1}^{n_g} R_i + \sum_{i=1}^{n_m} R_{i_m}}{n_g + n_m}. \quad (5.23)$$

Обозначим

$$n_g/n_m = \nu, \quad (5.24)$$

тогда

$$\frac{1}{n_g + n_m} = \frac{\nu}{n_g(\nu + 1)},$$

а выражение (5.23) с учетом (5.24) примет вид

$$\begin{aligned} m_1' &= \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n_g} R_i}{n_g} + \frac{\sum_{i=1}^{n_m} R_{i,m}}{n_g} \right) = \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n_g} R_i}{n_g} + \frac{\sum_{i=1}^{n_m} R_i f(\alpha)}{n_g} \right) = \frac{\nu}{1+\nu} \left(m_1 + \frac{1}{\nu} f(\alpha) m_1 \right) = \\ &= m_1 \frac{\nu + f(\alpha)}{\nu + 1}. \end{aligned}$$

Из (5.24) найдем, что величина ν может быть представлена в виде:

$$\nu = l_m / l_0, \tag{5.25}$$

и тогда она может быть легко определена экспериментально. Здесь l_m и l_0 – среднее расстояние между трещинами и характерный размер образца соответственно.

Следует отметить, что величина ν по своей физической природе не может быть меньше единицы. При расстоянии между трещинами меньше l_0 из такой среды невозможно изготовить образцы стандартных размеров. Кроме того, после определенного уровня нарушенности среда принимает свойства скорее сыпучей, чем сплошной среды. Такой среде соответствует дисперсия значений прочности, близкая к нулю, и коэффициент структурного ослабления, близкий к единице. Таким образом, исследуемая вероятностно-статистическая модель породной среды со случайно распределенными дефектами в виде трещин имеет ограничения: она отражает свойства породного массива, структура которого занимает промежуточное положение между сыпучей средой (модель однородного на микроскопическом уровне тела) и сплошной нетрещиноватой средой (модель сплошного неоднородного на субмакроскопическом уровне тела). Об этом следует помнить, анализируя полученные результаты.

Начальные моменты первого порядка для исходного и «исправленного» (дополненного нарушенными элементами) статистического ряда связаны соотношением:

$$m'_1 = K_1 m_1, \quad (5.26)$$

где

$$K_1 = \frac{\nu + f(\alpha)}{\nu + 1} = \frac{\frac{l_m}{l_0} + f(\alpha)}{\frac{l_m}{l_0} + 1}. \quad (5.27)$$

Важнейшим параметром статистического распределения является дисперсия, характеризующая разброс данных относительно среднего. Дисперсия представляет собой центральный момент второго порядка, который, как известно, связан с начальными моментами первого и второго порядков:

$$D' = \mu'_2 = m'_2 - (m'_1)^2. \quad (5.28)$$

Момент первого порядка определяется формулой (5.26). Найдем момент второго порядка для «исправленного» ряда:

$$\begin{aligned} m'_2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_g} R_i^2 + \sum_{i=1}^{n_m} (R_i f(\alpha))^2}{n_g + n_m} = \\ &= \frac{\nu}{1 + \nu} \left(m_2 + \frac{1}{\nu} f^2(\alpha) m_2 \right) = K_2 m_2 \end{aligned} \quad (5.29)$$

где

$$K_2 = \frac{\nu + f^2(\alpha)}{\nu + 1} = \frac{\frac{l_m}{l_0} + f^2(\alpha)}{\frac{l_m}{l_0} + 1}.$$

Можно показать, что все начальные моменты k -го порядка «исправленного» и исходного ряда связаны соотношением:

$$m_k' = K_k m_k, \quad (5.30)$$

где

$$K_k = \frac{\nu + f^k(\alpha)}{\nu + 1} = \frac{\frac{l_m}{l_0} + f^k(\alpha)}{\frac{l_m}{l_0} + 1}. \quad (5.31)$$

В частном случае, если полагать прочность нарушенных элементов равной нулю, коэффициент влияния трещин одинаков для всех начальных моментов:

$$K_1 = K_2 = K_3 = \dots K_k = K = \frac{\frac{l_m}{l_0}}{\frac{l_m}{l_0} + 1} = \frac{l_m}{l_m + l_0}. \quad (5.32)$$

Величина K изменяется в пределах от 0,5 ($l_m = l_0$ – сильно трещиноватая среда) до 1,0 ($l_m \rightarrow \infty$ – нетрещиноватая среда)

Таким образом, дисперсия «исправленного» вариационного ряда равна:

$$D' = \mu_2' = K_2 m_2 - K_1^2 m_1^2. \quad (5.33)$$

В физическом отношении дисперсия характеризует степень неоднородности среды. Поэтому влияние на ее величину структурных неоднородностей представляет особый интерес.

5.2.2. Исследование влияния структурных неоднородностей на величину дисперсии прочности структурных элементов массива

Рассмотрим этот вопрос для случая, когда $f(\alpha)=0$, т.е. в предположении, что прочность дефектных элементов близка нулю, как это сделано в [232, 233].

Выражение (5.33) удовлетворяет граничным условиям: при $\nu = 0$, $D' = 0$ – массив разрушен, механически однороден и может быть приравнен к сыпучей

среде; при отсутствии трещин ($\nu \rightarrow \infty$) получим выражение для дисперсии опробования монолитного массива:

$$D = m_2 - m_1^2.$$

Коэффициент вариации обычного опробования (без учета нарушенных образцов) определяется формулой:

$$\eta = \frac{\sqrt{D}}{m_1}.$$

Введем обозначение

$$A_k = m_k / m_1^k, \quad (5.34)$$

тогда

$$\eta^2 = \frac{m_2 - m_1^2}{m_1^2} = A_2 - 1,$$

откуда

$$A_2 = \eta^2 + 1.$$

Выражение (5.33) с учетом последнего равенства принимает вид:

$$D' = m_1^2 \frac{\nu}{1 + \nu} \left(A_2 - \frac{\nu}{1 + \nu} \right) = m_1^2 f(A_2, \nu), \quad (5.35)$$

где $f(A_2, \nu)$ – функция влияния структурно - механических неоднородностей на величину дисперсии. Для идеальной однородной среды $A_2 = 1$, для реальной же породной среды, как показывает анализ, величина A_2 составляет 1,1-1,5.

На рис. 5.7 показаны графики функции $f(A_2, \nu)$ в зависимости от значений A_2 и ν . Представленные кривые имеют явно выраженные максимумы. До определенного значения $\nu = \nu^*$ дисперсия возрастает, затем плавно снижается по мере увеличения расстояния между трещинами.

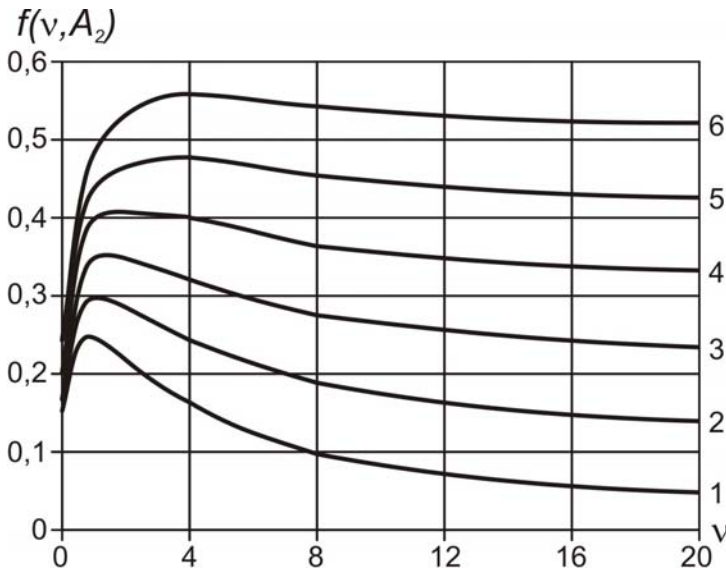


Рис. 5.7. Изменение дисперсии выборки, включающей нарушенные образцы, в зависимости от расстояния между трещинами и вариации реального опробования: 1, 2, 3, 4, 5, 6 – при $A_2=1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5$ соответственно

выражение (5.36) определяет границы применимости рассматриваемой вероятностно-статистической модели: графики функции $f(A_2, \nu)$ и справа и слева приближаются к оси абсцисс.

Из (5.33), с учетом (5.34), получим выражение для относительной вариации «исправленного» вариационного ряда, т.е. для вариации прочности структурно неоднородного массива. В предположении, что прочность дефектных элементов равна нулю ($f(\alpha) = 0$) выражение для относительной вариации прочности будет иметь вид:

$$\eta' = \frac{\sqrt{D'}}{m_1'} = \sqrt{\frac{\nu+1}{\nu} A_2 - 1} = \sqrt{\frac{l_m + l_0}{l_m} (\eta^2 + 1) - 1}. \quad (5.37)$$

В таком виде коэффициент вариации отражает не только внутреннюю структурную неоднородность массива, характеризуемую вариацией прочности

Исследуем функцию $f(A_2, \nu)$ на экстремум и получим то предельное значение ν^* , после которого в породной среде наступают значительные качественные изменения:

$$\nu^* = A_2 (2 - A_2)^{-1}. \quad (5.36)$$

При $\nu < \nu^*$ среда обладает таким высоким уровнем разрушенности, что может быть приравнена к сыпучей среде с некоторыми усредненными свойствами. Дисперсия такой среды, как и квазиоднородной, близка к нулю. По сути, выра-

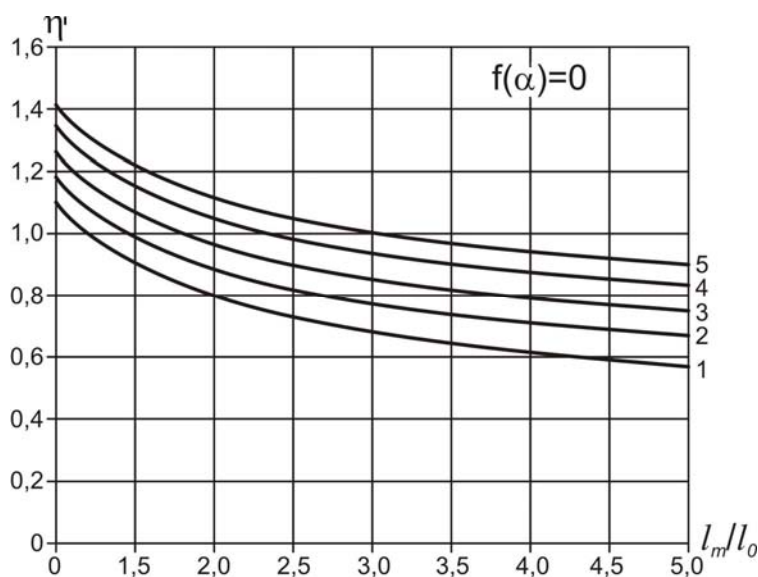


Рис. 5.8. Зависимость коэффициента вариации трещиноватого породного массива от расстояния между трещинами и степени неоднородности среды в предположении, что прочность дефектных элементов равна нулю: 1, 2, 3, 4, 5 – при $A_2 = \eta^2 + 1 = 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5$ соответственно

при обычном опробовании, но и механическое его ослабление системами трещин.

На рис. 5.8 показаны графики значения коэффициента вариации η' в зависимости от плотности трещин $\nu = \frac{l_m}{l_0}$ и степени внут-

ренней неоднородности породной среды, определяемой параметром $A_2 = \eta^2 + 1$. Если полагать, что дефектные элементы все-таки обладают некоторой прочностью ($f(\alpha) \neq 0$) относи-

тельная вариация «исправленного» ряда будет определяться выражением:

$$\eta' = \frac{\sqrt{D'}}{m'_1} = \sqrt{\frac{K_2 m_2 - K_1^2 m_1^2}{K_1^2 m_1^2}} = \sqrt{\frac{K_2}{K_1^2} A_2 - 1} = \sqrt{\frac{K_2}{K_1^2} (\eta^2 + 1) - 1}. \quad (5.38)$$

Исследуем теперь, как влияет наличие нарушенных элементов в выборке на вероятностное распределение прочности структурных элементов.

5.2.3. Влияние наличия в выборке элементов, нарушенных макродефектами, на вероятностное распределение прочности структурных элементов породного массива

Выше указывалось, что подбор распределения для эмпирических данных может быть осуществлен с помощью диаграммы Пирсона, на которой пред-

ставлены теоретические распределения в зависимости от характерных для них значений асимметрии и эксцесса. Последние определяются центральными моментами третьего и четвертого порядков (формулы (5.19)). В свою очередь центральные моменты могут быть выражены через начальные:

$$\begin{aligned}\mu_2 &= m_2 - m_1^2; \\ \mu_3 &= m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3; \\ \mu_4 &= m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4.\end{aligned}\tag{5.39}$$

Для нормального распределения все начальные моменты нечетных порядков равны нулю. Отсюда получаются известные соотношения [84]:

$$\beta_1^2 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = 0;\tag{5.40}$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = 3.\tag{5.41}$$

Определим из этих условий, как должны соотноситься между собой моменты симметричного (нормального) распределения. Из второго уравнения (5.39) и условия (5.40) получим, что

$$\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3 = 0,$$

или

$$\frac{m_3}{m_1^3} = 3 \frac{m_2}{m_1^2} - 2.\tag{5.42}$$

Для случая, когда $m_1 \neq 0$ можно использовать обозначение (5.34) и преобразовать (5.42) к виду:

$$A_3 = 3A_2 - 2.\tag{5.43}$$

Из третьего уравнения (5.39) и условия (5.41) получим:

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4}{m_2 - m_1^2} = 3.\tag{5.44}$$

При $m_1 \neq 0$, вынося общий множитель m_1^4 в числителе и знаменателе дроби и используя (5.34), преобразуем последнее уравнение к виду:

$$\frac{A_4 - 4A_3 + 6A_2 - 3}{(A_2 - 1)^2} = 3,$$

откуда при $A_2 \neq 1$, получим:

$$A_4 = 3A_2 - 2. \quad (5.45)$$

Уравнения (5.42), (5.44), либо полученные из них (5.43) и (5.45), образуют систему, которой должны удовлетворять моменты распределения для того, чтобы оно было нормальным.

Например, если математическое ожидание нормального распределения равно нулю ($m_1 = 0$), то при любом значении m_2 получим, что $m_3 = 0$, а $m_4 = 3m_2^2$.

Пусть математическое ожидание отлично от нуля, например, $m_1 = 1$, и известно, что $A_2 = 1,2$. Тогда из (5.43) следует, что $A_3 = 1,6$, а из (5.42) $A_4 = 2,32$.

При таких значениях моментов распределение обладает асимметрией и эксцессом, удовлетворяющими уравнениям (5.40), (5.41), т.е. является нормальным. Проанализируем, как изменится это распределение, если будет учтено, что в статистическую совокупность, для которой оно построено, добавятся элементы со значительно меньшей прочностью.

Как было показано выше, начальные моменты обычного вариационного ряда (m_k) и «исправленного» (m'_k) связаны соотношением (5.30).

Тогда выражения (5.39) для центральных моментов примут вид [233]:

$$\begin{aligned} \mu'_2 &= K_2 m_2 - K_1^2 m_1^2; \\ \mu'_3 &= K_3 m_3 - 3K_1 K_2 m_2 m_1 + 2K_1^3 m_1^3; \\ \mu'_4 &= K_4 m_4 - 4K_3 K_1 m_3 m_1 + 6K_2 K_1^2 m_2 m_1^2 - 3K_1^4 m_1^4. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Как видим присутствие элементов, нарушенных макродефектами, меняет все моменты распределения, в том числе и те, которые определяют собой

асимметрию и эксцесс. С учетом соотношений (5.39) и (5.34) показатель асимметрии можно выразить через относительные величины:

$$\beta_1^2 = \frac{(A_3 - 3A_2 + 2)^2}{(A_2 - 1)^3}.$$

Для «исправленного» ряда, в который внесены элементы с макродефектами, получим

$$A_2' = \frac{K_2 m_2}{K_1^2 m_1^2} = \frac{K_2}{K_1^2} A_2; \quad A_3' = \frac{K_3 m_2}{K_1^3 m_1^2} = \frac{K_3}{K_1^3} A_3; \quad A_4' = \frac{K_2 m_2}{K_1^2 m_1^2} = \frac{K_4}{K_1^4} A_4.$$

Тогда показатель асимметрии примет вид:

$$\beta_1^{2'} = \frac{\left(\frac{K_3}{K_1^3} A_3 - 3 \frac{K_2}{K_1^2} A_2 + 2 \right)^2}{\left(\frac{K_2}{K_1^2} A_2 - 1 \right)^3}. \quad (5.47)$$

Аналогично получим выражение для показателя эксцесса:

$$\beta_2' = \frac{\frac{K_4}{K_1^4} A_4 - 4 \frac{K_3}{K_1^3} A_3 + 6 \frac{K_2}{K_1^2} A_2 - 3}{\left(\frac{K_2}{K_1^2} A_2 - 1 \right)^2}. \quad (5.48)$$

Если исходное распределение симметрично, то с учетом (5.43) и (5.45) получим, что показатели асимметрии и эксцесса «исправленного» ряда зависят только от относительной величины A_2 , которая связана с вариацией значений случайной величины ($A_2 = \eta^2 + 1$).

Исследуем, как влияет наличие макродефектов на закон распределения прочности структурных элементов массива. Как и в предыдущей задаче для простоты изложения будем полагать, что прочность дефектных элементов близка нулю. В этом случае коэффициент влияния трещин определяется формулой (5.32).

Определим для рассмотренного выше примера ($m_1 = 1$, $A_2 = \eta^2 + 1 = 1,2$) моменты «исправленного» ряда по формулам (5.46) для различных значений

расстояния между трещинами и подсчитаем соответствующие коэффициенты асимметрии и эксцесса (табл. 5.5).

Таблица 5.5

Значения «исправленных» показателей асимметрии и эксцесса для исходного распределения с параметром $A_2=1,2$

$\frac{l_m}{l_0}$	ν	$\beta_1^{2'}$	$\beta_2^{2'}$
1,0	0,50	1,33	4,11
1,5	0,60	0,76	3,46
2,0	0,66	0,50	3,19
2,5	0,71	0,36	3,05
3,0	0,75	0,27	2,92
10,0	0,90	0,09	2,97

Из таблицы видно, что с уменьшением расстояния между трещинами l_m , т.е. с ростом интенсивности трещин, значения асимметрии и эксцесса увеличиваются. Точки с координатами $(\beta_1^{2'}, \beta_2^{2'})$, нанесенные на график Пирсона, с увеличением плотности трещин все более удаляются от точки, соответствующей нормальному закону (рис. 5.9). Траектория движения точки для заданного значения $A_2 = 1,2$ проходит вблизи линий, соответствующих гамма-распределению и распределению Вейбулла. При других сочетаниях моментов симметричного распределения (например, при $A_2 = 1,3$) значения асимметрии и эксцесса таковы, что движение точки осуществляется вблизи линии логарифмически нормального распределения (табл. 5.6).

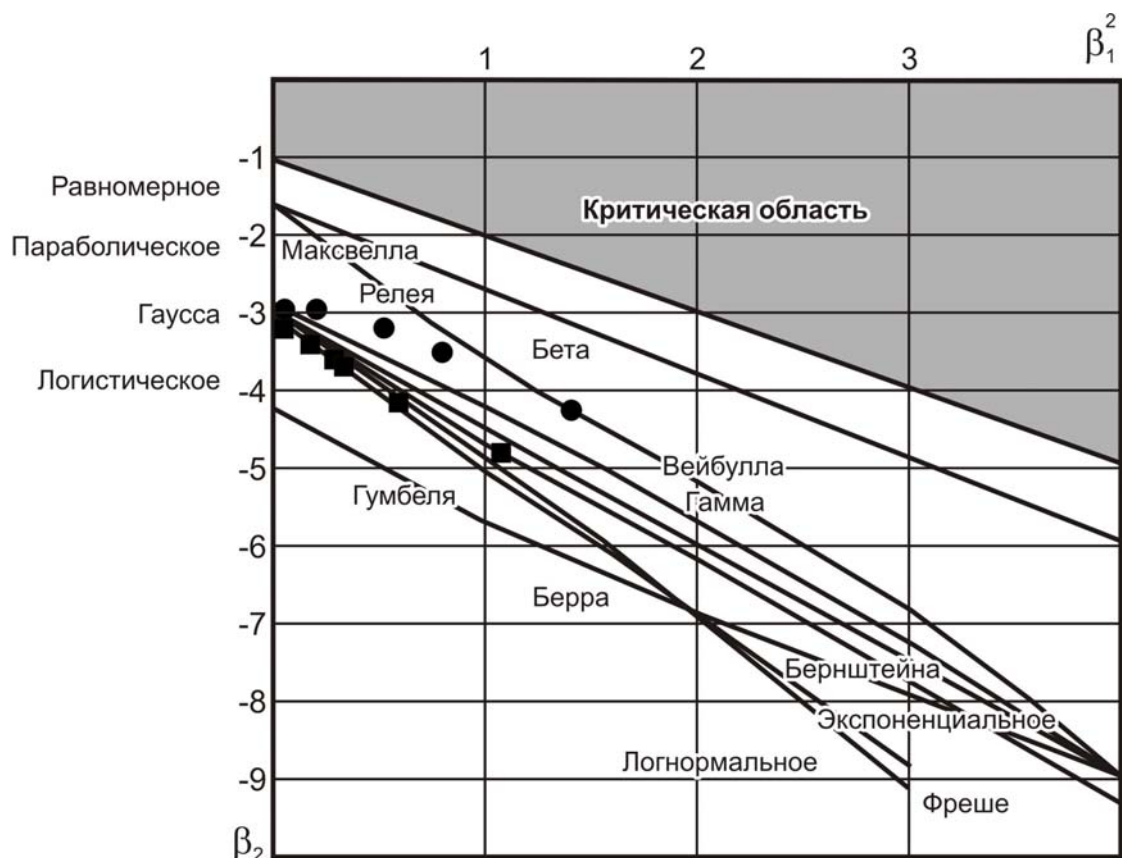


Рис. 5.9. Диаграмма Пирсона с точками для статистических распределений, в которые условно внесены элементы с макродефектами: ● – точки, соответствующие исходному ряду с соотношением начальных моментов $A_2=1,2$; ■ – точки, соответствующие исходному ряду с соотношением начальных моментов $A_2=1,3$

Искусственное внесение элементов с нулевой прочностью в статистический ряд меняет значения асимметрии и эксцесса, а, следовательно, и вид распределения. Из рис. 5.9 видно, что с уменьшением расстояния между трещинами отклонение от симметричного распределения становится все более значительным. Формально, для приведенного примера при $(l_m/l_0) < 1$ распределение становится близким к экспоненциальному закону. Однако это противоречит физической сути задачи, свидетельствуя о глубоких качественных изменениях в среде, где элементы с нулевой прочностью становятся преобладающими, а сама среда по своим свойствам приближается к однородной сыпучей. Очевидно, что

если полагать прочность дефектных элементов равной нулю, случай $(l_m / l_0) < 1$ следует исключить из рассмотрения.

Таблица 5.6

Значения «исправленных» показателей асимметрии и эксцесса для исходного распределения с параметром $A_2=1,3$

$\frac{l_m}{l_0}$	ν	$\beta_1^{2'}$	$\beta_2^{'}$
1,0	0,5	1,15	4,83
1,5	0,6	0,65	4,05
2	0,66	0,42	3,69
2,5	0,71	0,30	3,50
3	0,75	0,22	3,38
10	0,9	0,03	3,05

Таким образом, наличие трещин в реальном породном массиве не только оказывает влияние на статистические оценки исследуемого количественного признака, но и меняет закон распределения вероятностей всех его механических параметров. Вид «исправленного» распределения зависит от соотношений начальных моментов исходного статистического распределения, полученного как результат опробования ненарушенных структурных элементов. Степень отклонения прочности элементов от симметричного распределения определяется расстоянием между трещинами. Исследуем теперь, как повлияет на это отклонение угол наклона трещин к оси нагружения.

5.3. Исследование влияния параметров трещиноватости на вид распределения прочности структурных элементов

5.3.1. Исследование влияния угла наклона трещин

Приведенные выше результаты получены в предположении, что прочность дефектных образцов породы (структурных элементов массива) близка нулю.

Между тем, и имеющиеся в литературе данные, и результаты экспериментов, описанных в п. 5.2, говорят о том, что образец, нарушенный трещинами, частично сохраняет свою несущую способность, что можно охарактеризовать функцией снижения прочности $f(\alpha) = \frac{q}{R_c}(\alpha)$, равной отношению разрушающей нагрузки к пределу прочности на сжатие монолитного образца, не нарушенного макротрещинами. Эта функция может быть получена на основе обработки результатов наблюдений.

Однако, экспериментальные данные в силу погрешностей измерительных приборов, несовершенства технологии изготовления образцов и условий заземления на их торцах, а также в силу других причин, являются величинами случайными. Для получения их оценок с высокой достоверностью требуется большое количество опытов, проведение которых в лабораторных условиях достаточно трудоемко. Указанных недостатков физического моделирования лишено математическое моделирование. Последнее, хотя и предполагает известную идеализацию объекта, позволяет исключить влияние случайных малозначимых факторов и получить количественные оценки изучаемого процесса, обусловленные действием тех фундаментальных законов, которые положены в основу математической модели. Поэтому влияние ориентации плоскостей ослабления на процесс разрушения структурного элемента массива исследовался путем математического моделирования.

Структурный элемент массива можно представить как квадратный блок, весом которого можно пренебречь, покоящийся на поверхности полуплоскости. Блок пересекает трещина, расположенная под углом α к горизонтальной оси. Задача моделируется путем погружения системы в неограниченную упругую плоскость. Решение выполнялось методом граничных элементов [234]. Оконтурирование блока и части полуплоскости, имитирующей основание, на котором находится блок, т.е. выделение их из бесконечной среды, осуществлялось граничными элементами в рамках метода разрывных смещений.

Решение выполнялось при следующих граничных условиях: на боковых гранях блока равны нулю нормальные напряжения, на верхней грани блока задана равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q , такая же нагрузка с противоположным знаком задана на нижней грани. Кроме того, на нижней и верхней гранях равны нулю горизонтальные перемещения (рис. 5.10).

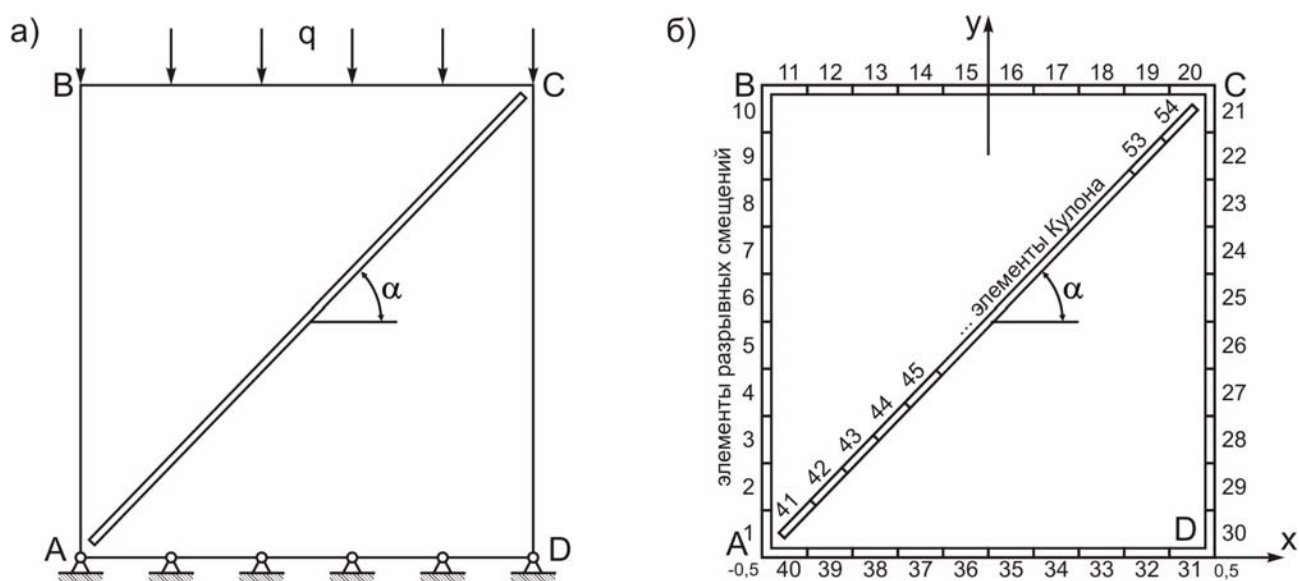


Рис. 5.10. Расчетная схема задачи: а) физическая модель; б) гранично-элементная модель

Состояние блока как структурного элемента массива оценивается величиной условных зон разрушения, под которыми понимается совокупность точек, в которых не выполняются предельные соотношения между компонентами тензора напряжений в соответствии с принятым критерием прочности. Условие разрушения для горных пород, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, достаточно хорошо описывается критерием прочности (3.8), полученным в разделе 3.

Появление отдельных точек, в которых выполняется данное условие разрушения, еще не свидетельствует о разрушении блока как структурного элемента массива. Если же такими точками охвачена область, сопоставимая с размерами самого блока, можно утверждать, что материал его претерпевает необ-

ратимые деформации и структурный элемент теряет способность сопротивляться нагрузке.

При моделировании процесса разрушения вертикальная нагрузка задавалась в долях от предполагаемого предела прочности материала блока на одноосное сжатие. На каждом этапе нагружения выполнялась оценка напряженно-деформированного состояния блока в соответствии с выбранной теорией прочности, и определялся уровень разрушающей нагрузки, вызывающей переход материала блока в стадию неупругого деформирования. Предполагалось, что характер распространения условных зон разрушения связан с поведением ослабляющего элемента – трещины. В вычислительной процедуре трещина может моделироваться и как «зияющая», нарушающая сплошность, с помощью элементов разрывных смещений, и как заполненная достаточно связным материалом, способным к упругим деформациям. Тогда заполненная трещина может моделироваться как упругий контакт специальными контактными (пластовыми) элементами.

В реальных условиях трещины, как правило, заполнены глинистым материалом, обладающим гораздо меньшим сцеплением, чем горная порода. Под действием внешних сил по поверхностям ослабления может происходить скольжение частей массива относительно друг друга или разрыв сплошности. Математическая модель деформирования структурного элемента, содержащего трещину, должна отражать возможность неупругого деформирования материала – заполнителя трещины, то есть содержать ограничивающее соотношение между нормальными и касательными напряжениями, передающимися через контакт. В качестве такого соотношения удобнее всего использовать условие Кулона – Мора:

$$\tau = c + \sigma_n \operatorname{tg} \rho.$$

Здесь τ – напряжение сдвига, σ_n – нормальное напряжение, ρ и c – соответственно угол внутреннего трения и сцепления материала-заполнителя тре-

щин. В [234] подробно описана вычислительная процедура, учитывающая скольжение вдоль трещины и раскрытие контакта.

В данной задаче каждая грань блока представлена 10-ю граничными элементами разрывных смещений. Трещина с углом наклона α к горизонтальной оси моделировалась 14-ю контактными элементами, допускающими неупругие деформации. Грани блока полагались единичной длины, вертикальная нагрузка q задавалась в долях от предела прочности на сжатие R_c . Модуль упругости E составлял 105 единиц напряжений, коэффициент Пуассона $\mu = 0,2$, нормальная и касательная жесткости упругого контакта выбирались из расчета, что ширина трещины составляет 10^{-6} единиц длины. Характеристики материала трещины принимались равными: $c=0$, $\rho=30^0$.

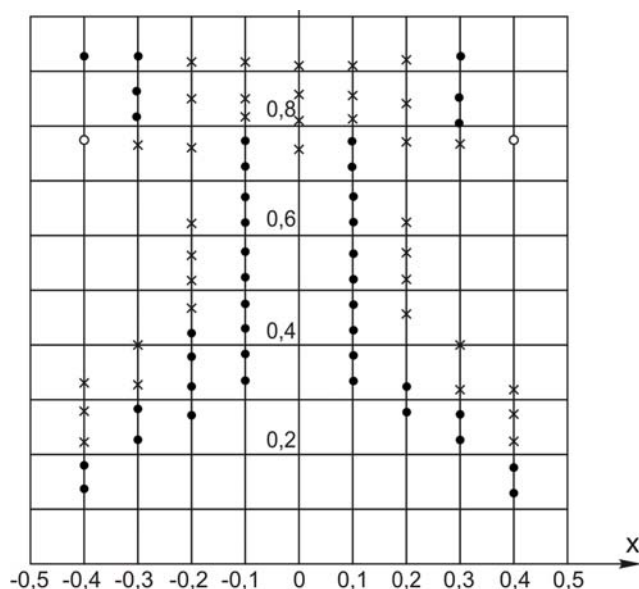


Рис. 5.11. Характер расположения точек разрушения при $q = R_c$ в отсутствие трещины

Вычислительный эксперимент начинался с моделирования монолитного образца (блока), не ослабленного трещиной, с целью подтверждения правильности постановки задачи и разработанного алгоритма. Характер расположения точек, напряжения в которых не удовлетворяют условию прочности, совпадает с представлениями о разрушении твердого тела в соответствии с теорией Кулона –

Мора. Из рис. 5.11 видно, что совокупности этих точек образуют линии, ориентированные к направлению приложения нагрузки под углом, близким к $\pm 40^0$. В главе 3 показана связь между параметрами криволинейной огибающей предельных кругов Мора и прямолинейной, что позволяет определить угол внут-

ренного трения в зависимости от коэффициента хрупкости пород ψ , и величины нормальной составляющей напряжения σ :

$$\rho^* = \operatorname{arctg} \frac{1 - \psi}{2 \sqrt{\frac{2\sigma}{R_c} (1 - \psi) + \psi}}.$$

При $\psi = 0.1$ и $q = R_c$ величина параметра огибающей кругов Мора ρ^* будет равна 18° . Тогда площадки скольжения составят с направлением наибольшего главного напряжения углы:

$$\varphi = \pm \left(45^\circ - \frac{\rho^*}{2} \right) = 36^\circ,$$

что совпадает с полученной картиной напряженного состояния блока.

Дальнейшие расчеты связаны с моделированием трещин под различными углами α к горизонтальной оси. При $\alpha = 30^\circ$ точки разрушения появляются уже при нагрузке, составляющей $0,3R_c$, распространяясь от краевых частей блока к его центру. Приращение нагрузки на величину $0,05R_c$, то есть увеличение ее до значения $q = 0,35R_c$ вызывает рост области неупругих деформаций до размеров, сопоставимых с размерами блока. Эту стадию будем характеризовать как неспособность структурного элемента далее воспринимать нагрузку.

Характер расположения точек разрушения показан на рис. 5.12 для вариантов расчета, выполненного при α , равном 45° и 90° .

Трещина, расположенная под углом $\alpha = 45^\circ$, ослабляет структурный элемент в столь же значительной мере. Первые неупругие деформации появляются при $q = 0,35R_c$, при $q = 0,4R_c$ структурный элемент в большей своей части охвачен зоной разрушения. Трещины, расположенные под углами, близкими к 0° и 90° оказывают на прочность элемента гораздо меньшее влияние. Нормальносекущая трещина, т. е. расположенная под углом $\alpha = 90^\circ$, снижает значение разрушающей нагрузки до величины $q = 0,85 R_c$.

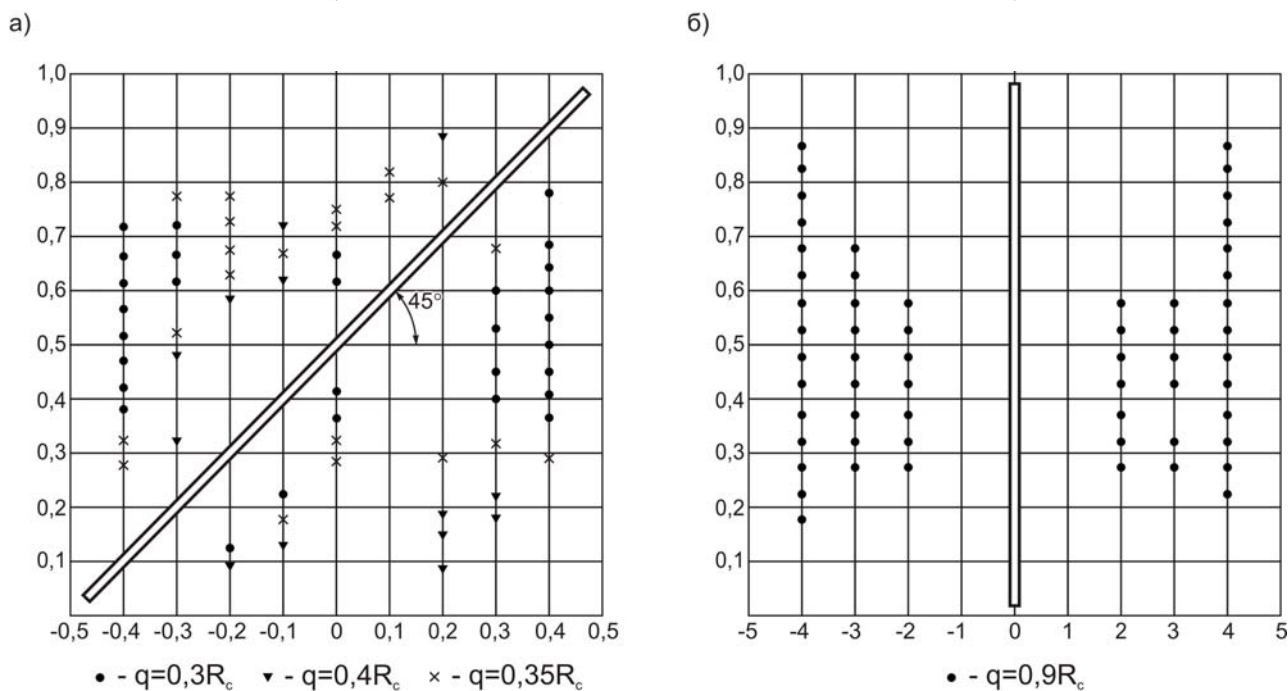


Рис. 5.12 Характер расположения точек разрушения в образце:

а) $\alpha = 45^0$; б) $\alpha = 90^0$

Кривую на рис. 5.13, характеризующую снижение прочности структурного элемента в зависимости от угла наклона плоскости ослабления, можно аппроксимировать параболической зависимостью вида:

$$\frac{q}{R_c}(\alpha) = 7 \cdot 10^{-4} \alpha^2 - 0,0386\alpha + 0,9359 \quad (5.49)$$

Функция (5.49) имеет явно выраженный минимум при $\alpha = 35^0$.

Функция снижения прочности $\frac{q}{R_c}(\alpha)$ характеризует собой закономерные изменения прочности структурных элементов в зависимости от ориентации трещин. Используем полученную зависимость для моделирования статистической совокупности, содержащей дефектные элементы, нарушенные трещинами. Относительная вариация прочности в данном случае определяется по формуле (5.38) с учетом зависимости (5.49).

На рис. 5.14 приведена зависимость относительной вариации прочности структурных элементов от расстояния между трещинам при $f(\alpha) = 0,3$.

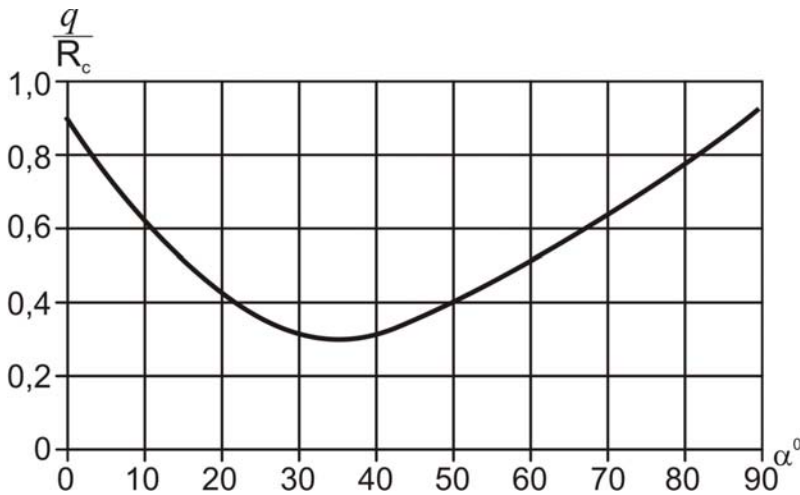


Рис. 5.13. Зависимость разрушающей нагрузки от угла наклона трещины

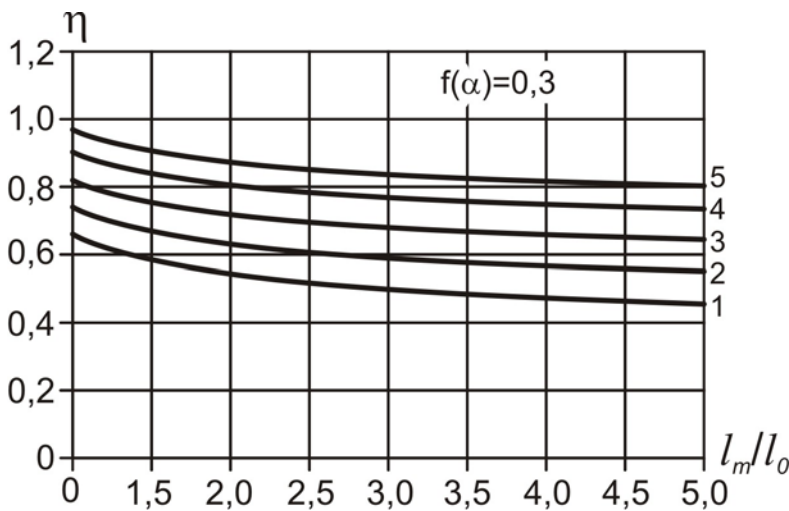


Рис. 5.14. Зависимость вариации прочности массива от расстояния между трещинами в предположении, что дефектные элементы частично сохраняют несущую способность: 1, 2, 3, 4, 5 – при $A_2 = \eta^2 + 1 = 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5$ соответственно

Видно, что при сохранении нарушенными элементами частичной несущей способности вариация прочности не так велика, как в случае полного разрушения дефектных элементов (см. рис.5.8).

Определим центральные моменты (5.46) и связанные с ними показатели асимметрии и эксцесса учитывая, что элементы, нарушенные трещиной, сохраняют некоторую несущую способность. В этом случае коэффициенты влияния трещин определяются формулой (5.31), где $f(\alpha) = \frac{q}{R_c}(\alpha)$ и определяется формулой (5.49).

В качестве примера рассмотрим ранее исследованный исходный ряд с соотношением моментов:

$A_2 = 1,3$. Предположение о

том, что дефектные элементы частично сохраняют несущую способность, влияет на величины асимметрии и эксцесса. В наибольшей степени структурный элемент ослабляет кососекущая трещина, составляющая с горизонтальной гра-

нью элемента углы $30-45^\circ$ ($f(\alpha)=0,3$). Для такого значения функции снижения прочности асимметрия и эксцесс распределения также значительно отклоняются от характеристик нормального закона, как и при расчете моментов в предположении, что прочность дефектных элементов равна нулю (рис. 5.15).

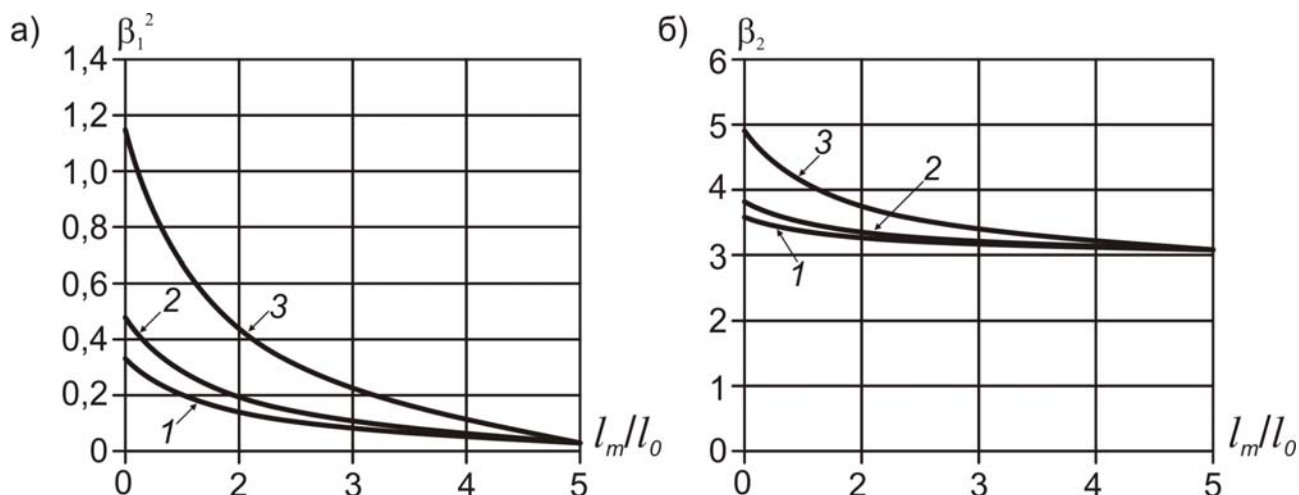


Рис. 5.15. Зависимость показателей асимметрии β_1^2 (а) и эксцесса β_2 (б) от расстояния между трещинами при частичном сохранении образцами несущей способности: 1, 2, 3 – $f(\alpha)=0$; 0,3; 0,4 соответственно

Особенно существенно это отклонение при значениях $(l_m/l_0) \approx 1$. С увеличением $f(\alpha)$, т.е. при положении трещин, близком к нормальному, отклонение от симметричного распределения уменьшается.

Все рассуждения, приведенные выше, выполнены в предположении, что для генеральной совокупности известно расстояние между прирожденными трещинами. Между тем имеющиеся в литературе сведения о значениях этой величины свидетельствуют о ее значительной изменчивости. Расстояние между трещинами следует рассматривать как случайную величину и при оценке прочности массива учитывать не только ее математическое ожидание, но и возможный разброс значений относительно среднего.

5.3.2. Исследование влияния изменчивости расстояния между трещинами на вид распределения прочности структурных элементов

В математическом отношении трещина представляет собой поверхность раздела, по которой претерпевает разрыв вектор смещений. След этой поверхности на плоскости – прямая L , с общим уравнением $Ax + By + C = 0$, где A, B – координаты нормального вектора прямой.

Разделив обе его части на нормирующий множитель $\sqrt{A^2 + B^2}$, получим нормальное уравнение прямой

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - l = 0,$$

где $\cos \alpha = A / \sqrt{A^2 + B^2}$, $\sin \alpha = B / \sqrt{A^2 + B^2}$ – направляющие косинусы прямой, l – расстояние от прямой до начала координат. Если через начало координат провести прямую, параллельную прямой L , то l будет равно расстоянию между прямыми.

Таким образом, уравнение

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - nl = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

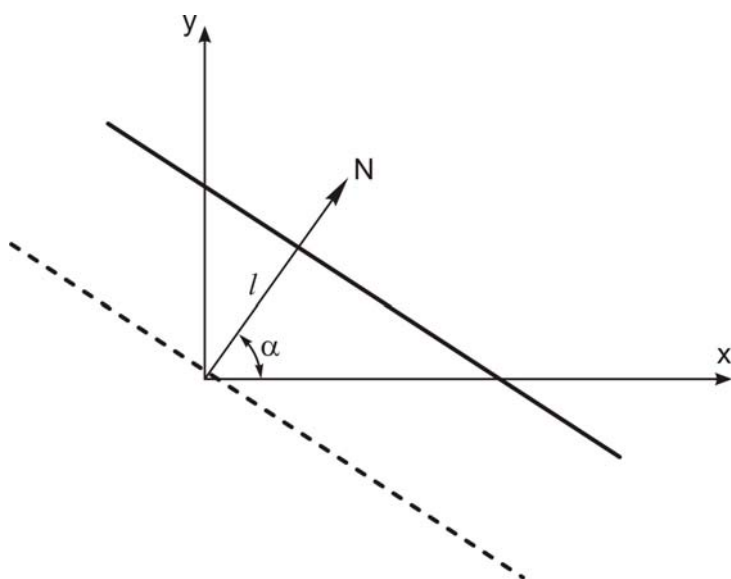


Рис. 5.16. К определению расстояния между трещинами на плоскости

где l – расстояние между трещинами, определяет систему трещин на плоскости (рис. 5.16).

М.В. Гзовский [236] предлагал при изучении тектонических разрывов использовать современные знания о физических условиях их возникновения. В частности, закономерности возникновения элементар-

ных поверхностей механического разрушения нужно рассматривать с учетом того, что процесс разрушения развивается длительно и непрерывно совместно с упругим и пластическим деформированием, параллельно с процессом залечивания разрывов. Важным следствием образования тектонического разрыва является изменение первичного напряженного состояния вблизи него. Отсюда следует, что место положения каждой трещины определенного порядка зависит от положения смежных с ней трещин.

Особого внимания в этой связи заслуживает подход, основанный на применении законов фрактальной геометрии. Он предполагает оценку исследуемого объекта на основе рассмотрения его как совокупности самоподобных множеств, организация которых зависит как от детерминированных, так и от случайных факторов.

Таким образом, расстояние между трещинами является основным параметром трещиноватости. Эта величина формировалась под воздействием большого числа случайных событий и сама является случайной. Но как результат проявления массовых случайных событий подчиняется определенному закону распределения вероятностей.

Большой объем статистической информации о величине расстояний между трещинами был собран С.А. Батугиным [237]. Для построения эмпирических распределений результаты измерений отбирались на однородных по трещиноватости участках на горнодобывающих предприятиях Кузбасса. Из рис. 5.17 видно, что распределение случайной величины имеет асимметричный характер. Автор отмечает, что по критерию Пирсона при 5% уровне значимости не отвергаются несколько статистических гипотез (что характерно для выборок небольшого объема). Однако, исходя из физической природы данной случайной величины, следует в качестве вероятностной модели распределения расстояния между трещинами принять закон Релея.

Действительно, закон Релея выведен как статистическая модель расстояния между двумя точками плоскости. Если X и Y – нормальные независимые

случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и равными среднеквадратическими отклонениями σ , то величина

$$l = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

распределена по закону Релея с плотностью [210]:

$$f(x, \sigma) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) & x \geq 0, \sigma > 0, \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (5.50)$$

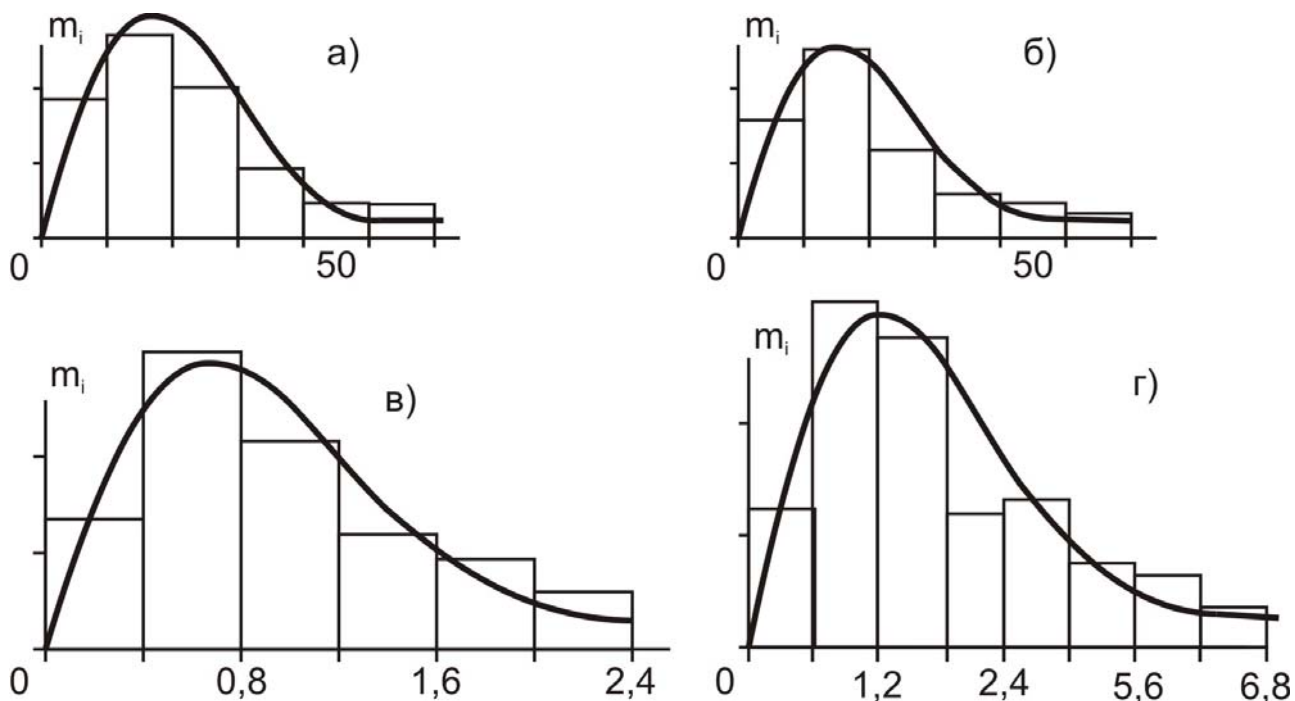


Рис. 5.17. Распределение расстояний между трещинами в породах Таштогельского железорудного месторождения [113]

Это распределение содержит только параметр масштаба σ , с которым математическое ожидание m связано очень простой зависимостью

$$\sigma = 0,52m \quad (5.51)$$

По данным С.А. Батугина, для обследованных им типов пород (песчаников, сланцев) характерна относительная вариация расстояний между трещина-

ми, составляющая 50-55%. Указывается, что соотношение (5.51) удовлетворительно соблюдается для всех обследованных систем трещин.

Следуя выбранной статистической модели, определим вероятность того, что расстояние между трещинами некоторой системы будет не менее некоторого критического значения l^* :

$$p(l \geq l^*) = 1 - \int_0^{l^*} \frac{x}{\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = \exp\left(-\frac{l^{*2}}{2\sigma^2}\right).$$

Разрешив это уравнение относительно l^* , получим:

$$l^{*2} = -2\sigma^2 \ln p.$$

С учетом (5.51) значение l^* будет равно

$$l^* = \sigma \sqrt{-2 \ln p} = 0,52m \sqrt{-2 \ln p}. \quad (5.52)$$

Например, с вероятностью $p = 0,65$ все значения l будут не меньше величины

$$l^* = m - \sigma = m - 0,52m = 0,48m.$$

С учетом полученных соотношений, при определении коэффициента влияния трещин в формуле (5.31) положим, что

$$\frac{l_m}{l_0} = \frac{m}{l_0} 0,52 \sqrt{-2 \ln p}. \quad (5.53)$$

В табл. 5.7 приведены значения показателей асимметрии и эксцесса β_1', β_2' (формулы (5.47) и (5.48)), полученные для различных значений m/l_0 в предположении, что расстояния между трещинами не меньше значения $l^* = m - \sigma$. Расчеты выполнены при $f(\alpha) = 0,3$ и $A_2 = 1,2$.

Таблица 5.7

Значения показателей асимметрии и эксцесса «исправленного» вариационного ряда с учетом случайного распределения расстояний между трещинами

$\frac{m}{l_0}$	ν	β_1^2	β_2'
1,0	0,5	1,60	5,91
1,5	0,6	1,07	4,88
2,0	0,66	0,77	4,33
2,5	0,71	0,58	4,01
3,0	0,75	0,48	3,78
10	0,9	0,13	3,12

При среднем расстоянии между трещинами, меньшем размеров образца, точки на плоскости β_1^2, β_2' близки к гамма-распределению. Но по мере приближения соотношения m/l_0 к единице распределение стремится к логарифмически нормальному, что в наибольшей степени отвечает физической сути исследуемой случайной величины – прочности структурных элементов на сжатие.

Таким образом, вид распределения случайной величины – предела прочности структурных элементов породного массива, зависит от среднего расстояния между прирожденными трещинами преобладающей системы, разброса значений этих расстояний и угла наклона трещин к оси нагружения. Количественно это отражается на показателях асимметрии и эксцесса статистического распределения, служащих ориентиром для выбора статистической модели исследуемого количественного признака. При этом следует отметить, что в общем случае форма распределения не определяется однозначно показателями асимметрии и эксцесса. Поэтому гипотезы о законе распределения случайных величин, в частности механических характеристик горных пород, следует выдвигать, не только анализируя их моменты распределения и вид эмпирических гистограмм частот, но и исходя из физической сути этих величин. В Приложении Б приведена сводка непрерывных распределений, наиболее часто используемых для

описания различных случайных величин, в том числе и механических характеристик материалов.

Вернемся к вопросу о том, как вид функции вероятностного распределения прочности структурных элементов определяет в соответствии с равенством (5.3) значение прочности породного массива в целом.

6. ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЧНОСТИ ПОРОДНОГО МАССИВА С УЧЕТОМ МАКРОДЕФЕКТОВ

6.1. Обоснование закона распределения прочности породного массива с учетом влияния макродефектов

В разделе 5.1 на основе решения уравнения (5.3) получено выражение для коэффициента структурного ослабления (5.1) в предположении, что прочность структурных элементов распределена по нормальному закону и $F(R)$ – интегральная функция нормального распределения.

В соответствии с (5.8), основной величиной, служащей для количественной оценки структурного ослабления, является относительная вариация прочности структурных элементов. В главе 5 показано, что реальная вариация прочности структурных элементов, характерная для всей генеральной совокупности, намного значительнее той, что получается в результате обработки выборки. Причина такого несоответствия – наличие в генеральной совокупности дефектных элементов, прочность которых меньше прочности ненарушенных элементов. В соответствии с полученными формулами (5.38) и (5.35), вариация прочности определяется расстоянием между трещинами l_m и углом наклона трещины α к горизонтальной оси. С учетом того, что расстояние между трещинами также является величиной случайной и характеризуется определенным разбросом относительно своего математического ожидания m , объединяя формулы (5.38), (5.31) и (5.52), получим систему из четырех уравнений для определения вариации прочности породного массива:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta' = \sqrt{\frac{K_2}{K_1}(\eta^2 + 1)} - 1, \\ K_1 = \frac{l_m + f(\alpha)}{\frac{l_m}{l_0} + 1}, \end{array} \right. \quad (6.1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} K_2 &= \frac{\frac{l_m}{l_0} + f^2(\alpha)}{\frac{l_m}{l_0} + 1}, \\ \frac{l_m}{l_0} &= \frac{m}{l_0} 0,52 \sqrt{-2 \ln p}. \end{aligned} \right. \quad (6.1)$$

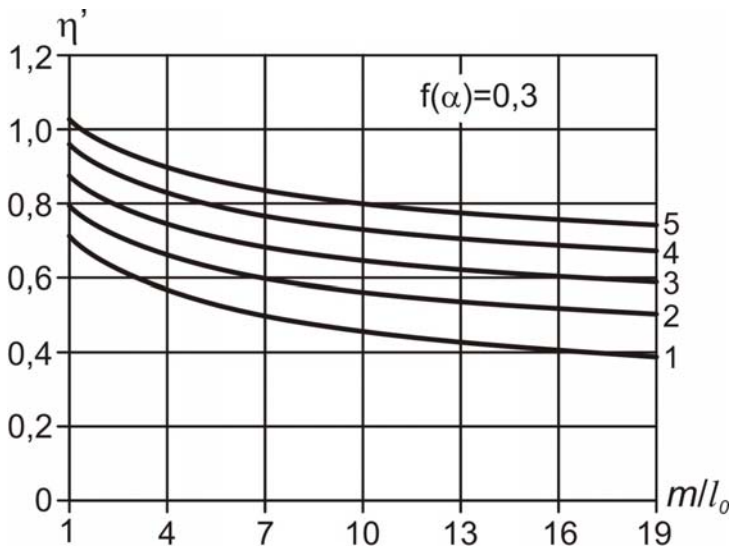


Рис. 6.1. Зависимость относительной вариации прочности породного массива от расстояния между трещинами (для случая кососекущих трещин с $\alpha = 45^0$): 1, 2, 3, 4, 5 – при вариации прочности породных образцов $\eta = 0,3; 0,45; 0,55; 0,65; 0,7$

Здесь m – среднее расстояние между трещинами, l_0 – размер стандартного образца, p – заданная вероятность, с которой определяется расстояние между трещинами, $f(\alpha)$ – функция снижения прочности структурных элементов, содержащих макродефекты (5.49). На рис. 6.1 показано изменение относительной вариации прочности в зависимости от определяющих ее факторов. Из графиков видно, что если по данным лабораторных испытаний получена относительная

вариация прочности образцов в пределах 30-45 %, то реальная вариация для генеральной совокупности – породного массива в пределах изучаемой литологической разности – с учетом естественной трещиноватости составляет 50-80 %. При такой значительной вариации гипотеза о нормальном распределении прочности структурных элементов совершенно неприемлема. Об этом же говорят значения асимметрии и эксцесса, также определяемых с учетом макродефектов по формулам (5.19) с учетом (5.46). Таким образом, в качестве вероятностной модели исследуемого признака следует принять соответствующее этим значе-

ниям несимметричное распределение, более адекватное реальной статистической совокупности.

Г.Т. Рубцом [180-183] изучено 129 эмпирических распределений прочностных характеристик осадочных, метаморфических и магматических горных пород по статистическим данным, полученным в лаборатории отдела механики горных пород ИГТМ НАН Украины, в геологических трестах и экспедициях Министерств геологии и угольной промышленности Украины. Анализ распределений позволил осуществить их приближенную классификацию (табл. 6.1) по значениям показателей асимметрии и эксцесса, определяемых по выборке в соответствии с (5.20).

Таблица 6.1

Классификация распределений прочностных характеристик

Коэффициент эксцесса	Асимметрия				
	Левоасимметричные		Симметричные	Правоасимметричные	
	Сильно (-1,25...-0,75)	Умеренно (-0,75...-0,25)	(-0,25...0,25)	Умеренно (0,25...0,75)	Сильно (0,75...1,25)
Плоско-вершинные (1,5...2,5)	---	---	Равномерное Параболическое	---	---
Умеренно-вершинные (2,5...3,5)	---	Вейбулла Релея Максвелла Гамма Гальтона	Вейбулла Нормальное	Вейбулла Релея Максвелла Гамма Гальтона	---
Остро-вершинные (3,5...6,5)	Вейбулла Гамма Гальтона Берра Бернштейна Фреше Гумбеля	Вейбулла Гамма Гальтона Берра Бернштейна	Логистическое	Вейбулла Гамма Гальтона Берра Бернштейна	Вейбулла Гамма Гальтона Берра Бернштейна Фреше Гумбеля

Обширные испытания по определению пределов прочности на растяжение образцов горных пород полуправильной формы стальными соосными клиньями для осадочных магнетических и метаморфических пород показали, что наиболее приемлемой статистической моделью для изменчивости прочности является

логарифмически нормальное распределение [238]. Полученные в работе [239] данные прочностных испытаний пород Хибинских месторождений по своим статистическим характеристикам не противоречат модели логнормального распределения. В работе [240] приведены данные испытаний прочности 1248 образцов каменной соли. Проверкой было установлено, что среди трех предполагаемых законов (нормальный, Пирсона III типа, логарифмически нормальный) для описания изменчивости прочности каменной соли наиболее подходящей моделью является логарифмически нормальный закон, как более оправданный физически. Кроме того, проверка по критерию Пирсона показала, что теоретическое логнормальное распределение не противоречит эмпирическим данным с высоким уровнем надежности.

Проведенные в работе [241] исследования изменчивости физико-механических свойств горных пород более 45-ти полиметаллических месторождений Казахстана показали, что основные прочностные характеристики (предел прочности на сжатие, растяжение, коэффициент крепости, контактная прочность и сцепление) распределены в основном по закону с положительной асимметрией, что свидетельствует о существенном влиянии на механизм разрушения неоднородностей вещественного состава пород, их структурных особенностей и закономерностей распределения веществ в пространстве. Наиболее подходящими статистическими моделями для оценки распределения этих характеристик автор предлагает логарифмически нормальный закон, закон Вейбулла и гамма-распределение.

Логнормальное распределение вероятностей является довольно широко распространенной статистической моделью описания явлений и процессов в науках о Земле [213]. Этому распределению следуют содержание элементов и минералов в изверженных горных породах [242, 243], размеры частиц осадочных пород [244], размеры частиц при дроблении твердых тел сосредоточенной силой [245, 246], величины предельных разрушающих напряжений для некоторых типов пород [240] и другие горнотехнические характеристики.

Исследование законов распределения физических свойств горных пород, выполненные в работе [247], привели автора к выводу об универсальности логарифмически нормального закона как основного статистического закона свойств горных пород.

Автора работы [213] распространенность логнормальной функции распределения в исследованиях многих ученых приводит к мысли о том, что оно является следствием некоторых фундаментальных статистико-термодинамических законов, управляющих распределением веществ. Доказательство этого утверждения приводится на основе рассмотрения флуктуационной модели Больцмана.

Остановимся на свойствах логнормального распределения, свидетельствующих о его предпочтительности перед другими распределениями. Семейство кривых Джонсона, частным случаем которых является логарифмически нормальное распределение, получено путем преобразования нормированной нормально распределенной величины. Преимущество такого преобразования заключается в том, что оценки процентилей эмпирических распределений можно получать, используя таблицы площадей под кривой нормального распределения, имеющиеся в любой справочной литературе.

Свойства логарифмически нормального распределения определяются во многом свойствами соответствующего нормального распределения. Кроме того, это распределение имеет важнейшую особенность: распределение произведения n независимых положительных случайных величин с логарифмически нормальными распределениями снова подчиняется этому распределению [248]. Для него имеет место аналог центральной предельной теоремы: распределение произведения независимых положительных случайных величин при некоторых общих условиях стремится в пределе при неограниченном возрастании числа сомножителей к логарифмически нормальному закону.

Наличие этих свойств предполагает, что логарифмически нормальное распределение применяется в самых различных областях – от экономики [249] до

биологии [250], для описания процессов, в которых наблюдаемое значение составляет случайную долю предыдущего значения.

Применимость логарифмически нормального распределения для описания прочностных свойств материалов может быть физически обоснована с позиции т.н. модели Кэптейна [251] – пропорционального эффекта накопления повреждений в процессе нагружения испытываемых образцов. Пусть значения $l_0 < l_1 < l_2 < \dots < l_n$ представляют собой последовательность размеров трещины, образующейся при нагружении образца, на различных этапах ее роста.

Когда трещина достигает критического значения l_n , образец разрушается. Будем считать, что увеличение размера трещины на каждом шаге $l_i - l_{i-1}$ пропорционально размеру l_{i-1} предыдущей трещины, т.е.

$$l_i - l_{i-1} = \delta_i l_{i-1}, \quad i=0, 1, 2, \dots, n,$$

где l_0 – первоначальная величина трещины в образце (нарушения структуры, пустоты, породные включения и т.п.); $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ – независимые положительные случайные величины.

Из предыдущей формулы имеем:

$$l_i = (1 + \delta_i)(1 + \delta_{i-1}) \cdots (1 + \delta_1)l_0.$$

Распределение окончательных размеров трещин l_n представляется в виде произведения независимых положительных случайных величин; если положить в предыдущем равенстве $i=n$, то получим, что

$$l_n = (1 + \delta_n)(1 + \delta_{n-1}) \cdots (1 + \delta_1)l_0. \quad (6.2)$$

Прологарифмировав это выражение, будем иметь

$$\ln(l_n) = \ln(1 + \delta_n) + \ln(1 + \delta_{n-1}) \cdots + \ln(1 + \delta_1) + \ln(l_0). \quad (6.3)$$

При больших n , согласно центральной предельной теореме, величина $\ln(l_n)$ имеет нормальное распределение, тогда конечные размеры трещин l_n распределены логарифмически нормально с плотностью:

$$f(l) = \frac{1}{\sigma_l l \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_l^2} (\ln l - a_l)^2\right), \quad l \geq 0, \quad (6.4)$$

где σ_l, a_l – параметры логнормального распределения. Положим, что разрушающее напряжение R связано в первом приближении линейной зависимостью с размером трещины, предшествующей разрушению:

$$R = \xi l + \varepsilon,$$

где ξ, ε – постоянные.

Выразим l через R и подставим в выражение для плотности распределения. Получим:

$$f(R) = \frac{1}{\sigma_R (R - \varepsilon) \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_R^2} (\ln(R - \varepsilon) - a_R)^2\right), \quad R \geq 0, \quad (6.5)$$

где $a_R = \ln \xi + a_l$ и $\sigma_R = \sigma_l$.

Выражение (6.5) есть плотность распределения логарифмически нормального закона с тремя параметрами a_R , σ_R и ε . Аналогичный результат будет справедлив, если в качестве параметров $\{l_i\}$ рассматривать накопленную поврежденность, развивающуюся в процессе нагружения материала от начального ее состояния l_0 до финального l_n . Это может быть, например, количество разрушенных связей данной прочности в материале, рассматриваемых как случайные величины, и другие параметры процесса разрушения, представляемого как стохастический процесс деформирования, разрушения связей, перераспределения напряжений на уцелевшие связи и окончательного исчерпания образцом несущей способности.

Таким образом, в ситуациях близких к изложенным, с полным основанием можно использовать для оценки разброса прочностных характеристик материалов модель логарифмически нормального распределения, как наиболее общую в теоретическом плане и подтвержденную эмпирически.

В разделе 4 показано, что чем меньше расстояние между трещинами, то есть – чем плотнее трещиноватость, тем более несимметричное распределение вероятностей имеет прочность структурных элементов. И если по результатам лабораторных испытаний распределение прочности образцов можно было отнести к нормальному, то пересчет моментов распределения с учетом макродефектов показал, что распределение прочности элементов генеральной совокупности гораздо ближе к логарифмически нормальному.

6.1.1. Границы применимости логнормального закона распределения, его свойства и связь с другими распределениями

При нахождении параметров логарифмически нормального распределения возможны следующие два случая:

- 1) параметр ε , характеризующий центр распределения – известен;
- 2) параметр ε , характеризующий центр распределения – неизвестен и должен оцениваться на основе экспериментальных данных.

Поскольку ε – нижний предел случайной величины, он часто бывает известен из физических соображений. Например, при анализе испытаний прочности горных пород на сжатие в грубом приближении можно считать, что $\varepsilon = 0$.

Логарифмически нормальное распределение описывает случайную величину, логарифм которой распределен по нормальному закону с параметрами a и σ , т.е. плотность распределения случайной величины $z = \ln(x - \varepsilon)$ имеет вид:

$$f(z, a, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z - a)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (6.6)$$

Параметры a и σ^2 являются здесь соответственно математическим ожиданием и дисперсией нормального распределения.

Если величина ε неизвестна заранее и представляет существенный интерес для целей исследования, возникает необходимость оценивания этого параметра по экспериментальным данным.

Математическое ожидание и дисперсия логнормального распределения связаны с параметрами распределения следующим образом:

$$\begin{aligned} m_1 &= \exp\left(\frac{\sigma^2}{2} + a\right); \\ D &= \exp(\sigma^2 + 2a) \times [\exp(\sigma^2) - 1] \end{aligned} \quad (6.7)$$

Используя метод моментов, заключающийся в приравнении теоретических и эмпирических моментов одного порядка [210], получим:

$$\begin{cases} \exp\left(a + \frac{\sigma^2}{2}\right) + \varepsilon = m_1^*; \\ \exp(2a + \sigma^2) \cdot [\exp(\sigma^2) - 1] = D^*; \\ \sqrt{\exp(\sigma^2) - 1} \cdot [\exp(\sigma^2) + 2] = \beta_1^*. \end{cases} \quad (6.8)$$

Здесь символом (*) отмечены эмпирические моменты распределения: средняя выборочная, выборочная дисперсия, выборочный коэффициент асимметрии. Решения уравнений (6.8) в явном виде записываются очень громоздко, однако можно составить на ЭВМ удобные таблицы, при помощи которых оценки параметров распределения находятся очень просто в каждом конкретном случае.

Действительно, последнее уравнение из (6.8) зависит только от одного неизвестного – σ . Путем замены переменной $t = (\exp(\sigma^2) - 1)^{1/2}$ его можно привести к кубическому уравнению относительно t :

$$t^3 + 3t - A, \quad (6.9)$$

где

$$A = \beta_1^*. \quad (6.10)$$

Это уравнение решается в явном виде:

$$t^* = \sqrt[3]{\frac{A}{2} + \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + 1}} + \sqrt[3]{\frac{A}{2} - \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + 1}}. \quad (6.11)$$

Зная корень уравнения t^* , из (6.11) можно определить параметр

$$\sigma = \sqrt{\ln(1 + t^2)}. \quad (6.12)$$

Параметр смещения определится из выражения

$$\varepsilon = m_1 - \frac{D}{t}. \quad (6.13)$$

Величина a запишется

$$a = \ln(m_1 - \varepsilon) - \frac{\sigma^2}{2}. \quad (6.14)$$

Для упрощения вычислений, связанных с оценкой параметров, рассчитана таблица 6.2 для определения σ и $\frac{1}{t}$ в зависимости от величины выборочной асимметрии в интервале $A \in (0,05...200)$.

Из (6.7) следует, что

$$\eta^2 + 1 = \exp(\sigma^2). \quad (6.15)$$

По таблице 5.4 рассчитаем значения относительной вариации, соответствующих значениям асимметрии (табл. 6.3).

Таблица позволяет по значениям асимметрии A определить ту верхнюю границу величины изменчивости η , при которой нижний параметр прочности ε не принимает отрицательного значения, что противоречит физическому смыслу прочности как положительной случайной величины. Таким образом, получим границы применимости логнормального распределения по коэффициентам вариации и асимметрии для тех случайных величин, которые из физических соображений не могут принимать отрицательных значений, например, предел прочности на одноосное сжатие.

Кривая, представляющая логнормальную модель на графике Пирсона, выходит из точки для нормального распределения. Отсюда следует, что распределение Гаусса с точностью до моментов 4-го порядка является частным случаем

Коэффициенты для оценки параметров логарифмически нормального распределения по большим выборкам

Асимметрия A	Параметр формы σ	Коэффициент $1/t$	Асимметрия A	Параметр формы σ	Коэффициент $1/t$
0,05	0,017	59,88	1,05	0,328	2,97
0,10	0,031	30,03	1,10	0,342	2,84
0,15	0,050	20,04	1,15	0,355	2,73
0,20	0,066	15,04	1,20	0,368	2,62
0,25	0,083	12,06	1,25	0,381	2,53
0,30	0,100	10,01	1,30	0,394	2,44
0,35	0,116	8,61	1,35	0,407	3,26
0,40	0,132	7,55	1,40	0,419	2,28
0,45	0,148	6,72	1,45	0,431	2,21
0,50	0,163	6,07	1,50	0,443	2,15
0,55	0,180	5,52	1,55	0,455	2,09
0,60	0,195	5,07	1,60	0,466	2,03
0,65	0,211	4,69	1,65	0,478	1,97
0,70	0,227	4,36	1,70	0,489	1,92
0,75	0,241	4,09	1,75	0,500	1,88
0,80	0,256	3,84	1,80	0,510	1,84
0,85	0,271	3,62	1,85	0,521	1,79
0,90	0,286	3,43	1,90	0,531	1,75
0,95	0,300	3,26	1,95	0,541	1,71
1,00	0,314	3,11	2,00	0,551	1,68

логнормального закона, а при вариации $\eta < 0,3$ они становятся практически идентичными. Точки, представляющие распределения минимальных и максимальных значений Гумбеля, лежат на кривой, представляющей логнормальный закон. Именно поэтому для задач, в которых закон распределения экстремальных значений четко выражен с физической точки зрения, широкое применение находил логнормальный закон распределения [229, 237]. Это следует из того, что с точностью до моментов 4-го порядка распределение Гумбеля является частным случаем логнормального закона с отрицательной или положительной асимметрией. Кроме того, логнормальный закон близок к экспоненциальному, что позволяет использовать его для описания величин, распределение которых отвечает экспоненциальному закону. В области асимметрии $A=1,0$ он близок к

обобщенному логистическому распределению, которое в последнее время широко используется для анализа прочностных свойств материалов, и, в частности, углей и некоторых типов горных пород [90].

Таблица 6.3

Зависимость коэффициентов вариации η от асимметрии A

A	0,25	0,5	0,75	1,00	1,25	1,50
η	0,08	0,16	0,24	0,32	0,40	0,47

Логнормальное распределение для одной и той же асимметрии всегда более островершинно, чем гамма-распределение и распределение Вейбулла. При одних и тех же коэффициентах эксцесса положительная скошенность этих типов распределений всегда больше, чем у логнормального [238]. Но поскольку кривые, представляющие гамма-распределение и распределение Вейбулла, близки друг к другу, то при небольшом объеме статистического материала они в равной степени будут аппроксимировать эмпирические гистограммы и практически будут идентичны [239].

Логнормальное распределение рекомендуется применять для описания умеренно ($0,25 < \beta_1 < 0,75$) и сильно ($0,75 < \beta_1 < 1,25$) асимметричных эмпирических распределений прочности горных пород с коэффициентами эксцесса ($2,5 < \beta_2 < 3,5$) и ($3,5 < \beta_2 < 6,5$) соответственно.

Логнормальный закон обладает рядом полезных свойств [240], которые играют важную роль при оценке надежности механических конструкций, систем и подземных сооружений. Во многих задачах надежности приходится рассматривать отношение положительных случайных величин – «обобщенных» значений прочности и напряжений в условиях моделей «нагрузка-прочность» и применения так называемого недифференцированного коэффициента запаса прочности. Если рассматриваемые случайные величины имеют двухпараметрические логнормальные распределения, то отношение их будет распределено

точно по логнормальному закону распределения. Для трехпараметрических логнормальных распределений отношение этих случайных величин будет распределено только приближенно логнормально. Оказывается, если не налагать на рассматриваемые случайные величины жестких требований, а потребовать только их представимости в виде произведения достаточно большого числа сомножителей, то в пределе (по закону больших чисел) для отношения таких случайных величин получим асимптотически логарифмически нормальное распределение [241]. Наличие таких свойств у логнормального распределения позволяет его эффективно использовать в тех задачах надежности, где приходится оперировать с отношениями случайных величин, для которых отсутствует информация об их функциях распределения.

Исходя из изложенного выше, определим коэффициент структурного ослабления на основе гипотезы о логарифмически нормальном распределении прочности структурных элементов породного массива.

6.2. Определение коэффициента структурного ослабления на основе гипотезы о логарифмически нормальном распределении прочности структурных элементов породного массива

Предположим, что минимальное значение прочности R структурных элементов рассматриваемой стохастической системы стремится к нулю и будем рассматривать двухпараметрическое логнормальное распределение. Такое предположение идет в запас прочности.

Как указывалось выше, логарифмически нормальное распределение описывает случайную величину, логарифм которой распределен по нормальному закону с параметрами a и σ , т.е. плотность распределения случайной величины $z = \ln R$ имеет вид (6.6).

Вероятность того, что случайная величина z не окажется ниже некоторого предельного значения z_m , равна

$$p(z_m < z < \infty) = 1 - F[(z_m - a)/\sigma].$$

Здесь функция $F(z)$ определяется относительно переменной $z = \ln R$ в соответствии с (5.7). Разрешим это уравнение относительно z_m :

$$z_m = a + \sigma \arg F_0(1 - p).$$

Возвращаясь к случайной величине R , получим выражение для прочности массива:

$$R_m = \exp(a + \sigma \arg F_0(1 - p)). \quad (6.16)$$

Коэффициент структурного ослабления, также как и во всех предыдущих случаях, выразим через относительную вариацию прочности структурных элементов η . Разделив обе части (6.16) на величину математического ожидания m_l , получим:

$$k_c = \exp\left(\sigma \arg F_0(1 - p) - \frac{\sigma^2}{2}\right).$$

Учитывая, что $\eta^2 + 1 = \exp(\sigma^2)$, получим окончательно

$$k_c = \frac{\exp(\arg F_0(1 - p) \cdot \sqrt{\ln(\eta^2 + 1)})}{\sqrt{\eta^2 + 1}}. \quad (6.17)$$

Исследуем полученную зависимость. При $\eta=0$, т.е. при идеально однородной среде, коэффициент структурного ослабления равен единице, и прочность массива совпадает с прочностью его структурных элементов (образцов). С увеличением коэффициента вариации, т.е. с ростом степени неоднородности среды, коэффициент структурного ослабления уменьшается, уменьшая тем самым прочность массива. При $\eta \rightarrow \infty$ функция (6.17) асимптотически приближается к нулю. Данные соотношения, а также характер изменения зависимости (6.17) (рис. 6.2) вполне соответствуют физической сути коэффициента структурного ослабления.

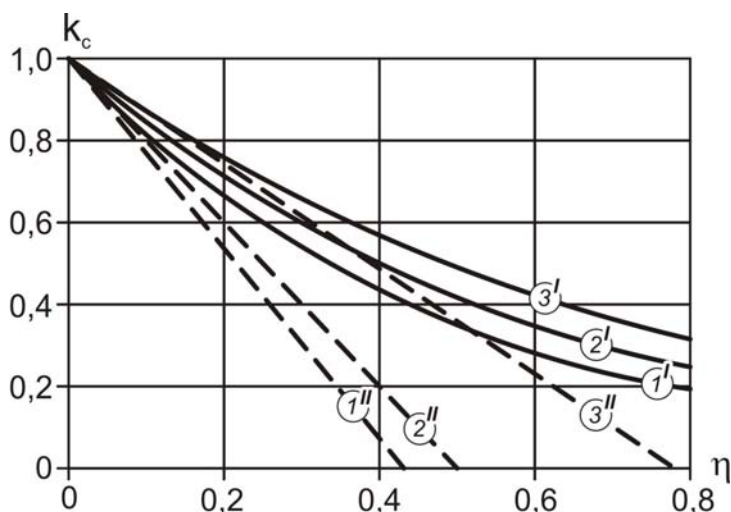


Рис. 6.2. Зависимость коэффициента структурного ослабления от относительной вариации прочности и уровня надежности (вероятности p): I – логарифмически нормальный закон распределения; II – нормальный закон распределения; 1 – $p=0,99$; 2 – $p=0,95$; 3 – $p=0,9$ соответственно

правленной» вариации η' , определяемой в зависимости от расстояния между трещинами и угла их падения по формулам (6.1).

На рис. 6.3 показана зависимость коэффициента структурного ослабления от расстояния между трещинами и угла падения основной системы трещин. Там же показано (горизонтальные линии), насколько близко соответствуют значения коэффициента структурного ослабления, рекомендуемые в СНиП-П-94-80 [219], вычисленным по предлагаемым зависимостям. Совпадение достаточно близкое, с той разницей, что формула (6.17) позволяет для конкретных горно-геологических условий получить однозначно искомую величину. Пользуясь же существующим стандартом это сделать невозможно.

Определим в качестве примера коэффициент структурного ослабления для следующих данных, полученных в результате лабораторных испытаний образцов: средняя прочность образцов $\bar{R}=40\text{МПа}$; коэффициент вариации прочности

Количественная оценка отличия прочности массива от средней прочности породных образцов – коэффициент структурного ослабления k_c – выражена через относительную вариацию прочности структурных элементов массива (породных образцов) η , отражающую степень неоднородности среды на микроуровне. Неоднородность, обусловленная наличием макродефектов, в частности систем трещин, должна быть учтена путем введения в расчетную формулу (6.17) «ис-

образцов $\eta=0,35$. Пусть по данным натуральных наблюдений в массиве преобладают кососекущие трещины с углом падения $40-45^0$, среднее расстояние между которыми $m=0,1$ м. Такая густота трещин характерна для маломощных пород с небольшой прочностью, например, для аргиллитов [148]. В соответствии со СНиП [219], при расстояниях между трещинами $0,5...0,1$ м величину k_c , согласно таблице 5.4, следует принять равной 0,4. Получим теперь эту величину на основе вероятностно-статистического подхода.

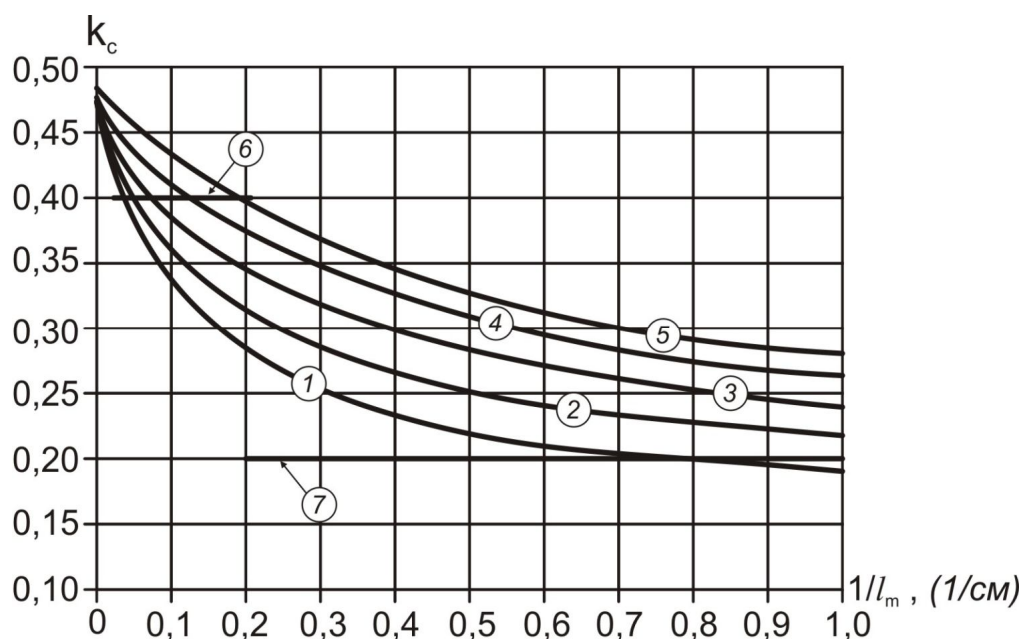


Рис. 6.3. Зависимость коэффициента структурного ослабления от расстояния между трещинами и угла падения основной системы трещин при относительной вариации прочности образцов $\eta=0,5$ и при углах падения трещин:

1 – $\alpha=20^0-45^0$; 2 – $\alpha=50^0-65^0$; 3 – $\alpha=70^0-75^0$; 4 – $\alpha=75^0-80^0$; 5 – $\alpha=85^0-90^0$;

6, 7 – рекомендации СНиП

Исходя из значения относительной вариации, можно было бы выдвинуть гипотезу о нормальном распределении структурных элементов, и тогда по формуле (5.8), задаваясь надежностью $p=0,95$, получим, что $k_c = 0,59$. Таким образом, без учета наличия трещин значение коэффициента структурного ослабления получается завышенным по сравнению со значением, рекомендуемым СНиП.

Учтем теперь наличие макродефектов по методике, изложенной выше. При размере стандартного образца $l_0 = 0,05$ м получим, что $m/l_0 = 2$.

Для кососекущих трещин функция снижения прочности в соответствии с (5.49) равна $f(\alpha) = 0,3$. Тогда относительная вариация η' для «исправленного» статистического ряда в соответствии с (6.1) или графиком 6.1 будет равна 0,8. При таком значении относительной вариации гипотеза о нормальном распределении должна быть отвергнута. Значения асимметрии и эксцесса свидетельствуют в пользу логарифмически нормального распределения. Тогда по формуле (6.17) получим, что $k_c = 0,25$. Эта величина на 37% меньше величины, рекомендованной СНиП. Соответственно меньшим будет и расчетное значение прочности массива на сжатие.

При расстоянии между трещинами, равном 0,5 м, в соответствии со СНиП величина коэффициента структурного ослабления будет такой же как и в предыдущих расчетах, т.е. $k_c = 0,4$. На основе вероятностного подхода для этого случая получим: $m/l_0 = 10$; $\eta' = 0,55$; $k_c = 0,38$. Таким образом, в соответствии с СНиП уменьшение расстояния между трещинами от 0,5 м до 0,1 м не оказывает влияние на величину прочности породного массива. В соответствии с расчетом по предложенной методике эта величина уменьшается на 35%.

7. ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К УСТОЙЧИВОСТИ ПОДЗЕМНЫХ ВЫРАБОТОК

Вокруг подземных выработок при определенном сочетании прочности вмещающего породного массива, его структуры и глубины расположения образуется замкнутая область пластично деформированных пород. Размеры этой области и величина смещений контура выработки определяют ее устойчивость. Аналитические решения упругопластических задач ограничены, как правило, простой моделью среды (сплошная, изотропная, однородная) и формой выработки (круглая). Математическое же моделирование упругопластического деформирования реального структурно неоднородного породного массива, ослабленного подземной выработкой сложного очертания, может быть осуществлено только с использованием численных методов, например, метода конечных элементов (МКЭ). При этом возникает ряд проблем, связанных с верификацией модели деформирующейся среды, которые требуют особого подхода и обоснованных допущений.

7.1. Упругопластическая задача плоского деформирования для среды с разупрочнением вокруг горизонтальной выработки круглой формы

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние однородного изотропного упругого породного массива в окрестности длинной одиночной горизонтальной выработки кругового очертания, расположенной на глубине H от земной поверхности и не испытывающей влияния очистных работ (рис. 7.1). Радиус выработки – R_0 , к ее контуру приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивностью P_0 , равная отпору крепи. Породную среду, обладающую пределом прочности на сжатие R_c , в пределах зоны влияния выработки полагаем невесомой. Ошибка вследствие подобной идеализации тем меньше, чем больше глубина расположения выработки и, как показано в работах [254, 255], величина ее не превышает 1 %.

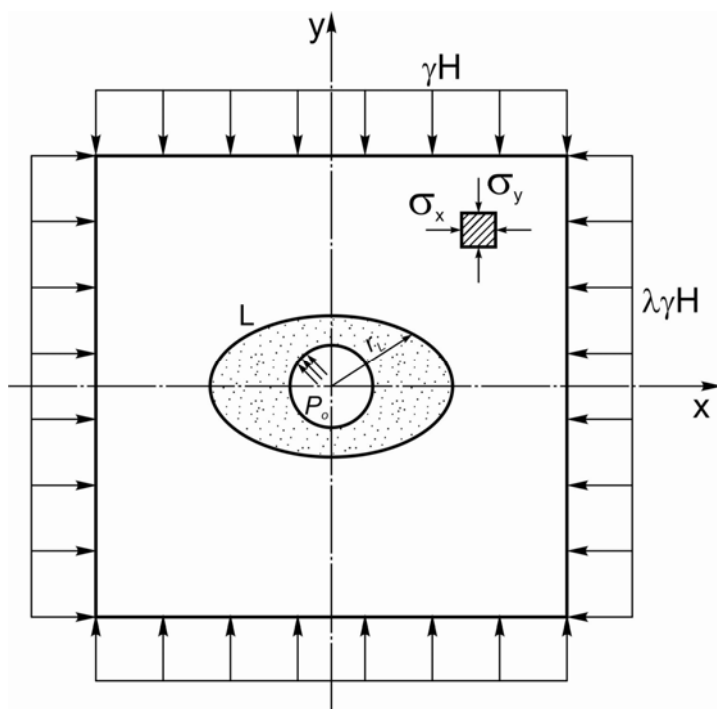


Рис. 7.1. Расчетная схема к решению задачи о равновесии породного массива в окрестности одиночной горизонтальной выработки ($\lambda \neq 1$)

В направлении осей X и Y на бесконечности приложены внешние равномерно распределенные нагрузки, которые могут быть либо не равны друг другу ($\lambda \neq 1$), либо равны ($\lambda = 1$) (здесь λ – коэффициент бокового распора). Величина этих нагрузок такова, что вокруг выработки образуется область пластических деформаций, полностью охватывающая ее контур. Деформирование и разрушение породной среды происходит в режиме заданных деформаций со стороны упруго сжатой части массива. И в упругой, и в пластической областях сохраняется гипотеза о сплошности среды. Поскольку перемещение породного массива в направлении продольной оси выработки невозможно, рассматривается случай плоской деформации. В результате решения задачи следует определить компоненты напряжений, деформаций и перемещений в упругой и неупругой областях, а также размеры и форму контура L , разделяющего эти области.

Наиболее сложным случаем задачи, сформулированной выше, является тот вариант, когда внешние, приложенные вдоль горизонтальной и вертикальной осей, усилия неодинаковы, то есть коэффициент бокового распора λ не равен единице.

Расчетная схема, показанная на рис. 7.1, является достаточно общей, поскольку при наличии на бесконечности касательных напряжений (например, вследствие неотектоники) всегда можно в качестве осей координат выбрать на-

В направлении осей X и Y на бесконечности приложены внешние равномерно распределенные нагрузки, которые могут быть либо не равны друг другу ($\lambda \neq 1$), либо равны ($\lambda = 1$) (здесь λ – коэффициент бокового распора). Величина этих нагрузок такова, что вокруг выработки образуется область пластических деформаций, полностью охватывающая ее контур. Де-

правления главных напряжений. В результате распределение нагрузок на бесконечности будет соответствовать принятому в задаче.

В произвольной точке породного массива с координатами X, Y компоненты напряжений удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (7.1)$$

и условию совместности деформаций

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \times (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (7.2)$$

В области пластических деформаций, кроме того, имеет место физическое уравнение

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2k \left(\frac{A}{r^2} - B \right). \quad (7.3)$$

Здесь и далее все величины, имеющие размерность длины и перемещений, отнесены к радиусу выработки R_0 .

При этом полагается, что касательные напряжения в пластической области отсутствуют ($\tau_{r\theta} = 0$), вследствие чего напряженное состояние является осесимметричным.

Обозначим компоненты напряжений в пластической области посредством индекса 1, помещенного сверху, а напряжения в упругой области – без индекса.

Граничные условия имеют вид:

на контуре выработки

$$\tau_{r\theta}^{(1)} \Big|_{R=R_0} = 0, \quad \sigma_r^{(1)} \Big|_{R=R_0} = p_0; \quad (7.4)$$

на бесконечности

$$\sigma_x^\infty = \lambda \gamma H; \quad \sigma_y^\infty = \gamma H; \quad \tau_{xy}^\infty = 0. \quad (7.5)$$

На границе L между пластической и упругой областями напряжения непрерывны:

$$\sigma_x^{(1)} = \sigma_x; \quad \sigma_y^{(1)} = \sigma_y; \quad \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}. \quad (7.6)$$

Для определения компонентов поля напряжений в пластической области введем в рассмотрение функцию напряжений $F(r)$, которая связана с ними зависимостями (2.8) и определяется в соответствии с выражением (2.9):

$$F(r) = 2k \left[r^2 \left(C_1 + \frac{B}{4} \right) - \frac{B}{2} r^2 \ln r - \frac{A}{2} \left(\ln r + \frac{1}{2} \right) \right] + C_1 r^2 + C_2. \quad (7.7)$$

Используя второе граничное условие на контуре выработки (7.4), найдем значение постоянных интегрирования:

$$C_1 = \frac{P_0}{2k} + \frac{A}{4}; \quad C_2 = 0. \quad (7.8)$$

Тогда, с учетом (7.8) выражение (7.7) примет вид:

$$F(r) = 2k \left[\frac{r^2}{2} \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{P_0}{k} \right) - \frac{B}{2} r^2 \ln r - \frac{A}{2} \left(\ln r + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (7.9)$$

Используя выражение (7.9) и формулу (7.7), определим компоненты напряжений в пластической области:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{dF}{dr} = 2k \left[\frac{A}{2} \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) - B \ln r + \frac{P_0}{2k} \right], \\ \sigma_\theta^{(1)} &= \frac{d^2 F}{dr^2} = 2k \left[\frac{A}{2} \left(1 + \frac{1}{r^2} \right) - B(\ln r + 1) + \frac{P_0}{2k} \right], \\ \tau_{r\theta}^{(1)} &= 0. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Для упругой области имеют место соотношения Колосова-Мусхелишвили [256]:

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \Phi(z), \quad (7.11)$$

$$\sigma_x - \sigma_y + 2i \tau_{xy} = 2 \left[\bar{z} \Phi'(z) + \Psi(z) \right], \quad (7.12)$$

$$2G(u + iv) = (3 - 4\mu) \int \Phi(z) dz - z \overline{\Phi(z)} - \int \Psi(z) dz, \quad (7.13)$$

где $\Phi(Z)$ и $\Psi(Z)$ – некоторые аналитические функции комплексной плоскости Z ($Z = re^{i\theta}$); $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$, E – модуль Юнга, μ – коэффициент Пуассона, U и V – соответственно радиальный и тангенциальный компоненты перемещений; $Z = X + iY$.

Перейдем в формулах (7.11) и (7.12) от декартовых координат к полярным, принимая во внимание, что $\tau_{r\theta}^{(1)} = 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= \sigma_r + \sigma_\theta, \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= (\sigma_\theta - \sigma_r)e^{-2i\theta}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Тогда, в силу (7.6), (7.10) и (7.14), для контура L будут верны следующие соотношения:

$$\begin{aligned} 4\operatorname{Re}\Phi(z) &= 2k \left[2A + \frac{P_0}{k} - B(1 + 2\ln r) \right], \\ \bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z) &= 2k \left(\frac{A}{r^2} - B \right) e^{-2i\theta}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

При $|z| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{4}(\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) + O(z^{-2}), \\ \Psi(z) &= \frac{1}{2}(\sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty) + O(z^{-2}). \end{aligned} \quad (7.16)$$

Для решения краевой задачи используем метод Г.П. Черепанова, изложенный в работе [257]. Для этого перейдем на параметрическую плоскость комплексного переменного ξ при помощи преобразования $Z = \omega(\xi)$. Положим $\varphi(\xi) = \Phi[\omega(\xi)]$, $\psi(\xi) = \Psi[\omega(\xi)]$. В принятых обозначениях из условия сопряжения на L (7.6) получим на плоскости ξ следующую краевую задачу для определения трех неизвестных функций $\varphi(\xi), \psi(\xi), \omega(\xi)$:

$$\varphi(\xi) + \overline{\varphi(\xi)} = k \left(A - B + \frac{2P_0}{k} \right) - 2kB \ln \sqrt{\omega(\xi) \cdot \overline{\omega(\xi)}}, \quad (7.17)$$

$$\frac{\overline{\omega(\xi)}}{\omega'(\xi)} \varphi'(\xi) + \psi(\xi) = 2k \frac{A - B [\omega(\xi) \cdot \overline{\omega(\xi)}]}{[\omega(\xi)]^2}, \quad |\xi| = 1, \quad (7.18)$$

при $|\xi| \rightarrow \infty$

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{4} (\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) + O(\xi^{-2}), \quad (7.19)$$

$$\psi(\xi) = \frac{1}{2} (\sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty) + O(\xi^{-2}), \quad (7.20)$$

$$\omega(\xi) = O(\xi). \quad (7.21)$$

Рассмотрим в расширенной плоскости ξ функциональное уравнение

$$\frac{\varphi'(\xi)}{\omega'(\xi)} \overline{\omega\left(\frac{1}{\xi}\right)} + \psi(\xi) = k \frac{A - B \left[\omega(\xi) \overline{\omega\left(\frac{1}{\xi}\right)} \right]}{[\omega(\xi)]^2}, \quad (7.22)$$

решение которого будем искать в виде

$$\omega(\xi) = C_3 \xi + \overline{P}_\nu \left(\frac{1}{\xi} \right). \quad (7.23)$$

Здесь $P_\nu \left(\frac{1}{\xi} \right)$ – полином ν -й степени с неопределенными пока коэффициентами.

Подставляя формально выражение (7.23) в основное уравнение (7.22) и раскладывая все функции в ряд в окрестности бесконечно удаленной точки, получаем, что $\nu = 1$. Тогда

$$\omega(\xi) = C_3 \xi + \frac{C_4}{\xi}, \quad (7.24)$$

где C_3, C_4 – неизвестные константы, действительные из условия симметрии.

Для определения неизвестных постоянных рассмотрим в расширенной плоскости ξ функциональное уравнение (7.17). Обозначим правую его часть

через $f(\xi)$, внешность единичного круга с контуром L_1 через S^- , внутреннюю часть единичного круга через S^+ . Тогда уравнение (7.17) примет вид

$$\varphi(\xi) + \overline{\varphi(\xi)} = f(\xi). \quad (7.25)$$

Умножим каждое слагаемое выражения (7.25) на ядро Коши и проинтегрируем их по контуру L_1 . Получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - Z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\overline{\varphi(\xi)}}{\xi - Z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{f(\xi)}{\xi - Z} d\xi, \quad (7.26)$$

где $Z \in S^-$, $\xi \in L_1$.

Исходя из того, что функция $\varphi(\xi)$ голоморфна вне L_1 , непрерывна на L_1 и является граничным значением функции $\varphi(Z)$ при $Z \rightarrow \xi$, получим, что первое слагаемое в выражении (7.26) равно:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - Z} d\xi = 0; \quad \forall Z \in S^-. \quad (7.27)$$

Функция $\varphi(\xi)$ в нашем случае удовлетворяет условиям теоремы Коши для бесконечной области [258], в соответствии с чем второе слагаемое в (7.26) равно:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\overline{\varphi(\xi)}}{\xi - Z} d\xi = -\varphi(Z) + \varphi(\infty). \quad (7.28)$$

Если функция $f(Z)$ голоморфна в S^- , непрерывна в $(S^- + L_1)$ за исключением, быть может, конечных точек $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ этой области, а также точки $Z = \infty$, где она может иметь полюс с главными частями $G_1(Z), G_2(Z), \dots, G_n(Z), G_\infty(Z)$, то она может быть представлена следующим образом

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{f(\xi)}{\xi - Z} d\xi = -f(Z) + G_1(Z) + G_\infty(Z); \quad Z \in S^-, \quad (7.29)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{f(\xi)}{\xi - Z} d\xi = G_1(Z) + \dots + G_n(Z) + G_\infty(Z); \quad Z \in S^+. \quad (7.30)$$

Раскроем правую часть уравнения (7.26):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{f(\xi)}{\xi - Z} d\xi = \frac{2k}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{A - B + \frac{2P_0}{k}}{2(\xi - 2)} d\xi - \frac{2Bk}{4\pi i} \int_{L_1} \frac{\ln \omega(\xi)}{\xi - Z} d\xi - \frac{2Bk}{4\pi i} \int_{L_1} \frac{\ln \overline{\omega(\xi)}}{\xi - Z} d\xi. \quad (7.31)$$

Первые два слагаемые в выражении (7.31) удовлетворяют условиям (7.29) и (7.30), поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{A - B + \frac{2P_0}{k}}{2(\xi - Z)} d\xi = \frac{-\left(A - B + \frac{2P_0}{k}\right)}{2} + \frac{A - B + \frac{2P_0}{k}}{2} = 0 \text{ при } Z \rightarrow \infty,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\ln \omega(\xi)}{\xi - Z} d\xi = \ln \omega + G_\infty(Z) = -\ln \omega + \ln C_3 Z = -\ln \frac{\omega}{C_3 Z}.$$

Третье слагаемое в выражении (7.31) равно нулю по той же причине, что и (7.27). Таким образом, получаем

$$-\varphi(Z) + \varphi(\infty) = -\frac{1}{2} \ln \frac{\omega(Z)}{C_3 Z}, \quad \forall Z \in S^-. \quad (7.32)$$

Из граничного условия (7.19) при $Z \rightarrow \xi$ для функции $\varphi(\xi)$ находим

$$\varphi(\xi) = 0,25\gamma H(1 + \lambda) - Bk \ln \frac{\omega(\xi)}{C_3 \xi}. \quad (7.33)$$

Из уравнения (7.22) следует, что

$$\psi(\xi) = 2k \frac{A - B[\omega(\xi) \cdot \overline{\omega(\xi)}]}{[\omega(\xi)]^2} - \frac{\varphi'(\xi)}{\omega'(\xi)} \overline{\omega\left(\frac{1}{\xi}\right)}. \quad (7.34)$$

Учитывая, что

$$\omega(\xi) = C_3 \xi + \frac{C_4}{\xi}; \quad \overline{\omega\left(\frac{1}{\xi}\right)} = \frac{C_3}{\xi} + C_4, \quad \varphi'(\xi) = -\frac{C_4}{\xi(C_3 \xi^2 + C_4)},$$

получим

$$\psi(\xi) = 2k \frac{A - B[C_3^2 + C_4^2 + C_3 C_4(\xi^2 + \xi^{-2})]}{C_3^2 \xi^2 + C_4^2 \xi^{-2} + 2C_3 C_4} + \frac{C_4(C_4 \xi^2 + C_3)}{C_3^2 \xi^4 - C_1^2}. \quad (7.35)$$

Таким образом, поставленная задача решена с точностью до постоянных интегрирования.

Отметим, что при $\xi \rightarrow \infty$ $\psi(\xi) = -kB \frac{C_4}{C_3}$. С другой стороны, из (7.20) следует, что при $\xi \rightarrow \infty$ $\psi(\xi) = 0,5\gamma H(1 - \lambda)$.

Приравнивая эти два выражения, находим:

$$C_4 = C_3 \frac{\gamma H(1 - \lambda)}{2Bk}. \quad (7.36)$$

В соответствии с теоремой о среднем для гармонической функции

$$\int_L \frac{\varphi(\xi) + \overline{\varphi(\xi)}}{2\xi} d\xi = 0. \quad (7.37)$$

Образум функцию, сопряженную (7.33), и проинтегрируем $R_e f(\xi)$ согласно (7.37). Ту же процедуру выполним для уравнения (7.34).

Приравнивая полученные выражения, найдем постоянную C_3 :

$$C_3 = \exp\left[\frac{A}{2B} - \frac{\gamma H}{4Bk}(1 + \lambda) + \frac{P_0}{2B} - \frac{1}{2}\right]. \quad (7.38)$$

Таким образом, постоянные интегрирования определены. Граница L между упругой областью и областью разрушения представляет собой эллипс, уравнение которого имеет вид

$$\frac{X^2}{C_3^2(1 + \beta)^2} + \frac{Y^2}{C_3^2(1 - \beta)^2} = 1, \quad (7.39)$$

где

$$\beta = \frac{\gamma H(1 - \lambda)}{2Bk}.$$

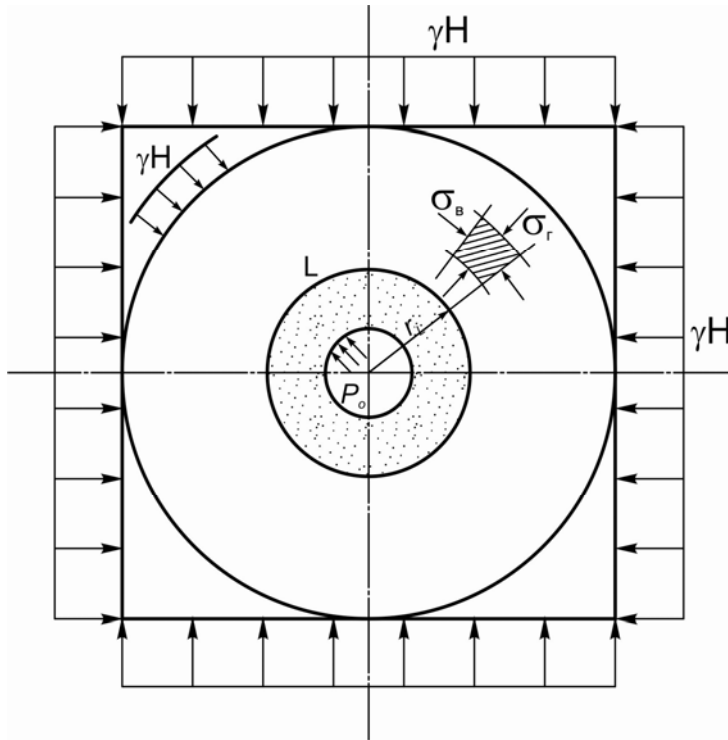


Рис. 7.2. Расчетная схема к решению задачи о равновесии породного массива в окрестности одиночной горизонтальной выработки ($\lambda=1$)

Конечные выражения такого решения отличаются существенной сложностью, что затрудняет их исследование и практическое использование. В [232], основываясь на работах Ж.С. Ержанова, делается вывод о том, что в пределах верхнего слоя литосферы, где, собственно, и ведутся горные работы, в горизонтально залегающих осадочных породах для широкого диапазона горно-геологических условий можно считать, что

напряжения в нетронутом породном массиве распределены гидростатически, т.е. $\lambda=1$. В этом случае решение поставленной задачи существенно упрощается, поскольку контур эллипса L вырождается в круг. Расчетная схема, используемая для решения задачи, приведена на рис. 7.2.

Для рассматриваемой одномерной задачи запишем в полярной системе координат исходные соотношения:

– уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} = 0; \tag{7.40}$$

– уравнение совместности деформаций

$$\frac{d^2\varepsilon_\theta}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} - \frac{1}{r} \cdot \frac{d\varepsilon_r}{dr} = 0; \tag{7.41}$$

– соотношения Гука

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2G}[(1 - \mu)\sigma_r - \mu\sigma_\theta], \quad (7.42)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{2G}[(1 - \mu)\sigma_\theta - \mu\sigma_r]; \quad (7.43)$$

– соотношения Коши

$$\varepsilon_r = \frac{dU}{dr}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{U}{r}, \quad (7.44)$$

где σ_r , σ_θ и ε_r , ε_θ – соответственно радиальный и тангенциальный компоненты напряжений и деформаций, U – радиальное перемещение, G – модуль сдвига, μ – коэффициент Пуассона, r – полярная координата.

Здесь и далее все величины, имеющие размерность длины и перемещений, по-прежнему отнесены к радиусу выработки R_0 . Граничные условия и условия сопряжения имеют вид:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \gamma H \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad (7.45)$$

$$\sigma_r = P_0 \quad \text{при } r = 1, \quad (7.46)$$

$$\sigma_r = \sigma_r^{(1)}, \quad U_r = U_r^{(1)} \quad \text{при } r = r_L. \quad (7.47)$$

Будем обозначать все компоненты напряжений и перемещений в упругой области без индекса, а в пластической – с индексом 1.

Решив уравнение Эйлера, полученное из (7.41), удовлетворяя граничным условиям (7.45), получим формулы для определения компонентов напряжений в упругой области

$$\sigma_r = \gamma H - \frac{C}{r^2}; \quad \sigma_\theta = \gamma H + \frac{C}{r^2}, \quad (7.48)$$

где C – неизвестная постоянная интегрирования, определяемая из условий сопряжений радиальных напряжений на контуре L (7.47).

В области неупругих деформаций справедливо физическое уравнение:

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2k \left(\frac{A}{r^2} - B \right), \quad (7.49)$$

где k – некоторая константа, зависящая от исходных физических предпосылок, заложенных в условие прочности, определяемая в нашем случае выражением (3.10); A и B – константы, которые можно установить на основе выражений (2.15).

Решая это уравнение совместно с уравнением равновесия (7.40), получим с учетом граничных условий (7.46) выражения для компонентов напряжений в пластической области

$$\sigma_r^{(1)} = -2k[0,5A(r^{-2} - 1) + B \ln r] + P_0, \quad (7.50)$$

$$\sigma_\theta^{(1)} = -2k[0,5A(r^{-2} + 1) + B \ln r] + P_0. \quad (7.51)$$

При $r = r_L$, учитывая равенство радиальных напряжений, определяемых формулами (7.48) и (7.50), получим значение неизвестной постоянной интегрирования $C = kr_L^2$.

Таким образом, компоненты напряжений в упругой и пластической областях определены. Тогда, используя (7.47), (7.50), получим трансцендентное выражение для определения радиуса области неупругих деформаций:

$$0,5A(r_L^{-2} - 1) + B \ln r_L = \frac{\gamma H - P_0}{2k} - \frac{1}{2}. \quad (7.52)$$

Из (7.52) следует, во-первых, что отпор крепи P_0 чрезвычайно мало влияет на размеры области неупругих деформаций, поскольку величина его на глубоких горизонтах шахт несоизмеримо меньше гравитационного давления γH . В этой связи в формуле (7.52) без ущерба для точности можно положить $P_0=0$. Во-вторых, для подавляющего большинства углевмещающих горных пород величина ψ , входящая в выражение (3.10), приблизительно равна 0,1, и если положить ее в таком случае равной нулю, то ошибка от подобной идеализации не превысит 5 %.

Основываясь на анализе зависимостей $r_L = f\left(\frac{R_c k_c}{\gamma H}\right)$ для различных значений коэффициента остаточной прочности k_{ocm} (см. раздел 2.1), приведенном в [232], положим, что $k_{ocm} = 0$. Тогда, окончательная формула для определения радиуса области неупругих деформаций на основе (7.52) примет вид

$$\frac{r_L^2 \ln r_L}{r_L^2 - 1} = \sqrt{\frac{\gamma H}{R_c k_c}}. \quad (7.53)$$

Используя соотношения Коши (7.44), выражение для функции разупрочнения (2.19), учитывая, что $\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = \varepsilon_v$, получим неоднородное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dU}{dr} + \frac{U}{r} = \varepsilon_v^* \left(1 + B - \frac{A}{r^2}\right), \quad (7.54)$$

где ε_v^* – предельная объемная деформация в условиях одноосного сжатия.

Решение соответствующего однородного уравнения имеет вид:

$$U = C \cdot r^{-1}. \quad (7.55)$$

Варьируя постоянную, получим с учетом равенства радиальных перемещений на контуре L выражение для определения перемещений в пластической области:

$$U = \frac{\varepsilon_v^*}{2r} \left[(B+1) \cdot (r^2 - r_L^2) - 2A \ln \frac{r}{r_L} \right]. \quad (7.56)$$

С учетом (7.53) и (2.15) при $k_{ocm} = 0$ получим выражение для определения смещений на контуре выработки:

$$U_0 = \varepsilon_v^* \left(0,5 - \sqrt{\frac{\gamma H}{R_c k_c}} \right). \quad (7.57)$$

Основные зависимости для определения параметров упругопластического состояния породного массива в окрестности одиночной выработки (7.53) и (7.57), полученные выше, позволяют определить некоторые (точечные) значения вероятностных по своей природе величин: радиуса области неупругих деформаций r_L и радиальных смещений на контуре выработки U_0 .

Определим радиус области неупругих деформаций и величину перемещений контура выработки для средних условий Западного Донбасса при следующих исходных данных:

- глубина расположения выработки $H = 350$ м;
- предел прочности на одноосное сжатие $\sigma_c = 25$ МПа;
- объемная плотность, $\gamma = 2,50 \cdot 10^{-3}$ МН/м³;
- радиус выработки $R_0 = 2,0$ м;
- коэффициент структурно-механического ослабления $k_c = 0,33$;
- предельное значение объемной деформации в условиях одноосного сжатия $\varepsilon_v^* = -0,1$.

Согласно выражениям (7.53) и (7.57), для этих условий получим, что $r_L = 2,3$, а $U_0 = 0,38$ м.

7.2. Алгоритм численного решения упругопластической задачи

Из испытаний на одноосное сжатие в условиях заданных деформаций известно, что существует некоторое предельное напряжение сжатия $\sigma = R_c$, вплоть до достижения которого материал деформируется практически по линейному закону. Диаграмма деформирования « $\sigma - \varepsilon$ » становится все более пологой в окрестности точки (R_c, ε_c) , где R_c – предел прочности на одноосное сжатие, ε_c – деформация, соответствующая R_c . В самой точке (R_c, ε_c) $d\sigma/d\varepsilon = 0$, после чего деформирование характеризуется ниспадающей ветвью, которая имеет отрицательную кривизну ($d^2\sigma/d\varepsilon^2 < 0$) и стремится к некоторым остаточным напряжениям и деформациям разрушения (R_*, ε_*) . Обобщенный

вид диаграммы деформирования в соответствии с исследованиями, изложенными в разделе 2, показан на рис. 7.3.

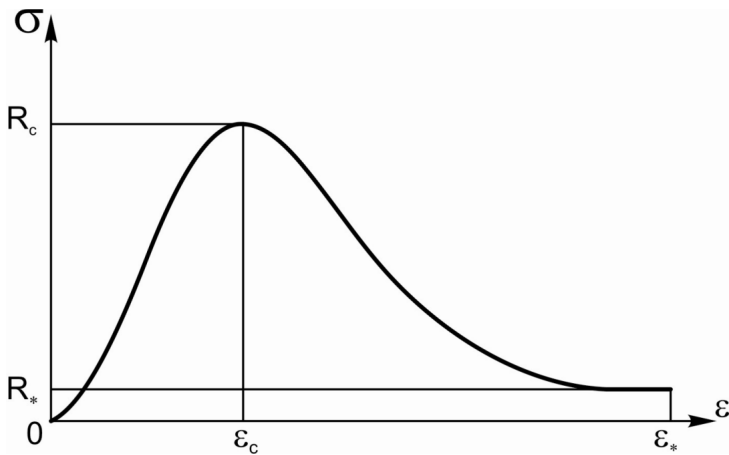


Рис. 7.3. Обобщенный вид диаграммы деформирования горной породы в режиме заданных деформаций

В работе [259] показано, что наличие ниспадающей ветви диаграммы деформирования (т.е. участка разупрочнения) приводит к тому, что в области разрыхления так называемое условие сверхустойчивости по Адамару, приведенное в работе [260], не выполняется, что с теоретической точки зрения приводит к неединственности решения

краевой задачи. При использовании численных методов это означает, что система уравнений относительно перемещений становится вырожденной, в результате чего вычислительный процесс не может быть продолжен. Таким образом, ни одна из «традиционных» моделей деформирования сплошных сред, в том числе и нелинейная теория упругости, в данном случае неприменимы. В работе [261] была предложена модель пошагового «упругого» решения рассматриваемой задачи. Данная модель является аналогом известного в механике деформируемого твердого тела метода упругих решений, который часто применяется для решения краевых упругопластических задач с упрочнением. Схематически этот метод изложен, например, в [262].

Необходимо отметить, что численная модель, предложенная в [261], не лишена некоторых упрощений и идеализации. Например, в ней учитывалась только «верхняя» часть полной диаграммы деформирования горных пород, отражающая продольные деформации образца, нагружаемого в режиме заданных деформаций, и не учитываются полные, объемные, деформации. Это приводит

к тому, что результаты моделирования [263], полученные при использовании алгоритма, построенного на основе этой модели, достаточно хорошо отражают распределение напряжений в окрестности выработки, но дают существенно заниженные значения перемещений, что не совпадает с данными натурных измерений. В этой связи требуется уточнение описанной в [259] процедуры пошагового решения и учета в алгоритме численной реализации той части диаграммы деформирования, которая отвечает объемным деформациям образца при испытаниях за пределом прочности и которая ответственна за перемещения в окрестности выработки.

Итак, любая произвольно выбранная точка в окрестности выработки находится в условиях трехкомпонентного напряженного состояния, уровень которого таков, что вокруг выработки образуется область горных пород с частично разрушенными вследствие «жесткого» деформирования связями. Объемное напряженное состояние можно заменить эквивалентным одноосным, используя подходящий критерий прочности [73]. Выдвигается гипотеза соответствия: характер изменения эквивалентных напряжений в окрестности выработки в точности совпадает с кривой разрушения породного образца в режиме заданных деформаций.

Рассмотрим идеализированную диаграмму деформирования, состоящую из трех частей (рис. 7.4): линейного участка чисто упругой деформации OA , ниспадающей ветви предельных напряженных состояний AB и ветви OC , описывающей объемные деформации $-\varepsilon_v$. Точка A соответствует предельным напряжениям и деформациям упругости ($\sigma = R_c, \varepsilon = \varepsilon_c, \varepsilon_v = 0$), а точки B и C – напряжениям и деформациям окончательного разрушения ($\sigma = R_*, \varepsilon = \varepsilon_*, \varepsilon_v = \varepsilon_{v(*)}$).

Пусть задано некоторое количество шагов n , за которое должна быть достигнута некоторая деформация $\varepsilon_n, \varepsilon_c < \varepsilon_n \leq \varepsilon_*$. Отметим, что в данной ситуации задание пути по деформациям является единственно возможным, поскольку любому значению напряжения σ , которое находится в пределах $R_* < \sigma < R_c$,

соответствуют два значения деформации (на упругом и ниспадающем участках). Это согласуется с выдвинутой гипотезой, в соответствии с которой упруго деформированная часть породного массива, размеры и жесткость которого можно считать бесконечно большими, выполняет роль нагружающего устройства кинематического типа по отношению к зоне (области) неупругих деформаций (ЗНД).

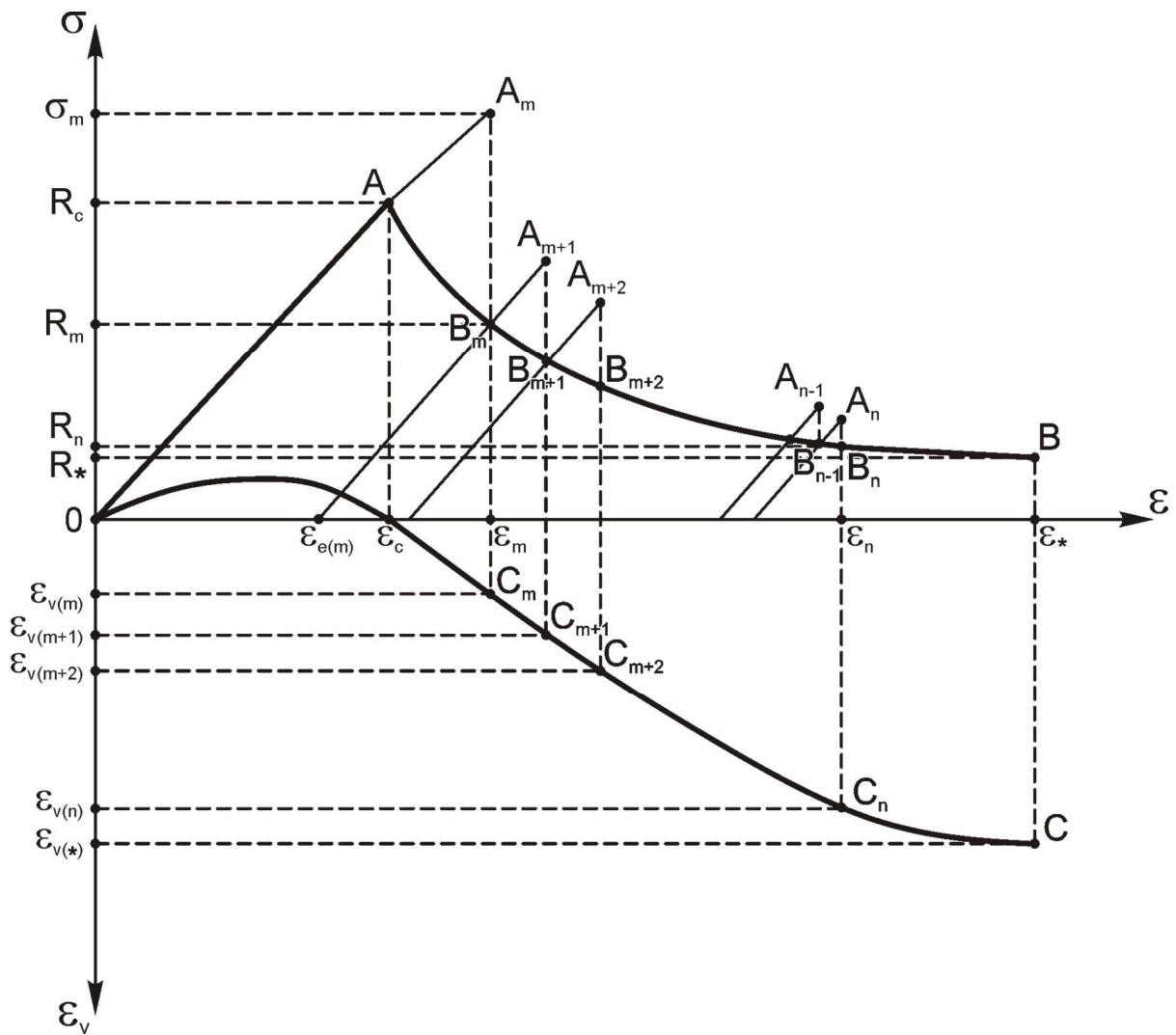


Рис. 7.4. К описанию модели пошагового решения, учитывающего объемные деформации горной породы за пределом прочности

Пусть также ниспадающая ветвь диаграммы определена некоторым функциональным соотношением [259]

$$\sigma = R_c - f\left(\varepsilon - \frac{R_c}{E}\right); \quad f(0) = 0, \quad \frac{df}{d\varepsilon} > 0, \quad (7.58)$$

где E – модуль Юнга.

Ниспадающая ветвь диаграммы, в соответствии с предлагаемой физической моделью, представляет собой геометрическое место точек предельных состояний, эквивалентных одноосному нагружению породного образца с остаточными упругими и частично разрушенными структурными связями, что соответствует наличию в произвольной точке B_i ЗНД упругой и диссипативной энергии. В частности, функция f может являться кусочно-линейной аппроксимацией результатов испытаний на одноосное сжатие.

Предположим, что в пошаговом процессе чисто упругого деформирования на участке OA на некотором шаге m предельная величина напряжения R_c была превышена таким образом, что конечной точкой шага является некоторая точка $A_m(\varepsilon_m, \sigma_m)$. В соответствии с функциональной зависимостью (7.58) может быть определена точка $B_m(\varepsilon_m, R_m)$, лежащая на ниспадающей ветви AB диаграммы деформирования. Тогда величины ε_m , $\varepsilon_{e(m)} = R_m/E$, $\varepsilon_{d(m)} = \varepsilon_m - \varepsilon_{e(m)}$ представляют собой соответственно полную, упругую и диссипативную (остаточную) деформации в точке B_m . Объемную деформацию в точке B_m определим, используя кривую объемных деформаций ε_v . Так, точке B_m поставлена в соответствие точка C_m , лежащая на кривой объемных деформаций, и соответствующее ей значение $\varepsilon_{v(m)}$.

Таким образом, используя ниспадающую кривую диаграммы деформирования, мы определяем предельное напряженное состояние в точке B_m , при этом нижняя часть диаграммы позволяет получить объемные деформации и, при известном из экспериментов соотношении между продольными и поперечными составляющими, перемещения в заданной точке приконтурного пространства.

Введем величину $\sigma_{0(m)} = R_m - \sigma_m$, которую назовем начальным напряжением для шага m в рассматриваемой точке разрыхленной части породного массива. Начальные напряжения будут играть существенную роль при конечно-элементном решении граничной задачи.

На шаге $m + 1$ вновь производится чисто упругое решение задачи, но уже исходя из точки B_m . В результате достигается точка A_{m+1} , в соответствии с уравнением (7.58) определяются точки B_{m+1} , C_{m+1} (см. рис. 7.4) и аналогично вышеописанному – величины ε_{m+1} , $\varepsilon_{v(m+1)}$, R_{m+1} и $\sigma_{0(m+1)}$ (на рисунке не показаны). Затем процесс повторяется до тех пор, пока на последнем шаге n не будет достигнута конечная деформация ε_n в точке $B_n(\varepsilon_n, R_n)$. Таким образом, на протяжении всего процесса решения имеет место выход на ниспадающие участки диаграммы, которые являются геометрическим местом точек предельных упругих состояний материала [259].

Отметим, что в методе упругих решений для упрочняющихся материалов [262] на каждом шаге вместо упругого модуля E часто используется пластический касательный модуль $E_{tg\,nl} = d\tilde{\sigma}/d\tilde{\varepsilon}_{nl} > 0$ в текущей точке диаграммы, где $\tilde{\sigma}$ является интенсивностью напряжений, а $\tilde{\varepsilon}_{nl}$ – интенсивностью пластических деформаций. Для разупрочняющихся материалов, одним из которых является разрыхленная горная порода, использование касательного модуля не является желательным, поскольку $E_{tg} < 0$.

Для решения краевой задачи метод, описанный выше, следует обобщить на случай трехосного напряженного состояния. Здесь нет возможности воспользоваться, например, гипотезой единой кривой (как в деформационной теории пластичности) или гипотезой, что касательный модуль E_{tg} является универсальной функцией интенсивности пластических деформаций $\tilde{\varepsilon}_{nl}$ (как в теории течения с изотропным упрочнением). Это вызвано тем, что горные породы при растяжении и сдвиге ведут себя совершенно иначе, чем при сжатии. В частности, экспериментально установлено, что для многих пород предельное напряжение при растяжении $R_p \approx 0,1R_c$, а при сдвиге, как было показано в разделе 3.1, соответствующее предельное напряжение составляет $R_\tau \approx 0,5\sqrt{R_p R_c}$.

Рассмотрим сначала случай сдвиговых деформаций. Пусть мы имеем некоторую точку $D(\varepsilon, \sigma)$, полученную из эксперимента на одноосное сжатие (при

этом мы исходим из того, что в этой точке выполняется равенство (7.58)). Нашей задачей является поставить ей в соответствие другую точку – $S(\gamma, \tau)$. Тогда всем точкам ниспадающей ветви диаграммы одноосного сжатия будут поставлены в соответствие точки ниспадающей ветви диаграммы сдвига. Одной из возможностей является использование следующих равенств

$$\begin{aligned} \gamma &= 2 \left(\varepsilon - \frac{\sigma}{E} + \frac{R_\tau}{R_c} \frac{\sigma}{G} \right), \\ \tau &= \frac{R_\tau}{R_c} \sigma. \end{aligned} \quad (7.59)$$

Эти формулы означают, что для диаграммы « $\tau \sim \gamma$ » модуль сдвига равен G , предельное напряжение сдвига равно R_τ . В первом из соотношений (7.59) из полной деформации сжатия вычитается ее упругая составляющая, после чего добавляется соответствующим образом масштабированная упругая деформация сдвига. Множитель 2 присутствует, поскольку деформация сдвига равна удвоенной сдвиговой компоненте тензора деформаций, т.е. $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ ($i \neq j$) в общем случае.

Аналогично можно рассмотреть и построение кривой « $\bar{\sigma} \sim \bar{\varepsilon}$ », где $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}$, $\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3}$ есть среднее напряжение и средняя деформация соответственно. В упругой области $\bar{\sigma} = K\bar{\varepsilon}$, где K – модуль Бриджмена. Рассмотрим сначала *случай объемного расширения*. При этом следует учесть, что при растяжении, как уже упоминалось, предельное напряжение $R_p < R_c$. Тогда, по аналогии с выражениями (7.59), можно записать

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \frac{1}{3} \left(\varepsilon - \frac{\sigma}{E} + \frac{R_p}{R_c} \frac{\sigma}{K} \right), \\ \bar{\sigma} &= \frac{1}{3} \frac{R_p}{R_c} \frac{\sigma}{K}. \end{aligned} \quad (7.60)$$

Обозначения компонент, входящих в соотношения (7.60), также аналогичны введенным выше.

В случае объемного сжатия можно было бы записать формулы, схожие с (7.60), но в которых отсутствуют коэффициенты R_p/R_c . Однако, более предпочтительно использовать приведенное в разделе 2.2 соотношение (2.2), полученное на основе анализа большого количества результатов экспериментов на одноосное сжатие. Поскольку в данном случае речь идет об объемном сжатии, то, в отличие от одноосного нагружения, данная формула может быть обобщена путем введения некоторых поправочных коэффициентов, полученных экспериментальным путем, и записана в виде

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_{v(*)} \cdot k \cdot \left(\frac{R_c - R}{R_c - R_*} \right)^l. \quad (7.61)$$

Здесь $\varepsilon_{v(*)}$ – предельная величина объемного разрыхления, определяемая из испытаний на одноосное сжатие, $k \geq 1$, $l \geq 1$ – поправочные коэффициенты, определяемые экспериментально. Значения $k = 1$, $l = 1$ соответствуют линейной зависимости между предельными эквивалентными напряжениями и величиной объемной деформации.

Перейдем теперь к рассмотрению *общего напряженного состояния*. Для сдвиговых компонент напряжений σ_{ij} , γ_{ij} ($i \neq j$) можно использовать формулы (7.59), где следует положить $\tau = \sigma_{ij}$, $\gamma = \gamma_{ij}$ ($i \neq j$; $i, j = 1, 2, 3$). Что касается нормальных напряжений и деформаций, то их можно разделить на гидростатическую ($\bar{\sigma}$, $\bar{\varepsilon}$) и девиаторную (s_{ij} , e_{ij}) части:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \bar{\sigma} \delta_{ij} + s_{ij}, \\ \varepsilon_{ij} &= \bar{\varepsilon} \delta_{ij} + e_{ij}, \end{aligned} \quad (7.62)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Диаграмма для гидростатических составляющих может быть построена по формулам (7.60), (7.61). Далее, поскольку именно де-

виаторные составляющие нормальных напряжений ответственны за сдвиговые деформации, можно принять, что для них кривая деформирования может быть определена в соответствии с диаграммой испытаний на одноосное сжатие по соотношениям (7.59):

$$e_{ij} = \varepsilon - \frac{\sigma}{E} + \frac{R_\tau}{R_c} \frac{\sigma}{G}, \quad (i = j) \quad (7.63)$$

$$s_{ij} = \frac{R_\tau}{R_c} \sigma.$$

В отличие от формулы (7.59), множитель 2 здесь отсутствует, поскольку речь идет о девиаторных составляющих нормальных деформаций e_{ij} , но не о деформации сдвига $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ ($i \neq j$).

Кроме того, в формуле (7.61) в качестве переменной R следует использовать эквивалентное напряжение, определенное в соответствии с выражением (3.19), учитывающее все компоненты тензора напряжений в случае трехосного напряженного состояния.

7.3. Конечноэлементная реализация алгоритма решения упругопластической задачи

Рассматривается достаточно длинная выработка круговой формы, находящаяся в толще горных пород на заданной глубине. В таких случаях в сечениях, близких к середине выработки, имеет место плоское деформированное состояние ($\varepsilon_z = 0$), поэтому достаточно рассмотреть двумерную краевую задачу. Дальнейшее описание приведено для численного решения задачи с использованием в модели 8-узловых плоских изопараметрических элементов с девятью точками интегрирования по Гауссу. Достаточно большая область, которая охватывает выработку, разбивается на множество таких элементов.

Соответствующим образом выбираются закрепления (фиксируются перемещения в характерных точках), а на верхней и боковой границах области (рас-

считается половина выработки в силу симметрии расчетной схемы) задается равномерное давление, которое за определенное количество шагов n возрастет до величины, соответствующей заданной глубине. Кроме того, на первом шаге учитывается гравитационная нагрузка.

На каждом шаге в соответствии с приращением внешнего давления в узлах конечно-элементного разбиения определяются приращения перемещений, а в точках интегрирования Гаусса каждого конечного элемента – соответствующие приращения деформаций и напряжений. В соответствии с найденными приращениями перемещений рассчитываются текущие координаты узлов, что дает картину деформированной области. Найденные приращения суммируются с перемещениями, напряжениями и деформациями, определенными на предыдущем шаге. Затем нормальные компоненты напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} разделяются на гидростатическую и девиаторную составляющие. Для каждой из них, так же как и для сдвиговых компонент, определяется, не превышено ли предельное значение по напряжениям (R_c , R_p или R_τ). Если это имеет место, то считается, что данная точка интегрирования Гаусса претерпела преобразование (т.е. вошла в стадию неупругого деформирования), и для нее в дальнейшем реализуется алгоритм, описанный выше – соответствующая компонента (гидростатическая, девиаторная или сдвиговая) «усекается» таким образом, чтобы выйти на соответствующую кривую деформирования, построенную по формулам (7.59), (7.60) или (7.63). После этого находятся «истинные» значения компонент напряжений R_{ij} и значения «начальных напряжений» $\sigma_{0ij} = R_{ij} - \sigma_{ij}$ (только для тех компонент тензора напряжений, для которых предельное значение было превышено). Эти «начальные напряжения» на следующем шаге решения задачи включаются в вектор узловых нагрузок, тем самым учитывая, что в данной точке интегрирования Гаусса происходит не чисто упругое деформирование, а деформирование вдоль ниспадающего участка диаграммы. На следующем шаге описанная процедура повторяется, с той разницей, что для тех точек, которые уже претерпели преобразование, предельным значением будет

соответствующая компонента R_{ij} , найденная на предыдущем шаге. При этом в формуле (7.63) следует использовать именно компоненты тензора R_{ij} (точнее, его главные значения).

Если все точки интегрирования Гаусса данного конечного элемента перешли в неупругое состояние, то считается, что весь элемент перешел в неупругое состояние. Набор таких элементов представляет собой ЗНД, окружающую выработку. По мере роста внешней нагрузки эта зона расширяется.

Несколько иначе реализуется алгоритм в тех точках Гаусса, в которых наблюдается гидростатическое сжатие ($\bar{\sigma} < 0$). Чтобы избежать накопления ошибок при пошаговом решении, на всех шагах, кроме предпоследнего ($n-1$), полагается, что гидростатическая деформация сжатия $\bar{\varepsilon} = 0$ (что верно для всех точек, не входящих в ЗНД). На $(n-1)$ -м шаге напряжения $\bar{\sigma}$ в зоне неупругих деформаций не «усекаются», и, следовательно, начальные нормальные напряжения σ_{0ij} не определяются. Вместо этого принято, что на этом (и только на этом) шаге определены начальные деформации ε_{0ij} , в которых гидростатическая составляющая равна значению, определяемому формулой (7.61). На последнем шаге n эти начальные деформации включаются в вектор нагрузок глобальной системы уравнений относительно приращений узловых перемещений. После их определения, нахождения полных перемещений u_i , напряжений σ_{ij} , деформаций ε_{ij} и «усечения» соответствующих компонент напряжений в ЗНД до величины R_{ij} решение задачи считается законченным.

Адекватность численного алгоритма оценивается степенью соответствия полученного численного решения известным строгим аналитическим решениям аналогичной задачи. В качестве тестовой задачи использовалось аналитическое решение, приведенное в параграфе 7.1.

С использованием алгоритма, описанного выше, определялось напряженно-деформированное состояние однородного изотропного породного массива,

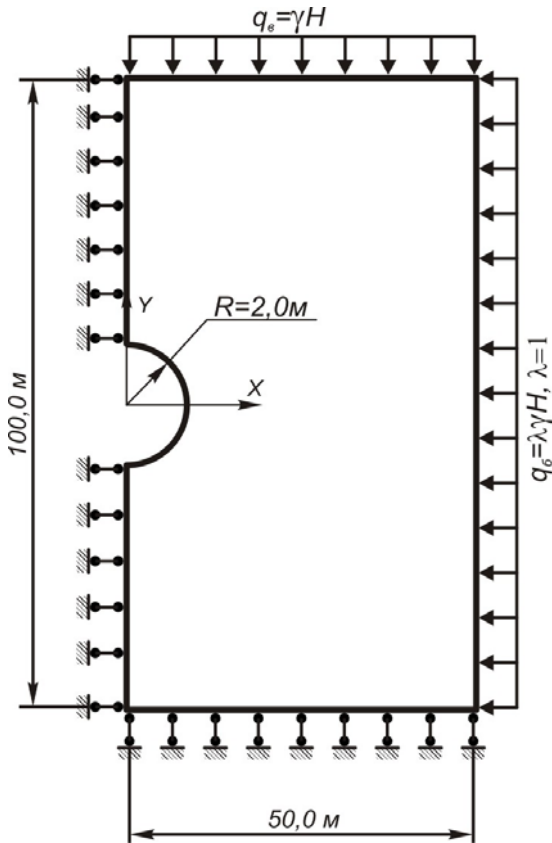


Рис. 7.5. Расчетная схема тестовой задачи

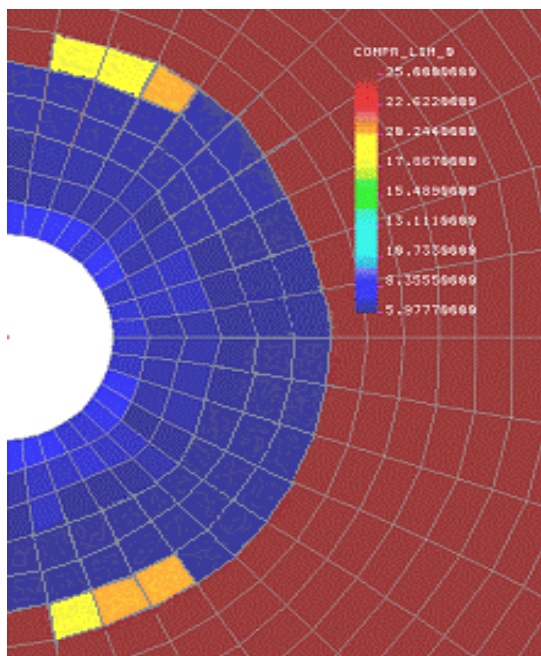


Рис. 7.6. Конфигурация зоны неупругих деформаций (тестовая задача)

ослабленного одиночной выработкой кругового очертания и подверженного гидростатическому сжатию. Расчетная схема представлена на рисунке 7.5.

Сравнение с аналитическим решением проводилось по параметрам r_L (относительный радиус ЗНД) и u_0 (величина смещений на контуре выработки).

Аппроксимация исследуемой области массива осуществлялась четырехузловыми конечными элементами, исходные данные к численному решению принимались такими же, как и в аналитическом решении (см. параграф 7.1).

Конфигурация зоны неупругих деформаций, полученная в ходе упруго-пластического численного решения тестовой задачи, представлена на рисунке 7.6. Совокупность элементов, окружающих выработку и имеющих различные оттенки окраски, и есть искомая зона неупругих деформаций. Различие в оттенках обусловлено различной степенью разрушения материала в пределах этой зоны.

Величины сравниваемых параметров, полученные из аналитического и численного решения, представлены в таблице 7.1. Как видно из таблицы, на-

блюдается достаточно хорошая сходимость численного и аналитического решения, что доказывает возможность применения данного алгоритма к решению задач геомеханики о напряженно-деформированном состоянии массива в окрестности горной выработки.

Таблица 7.1

Сравнение результатов аналитического и численного решения

Показатель	Решение		Δ , %
	аналитическое	численное	
r_L	2,30	2,13	7,40
u_0 , м	0,38	0,35	7,90

7.4. Пример численного решения

Исследовалось влияние мощности крепкого слоя и расстояния до него на напряженно-деформированное состояние приконтурного массива в почве одиночной выработки.

Во всех выполненных расчетах рассматривалась половина выработки в силу симметрии расчетной схемы относительно вертикальной оси. Глубина заложения выработки принималась равной 600,0 м, условия на контактах слоев не учитывались. Рассматривалась задача о плоской деформации сечения выработки при гидростатическом нагружении.

Расчеты начинались с решения задачи для однородного массива (т.е., при отсутствии слоистости) и проводились в такой последовательности, чтобы неоднородность структуры массива от задачи к задаче увеличивалась, постепенно приближаясь к реальной структуре углевмещающей толщи по пласту l_8 в пределах поля шахты «Белозерская» ГП «Добропольеуголь». Такая последовательность вычислений позволяет проследить изменения напряженно-деформированного состояния породного массива в окрестности выработки, формы и размеров ЗНД, а также величины остаточной прочности материала в ее пределах по мере роста степени неоднородности массива.

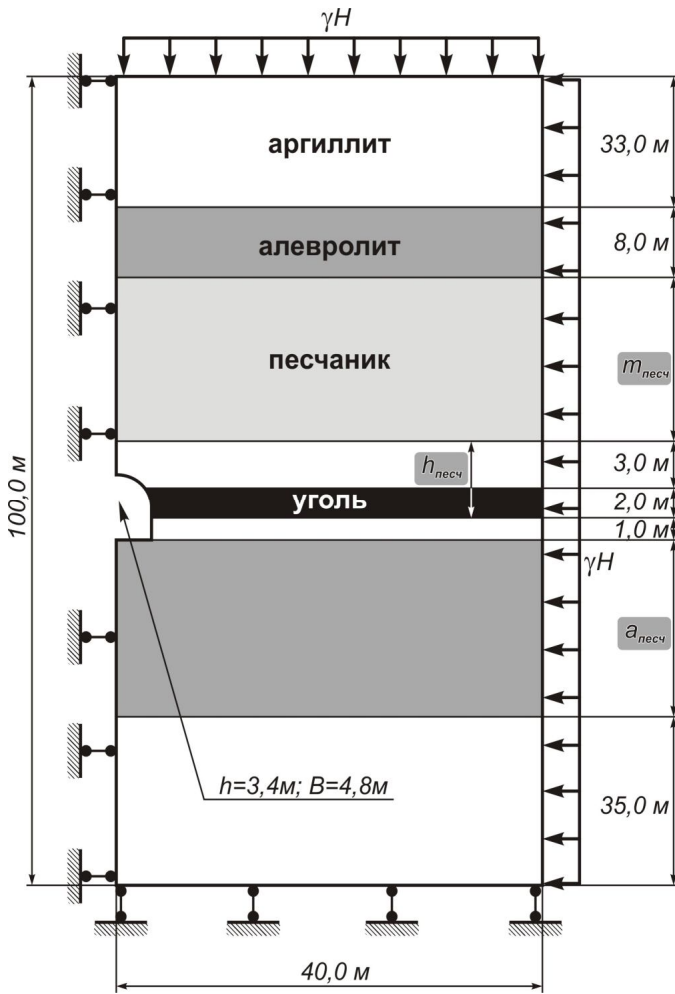


Рис. 7.7. Обобщенная расчетная схема

Обобщенная расчетная схема представлена на рис. 7.7. Здесь под $m_{песч}$, $h_{песч}$ и $a_{песч}$ понимаются значения варьируемых параметров, соответственно мощность слоя крепкой породы (песчаника), расстояние до него от почвы угольного пласта по кровле и по почве. Физико-механические параметры пород – в табл. 7.2.

Решение выполнялось для ситуации, характеристика которых дана в таблице 7.3. Реальному заложению бремсберга №2 пл. l_8 гор. 550 м на шахте «Белозерская» соответствует ситуация Г.6 (Д.2).

Таблица 7.2

Физико-механические свойства пород, принятые при численных расчетах

Показатель	Уголь	Аргиллит	Алевролит	Песчаник
Предел прочности на одноосное сжатие, σ_c , МПа	10,0	22,0	30,0	50,0
Предел прочности на одноосное растяжение, σ_p , МПа	1,0	2,2	3,0	5,0
Предел прочности на сдвиг, τ , МПа	2,0	5,0	7,0	11,0
Модуль Юнга, E , МПа	$36,0 \cdot 10^3$	$59,0 \cdot 10^3$	$67,5 \cdot 10^3$	$11,5 \cdot 10^4$
Коэффициент Пуассона, μ	0,16	0,23	0,23	0,21
Объемная плотность, γ , МН/м ³	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$2,8 \cdot 10^{-3}$

На первом этапе в соответствии с описанным выше алгоритмом определялась конфигурация и размеры зоны неупругих деформаций.

На основе полученных результатов проверялось выполнение критерия устойчивости почвы, характеризующего переход системы «выработка-породный массив» в состояние потери устойчивости почвы (в состояние развития пучения пород). При выполнении расчетов этот критерий принят в форме коэффициента устойчивости [232, 235]

$$K_y = \frac{r_L^*}{r_L} < 1. \quad (7.64)$$

Здесь r_L – расчетный относительный радиус зоны неупругих деформаций; r_L^* – критический относительный радиус зоны неупругих деформаций, соответствующий некоторой критической глубине заложения, при которой произойдет вспучивание почвы.

Величина критического радиуса r_L^* определяется из аналитического критерия А.Н. Шашенко, приведенного в работе [232], который был получен на основе упрощенного подхода Ишлинского-Лейбензона. Выполнение критерия (7.64) свидетельствует о начале вспучивания почвы в выработке.

Таким образом устанавливается критическая глубина, при которой компоненты напряжений принимают предельные для данных условий значения.

Затем начинается численная процедура второго этапа – исследование возмущенного процесса после потери устойчивости почвы (собственно развитие выдавливания пород в выработку). Модель развития пучения описана в [264, 265] и состоит в следующем.

На контуре почвы выработки задаются новые граничные условия в перемещениях и контур почвы выработки представляется косинусоидой вида $y = 1 + d \cos x$, где d – константа. Максимальное значение дополнительного перемещения на контуре почвы задается по центру выработки на величину так называемого «закритического поднятия» – Δu_{pcd}

Таблица 7.3

Геомеханические ситуации, моделируемые в ходе численных экспериментов

Ситуация	Характеристика массива	Песчаник в кровле		Песчаник в почве	
		мощн., м	расст. от угольн. пласта, м	мощн., м	расст. от угольн. пласта, м
А	однородный	–	–	–	–
Б	однородный + угольный пласт	–	–	–	–
В	слои с близкими физико-механическими параметрами (без песчаника) + угольный пласт	–	–	–	–
Г	слоистый массив, включая песчаник в кровле + угольный пласт	12,0*	34,0	–	–
			28,0		
			22,0		
			16,0		
			10,0		
			4,0		
Д	слоистый массив, включая песчаник в кровле + угольный пласт	6,0 12,0 18,0 24,0 30,0 36,0	4,0**	–	–
Е	слоистый массив, включая песчаник в кровле и почве + угольный пласт	12,0	4,0	25,0	21,0
					14,0
					7,0

Примечания: * – среднее значение мощности песчаника в кровле пласта l_8 по южному крылу шахтного поля шахты «Белозерская»;
 ** – среднее значение расстояния между слоем песчаника в кровле и почвой пласта l_8 по южному крылу шахтного поля шахты «Белозерская».

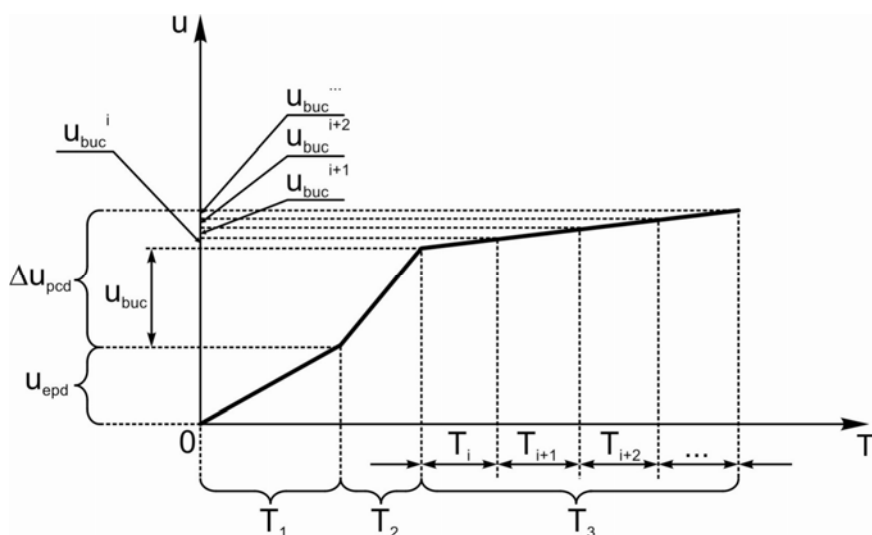


Рис. 7.8. Механическая модель процесса пучения [264, 265]: u_{epd} – прирост перемещений при упругопластическом решении; Δu_{psd} – величина закритического поднятия контура почвы

Величина закритического поднятия зависит от конкретных горно-геологических условий проведения выработки и принимается на основе реальных зависимостей смещений контура почвы от времени $u = f(T)$, типичный вид которой

приведен на рис. 7.8. На этом графике выделено три характерных временных интервала: T_1 – период реализации упругопластических перемещений (невозмущенный процесс деформирования массива с точки зрения потери устойчивости почвы), T_2 – период активного развития процесса вспучивания пород почвы и T_3 – период пассивного развития процесса пучения. Интервалы T_2 и T_3 относятся к возмущенному процессу деформирования массива, т.е. собственно пучению. Временной интервал T_3 разбит на участки T_i , длина которых принята равной величине T_2 . Каждому временному интервалу T_i соответствуют величина закритических перемещений u_{buc}^i и картина НДС в окрестности исследуемой выработки. Последовательным заданием величин u_{buc}^i по сути выполняется моделирование развития процесса пучения во времени. Закритические перемещения u_{buc}^i вызывают дополнительное возмущение, которое накладывается на основное и суммируется на основе принципа суперпозиции.

Закритические перемещения, так же, как и внешняя нагрузка на первом этапе решения, прикладываются пошагово и их величина возрастает от нуля до

максимума с некоторым инкрементом. Таким образом, пучение, имеющее непрерывный временной характер, рассматривается здесь как дискретный квазистатический процесс.

На рис. 7.9 представлены результаты вычислений для случаев однородного массива, массива, включающего угольный пласт, и слоистого массива, содержащего в кровле мощный слой крепкого песчаника. Различная окраска конечных элементов соответствует различной степени разупрочнения.

Анализ результатов показывает, что с увеличением степени неоднородности массива в окрестности выработки от однородного до слоистого с различными геометрическими и прочностными параметрами слоев, форма ЗНД изменяется от практически симметрично охватывающей выработку до несимметричной, вытянутой вдоль наименее крепкого слоя.

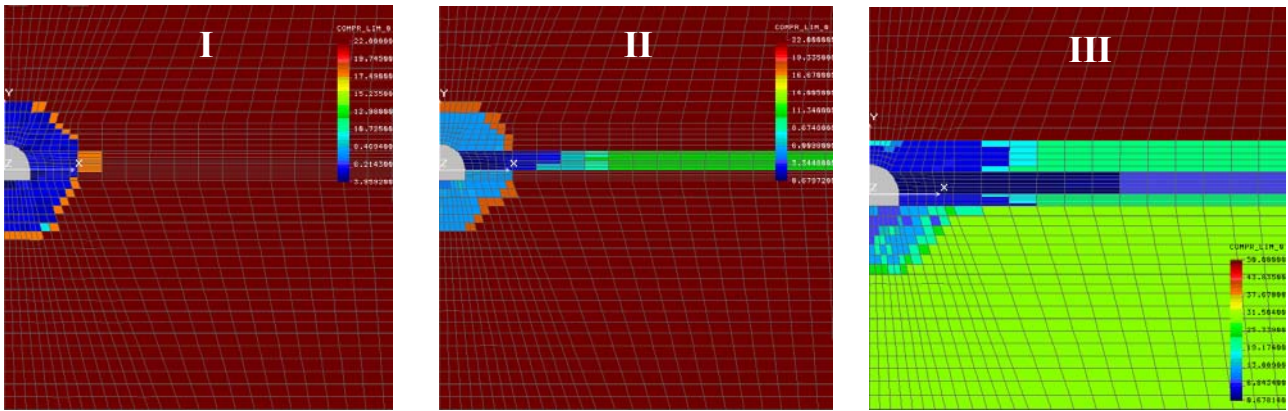
Кроме того, анализ результатов численного эксперимента, в котором исследовалось влияние параметров крепкого слоя в кровле на развитие пучения пород почвы, позволил установить следующее.

На этапе невозмущенного процесса, т.е. до наступления потери устойчивости, предельные размеры ЗНД, достигнутые к моменту потери устойчивости, нелинейно зависят как от расстояния до крепкого слоя, так и от его мощности. При этом показано, что при расстояниях до крепкого слоя в кровле и почве, равных 21,0 м, и мощности крепкого слоя в кровле, равной 18,0 м, влияние этого слоя на процесс потери устойчивости перестает сказываться.

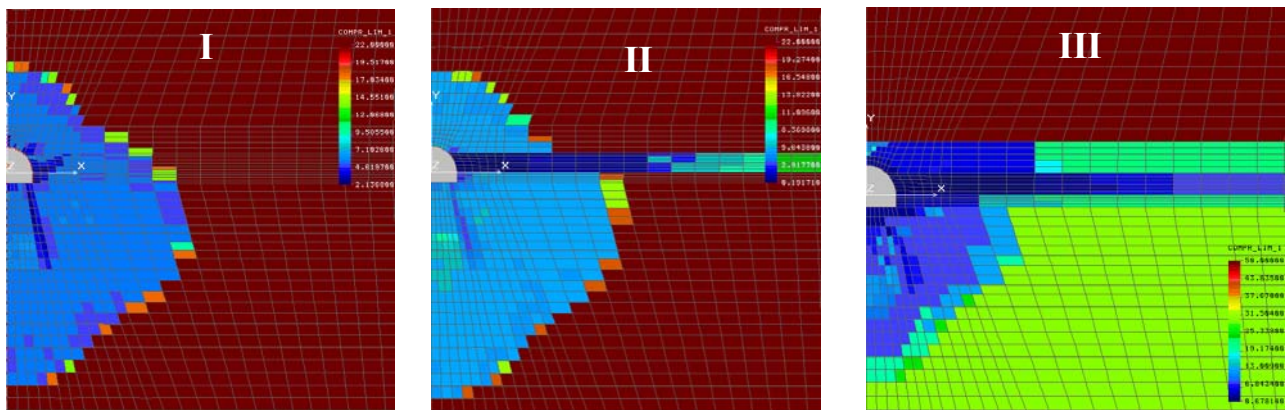
На этапе возмущенного процесса, т.е. после потери устойчивости, при величине закритического поднятия почвы, равной 0,3 м, наступает стабилизация размеров зоны неупругих деформаций и дальнейшее возрастание закритического поднятия не отражается на размерах ЗНД. Причем, это обстоятельство имеет место при любой геомеханической ситуации.

Анализ рис. 7.9 выявляет значительное влияние свойств пород и структуры массива, окружающего выработку, на формирование зоны неупругих деформаций, а, следовательно, и на устойчивость выработки. Особенно указанное об-

стоятельность очевидно в условиях выдавливания почвы (рис. 7.9,б,г и е) – наблюдается уменьшение размеров ЗНД в почве для случая слоистого массива.



этап упругопластического решения
 а) б) в) г) д)



этап всучивания
 б) г) е)

Рис. 7.9. Конфигурации зон неупругих деформаций при различной степени неоднородности породного массива: I – однородный массив; II – массив, включающий угольный пласт; III – слоистый массив

Таким образом, полученные результаты показывают, что форма и средний радиус ЗНД вокруг одиночной выработки существенно зависят от степени неоднородности породного массива (параметров его слоев), что позволяет для конкретных условий оценить возможность всучивания пород почвы и определить такое место заложения выработки, при котором ее разрушение будет минимальным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В монографии изложены результаты аналитических, лабораторных, натурных исследований в области устойчивости подземных выработок, расположенных на большой глубине в породном массиве с неоднородной структурой. Последовательность изложения материала выдержана от простых моделей разрушения элементарного объема породной среды до деформирующихся породных массивов значительных размеров со сложной структурой и наличием трещин. Естественная неоднородность породной среды учтена с помощью вероятностно-статистических моделей.

Ограниченные возможности аналитических исследований существенно расширены путем использования численных моделей.

Дальнейшее развитие исследований в области геомеханики авторы видят в усложнении физических моделей породной среды и переходе к трехмерным задачам.

ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК

1. Работнов Ю.Н. Механика разрушения.– М.: Наука, 1987.– 80 с.
2. Гордон Дж. Почему мы не проваливаемся сквозь пол.– М.: Мир, 1971.– 272 с.
3. Разрушение / Под ред. А.Ю. Ишлинского.– т. I-VII.– М.: Мир, 1973.
4. Ставрогин А.Н., Протосеня А.Г. Пластичность горных пород.– М.: Недра, 1979.– 301 с.
5. Кирничанский Г.Т. Элементы теории деформирования и разрушения горных пород.– К.: Наукова думка, 1999.– 179 с.
6. Виноградов В.В. Геомеханика управления состоянием массива вблизи горных выработок.– К.: Наукова думка, 1983.– 192 с.
7. Cook H.G.W., Hoek E. Rock mechanics Applying to the Study of Rock bursts.– J. of the South A.J. of Min. and Met.– 1966.– P. 435-528.
8. Hoek E. Practical Rock Engineering, 2000 Edition (Электрон. Ресурс) / Способ доступа <http://www.rocscience.com/hoek/Practical Rock Engineering>. – Загол. с экрана.
9. Bieniawski Z.T. Estimating of Brittle fracture of rock.– Pi-III Int. I. Rock. Mech. Min. SCI.– 1967.– vol.5– P. 325-335.
10. Griffith A.A. The theory of rupture.– Proc. Ict. Int. Congr. Appl. Mech.– Delft.– 1924.– P. 55-63.
11. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости.– М.: Наука, 1975.– 576 с.
12. Френкель Я.И. Теория обратимых и необратимых трещин в твердых телах // Журнал технической физики. – 1952. – т.22. – Вып.11. – С. 1857-1866.
13. Баренблат Г.И. Теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // Аннотации докладов Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике.– М.: изд-во АН СССР, 1960.– С. 30-31.

14. Иоффе А.Ф., Кирпичева М.В., Левитская А.И. Деформация и прочность кристаллов // Журнал русского физико-химического общества.– 1924.– № 22.– С. 286-293.
15. Степанов А.В. Два опыта по прочности // Журнал экспериментальной и теоретической физики – 1937.– т.7.– Вып.7.– С. 663-669.
16. Степанов А.В. Явление искусственного сдвигообразования // Журнал экспериментальной и теоретической физики.– 1947.– т.17.– Вып.7.– С. 601-612.
17. Smekal A. Handbuch der Physik and technische Mechanik.– 1931.– Bd.– 4/2.
18. Orowan E. Zur Kristallplastizitat // I. Tief-temperaturplastizitat und Beekersche Formel. – I bid.– S. 605-613.
19. Атомный механизм разрушения: Сб. статей.– М.: Metallurgizdat, 1963.– 278 с.
20. Прикладные вопросы вязкости разрушения.– М.: Мир, 1968.– 522 с.
21. Броун И., Сроули Дж. Испытание высокопрочных металлических материалов на вязкость разрушения при плоской деформации.– М.: Мир, 1972.– 246 с.
22. Ивлев Д.Д. О теории трещин квазихрупкого разрушения (обзор) // Прикладная механика и техническая физика.– 1967.– №6.– С. 88-128.
23. Морозов Е.М. О соответствии между энергетическим критерием разрушения и математическим моделированием явлений деформации на конце разрезом – трещин // Прикладная математика и механика.– 1970.– т.34.– №4.– С. 768-777.
24. Новожилов Б.В. К основам теории равновесных трещин в упругих телах // Прикладная математика и механика.– 1969.– т.33.– №5.– С. 797-812.
25. Новые методы оценки сопротивления металлов хрупкому разрушению.– М.: Мир, 1972.– 439 с.
26. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами.– К.: Наукова думка, 1968.– 246 с.
27. Разрушение твердых тел.– М.: Metallurgiya, 1967.– 500 с.

28. Финкель В.М. Физика разрушения. Рост трещин в твердых телах.– М.: Металлургия, 1970.– 376 с.
29. Тимошенко С.П. История науки о сопротивлении материалов.– М.: Иностранная литература, 1957.– 536 с.
30. McClintock F.A., Walsh I.B. Friction on Griffith crack in rocks under pressure // Proc. 4 th U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. Berkely, Cal.– 1962.– vol.2.– P. 1015-1022.
31. Макклинток Ф., Аргон Е. Деформация и разрушение материалов.– М.: Мир, 1970.– 443 с.
32. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения.– М.: Наука, 1974.– 640 с.
33. Методические указания по построению моделей из оптически чувствительных материалов для изучения упругопластического деформирования и разрушения горных пород вблизи подземных выработок / Н.А. Филатов, В.Д. Беляков. В.М. Барковский и др.– Л.: изд-во ВНИМИ, 1976.– 34 с.
34. Полак Л.С. Вариационные принципы механики, их развитие и применение в физике.– М.: Физматгиз, 1960.– 599 с.
35. Койтер В.Т. Общие теоремы упругопластических сред. Пер. с англ. Под ред. Г.С. Шапиро. – М.: Изд-во Иностран. лит., 1961. – 79 с.
36. Морозов Е.М. Полак Л.С., Фридман Я.Б. О вариационных принципах развития трещин в твердых телах // ДАН СССР.– 1964.– т. 156.– №3.– С. 537-540.
37. Фридман Я.Б., Морозов Е.М. О вариационных принципах для механического разрушения // Изв. Вузов. Машиностроение.– 1962.– №4.– С. 56-71.
38. Давиденков Н.Н. Динамические испытания материалов.– М-Л.: Изд-во АН СССР, 1936.– 240 с.
39. Фридман Я.Б. Механические свойства металлов.– М.: Оборонгиз, 1952.– 556 с.

40. Ужик Г.В. Сопротивление отрыву и прочность материалов.– М.: Изд-во АН СССР, 1935.– 252 с.
41. Taylor G.I. The mechanism of plastic deformation of crystals // Theoretikal. Proc. Rog. Soc. A.– 1934.– №855.– P. 362-387.
42. Френкель Я.И. Введение в теорию металлов.– М.: Физматгиз, 1958.– 368 с.
43. Коттлер А.Х. Теория зацепления в кристаллической решетке // Успехи физических наук.– М.: АН СССР.– 1952.– т.46.– №1.– С. 179-230.
44. Коттлер А.Х. Теоретические аспекты процесса разрушения.– М.: Мир, 1963.– С. 30-68.
45. Коттлер А.Х. Дислокации и пластическое течение в кристаллах.– М.: Metallurgizdat, 1958.– 287 с.
46. Возникновение микротрещин скола в поликристаллическом железе и стали / Дж.Т.Хан, Б.Л. Авербах, В.С. Оуэн, М. Козн // Атомный механизм разрушения.– М.: Мир, 1963.– С. 109-137.
47. Одинг И.А. О роли дислокаций в процессе ползучести // Изв. АН СССР.– ОТН, 1948.– №12.– С. 1975-1802.
48. Одинг И.А. Теория дислокаций в металлах и ее применение. – М.: Изд-во АН СССР, 1959.– 84 с.
49. Orowan E. Fracture and strength of solidas // Repts. Progr. Phus.– 1948.– vol.49.– P. 185-232.
50. Журков С.Н. Кинетическая концепция прочности твердых тел // Вестник АН СССР.– 1957.– №11.– С. 78-85.
51. Журков С.Н. Кинетическая концепция прочности твердых тел. // Вестник АН СССР.– 1968.– №3.– С. 46-52.
52. Журков С.Н. К вопросу о физической природе прочности // Физика твердого тела.– 1980.– №2.– С. 3344-3349.
53. Регель В.Р., Слущкер А.И., Томашевский Э.Е. Кинетическая природа прочности твердых тел.– М.: Наука, 1974.– 560 с.

54. Френкель Я.И. Кинетическая природа жидкостей.– М.: Изд-во АН СССР, 1945.– 422 с.
55. Кусов А.А. Фононная модель разрушения нагруженной атомной цепочки // Физика твердого тела.– 1979.– №21.– Вып. 10.– С. 3095-3099.
56. Журков С.Н. Дилатонный механизм прочности твердых тел // В сб.: Физика прочности и пластичности.– М.: Изд-во АН СССР.– С. 5-11.
57. Качанов Л.М. Основы механики разрушения.– М.: Наука, 1974.– 311 с.
58. Работнов Ю.Н. О разрушении твердых тел // Проблемы механики твердого деформируемого тела. – Л.: Судостроение, 1970. – С. 66-70.
59. Литвинский Г.Г. К вопросу о механизме хрупкого разрушения в задачах о развитии неупругих деформаций // Тезисы конференции «Физика горных пород и процессов».– МГИ, 1971.– С. 18-19.
60. Литвинский Г.Г. Кинетика разрушения породного массива в окрестности горной выработки // ФТПРПИ.– 1974.– № 5.– С. 15-22.
61. Королев В.А. Термодинамика грунтов.– М.: Изд-во МГУ, 1997.– 236 с.
62. Падуков В.А. Горная геомеханика.– С.-Пб.: Изд-во С.-Пб. ГеГУ, 1997.– 133 с.
63. Дидык Р.П., Е.В. Кузнецов, Забара В.Н. Физические основы прочности: Підручник.– Д.: Наука та освіта, 2005.– 608 с.
64. Баландин П.П. К вопросу о гипотезах прочности // Вестник инженера и техника.– 1937.– №1.– С. 19-24.
65. Писаренко Г.С., Лебедев А.Л. Сопротивление материалов деформированию и разрушению при сложном напряженном состоянии.– К.: Наукова думка, 1969.– 209 с.
66. Ягн Ю.И. Новые методы расчета на прочность // Вестник инженеров и техников.– 1931.– №6.– С. 122-127.
67. Николаевский В.Н. Механика твердых деформируемых тел. Итоги науки.– Т.6.– М.: Изд. АН СССР, 1972. – 84 с.
68. Боткин А.И. О прочности сыпучих и хрупких материалов // Изв. ВНИИГидротехники.– 1940.– С. 205-236.

69. Дощинский Г.А. Теория предельного упругого состояния // Изв. Томского политехн. ин-та.– 1957.– Вып. 85.– С. 343-354.
70. Алексеев А.Д., Недодаев Н.В. Предельные состояния горных пород.– К.: Наукова думка, 1982.– 200 с.
71. Прочность материалов и элементов конструкции в экстремальных условиях. В 2-х томах. / Под ред. Писаренко.– Т.1.– К.: Наукова думка, 1980.– 535 с.
72. Фридман Я.Б. Единая теория прочности.– М.: Оборонгиз, 1943.– 56 с.
73. Расчеты на прочность в машиностроении / С.Д. Пономарев, В.Л. Бидерман, К.К. Лихарев и др.– Т.1.– М.: Машгиз, 1956.– 884 с.
74. Друккер Д. О единственности решений в теории пластичности // Механика. Период сб. пер. иностр. статей.– 1957.– №4. – С. 72-80.
75. Мор О. Чем обусловлен предел прочности и временное сопротивление материала // В сб.: Новые идеи в технике.– Петроград: Образование, 1915.– № 1.– С. 1-50.
76. Берон А.И., Чирков С.Е. Исследование прочности горных пород в условиях трехосного неравномерного сжатия // Научные сообщения ИГД им. А.А. Скочинского, 1969.– С. 33-38.
77. Чирков С.Е. Прочность горных пород при трехосном неравнокомпонентном сжатии // ФТПРПИ.– 1976.– №1.– С. 11-17.
78. Кузнецов Г.Н., Бudyко И.Н. Исследование предельных состояний хрупкого материала в различных условиях трехосного сжатия // В кн. Проблемы механики горных пород.– Новосибирск: Изд-во ИГД СО АН СССР.– 1971.– С. 266-217.
79. Аннин Б.Д. Одна плоская упругопластическая задача при экспоненциальном условии текучести // Механика твердого тела.– 1966.– №3.– С. 122-123.
80. Перлин П.И. Упругопластическое распределение напряжений вокруг отверстий // В кн.: Исследование по механике и прикладной математике.– М.: Обронгиз, 1960.– С. 30-60.

81. Ставрогин А.Н., Протосеня А.Г. Прочность горных пород и устойчивость горных выработок на больших глубинах.– М.: Недра, 1985.– 271 с.
82. Аннин Б.Д., Черепанов Г.П. Уругопластическая задача.– Новосибирск: Наука, 1983.– 237 с.
83. Баклашов И.В., Картозия Б.А. Механические процессы в породных массивах.– М: Недра, 1986.– 272 с.
84. Глушко В.Т., Виноградов В.В. Разрушение горных пород и прогнозирование проявлений горного давления.– М.: Недра, 1980.– 214 с.
85. Александров А.П., Журков С.Н. Явление хрупкого разрыва.– М.:ГТТИИ, 1933.– 51 с.
86. Weibull W. A statistical theory of the strength of materials // Ing. Vetenskamps Akad.– Handl: 1939.– №151.– 45 p.
87. Канторова Т.А. Френкель Я.И. Статистическая теория хрупкой прочности реальных кристаллов // Журнал технической физики.– 1941.– т. XI.– №3.– С. 173-181.
88. Волков С.Д. Статистическая теория прочности.– Свердловск: Машгиз, 1960.– 115 с.
89. Афанасьев Н.Н. Статистическая теория усталостной теории прочности металлов.– М.: Изд-во АН СССР, 1953.– 263 с.
90. Седракян Л.Г. К статистической теории прочности.– Ереван: Изд-во Ереванского института стройматериалов и сооружений, 1958.– 104 с.
91. Седракян Л.Г. Элементы статистической теории деформирования и разрушения хрупких материалов.– Ереван: Изд-во Айстан, 1968.– 247 с.
92. Brady B.T. A mechanical education of state for brittle rocks // Int. I. Rock Mech. and Mining Sci.– 1970.– vol.7.– P. 485-421.
93. Болотин В.В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений.– М.: Госстройиздат, 1971.– 255 с.

94. Болотин В.В. Статистические методы в строительной механике.– М.: Госстройиздат, 1961.– 202 с.
95. Струнин Б.М. К теории масштабного эффекта при растяжении // Заводская лаборатория.– 1960.– № 9.– С. 1123-1128.
96. Струнин Б.М. К статистической теории разрушения металлов при растяжении // Физика металлов и металловедение.– 1962.– т.13.– №1.– С. 33-42.
97. Струнин Б.М. Вероятностное описание поля напряжений при случайном распределении дислокаций // Физика твердого тела. – т.13.– №3.– С. 923-926.
98. Лифшиц И.М., Розенцвейг Л.Н. К теории упругих свойств поликристаллов // Журнал экспериментальной и теоретической физики.– 1946.– т.16.– С. 967-979.
99. Фридман Я.Б. Механические свойства металлов. –Т.1.– М.: Машиностроение, 1974.– 471 с.
100. Белл Дж. Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. / Под ред. А.П. Филина.– Т.2.– М.: Наука, 1984.– 415 с.
101. Карман Т. Опыты по всестороннему сжатию // Новые идеи в технике.– Петроград, 1915.– С. 51-102.
102. Немчин Н.И. Об учете неупругого разрыхления в теории горного давления // ФТПРПИ.– 1971.– № 3.– С. 13-17.
103. Об учете запредельных деформаций горных пород при расчете параметров крепи / Б.З. Амусин, К.А. Ардашев, В.Ф. Кошелев, А.М. Линьков.– ФТПРПИ.– 1979.– №5.– С. 121-124.
104. Линьков А.М. О постановке и решении задач деформирования пород вокруг горных выработок за пределом прочности // Проблемы механики подземных сооружений.– Л.: Изд-во ЛГИ, 1979.– С. 9-13.
105. Ревуженко А.Ф., Шемякин Е.И. К вопросу о плоском деформировании упрочняющихся и разупрочняющихся пластических материалов // Прикладная механика и техническая физика.– 1977.– №3.– С. 56-62.

106. Ревуженко А.Ф. О напряженно-деформированном состоянии разупрочняющегося массива вокруг выработки // ФТПРПИ.– 1978.– №2.– С. 18-32.
107. Хирамацу Ё., Ли Х., Ока Ю. Характер деформации твердых минералов при испытаниях на одноосное растяжения и сжатие // Нихон когё кайси.– 1977.– 1978.– Т.93.– С. 945-949.
108. Davies I.D. Modified splitting test for concrete specimens // Mag. Of Concrete Research.– 1968.– Vol. 64.– P. 183-186.
109. Кобасия Р., Сучимото Ф. Изменение механических свойств горных пород в процессе их разрушения при сжатии // Нихон когё кайси.– 1975.– Т.91.– С. 647-652.
110. Crouch S.L. Experimental Determination of Volumetric Strains in Failed Rock // Int. J. of Rock Mechanics and Min.– 1970.– Vol.7.– P. 589-603.
111. Лесников В.С. Анализ пространственного напряженно-деформированного состояния массива горных пород в районе сопряжения двух выработок (применительно к горно-геологическим условиям Никопольского марганцеворудного бассейна): Автореф. дис. ... канд. техн. наук.– Днепропетровск: ДГИ, 1985.– 19 с.
112. ГОСТ 21153.0-75÷21153.7-75. Породы горные. Методы физических испытаний.– М.: Изд-во стандартов, 1975. – 35 с.
113. Методические указания по составу механических испытаний горных пород и методам обработки горно-геологических данных при разведке и вскрытии месторождений полезных ископаемых для проектирования и расчета крепи капитальных выработок.– Харьков: ВНИИОМШС, 1979.– 116 с.
114. Hudson I.A., Brown E.T., Fairhurst Ch. Optimizing the control of rock failure in servo-control-lend laboratory test // Rock Mech.– 1971.– vol.3.– P. 217-224.

115. Wawersik W.R., Farhurst Ch. A steady of Brittle Rock Fracture in Laboratory Compression Experiments // Int I. Rock Mech. Min. Sci.– 1970.– vol.7.
116. Прочность и деформируемость горных пород / Ю.М. Карташов, Б.В. Матвеев, Г.В. Михеев и др.– М.: Недра, 1979.– 269 с.
117. Шашенко А.Н. Устойчивость горизонтальных горных выработок, пройденных в породах, склонных к пластическому течению // Изв. ВУЗов. Горный журнал.– 1986.– №3.– С. 23-29.
118. Линьков А.М. О применении закона ассоциативного течения к горным породам // Тр. ВНИМИ.– Вып.74.– С. 441-450.
119. Картозия Б.А. Влияние структурно-механических особенностей породного массива на величину смещений в горных выработках // Уголь.– 1978.– № 6.– С. 9-12.
120. Алимжанов М.Т. Устойчивость равновесия и задачи механики горных пород.– Алма-Ата: Наука, 1982.– 270 с.
121. Виноградов В.В. Исследование и разработка методов, алгоритмов и программы прогноза устойчивости капитальных горных выработок в сложных горно-геологических условиях: Автореф. дис. ... канд. техн. наук.– Днепропетровск: ДГИ, 1975.– 23 с.
122. Смирняков В.В. Изменение свойств горных пород, окружающих выработку // В сб.: Устойчивость и крепление горных выработок.– Вып.2.– Ленинград: Изд-во ЛГИ, 1976.
123. Сдобников П.В., Курчин М.К., Курчина Е.И. О размерах зоны неупругих деформаций вокруг выработок, пройденных буровзрывным способом // В кн.: Горное давление в капитальных и подготовительных выработках.– Новосибирск: ИГД СО АН СССР, 1975.– С. 97-101.
124. Рукин В.В., Руппeneйт К.В. Механизм взаимодействия обделки напорных тоннелей с массивом горных пород.– М.: Наука, 1969.– 156 с.
125. Методы определения прочности глинистых пород / Под ред. Г.К. Бондарика.– М.: Недра, 1974.– 216 с.

126. Протодряконов М.М. Обобщенное уравнение огибающих к предельным кругам напряжений Мора // В кн.: Исследование физико-механических свойств горных пород применительно к задачам управления горным давлением.– М.: Изд-во АН СССР, 1962.– С. 27-38.
127. Hoek, E., Carranza-Torres C., Corkum V. Hoek-Brown criterion // 2002 edition. Proc. NARMS-TAC Conference. – Toronto, 2002. – Vol.1. – P. 267-273.
128. Батугин С.А., Похилько В.А. Области существования и устойчивости решений упругопластических задач для выработок круглой формы // ФТПРПИ.– 1972.– №3.– С. 10-16.
129. Руппенейт К.В. Механические свойства горных пород.– М.: Углетехиздат, 1956.– 322 с.
130. Заславский Ю.З. Исследование проявлений горного давления в капитальных выработках глубоких шахт Донбасса.– М.: Недра, 1996.– 180 с.
131. Глушко В.Т. Проявление горного давления в глубоких шахтах.– К.: Наукова думка, 1971. – 195 с.
132. Справочник проектировщика / Под общ. ред. Л.А. Уманского.– Т.1.– М.: Госстройтехиздат, 1960.– 1040 с.
133. Цимбаревич П.М. Механика горных пород.– М.: Углетехиздат, 1948.– 312 с.
134. Слесарев В.Д. Механика горных пород.– М.: Углетехиздат, 1948.– 236 с.
135. Талобр Ж. Механика горных пород.– М.: Госгортехиздат, 1960.– 430 с.
136. Айзаксон Э. Давление горных пород в шахтах.– М.: Госгортехиздат, 1961.– 176 с.
137. Цимбаревич П.М. Об углах внутреннего сопротивления в горных породах // Горный журнал.– 1933.– №7-8.– С. 48-51.
138. Квапил Р. Новые взгляды на вопросы теории давления горных пород и горных ударов // В кн.: Горное давление.– М.: Госгортехиздат, 1961.– С. 275-284.

139. Либерман Ю.М. Давление на крепь капитальных выработок.– М.: Наука, 1969.– 165 с.
140. Кирпичев В.П. О подобии при упругих явлениях // Записки Русского технического общества.– 1876.– № 3.– 162 с.
141. Чечулин Б.Б. Масштабный фактор и статистическая природа металлов.– М.: Metallurgizdat, 1963.– 120 с.
142. Давиденков Н.Н. Некоторые проблемы механики материалов.– М.: Газетно-журнальное изд-во, 1943.– 312 с.
143. Bauschinger I. Mitt. Ans die mech.-techn. Laboratorium D.Techn.Schule. – München, 1871, 1884, 1892.
144. Глушко В.Т., Ямщиков В.С., Яланский А.А. Геофизический контроль в шахтах и тоннелях.– М.: Недра, 1987.– 288 с.
145. Борисов А.А. Механика горных пород и массивов.– М.: Недра, 1980.– 359 с.
146. Михайлов А.Е. Полевые методы изучения трещин в горных породах.– М.: Гос. научн.-техн. изд-во лит. по геологии и охране недр, 1956.– 131 с.
147. Васильев П.В., Малинин С.И. Влияние основных геологических факторов на поведение пород в горных выработках.– М.: Госгортехиздат, 1960.– 93 с.
148. Руководство по изучению геологического состояния шахтных полей при подземной разработке угольных месторождений.– Л.: ВНИМИ, 1967.
149. Рац М.В. Неоднородность горных пород и их физических свойств.– М.: Наука, 1968.– 106 с.
150. Гиббс Дж. В. Основные принципы статистической механики.– М.: Госгортехиздат, 1946.– 285 с.
151. Stuart F.A. Strength and Stability of pillars in coal mines // Ichem, Metallurg and Mining Sas S. Afrika.– 1954.– №9.– P. 118-124.
152. Griffith A.A. The Phenomenon of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Soc., London.– 1921.– V. 221.– P. 163-198.

153. Чирков С.Е. Влияние масштабного фактора на прочность углей.– М.: Наука, 1969.– 113 с.
154. Койфман М.И. О влиянии размеров на прочность горных пород // Исследование физико-механических свойств горных пород применительно к задачам управления горным давлением.– М.: Изд-во АН СССР, 1962.– С. 6-14.
155. Меликидзе И.Г. О влияние формы и размеров образцов на их механические свойства // Горный журнал, 1959.– № 9.– С. 38-43.
156. Грисикова Н.П. Зависимость предела прочности на сжатие от величины и формы образцов // Механические свойства горных пород.– М.: Углетехиздат, 1959.
157. Ильницкая Е.И. Влияние масштабного фактора на прочностные свойства горных пород // Физико-механические свойства, давление и разрушение горных пород.– М.: Изд-во АН СССР, 1972.– С. 17-24.
158. Кунтыш М.Ф. Исследование методов определения основных физико-механических характеристик горных пород, используемых при решении задач горного давления. – Дисс... канд. техн. наук. – М.: ИГД им. А.А. Скочинского, 1964.– 166 с.
159. Пеньков А.М., Вopilкин А.Л. Расчет опорных целиков при добыче каменной соли.– Киев: Изд-во АН УССР, 1958.– 218 с.
160. Theil A. O kryteriach zniszenia zespotow skalnych w switle polozoych badan metoda besposred nego szinania // Pozpz. Hydrotechn.– 1973.– Z. 32.– S. 277-290.
161. Барон Л.И., Курбатов В.М. К вопросу о влиянии масштабного фактора при испытаниях горных пород на раздавливание // Научные исследования по разработке угольных и рудных месторождений.– М.: Госгортехиздат, 1959.– С. 128-136.
162. Stomatiu, Teodoresku. Recherches surla resistanse nux efforts mechanignes du sel gemme romain // Congress Int. mines, met., geologie applignes. Session, 1935.– V.213-217.

163. Койфман М.И. Главный масштабный эффект в горных породах и углях // Проблемы механизации горных работ.– М.: Изд-во АН СССР, 1963.– С. 39-56.
164. Рац М.В. Структурные модели в инженерной геологии.– М.: Недра, 1973.– 216 с.
165. Давиденков Н.Н. Некоторые проблемы прочности твердого тела.– М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1959.– 232 с.
166. Одинг И.А. Допустимые напряжения в машиностроении и циклическая прочность металлов.– М.: Машгиз, 1947.– 184 с.
167. Лавров В.В. Природа масштабного эффекта у льда и прочность ледяного покрова // ДАН СССР.– 1958.– №4.– С. 248-254.
168. Матвеев Б.В. О зависимости результатов механических испытаний горных пород от размеров их образцов // Вопросы разрушения и давления горных пород.– М.: Углетехиздат, 1955.– С. 132-139.
169. Волков С.Д. О масштабном эффекте при сложном напряженном состоянии // Физика металлов и металловедение.– 1956.– Т. II.– Вып. 3.– С. 428-440.
170. Болотин В.В. Изменчивость пределов прочности хрупких материалов и ее связь с масштабным эффектом // Строительная механика и расчет сооружений.– 1960.– № 4.– С. 1-7.
171. Полипов А.Н. Объяснение масштабного эффекта на основе энергетического критерия разрушения // Механика твердого тела.– 1984.– № 1.– С. 106-110.
172. Канторова Т.А., Тимошенко О.А. Обобщение статистической теории прочности на случай неоднородно-напряженного состояния // ЖТФ.– 1949.– Вып. 3.– №19.– С. 218-224.
173. Протодяконов М.М., Чирков С.Б. Трещиноватость и прочность горных пород в массиве.– М.: Недра, 1964.– 67 с.
174. Рац М.В., Чернышев С.Н. Трещиноватость и свойства трещиноватых пород.– М.: Недра, 1970.– 160 с.

175. Фисенко Г.Л. Предельные состояния горных пород вокруг выработок.– М.: Недра, 1976.– 272 с.
176. Фисенко Г.Л. Методы количественной оценки структурных ослаблений в связи с анализом их устойчивости // Современные проблемы механики горных пород.– Л.: Наука, 1972.– С. 21-29.
177. Фисенко Г.Л. Устойчивость бортов карьеров и отвалов.– М.: Недра, 1965.– 378 с.
178. Ким Д.Н. Влияние структуры на сдвиговую прочность массива // Тр. ВНИМИ.– 1969.– Сб. 72.– С.568-585.
179. Ким Д.Н. Исследование структурного ослабления трещиноватых пород моделированием прочностных свойств в лабораторных условиях // Тр. ИГД УФ АН СССР.– Свердловск, 1963.– Сб. 5.– С. 97-105.
180. Рубец Г.Т. Статистический метод оценки прочности слабых и трещиноватых горных пород // Механика разрушения горных пород.– Фрунзе: Илим, 1980.– С. 214-222.
181. Рубец Г.Т. Исследование изменчивости прочностных характеристик при помощи логнормального распределения и методы оценки его параметров. // Механика и разрушение горных пород.– К.: Наукова думка, 1976.– Вып. 3.– С. 39-43.
182. Рубец Г.Т. Статистический метод оценки масштабного фактора при нормальном распределении прочности горных пород // Механика и разрушение горных пород.– К.: Наукова думка, 1974.– Вып. 2.– С. 11-16.
183. Рубец Г.Т. Статистическая оценка экстремальных значений прочности и нагрузки // Механика и разрушение горных пород.– К.: Наукова думка, 1977.– С.11-15.
184. Мартынов Ю.И. Вероятностный метод определения прочности трещиноватого массива // Технология добычи угля подземным способом.– К.: Наукова думка, 1968.– № 5.– С. 59-62.
185. Методические рекомендации по оценке масштабного фактора прочности горных пород вероятностно-статистическими методами /

- В.Т. Глушко, В.Г. Борисенко, Н.В. Хижняк и др.– Кривой Рог: Изд-во НИГРИ, 1977.– 36 с.
186. Ржевский В.В., Новик Г.Я. Основы физики горных пород.– М.: Недра, 1973.– 286 с.
187. Шаумян Л.В. Физико-механические свойства массивов скальных пород.– М.: Недра, 1972.– 118 с.
188. Ветров С.В. О параметрах сводов естественного равновесия, пролетах обнажений и устойчивости целиков в трещиноватых горных породах // Физико-технические параметры горных пород. – М.: Наука, 1971.– С. 37-48.
189. Алферов О.С. К вопросу о взаимосвязи между тектоникой и интенсивностью выдавливания горных пород в подземные выработки // Сборник материалов по вопросам горного дела.– Днепропетровск: ДГИ, 1964.
190. Jahns H. Messung der behihgsfestigkeit in situ bei wachsendem Masstabverhältnisse // Proc., Jsb., Gongr. Int.Soc.Rock.Mech.– Lisabon, 1966.– Vol.1.– P. 477-482.
191. Рейхмус Д.Р. Корреляция экспериментальных зависимостей «сила-перемещение» с физическими свойствами горных пород при ударном бурении // Механика горных пород.– М.: Недра, 1966.– С.32-51.
192. Евдокимов П.Д., Санегин Д.Д. Прочность, сопротивляемость сдвигу и деформируемость оснований сооружений на скальных породах.– Л.: Энергия, 1964.– 169 с.
193. Прочностные и деформационные свойства сплошных руд Талнахского рудного узла / В.Д. Палий, Ю.Д. Орлов, В.К. Иванов и др. // Тр. ВНИМИ.– Л.: Изд-во ВНИМИ, 1974.– Сб. 91.– С. 139-145.
194. Биг Я.А., Бублик Ф.П. Об определении прочности пластов угля на сжатие // Тр. ВНИМИ. Л.: Изд-во ВНИМИ, 1963.– Сб. 50.– С. 45-53.

195. Кондратов А.В., Барях А.А. Исследование трещинообразования в скальном массиве вокруг горизонтальных горных выработок // ФТПРПИ.– 1983.– № 3.– С. 3-7.
196. Фисенко Г.П. Устойчивость бортов угольных карьеров.– М.: Углетехиздат, 1956.– 230 с.
197. Нестеренко Г.Г., Скозобцов Б.С., Твердовский Р.К. Способ оценки прочностных свойств в целиках // ФТПРПИ.– 1971.– №6.– С. 111-113.
198. Амусин Б.З. Механические характеристики массива горных пород при аналитических расчетах горного давления в выработках // ФТПРПИ.– 1979.– № 6.– С. 15-21.
199. Костомаров Н.Е., Пушкарев В.И. К определению прочности массива горных пород // Колыма.– 1975.– №12.– С. 9-12.
200. Костомаров Н.Е. Влияние прочности массива на размеры зоны неупругих деформаций пород вокруг одиночной выработки // Тр. ВНИМИ.– Л.: Изд-во ВНИМИ, 1977.– № 103.– С. 67-70.
201. Расчет нагрузки на крепи горизонтальных выработок / Е.В. Стрельцов, А.В. Шейко, В.Д. Резун, В.И. Александров // Проектирование и реконструкция угольных предприятий.– 1973.– №32.– С. 19-21.
202. Определение расчетного коэффициента крепости породы в массиве / Н.И. Глодковская и др. // Гидротехническое строительство.– 1977.– №1.– С. 49-51.
203. Deere D.U. Technical description of rock cores for engineering purposes // Rock Mec.eng.Geol.– 1963.– V.1.– P. 18-22.
204. Hansagi L. A method of determining the degree of fissuration of rock // Int. S. Rock. Mech. Sci.– 1974.– V.11.– P. 379-388.
205. Новикова Л.В., Калашников А.И., Лесников В.С. Распределение напряжений в массиве горных пород на участке сопряжения двух выработок // Изв. ВУЗов. Горный журнал.– 1984.– №2.– С. 25-27.

206. Новикова Л.В. Теоретические основы и методы расчета средств крепления и охраны подготовительных выработок марганцеворудных шахт: Автореф. дис. ... докт. техн. наук.– Днепропетровск, 1988.– 32 с.
207. Новикова Л.В., Сдвижкова Е.А., Кузьменко А.М., Приходько В.В. Определение шага посадки основной кровли из расчета трехмерного напряженного состояния породного массива // Днепропетровск: ДГИ, 1991.– 11 с. – Деп в УкрИНТЭИ 23.07.92, № 1125.
208. Новикова Л.В., Пономаренко П.И., Приходько В.В., Морозов И.Т. Метод граничных элементов в задачах горной геомеханики.– Днепропетровск: Наука и образование, 1997.– 256 с.
209. Шашенко А. Н. Устойчивость подземных выработок в неоднородном породном массиве.– Дис. ... д-ра техн. наук.– Днепропетровск, 1988.– 507 с.
210. Вентцель Е. С. Теория вероятностей.– М.: Наука, 1969.– 572 с.
211. Бронштейн И.Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов.– М.: Наука, 1981.– 718 с.
212. Хан Г., Шапиро С. Статистические модели в инженерных задачах.– М.: Мир, 1969.– 388 с.
213. Карасев Б.В. Статистический подход к изучению природы и некоторые закономерности распределения вещества Земли // Пути познания Земли.– М.: Наука, 1971.– С. 131–151.
214. ДонУГИ. Исследования механических свойств горных пород.– М.: Углетехиздат, 1951.– 223 с.
215. Кузнецов Г.Н. Механические свойства горных пород.– М.: Углетехиздат, 1951.– 223 с.
216. Протодьяконов М.М. Методы оценки трещиноватости и прочности горных пород в массиве.– М: Изд-во ИГД им. А.А. Скочинского, 1964.– 32 с.

217. Сдвижкова Е.А., Бабец Д.В. Оценка стоимостных затрат на поддержание горных выработок с привлечением метода группового учета аргументов // Науковий вісник НГАУ.– №4.– 2000.– С. 10-12.
218. Кузнецов С.Т., Воронин Н.С. Методическое пособие по изучению слоистости и прогнозу расслаиваемости осадочных пород.– Л.: Изд-во ВНИМИ, 1967.– 84 с.
219. СНиП II-94-80. Строительные нормы и правила. Ч. II. Нормы проектирования. Глава 94. Подземные горные выработки. – М.: Стройиздат, 1982. – 31 с.
220. Hayashi M. Strength and dilatancy of brittle jointed mass. // The extreme value stochastic and anisotropic failure mechanism: The 3rd interior symposium on rock mechanics in the Japan Society of civil Engineers.– Tokyo, 1965.– P. 32-38.
221. Чернышев С.Н. Трещиноватость горных пород и ее влияние на устойчивость откосов.– М.: Недра, 1985.– 210 с.
222. Машанов А.Ж., Машанов А.А. Основы геомеханики скально-трещиноватых пород.– Алма-Ата: Наука, 1985.– 190 с.
223. Мюллер Л.И. Инженерная геология. Механика скальных массивов.– М.: Мир, 1971.– 254 с.
224. Ванифатов Н.И. Кливаж и управление горным давлением // Уголь.– 1953.– № 6.
225. Трофимов А.А. Некоторые неотложные задачи шахтной геологии Карагандинского бассейна // Уголь.– 1954.– № 9.
226. Прогнозирование и расчет проявлений горного давления / Грицко Г.И., Власенко В.В., Посохов Г.Е. и др. / Под ред. Шемякина Е.И.– Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1980.– 117 с.
227. Ушаков И.Н. Трещиноватость горного массива в Центральном районе Донбасса и точечный способ ее характеристики // Записки ЛГИ.– 1958.– Т.36.– Вып. 1.

228. Орлов А.А. Исследование поведения пород кровли при применении стоек постоянного и нарастающего сопротивления // Сборник статей по вопросам горного давления и сдвижения горных пород.– Л.: ВНИМИ, 1959.– Сб. 36.– С. 145-159.
229. Колоколов О.В., Князев М.В., Доценко В.Н., Притыскач В.П. Влияние вектора напряжений и трещиноватости горных пород на выбор технологической схемы разработки // Изв. ВУЗов. Горный журнал.– 1990.– №2.– С. 21-23.
230. Шклярский М.Ф. Расчет устойчивости выработок, пройденных в трещиноватых породах // Методы изучения и способы управления горным давлением в подземных выработках.– Ленинград: ВНИМИ, 1987.– С. 17-22.
231. Руководство по экспресс-определению предела прочности на одноосное сжатие углевмещающих пород Донбасса по генетической принадлежности осадка и акустическим измерениям кернов разведочных скважин.– Днепропетровск, 1984.
232. Шашенко А.Н., Тулуб С.Б., Сдвижкова Е.А. Некоторые задачи статистической геомеханики.– К.: Пульсары, 2001.– 243 с.
233. Сдвижкова Е.А., Бабец Д.В. Влияние структурной неоднородности породного массива на статистическое распределение его физико-механических свойств // Науковий вісник НГУ.– №9.– 2003.– С. 95-98.
234. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела.– М.: Мир, 1987.– 326 с.
235. Шашенко А.Н., Сургай Н.С., Парчевский Л.Я. Методы теории вероятностей в геомеханике.– К.: Техника, 1994.– 209 с.
236. Гзовский М.В. Основные вопросы тектонофизики и тектоника Байджансайского антиклинория.– М.: Изд-во АН СССР, 1963.– 544 с.
237. Батугин С.А. Анизотропия массива горных пород.– Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1988.– 83 с.

238. Барон Л.И. Горно-технологическое породоведение. Предмет и способы исследований.– М.: Наука, 1977.– 324 с.
239. Медведев Р.В. Статистическая интерпретация результатов прочностных испытаний горных пород // ФТПРПИ.– 1974. – №4. – С. 29-34.
240. Матвиенко В.В. Закон распределения предела прочности на сжатие каменной соли месторождения Яр-Бишкадак // Труды ВНИИПромгаз, 1965.– Вып.1.– С. 63-69.
241. Катин К.П. Законы распределения физико-механических свойств скальных пород и их практическое использование // Совершенствование техники и технологии подземной добычи руд цветных металлов.– Усть-Каменогорск: ВНИИЦветмет, 1981.– С. 104-120.
242. Родионов Д.А. Функции распределения содержаний элементов и минералов в изверженных горных породах.– М.: Наука, 1964.– 102 с.
243. Прохоров Ю.В. К вопросу о логнормальном распределении в геохимических задачах // Теория вероятностей и ее применения.– 1965.– №1.– С. 184-187.
244. Крамбейн У., Грейбилл Ф. Статистические модели в геологии.– М.: Мир, 1969.– 397 с.
245. Колмогоров А.Н. О логарифмически нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении // ДАН СССР.– 1941.– Т. XXX1.– №2.– С. 99-103.
246. Филлипов А.Ф. О распределении размеров частиц при дроблении // Теория вероятностей и ее применения.– 1961.– №6.– С. 209-218.
247. Турицын К.С. Основной статистический закон распределения физических свойств горных пород // Геофизические исследования при решении геологических задач в Восточной Сибири.– М.: Недра, 1964.– Вып. 3.– С. 210-221.

248. Прохоров А.В. Логарифмически нормальное распределение // Математическая энциклопедия.– М.: Сов. энциклопедия, 1982.– Т. 3.– С. 408.
249. Aitchison J., Brown J.A.C. The lognormal distribution.– Cambridge: Cambridge University Press, 1957.– 187 p.
250. Lognormal distributions. Theory and applications / Ed. by E.L. Crow, K. Shimizu.– N.Y: Dekker, 1988.– 387 p.
251. Математические методы в теории надежности / Б.В. Гнеденко и др.– М.: Наука, 1965.– 524 с.
252. Установление закономерностей проявления внезапных выбросов угля и газов в целях разработки методики прогнозов выбросоопасных зон на полях действующих и строящихся шахт Донбасса / В.С. Вереда, Б.К. Юрченко, В.Г. Суровцев, В.А. Ямпольский.– Донецк: ПО Укргеология, 1968.– 358 с.
253. Прогнозный каталог шахтопластов Донецкого угольного бассейна с характеристикой горно-геологических факторов и явлений // М.: ИГД им. А. А. Скочинского, 1982.– 500 с.
254. Ержанов Ж.С. Исследование ползучести пород Донбасса.– М.: ЦИТугля, 1959.– № 1.– 36 с.
255. Михлин С.Г. Распределение напряжений в полуплоскости с эллиптическим вырезом.– Тр. сейсм. ин-та АН СССР, 1934.– № 29.– С. 212-220.
256. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.– М.: Наука, 1966.–705 с.
257. Соколов А.П. Об упруго-пластическом состоянии пластинки // ДАН СССР.– 1948.– Т. 60.– № 1– С. 128-139.
258. Лаврентьев М.А., Шабат Е.В. Методы теории функций комплексного переменного.- М.: Наука, 1973.- 736 с.

259. Шашенко А.Н., Янко В.И., Солодянкин А.В. Учет эффекта разупрочнения породного массива в задачах геомеханики // Науковий вісник НГУ.– 2003.– № 7.– С. 29-33.
260. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Изд-во "Мир". – 1975. – 592 с.
261. Шашенко А.Н., Солодянкин А.В., Гапеев С.Н. Определение напряженно-деформированного состояния породного массива с учетом эффекта разупрочнения в зоне разрыхления // Разработка рудных месторождений. Науч.-техн. сб.– Кривой Рог: КрТУ, 2005.– Вып. 88.– С. 44-49.
262. Hinton E., Owen D.R.J. Finite element programming.– London: Academic Press, 1977.– 305 p.
263. Шашенко А.Н., Солодянкин А.В. Упругопластическое состояние породного массива, дилатирующего в окрестности подземной выработки // Геотехническая механика.– Днепропетровск: ИГТМ НАН Украины.– 2005.– №61.– С. 230-241.
264. Шашенко А.Н., Гапеев С.Н. Математическая модель процесса потери упругопластической устойчивости породного массива в окрестности одиночной выработки // Гірничовидобувна промисловість України і Польщі: актуальні проблеми і перспективи: Матеріали Українсько-Польського форуму гірників –2004.– Дніпропетровськ: НГУ, 2004.– С. 75-80.
265. Шашенко А.Н., Гапеев С.Н. Подход к моделированию возмущенного процесса при исследовании потери упругопластической устойчивости почвы одиночной выработки // Современные проблемы шахтного и подземного строительства: Материалы международного научно-практического симпозиума. – Донецк: Норд-пресс, 2004. – Вып. 5. – С. 56-63.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Таблица А.1. Значения нормированной интегральной функции

нормального распределения $F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$

x	$F_0(x)$	x	$F_0(x)$	x	$F_0(x)$	x	$F_0(x)$
-0.00	0.5000	-0.30	0.3821	-0.60	0.2743	-0.90	0.1841
-0.01	0.4960	-0.31	0.3783	-0.61	0.2709	-0.91	0.1814
-0.02	0.4920	-0.32	0.3745	-0.62	0.2676	-0.92	0.1788
-0.03	0.4880	-0.33	0.3707	-0.63	0.2643	-0.93	0.1762
-0.04	0.4840	-0.34	0.3669	-0.64	0.2611	-0.94	0.1736
-0.05	0.4801	-0.35	0.3632	-0.65	0.2578	-0.95	0.1711
-0.06	0.4761	-0.36	0.3594	-0.66	0.2546	-0.96	0.1685
-0.07	0.4721	-0.37	0.3557	-0.67	0.2514	-0.97	0.1660
-0.08	0.4681	-0.38	0.3520	-0.68	0.2483	-0.98	0.1635
-0.09	0.4641	-0.39	0.3483	-0.69	0.2451	-0.99	0.1611
-0.10	0.4602	-0.40	0.3446	-0.70	0.2420	-1.00	0.1587
-0.11	0.4562	-0.41	0.3409	-0.71	0.2389	-1.01	0.1562
-0.12	0.4522	-0.42	0.3372	-0.72	0.2358	-1.02	0.1539
-0.13	0.4483	-0.43	0.3336	-0.73	0.2327	-1.03	0.1515
-0.14	0.4443	-0.44	0.3300	-0.74	0.2296	-1.04	0.1492
-0.15	0.4404	-0.45	0.3264	-0.75	0.2266	-1.05	0.1469
-0.16	0.4364	-0.46	0.3228	-0.76	0.2236	-1.06	0.1446
-0.17	0.4325	-0.47	0.3192	-0.77	0.2206	-1.07	0.1423
-0.18	0.4286	-0.48	0.3156	-0.78	0.2177	-1.08	0.1401
-0.19	0.4247	-0.49	0.3121	-0.79	0.2148	-1.09	0.1379
-0.20	0.4207	-0.50	0.3085	-0.80	0.2119	-1.10	0.1357
-0.21	0.4168	-0.51	0.3050	-0.81	0.2090	-1.11	0.1335
-0.22	0.4129	-0.52	0.3015	-0.82	0.2061	-1.12	0.1314
-0.23	0.4090	-0.53	0.2981	-0.83	0.2033	-1.13	0.1292
-0.24	0.4052	-0.54	0.2946	-0.84	0.2005	-1.14	0.1271
-0.25	0.4013	-0.55	0.2912	-0.85	0.1977	-1.15	0.1251
-0.26	0.3974	-0.56	0.2877	-0.86	0.1949	-1.16	0.1230
-0.27	0.3936	-0.57	0.2843	-0.87	0.1922	-1.17	0.1210
-0.28	0.3897	-0.58	0.2810	-0.88	0.1894	-1.18	0.1190
-0.29	0.3859	-0.59	0.2776	-0.89	0.1867	-1.19	0.1170

Продолжение табл. А.1

x	$F_0(x)$	x	$F_0(x)$	x	$F_0(x)$	x	$F_0(x)$
-1.20	0.1151	-1.50	0.0668	-1.80	0.0359	-3.00	0.0013
-1.21	0.1131	-1.51	0.0655	-1.81	0.0351	-3.10	0.0010
-1.22	0.1112	-1.52	0.0643	-1.82	0.0344	-3.20	0.0007
-1.23	0.1093	-1.53	0.0630	-1.83	0.0336	-3.30	0.0005
-1.24	0.1075	-1.54	0.0618	-1.84	0.0329	-3.40	0.0003
-1.25	0.1056	-1.55	0.0606	-1.85	0.0322	-3.50	0.0002
-1.26	0.1038	-1.56	0.0594	-1.86	0.0314	-3.60	0.0002
-1.27	0.1020	-1.57	0.0582	-1.87	0.0307	-3.70	0.0001
-1.28	0.1003	-1.58	0.0571	-1.88	0.0301	-3.80	0.0001
-1.29	0.0985	-1.59	0.0559	-1.89	0.0294	-3.90	0.0000
-1.30	0.0968	-1.60	0.0548	-1.90	0.0287	0.00	0.5000
-1.31	0.0951	-1.61	0.0537	-1.91	0.0281	0.01	0.5040
-1.32	0.0934	-1.62	0.0526	-1.92	0.0274	0.02	0.5080
-1.33	0.0918	-1.63	0.0516	-1.93	0.0268	0.03	0.5120
-1.34	0.0901	-1.64	0.0505	-1.94	0.0262	0.04	0.5160
-1.35	0.0885	-1.65	0.0495	-1.95	0.0256	0.05	0.5199
-1.36	0.0869	-1.66	0.0485	-1.96	0.0250	0.06	0.5239
-1.37	0.0853	-1.67	0.0475	-1.97	0.0244	0.07	0.5279
-1.38	0.0838	-1.68	0.0465	-1.98	0.0239	0.08	0.5319
-1.39	0.0823	-1.69	0.0455	-1.99	0.0233	0.09	0.5359
-1.40	0.0808	-1.70	0.0446	-2.00	0.0228	0.10	0.5398
-1.41	0.0793	-1.71	0.0436	-2.10	0.0179	0.11	0.5438
-1.42	0.0778	-1.72	0.0427	-2.20	0.0139	0.12	0.5478
-1.43	0.0764	-1.73	0.0418	-2.30	0.0107	0.13	0.5517
-1.44	0.0749	-1.74	0.0409	-2.40	0.0082	0.14	0.5557
-1.45	0.0735	-1.75	0.0401	-2.50	0.0062	0.15	0.5596
-1.46	0.0721	-1.76	0.0392	-2.60	0.0047	0.16	0.5636
-1.47	0.0708	-1.77	0.0384	-2.70	0.0035	0.17	0.5675
-1.48	0.0694	-1.78	0.0375	-2.80	0.0026	0.18	0.5714
-1.49	0.0681	-1.79	0.0367	-2.90	0.0019	0.19	0.5753

Продолжение табл. А.1

x	$F_0(x)$	x	$F_0(x)$	x	$F_0(x)$	x	$F_0(x)$
0.20	0.5793	0.50	0.6915	0.80	0.7881	1.10	0.8643
0.21	0.5832	0.51	0.6950	0.81	0.7910	1.11	0.8665
0.22	0.5871	0.52	0.6985	0.82	0.7939	1.12	0.8686
0.23	0.5910	0.53	0.7019	0.83	0.7967	1.13	0.8708
0.24	0.5948	0.54	0.7054	0.84	0.7995	1.14	0.8729
0.25	0.5987	0.55	0.7088	0.85	0.8023	1.15	0.8749
0.26	0.6026	0.56	0.7123	0.86	0.8051	1.16	0.8770
0.27	0.6064	0.57	0.7157	0.87	0.8078	1.17	0.8790
0.28	0.6103	0.58	0.7190	0.88	0.8106	1.18	0.8810
0.29	0.6141	0.59	0.7224	0.89	0.8133	1.19	0.8830
0.30	0.6179	0.60	0.7257	0.90	0.8159	1.20	0.8849
0.31	0.6217	0.61	0.7291	0.91	0.8186	1.21	0.8869
0.32	0.6255	0.62	0.7324	0.92	0.8212	1.22	0.8888
0.33	0.6293	0.63	0.7357	0.93	0.8238	1.23	0.8907
0.34	0.6331	0.64	0.7389	0.94	0.8264	1.24	0.8925
0.35	0.6368	0.65	0.7422	0.95	0.8289	1.25	0.8944
0.36	0.6406	0.66	0.7454	0.96	0.8315	1.26	0.8962
0.37	0.6443	0.67	0.7486	0.97	0.8340	1.27	0.8980
0.38	0.6480	0.68	0.7517	0.98	0.8365	1.28	0.8997
0.39	0.6517	0.69	0.7549	0.99	0.8389	1.29	0.9015
0.40	0.6554	0.70	0.7580	1.00	0.8413	1.30	0.9032
0.41	0.6591	0.71	0.7611	1.01	0.8438	1.31	0.9049
0.42	0.6628	0.72	0.7642	1.02	0.8461	1.32	0.9066
0.43	0.6664	0.73	0.7673	1.03	0.8485	1.33	0.9082
0.44	0.6700	0.74	0.7704	1.04	0.8508	1.34	0.9099
0.45	0.6736	0.75	0.7734	1.05	0.8531	1.35	0.9115
0.46	0.6772	0.76	0.7764	1.06	0.8554	1.36	0.9131
0.47	0.6808	0.77	0.7794	1.07	0.8577	1.37	0.9147
0.48	0.6844	0.78	0.7823	1.08	0.8599	1.38	0.9162
0.49	0.6879	0.79	0.7852	1.09	0.8621	1.39	0.9177

Продолжение табл. А.1

x	$F_0(x)$	x	$F_0(x)$	x	$F_0(x)$
1.40	0.9192	1.70	0.9554	2.00	0.9772
1.41	0.9207	1.71	0.9564	2.10	0.9821
1.42	0.9222	1.72	0.9573	2.20	0.9861
1.43	0.9236	1.73	0.9582	2.30	0.9893
1.44	0.9251	1.74	0.9591	2.40	0.9918
1.45	0.9265	1.75	0.9599	2.50	0.9938
1.46	0.9279	1.76	0.9608	2.60	0.9953
1.47	0.9292	1.77	0.9616	2.70	0.9965
1.48	0.9306	1.78	0.9625	2.80	0.9974
1.49	0.9319	1.79	0.9633	2.90	0.9981
1.50	0.9332	1.80	0.9641	3.00	0.9987
1.51	0.9345	1.81	0.9649	3.10	0.9990
1.52	0.9357	1.82	0.9656	3.20	0.9993
1.53	0.9370	1.83	0.9664	3.30	0.9995
1.54	0.9382	1.84	0.9671	3.40	0.9997
1.55	0.9394	1.85	0.9678	3.50	0.9998
1.56	0.9406	1.86	0.9686	3.60	0.9998
1.57	0.9418	1.87	0.9693	3.70	0.9999
1.58	0.9429	1.88	0.9699	3.80	0.9999
1.59	0.9441	1.89	0.9706	3.90	1.0000
1.60	0.9452	1.90	0.9713		
1.61	0.9463	1.91	0.9719		
1.62	0.9474	1.92	0.9726		
1.63	0.9484	1.93	0.9732		
1.64	0.9495	1.94	0.9738		
1.65	0.9505	1.95	0.9744		
1.66	0.9515	1.96	0.9750		
1.67	0.9525	1.97	0.9756		
1.68	0.9535	1.98	0.9761		
1.69	0.9545	1.99	0.9767		

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Гистограммы частот пределов прочности на одноосное сжатие
углевмещающих пород Донбасса

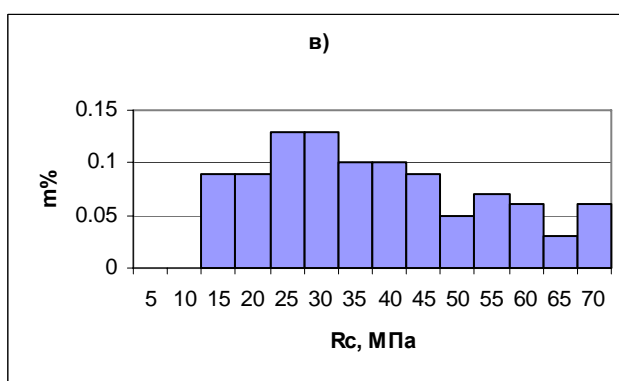
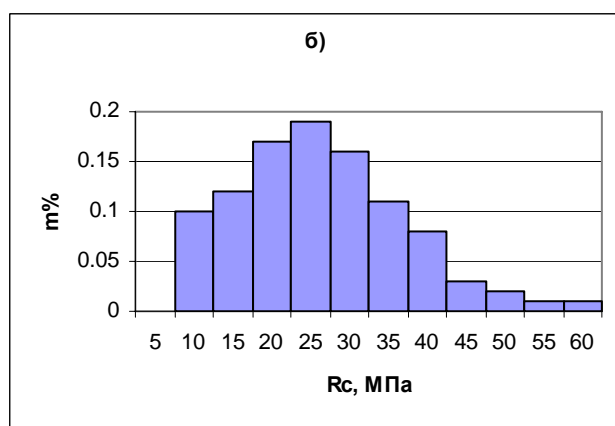
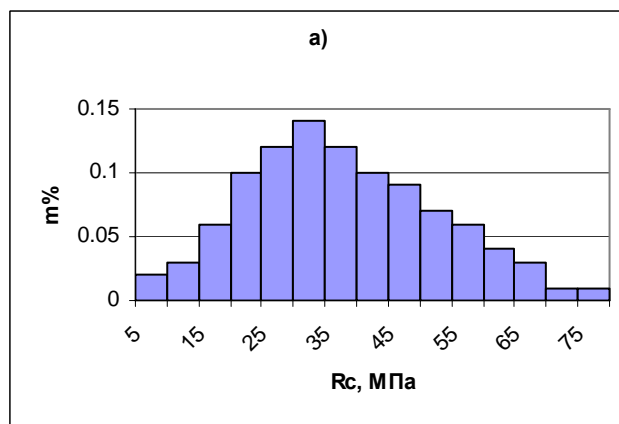


Рис. Б.1. Гистограммы значений предела прочности на одноосное сжатие пород, вмещающих угли марки Д-ДГ:

а) алевролиты; б) аргиллиты; в) песчаники

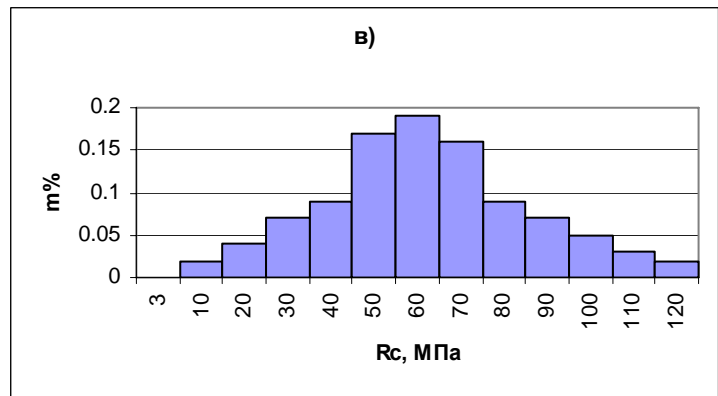
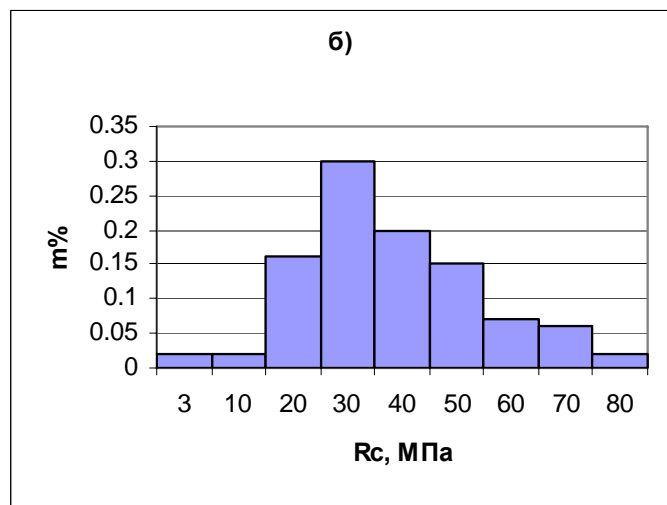
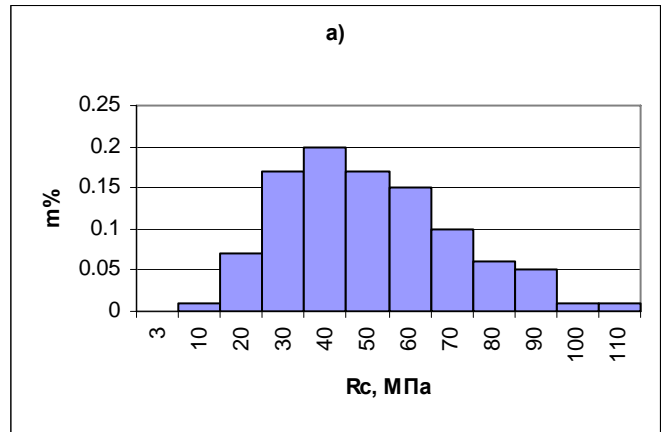


Рис. Б.2. Гистограммы значений предела прочности на одноосное сжатие пород, вмещающих угли марки Г-ГЖ:
а) алевролиты; б) аргиллиты; в) песчаники

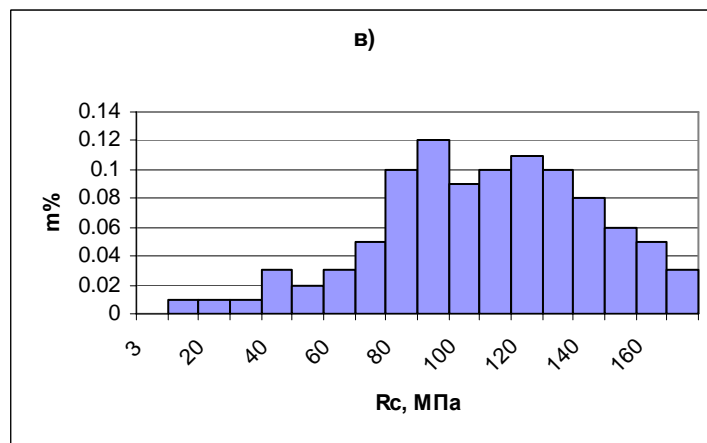
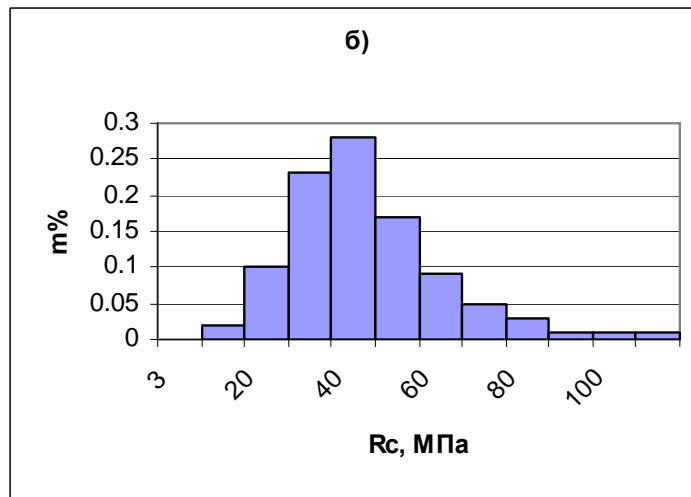
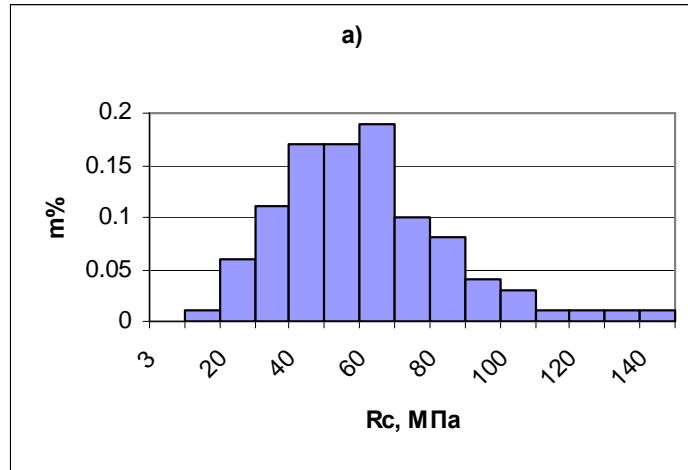
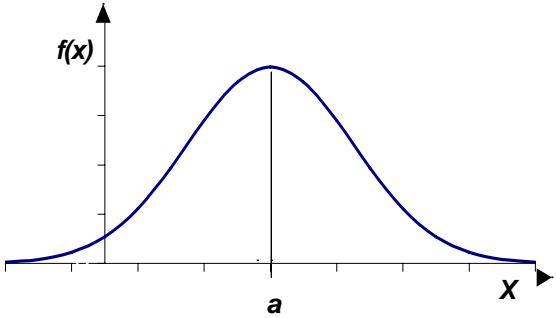
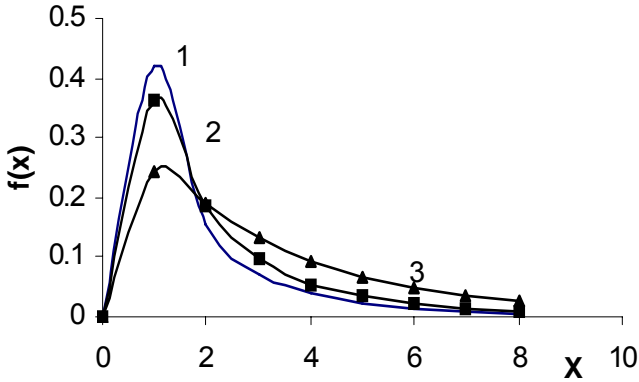
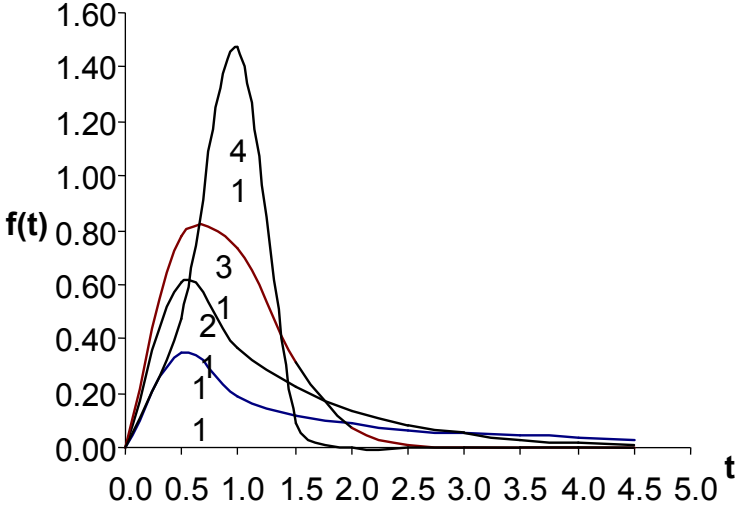


Рис. Б.3. Гистограммы значений предела прочности на одноосное сжатие пород, вмещающих угли марки Ж, КЖ, ОС:
 а) алевролиты; б) аргиллиты; в) песчаники

ТАБЛИЦА В.1. СВОДКА НЕПРЕРЫВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

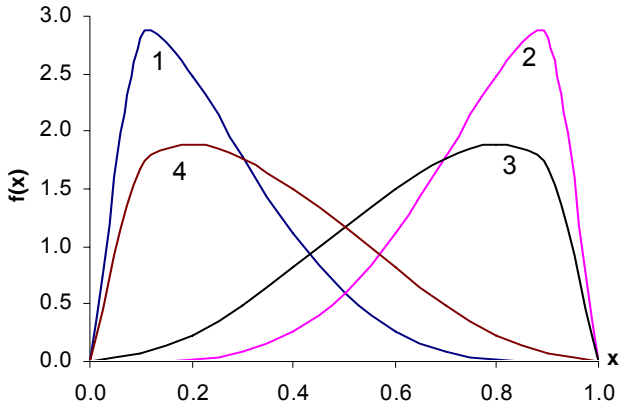
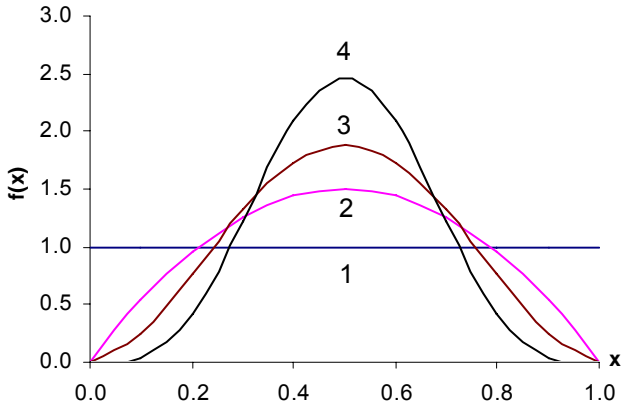
Название распределения	Плотность распределения	Числовые характеристики распределения
<p>Нормальное (Гаусса)</p> 	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty < a < +\infty$ $\sigma > 0$	<p>Математическое ожидание: $M(x) = m_1 = a$ Дисперсия: $D(x) = \mu_2 = \sigma^2$ Показатель асимметрии: $\beta_1 = 0$ Показатель эксцесса: $\beta_2 = 3$</p>
<p>Логарифмически нормальное</p>  <p>1- $a = 0, \sigma^2 = 1$; 2- $a = 0,3, \sigma^2 = 1$; 3- $a = 1, \sigma^2 = 1$</p>	$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}}$	<p>Математическое ожидание: $M(x) = m_1 = e^{a + \frac{\sigma^2}{2}}$ Дисперсия: $D(x) = \mu_2 = e^{2a + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$ Показатель асимметрии: $\beta_1 = \sqrt{e^{\sigma^2} - 1} (e^{\sigma^2} + 2)$ Показатель эксцесса: $\beta_2 = 3 + (w - 1)(w^3 + 3w^2 + 6w + 6),$ $w = e^{\sigma^2}$</p>

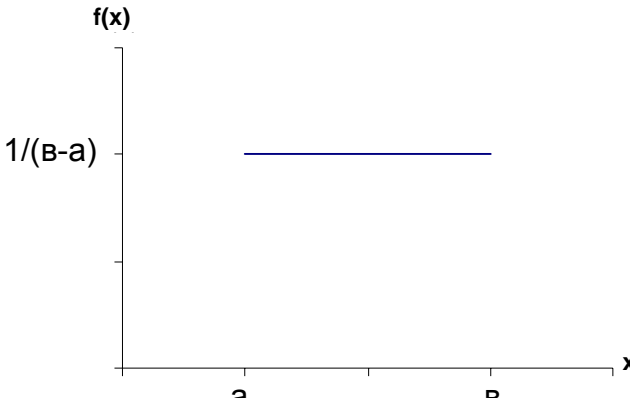
Название распределения	Плотность распределения	Числовые характеристики распределения
<p>Гамма-распределение</p>  <p>1 - $\xi = 0,5; \lambda = 1$; 2 - $\xi = 1; \lambda = 1$; 3 - $\xi = 3; \lambda = 1$;</p>	$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\xi}{\Gamma(\xi)} x^{\xi-1} \cdot e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0; \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$ <p>$\Gamma(\xi)$ - гамма-функция</p> $\Gamma(\xi) = \int_0^\infty x^{\xi-1} e^{-x} dx$	<p>Математическое ожидание:</p> $M(x) = m_1 = \frac{\xi}{\lambda}$ <p>Дисперсия:</p> $D(x) = \mu_2 = \frac{\xi}{\lambda^2}$ <p>Показатель асимметрии:</p> $\beta_1 = \frac{2}{\sqrt{\xi}}$ <p>Показатель эксцесса:</p> $\beta_2 = \frac{3(\xi + 2)}{\xi}$
<p>Экспоненциальное</p> 	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ <p>$\lambda > 0$</p>	<p>Математическое ожидание:</p> $M(x) = m_1 = \frac{1}{\lambda}$ <p>Дисперсия:</p> $D(x) = \mu_2 = \frac{1}{\lambda^2}$ <p>Показатель асимметрии:</p> $\beta_1 = 2,0$ <p>Показатель эксцесса:</p> $\beta_2 = 9,0$

Название распределения	Плотность распределения	Числовые характеристики распределения
<p>Вейбулла</p>  <p>1 - $\nu = 0,5$; $\sigma = 1$; 2 - $\nu = 1$; $\sigma = 1$; 3 - $\nu = 2$; $\sigma = 1$; 4 - $\nu = 4$; $\sigma = 1$;</p>	$f(x) = \begin{cases} \frac{\nu}{\sigma} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\nu-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\nu\right], & x \geq 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$ <p style="text-align: center;">$\nu > 0, \quad \sigma > 0$</p>	<p>Математическое ожидание: $M(x) = m_1 = \sigma_0 \Gamma(1/\xi + 1)$;</p> <p>Дисперсия: $D(x) = \mu_2 =$ $= \sigma_0^2 \left\{ \frac{\Gamma(2/\xi + 1) - [\Gamma(1/\xi + 1)]^2}{[\Gamma(1/\xi + 1)]^2} \right\}$;</p> <p>Показатель асимметрии: * Показатель эксцесса: **</p>
		<p>* - $\beta_1 = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{3}{\nu}\right) - 3\Gamma\left(1 + \frac{2}{\nu}\right)\Gamma\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) + \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)\right]^3}{\left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\nu}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)\right]^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}$;</p> <p style="text-align: center;">** -</p> <p>$\beta_2 = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{4}{\nu}\right) - 4\Gamma\left(1 + \frac{3}{\nu}\right)\Gamma\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) + 6\Gamma\left(1 + \frac{2}{\nu}\right)\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)\right]^2 - 3\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)\right]^4}{\left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\nu}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)\right]^2 \right\}^2}$;</p>

Название распределения	Плотность распределения	Числовые характеристики распределения
<p>Релея</p>  <p>1 – $\sigma^2 = 0,5$; 2 – $\sigma^2 = 1,0$; 3 – $\sigma^2 = 2,0$</p>	$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{\sigma^2}\right) e^{-x^2/2\sigma^2}, & x \geq 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$ <p>$\sigma > 0$</p>	<p>Математическое ожидание:</p> $M(x) = m_1 = \frac{(\sigma^2 \pi)^{1/2}}{\sqrt{2}}$ <p>Дисперсия:</p> $D(x) = \mu_2 = 0,429\sigma^2$ <p>Показатель асимметрии:</p> $\beta_1 = 0,63$ <p>Показатель эксцесса:</p> $\beta_2 = 3,26$

Название распределения	Плотность распределения	Числовые характеристики распределения
<p>Экстремальных значений</p>  <p>Распределение минимальных значений типа I</p> <p>Распределение максимальных значений типа I</p>	<p>Для максимальных значений:</p> $f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp \left[-\frac{1}{\sigma} (x-a) - e^{-\frac{1}{\sigma}(x-a)} \right];$ <p>Для минимальных значений:</p> $f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp \left[\frac{1}{\sigma} (x-a) - e^{-\frac{1}{\sigma}(x-a)} \right],$ <p style="text-align: center;">$-\infty < x < \infty$</p> <p style="text-align: center;">$-\infty < a < \infty,$ $\sigma > 0$</p>	<p>Математическое ожидание:</p> <ul style="list-style-type: none"> – для максимальных значений $M(x) = m_1 = a + 0,5776$; – для минимальных значений $M(x) = m_1 = a - 0,5776$; <p>Дисперсия:</p> $D(x) = \mu_2 = 1,645\sigma^2$ <p>Показатель асимметрии:</p> <ul style="list-style-type: none"> – для максимальных значений $\beta_1 = 1,14$; – для минимальных значений $\beta_1 = -1,14$ <p>Показатель эксцесса:</p> $\beta_2 = 5,4$

Название распределения	Плотность распределения	Числовые характеристики распределения
<p>Бета-распределение</p>  <p>a)</p> <p>1 – $\xi = 5,0$; $\gamma = 1,5$; 2 – $\xi = 1,5$; $\gamma = 5,0$; 3 – $\xi = 1,5$; $\gamma = 3,0$; 4 – $\xi = 3,0$; $\gamma = 1,5$;</p>	$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\xi + \gamma)}{\Gamma(\xi)\Gamma(\gamma)} x^{\gamma-1}(1-x)^{\xi-1}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$ $\xi > 0, \quad \gamma > 0$	<p>Математическое ожидание:</p> $M(x) = m_1 = \frac{\gamma}{\xi + \gamma}$ <p>Дисперсия:</p> $D(x) = \mu_2 = \frac{\xi\gamma}{(\xi + \gamma)^2(\xi + \gamma + 1)}$ <p>Показатель асимметрии: *</p> <p>Показатель эксцесса: **</p>
 <p>b)</p> <p>1 – $\xi = 1,0$; $\gamma = 1,0$; 2 – $\xi = 2,0$; $\gamma = 2,0$; 3 – $\xi = 3,0$; $\gamma = 3,0$; 4 – $\xi = 5,0$; $\gamma = 5,0$;</p>		$* - \beta_1 = \frac{2(\xi - \gamma)(\gamma + \xi + 1)^{1/2}}{(\xi\gamma)^{1/2}(\gamma + \xi + 2)}$ $** - \beta_2 = \frac{3(\xi + \gamma + 1)[2(\gamma + \xi)^2 + \xi\gamma(\xi + \gamma - 6)]}{\xi\gamma(\xi + \gamma + 2)(\xi + \gamma + 3)}$

Название распределения	Плотность распределения	Числовые характеристики распределения
<p>Равномерное</p> 	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$ <p style="text-align: center;">a, b, где $a < b$</p>	<p>Математическое ожидание:</p> $M(x) = m_1 = \frac{a+b}{2}$ <p>Дисперсия:</p> $D(x) = \mu_2 = \frac{(b-a)^2}{12}$ <p>Показатель асимметрии:</p> $\beta_1 = 0$ <p>Показатель эксцесса:</p> $\beta_2 = 1,8$

Наукове видання

Шашенко Олександр Миколайович
Сдвижкова Олена Олександрівна
Гапєєв Сергій Миколайович

ДЕФОРМОВАНІСТЬ ТА МІЦНІСТЬ МАСИВІВ ГІРСЬКИХ ПОРІД

Монографія
(Російською мовою)

Друкується в редакційній обробці авторів.

Підписано до друку 05.06.2008. Формат 30x42/4.
Папір офсетний. Ризографія. Ум. друк. арк. 12,5.
Обл.-вид. арк. 12,5. Тираж 300 прим. Зам. №

Підготовлено до друку та видруковано
у Національному гірничому університеті.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК №1842.
49005, м. Дніпропетровськ,
просп. К. Маркса, 19.