

**В.А. СПИНЕЕВ**

(Україна, Луганськ, ГП "Укрніиуглеобогашення"),

**Н.А. СПИНЕЕВА**

(Україна, Луганськ, Восточноукраїнський національний університет ім. В. Даля)

### **О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ОСАЖДЕНИЯ В СГУСТИТЕЛЬНЫХ АППАРАТАХ**

*Проблема и ее связь с научными и практическими задачами.* Изучение процессов осаждения угольных шламов и флотоотходов необходимо в силу в того, что в настоящее время наблюдается тенденция к увеличению количества и ухудшению качества шламовых продуктов. Шламовые продукты становятся все более тонкими и более зольными, а обработка илистых высокозольных продуктов всегда оставалась сложной задачей. При решении ее в настоящее время не обходится без поиска новых, более эффективных флокулянтов и глубокого исследования процессов осаждения, с целью нахождения эффективных элементов конструкции сгустителя для улучшения организации потоков от начала загрузки до разгрузки каждого из конечных продуктов. Кроме того, исследование закономерностей процесса осаждения позволяет прогнозировать его результаты при известных исходных данных, что создает предпосылки для создания эффективной системы автоматического регулирования процессом в сгустительном аппарате.

*Анализ исследований и публикаций.* Одна из первых разработок математической модели процесса осаждения приведена в [1]. При определении размеров частиц золь (суспензий) с использованием уравнения Стокса для силы трения в вязкой жидкости удобнее было определять движение не отдельной частицы, а массы частиц в водной взвеси. Вместо скорости осаждения по этой модели определялась скорость накопления оседающего вещества на дне сосуда. В цилиндре с высотой  $H$  (м) от дна сосуда с количеством дисперсной фазы  $A$  (г) исследовался процесс осаждения. Под влиянием силы тяжести частицы с постоянной скоростью  $u$  (м/с) осаждались на дно сосуда, при этом осадок увеличивался на постоянную величину  $dp/d\tau$  (г/с). Скорость накопления принималась пропорциональной скорости осаждения, количеству диспергированного вещества  $A$  (г) и обратно пропорциональной высоте столба  $H$  (м) жидкости. Тогда:

$$\frac{dp}{d\tau} = k \cdot \frac{A \cdot u}{H} \text{ или } p = \frac{A \cdot u}{H} \cdot \tau. \quad (1)$$

Преимуществом данной эмпирической модели является простота определения скорости осаждения и крупности осаждаемых частиц или их агрегатов.

Недостатком данной модели является построение ее на основе предположения о постоянстве скорости осаждения, которое может быть лишь на отдель-

## **Зневоднення та сушіння. Водно-шламове господарство**

ных участках кривой осаждения или при осаждении разбавленных монодисперсных суспензий ограниченного диапазона крупности.

Исходными положениями для построения математической модели процесса осаждения [2] было: 1) влияние на движение частиц взаимодействия сил тяжести и сил сопротивления; 2) распределение по высоте отдельных составляющих полидисперсной системы экспоненциальному закону, аналогичному барометрическому закону Лапласа и закону Смолуховского – Перрена о равновесии дисперсной системы под действием сил тяготения и диффузии. Дифференциальное уравнение седиментации со ссылкой на одного из авторов [2] без объяснения способа его получения приведено следующее:

$$dn = -k \cdot n \cdot v_1 \cdot dt, \quad (2)$$

где  $dn$  – уменьшение числа частиц в единице объема, обладающих скоростью  $v_1$ ;  $k$  – коэффициент пропорциональности (коэффициент седиментации);  $n$  – число частиц в единице объема;  $v_1$  – скорость осаждения частиц;  $dt$  – элементарный промежуток времени, в течение которого происходит рассматриваемое уменьшение числа частиц.

В книгах [3] и [4] несколько отредактированное уравнение (2) уменьшения содержания твердых частиц в суспензии имеет вид:

$$dn = -n \cdot v \cdot dt, \quad (3)$$

где  $dn$  – уменьшение содержания твердой фазы в слое суспензии за время  $dt$ , г/л;  $n$  – содержание твердого в суспензии рассматриваемого объема, г/л;  $v_1$  – удельная скорость осаждения твердых частиц в слое за время  $dt$ , 1/с; В книге [4] также без вывода приводится формула для удельной скорости процесса осаждения в последовательные моменты времени:

$$v = v_0 \cdot \exp(-mt), \quad (4)$$

где  $v$  – конечная удельная скорость процесса осаждения твердой фазы в слое, 1/с;  $v_0$  – начальная удельная скорость процесса осаждения твердой фазы, 1/с;  $m$  – средняя относительная скорость уменьшения скорости процесса осаждения твердой фазы в последовательные моменты времени, 1/с.

Решение уравнения математической модели (3) с применением уравнения (4) достаточно продуктивно, так как позволяет определять остаточную концентрацию дисперсной фазы и время необходимое для обеспечения требуемого осветления. Вторая из формул упрощена автором:

## **Зневоднення та сушіння. Водно-шламове господарство**

$$n = n_0 \cdot \exp\left[\frac{v_0}{m} \cdot (e^{-m \cdot t} - 1)\right] \text{ и } t = \frac{\ln \frac{n}{n_0} \cdot \ln \frac{v_0}{v}}{v_0 - v}, \quad (5)$$

где  $n_0$  – начальная концентрация твердой фазы, г/л.

Однако данная математическая модель не обеспечивает описание процесса осаждения в восходящем потоке, которое обычно происходит в сгустительных аппаратах, а исходные выражения (3) и (4) приведены в [3] без их вывода.

В [5] со ссылкой на Л.Г. Подкосова процесс разделения материала при осаждении в стесненных условиях рассматривается как массовый процесс. Понимая под скоростью разделения количество зерен в долях от их общего количества, предложен общий вид функции скорости разделения:

$$\frac{dx}{dt} = f_1(k) \cdot f_2(\Theta) \cdot (1 - x), \quad (6)$$

где  $\frac{dx}{dt}$  – скорость разделения материала, выраженная количеством зерен, занимающих в единицу времени определенный уровень по высоте;  $f_1(k)$  и  $f_2(\theta)$  – функции, учитывающие грансостав и разжиженность взвеси на процесс разделения;  $x$  – число зерен, занявших за время  $t$  соответствующие им уровни во взвеси.

Данная модель процесса разделения при гидравлической классификации достаточно общая, но не исчерпывающая по характеристикам свойств осаждаемых частиц и не объясняет получения функций в (6).

Для установившегося режима в источнике [6] приведена функция распределения концентрации с учетом осаждения частиц твердого в восходящем потоке:

$$c(y) = c_0 \cdot \exp\left[-\int \frac{v(y) - \bar{u}(y)}{D(y)} \cdot dy\right], \quad (7)$$

где  $c(y)$  и  $c_0$  – концентрации на глубине  $y$  и начальная, г/л;  $v(y)$  и скорость осаждения частиц твердого, м/с;  $\bar{u}(y)$  – местная осредненная скорость восходящего потока дисперсионной среды, м/с;  $D(y) = l \cdot u'$  – коэффициент турбулентного массопереноса, м<sup>2</sup>/с;  $l$  – масштаб турбулентности, м;  $u'$  – пульсационная составляющая скорости движения жидкости, м/с.

Практическое применение данной модели требует проведения большого объема дополнительных исследований.

Один из выводов уравнений, (2) и (3), описывающих уменьшение содер-

## **Зневоднення та сушіння. Водно-шламове господарство**

жання твердих частиц в суспензії приведено в джерелі [7].

Проводились дослідження впливу магнітних, електричних і електромагнітних полів на прискорення осадження твердих частиц в рідкостворі, в тому числі і в угольних шламових водах, [8]. Прискорення осадження твердої фази в рідких середовищах ґрунтується на різній чутливості частиц до дії того чи іншого силового поля: магнітного, електричного, електромагнітного, земного тяжіння, сил тертя, або комбінації таких полів. Після складання рівнянь масопереносу швидкість осадження частиц твердої фази з урахуванням названих сил, для випадку електромагнітної зони з неоднорідним магнітним полем, складе:

$$\vec{v}\Big|_{x=0}^{x=x_1} = \left\{ -\frac{k}{c} \cdot \text{grad}c + \frac{1}{\alpha} \cdot \left[ \vec{g} \cdot (\rho_T - \rho_{ж}) + (\chi_T - \chi_{ж}) \cdot H \cdot \text{grad}H + (\vec{j} \times \vec{B}) \right] \right\} = 0, \quad (8)$$

де:

– перше слагаєме в правій частині рівняння – градієнтна сила, визначена концентрацією твердої фази  $c$ , коефіцієнтом дифузії  $k$  і коефіцієнтом опору  $\alpha$ ;

– друге слагаєме – сила тяжіння і Архимедова сила;

– третє слагаєме – об'ємна магнітна сила, визначена напруженістю магнітного поля  $H$  і різницею об'ємних магнітних чутливостей  $\chi$  твердої і рідкої фаз;

– четверте слагаєме – об'ємна електромагнітна сила, визначена густиною електричного струму  $\vec{j}$  і магнітної індукції  $\vec{B}$ .

Рівність нулю правій частині рівняння свідчить про відсутність переносу на границях процесу в початковий  $x=0$  і кінцевий  $x=x_1$  моменти часу.

Під дією електромагнітної сили частинки твердої фази будуть осідати з більшою швидкістю.

*Постановка задачі.* Метою даної роботи є побудова математичної моделі процесу осадження, що враховує названі роботи.

*Визначення матеріалу і результати.* Для визначення математичної моделі процесу осадження будемо розглядати аналогічно висновку закону діючих мас, [9], [10]. Для цього розглянемо масову концентрацію твердої фази  $c$  (кг/м<sup>3</sup>) в гідросмісі як складну функцію маси твердої фази  $m$  (кг) і об'єму суспензії  $V$  (м<sup>3</sup>), в свою чергу залежачих від часу  $t$  (с).

Масова концентрація твердої фази або вміст твердого в суспензії визначається за формулою:

$$c = \frac{m}{V} = \frac{m}{S \cdot H}, \quad (9)$$

## **Зневоднення та сушіння. Водно-шламове господарство**

где  $S$  – площа поперечного сечения потока суспензии,  $\text{м}^2$ ;  $H$  – высота потока осаждающихся частиц, м.

Разделив полную производную по времени массы  $m_t'$  на массу  $m$  из (9), получим:

$$\frac{m_t'}{m} = \frac{c_t'}{c} + \frac{S_t'}{S} + \frac{H_t'}{H}.$$

При постоянных массе и площади сечения потока осаждающихся частиц скорость изменения концентрации за время  $t$  осаждения составит:

$$\frac{dc}{dt} = -c \cdot \frac{H_t'}{H} = c \cdot \frac{v}{H}, \quad (10)$$

откуда скорость осаждения частиц ( $\text{м/с}$ ):

$$v = \frac{H}{c} \cdot \frac{dc}{dt}, \quad (11)$$

что эквивалентно выражениям (2) и (3), приведенным в [3] и [4] без доказательства.

Выражение (11) может быть представлено в виде:

$$v \cdot c = \left[ H \cdot \frac{dy}{dt} \right] \cdot \frac{dc}{dy} = D \cdot \frac{dc}{dy},$$

или, в более общей форме, для случая с осаждением частиц в вертикальном потоке необходимо вместо скорости осаждения  $v$  подставить выражение абсолютной скорости  $v-u$ . Тогда:

$$q = u \cdot c = v \cdot c - D \cdot \frac{dc}{dy}, \quad (12)$$

где

$$q = \frac{m_t'}{S} - \quad (13)$$

плотность массопереноса, или перенос вещества в единицу времени через единицу площади  $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ , [6];  $D$  – коэффициент турбулентного (диффузионного) массопереноса, характеризующий интенсивность продольного перемешивания  $\text{м}^2/\text{с}$ .

## **Зневоднення та сушіння. Водно-шламове господарство**

Тогда из (12) легко получить выражение (7), приведенное в [6].

Полученное уравнение (12) является уравнением одномерного турбулентного (диффузионного) массопереноса без массообмена с окружающей средой. Для случая с массообменом с окружающей средой уравнение (12) остается тем же, но изменяется вид коэффициента турбулентного массопереноса  $D$ , [6].

В выражении (12) первое слагаемое представляет собой перенос массы твердого вещества за счет скорости осаждения твердой фазы; второе слагаемое – массоперенос турбулентный (диффузионный) в направлении противоположном градиенту концентрации твердой фазы. Формула (11) может быть получена другим способом – из уравнения движения частицы твердого вещества в процессе ее осаждения в гидросмеси, [7].

Рассмотрим осаждение дисперсных частиц вблизи верхней границы осадка. Обозначим общую массу дисперсной фазы, находящейся в объеме через  $M$ , а через  $x$  – массу дисперсной фазы, которая уже попала в осадок к моменту времени  $t$ , отсчитываемому от начала осаждения. Очевидно,  $x$  является функцией от  $t$ . Количество вещества, осевшее за промежуток времени от момента  $t$  до момента  $t+dt$ , при малом  $dt$  пропорционально  $dt$  и количеству вещества, которое к моменту времени  $t$  оставалось не осевшим:

$$dx = k \cdot (M - x) \cdot dt, \quad (14)$$

тогда это уравнение через количество вещества  $m$ , не осевшее к моменту времени  $t$ , примет вид:

$$\frac{dm}{dt} = -km. \quad (15)$$

Подставив  $m_t$  из (13) в (15) получим:

$$\frac{dq}{dt} = -k \cdot q. \quad (16)$$

Из (16) следует, что:

$$q = q_0 \cdot \exp[-k \cdot (t - t_0)]. \quad (17)$$

С учетом (12) выражение (17) примет вид:

$$v \cdot c + h \cdot \frac{dc}{dt} = \left( v_0 \cdot c_0 + h_0 \cdot \frac{dc}{dt} \Big|_{t=t_0}^{c=c_0} \right) \cdot \exp[-k \cdot (t - t_0)]. \quad (18)$$

## **Зневоднення та сушіння. Водно-шламове господарство**

Выражение (18) представляет математическую модель процесса осаждения твердых частиц в сгустительном аппарате.

Второе слагаемое в (18) можно опустить, так как в большинстве случаев, особенно при использовании флокулянтов и при эффективной работе сгустителя, явлениями турбулентного и диффузионного массопереноса можно пренебречь.

Тогда выражение (18) примет простой вид:

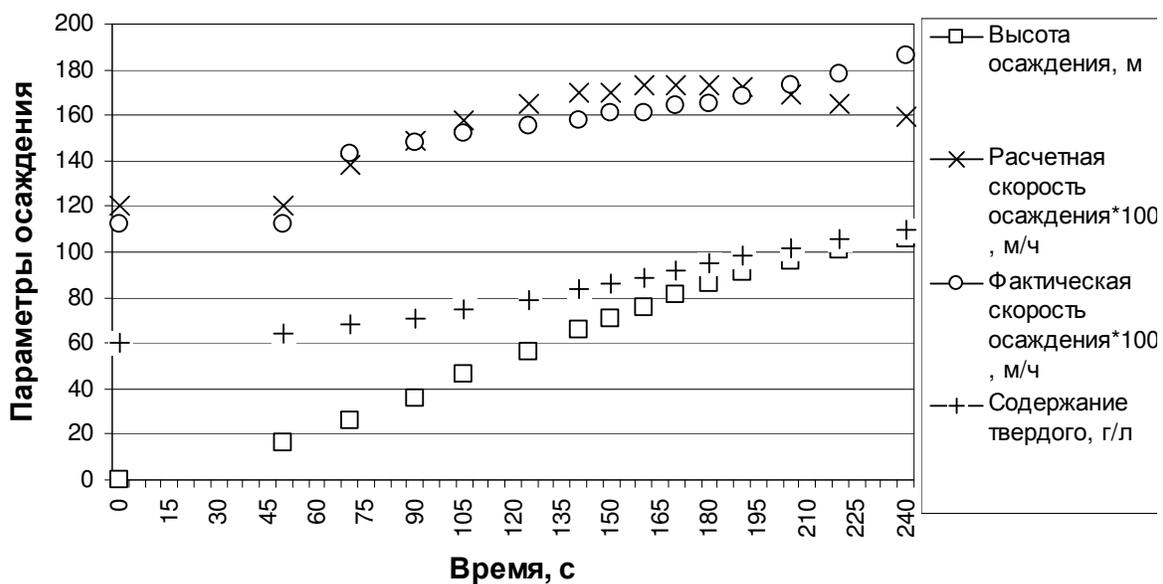
$$v \cdot c = v_0 \cdot c_0 \cdot \exp[-k \cdot (t - t_0)]. \quad (19)$$

В начальный момент времени при  $t = t_0$  скорости и концентрации принимают начальные значения:  $v = v_0$  и  $c = c_0$ . С увеличением времени правая сторона выражения (19) стремится к нулю, что соответствует уменьшению скорости осаждения практически до нуля при ограниченном увеличении концентрации.

Для описания процесса осаждения частиц в восходящем со скоростью  $u$  потоке в формуле (19) вместо скорости  $v$  осаждения вводится абсолютная скорость  $v - u$  частиц в сгустителе.

При фиксированном значении концентрации получается выражение зависимости скорости осаждения от времени (3), приведенное в [4] без доказательства. При фиксированном значении скорости слоя частиц, находящихся в процессе осаждения, концентрация твердого вещества будет изменяться во времени, как приведено в [4]. Трехмерные графики зависимости концентрации от скорости и времени осаждения, приведенные в источниках [2-4] соответствуют выражению (18).

Проведена практическая проверка выражения (19) на примере осаждения в цилиндре одного из сгущаемых флотоотходов ЦОФ "Добропольская".



Параметры осаждения флотоотходов ЦОФ "Добропольская"

## **Зневоднення та сушіння. Водно-шламове господарство**

Для условий лабораторного опыта по осаждению флотоотходов (отобранных на фабрике 18.11.2011) с содержанием твердого 60 г/л и с добавлением флокулянта BESFLOC K 4046 в количестве 50 г/т построена регрессионная модель (19). Методом наименьших квадратов определено наилучшее значение параметра  $k=-0,0043642$  (1/с). При этом среднее квадратическое отклонение экспериментальной и расчетной скоростей осаждения в соответствующие моменты времени, составило 0,11 м/ч, а полученная регрессионная модель является адекватной с точностью менее 7% экспериментальному процессу осаждения, график которого приведен на рисунке.

### *Выводы*

1. В данной работе рассмотрены имеющиеся в литературе модели распределения концентрации и скорости осаждения твердых частиц в сгустительных аппаратах.

2. С учетом закона действующих масс составлена математическая модель процесса осаждения, показывающая взаимосвязь концентрации, скорости осаждения и времени процесса, которая позволяет объяснить зависимости, приводившиеся ранее в литературе без вывода.

### **Список литературы**

1. Думанский А.В. Учение о коллоидах. – М.:ОНТИ, 1937. – 456 с.
2. Фоменко Т.Г., Благов И.С., Коткин А.М., Бутовецкий В.С. Шламы, их улавливание и обезвоживание. – М.: Недра, 1968. – 203 с.
3. Фоменко Т.Г. Бутовецкий В.С., Погарцева Е.М. Водно-шламовое хозяйство углеобогатительных фабрик. – М.: Недра, 1974. – 272 с.
4. Фоменко Т.Г., Кондратенко А.Г. Отходы флотации и их свойства. – М.: Недра, 1974. – 125 с.
5. Справочник по обогащению углей. / Под ред. И.С. Благова, А.М. Коткина, Н.А. Самылина. – М.: Недра, 1974. – 614 с.
6. Пилов П.И. Гравитационная сепарация полезных ископаемых. – Днепропетровск: НГУ, 2003. – 123 с.
7. Спинеев В.А. О распределении концентрации шламов в сгустительных аппаратах углеобогатительных фабрик // Збагачення корисних копалин: Наук.-техн. зб. – 2007. – Вып. 29(70)-30(71). – С. 167-172.
8. Куценко А.Н. Исследование влияния электромагнитных полей на ускорение осаждения частиц твердой фазы в жидких средах. – Л.: ЛГУ, 1970. – 17 с.
9. Справочник по обогащению углей / Под ред. И.С. Благова, А.М. Коткина, Л.С. Зарубина. 2-е изд. – М.: Недра, 1984. – 614 с.
10. Касаткин А.Г. Основные процессы и аппараты химической технологии. – М: Химия, 1971. – 784 с.

© Спинеев В.А., Спинеева Н.А., 2014

*Надійшла до редколегії 13.09.2014 р.  
Рекомендовано до публікації д.т.н. О.Д. Полуляхом*