УДК 622.7

А.Д. ПОЛУЛЯХ, д-р техн. наук,
И.В. ЕРЕМЕЕВ
(Украина, Днепропетровск, ГП "Укрнииуглеобогащение")

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВИЙ ПЕРЕХОДА ВЯЗКОЙ СУСПЕНЗИИ В ВЯЗКОПЛАСТИНЧАТЫЙ МАТЕРИАЛ НА СИТЕ ВИБРОГРОХОТА

Обезвоживание угольных шламовых суспензий на виброгрохотах по своему физическому представлению значительно отличается от обезвоживания влажного материала.

По существующим представлениям [1-5] процесс обезвоживания угольных шламовых суспензий на грохоте можно разделить на два этапа:

– на первом происходит предварительное обезвоживание, когда твердая фаза в процессе движения суспензии по наклонному ситу осаждается на него, а основная масса воды удаляется через слой материала и отверстия перфорированной поверхности;

– на втором – осадок разрыхляется и уплотняется с разрушением капилляров и удалением капиллярной влаги через отверстия перфорированной поверхности.

На первом этапе обезвоживания извлечение жидкой фазы из слоя суспензии определяется гидродинамическими параметрами потока и ситовой поверхности и подчиняется законам гидравлики переменной массы [6, 7], во втором – параметрами вибровозбуждения, свойствами твердой фазы потока и осуществляется по законам фильтрации [8-10].

Важнейшей задачей теории обезвоживания угольных суспензий на ситовых поверхностях является определение момента (или условий) перехода вязкой суспензии в вязкопластинчатый материал. Решение этой задачи позволяет осуществить выбор рациональных параметров обезвоживающей поверхности с учетом особенностей первого и второго этапа обезвоживания суспензий на вибруситах и определить необходимую величину вибровозбуждения на ней.

Важным моментом в решении этой задачи является аналитическое определение изменения продольной компоненты скорости и глубины по длине потока на обезвоживающей поверхности и установление зоны постоянной толщины материала на сите.

Для выполнения поставляемой задачи рассмотрим течение вязкой жидкости по ситовой поверхности.

В задачах течения жидкости по ситовой поверхности основной интерес представляет определение глубины потока или расхода через проницаемую перегородку вдоль направления движения. Подобные задачи исследованы достаточно полно только для заданных зависимостей отвода жидкости (в основном, равномерного) сквозь проницаемую перегородку в направлении потока [11, 12].

Существуют также классические решения, полученные для слоистых течений вязкой жидкости по сплошной поверхности под действием силы тяжести. В этом случае вектор скорости имеет постоянное направление, что позволяет линеаризовать уравнения движения [13, 14].

В работе [15] рассмотрена задача течения вязкой жидкости в наклонном канале прямоугольного сечения со сплошным или проницаемым дном при условии, что глубина потока $\tilde{h}_o$ в начальном сечении значительно меньше длины L рассматриваемого участка потока:

$$\frac{\tilde{h}_o}{L} = \varepsilon << 1. \tag{1}$$

Здесь под L понимается некоторая характерная длина потока, не превышающая длину, на которой происходит полное просачивание жидкости, но большая той, для которой условие (1) не выполняется. Поэтому, вообще говоря, величина L не нуждается в конкретизации, но может быть привязана к определенным геометрическим или физическим параметрам потока. Порядок величины ε можно оценить на примере: если длина ситовой поверхности составляет 5 м, а глубина потока в загрузочной части равна 0,1 м, то ε = 0,1/5 = 0,02.

Для решения поставленной задачи рассмотрим установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости, стекающей по наклонной ситовой поверхности, которое описывается уравнениями Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \tag{2}$$

$$\tilde{u}\,\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\,\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} - g\sin\alpha = \nu\nabla^2\tilde{u}, \tag{3}$$

$$\tilde{u}\,\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\,\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + g\cos\alpha = \nu\nabla^2\tilde{v}, \tag{4}$$

где $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ – компоненты скорости в направлениях $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$; $\tilde{p}$ – давление жидкости; ρ и ν – плотность и кинематическая вязкость жидкости соответственно; g – ускорение силы тяжести; α – угол наклона плоскости к горизонту; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2}$ – оператор Лапласа.

На поверхности сита продольная компонента скорости равна нулю, а нормальная будет зависеть от условий истечения жидкости через отверстия сита. Для случая истечения через малое отверстие в тонкой стенке скорость на выходе из отверстия определяется по известной формуле $\tilde{v} = \eta\sqrt{2g\tilde{h}_o}$, где η – коэффициент скорости. Для колосникового сита тонкого грохочения с размером щели 0,1-0,2 мм, т.е. для малых чисел Рейнольдса, скорость входа в отверстие сита также определяется гидростатическим давлением и может быть вычислена по формуле $\tilde{v} = B\tilde{h}_o / \nu$ [16], где B – геометрический параметр сита, составленный из констант, характеризующих ширину щели, высоту колосников и угол расширения щели. Если живое сечение сита равно δ, то усредненное значение нормальной составляющей скорости у сита составит $\tilde{v} = \delta B\tilde{h}_o / \nu$. Живое сечение колосниковых сит с шириной щели 0,1-0,2 мм находится в пределах 4,5-10,5% [17]. Таким образом, δ имеет порядок ε, а их отношение $\gamma = \delta / \varepsilon$ является величиной нулевого порядка.

Тогда граничное условие для поверхности раздела жидкость – проницаемая поверхность:

$$\tilde{u} = 0,\ \tilde{v} = -\frac{B\delta\tilde{h}_o}{\nu} \text{ при } \tilde{y} = 0. \tag{5}$$

Для равномерного слоистого течения вязкой жидкости слоем постоянной глубины, когда действующие на поток силы тяжести и вязкости уравновешены, существует следующее установившееся решение [13]:

$$\begin{aligned} &\tilde{U} = \frac{g}{2\nu}\sin\alpha\left(2\tilde{h}_o\tilde{y} - \tilde{y}^2\right), \tilde{V} = 0, \\ &\tilde{P} = P_o - \rho g\cos\alpha\left(\tilde{y} - \tilde{h}_o\right), \end{aligned} \tag{6}$$

где P_o – давление на поверхности потока.

В решении (6) использовано граничное условие $\partial\tilde{u} / \partial\tilde{y} = 0$ при $\tilde{y} = \tilde{h}_o$, показывающее, что на поверхности потока напряжение сдвига обращается в нуль.

Для рассмотрения возмущений в установившемся слоистом течении (16) введем безразмерные величины следующими соотношениями [18]:

$$\begin{aligned} &h = \tilde{h} / \tilde{h}_o, \quad x = \tilde{x} / L, \quad y = \tilde{y} / \tilde{h}_o, \quad U = \tilde{U} / U_o, \\ &u + U = \tilde{u} / U_o, \quad v = \tilde{v} / \varepsilon U_o, \quad P = \tilde{P} / \rho g\tilde{h}_o \sin\alpha, \\ &p + P = \tilde{p} / \rho g\tilde{h}_o \sin\alpha, \quad U_o = g\tilde{h}_o^2 \cdot \sin\alpha / 2\nu. \end{aligned} \tag{7}$$

После подстановки (7) в уравнения (2)-(4) имеем следующие уравнения для безразмерных возмущений:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{8}$$

$$\left(u+U\right)\frac{\partial u}{\partial x}+v\left(\frac{\partial u}{\partial y}+U'\right)=-\frac{2}{\mathrm{Re}}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\varepsilon\cdot\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \tag{9}$$

$$\left(u+U\right)\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{2}{\varepsilon^2\,\mathrm{Re}}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{\varepsilon\cdot\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right), \tag{10}$$

где $U=2y-y^2$; $Re=U_o\tilde{h}_o/\nu$ – число Рейнольдса, а штрихом обозначено дифференцирование по y.

Следуя [18] введем функцию тока $\psi(x,y)$, такую, что

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=u, \qquad -\frac{\partial\psi}{\partial x}=v. \tag{11}$$

При подстановке (11) в уравнение (8) последнее обращается в тождество, а при подстановке в (9) и (10), с последующим дифференцированием (9) по y, а (10) по x и вычитанием уравнения (10) из (9), их можно объединить в одно уравнение относительно ψ:

$$\begin{aligned}\psi_{yyyy}&=\varepsilon\cdot\mathrm{Re}\left[\left(U+\psi_y\right)\psi_{xyy}-\left(U''+\psi_{yyy}\right)\psi_x\right]-2\varepsilon^2\psi_{xxyy}+\\&+\varepsilon^3\cdot\mathrm{Re}\left[\left(U+\psi_y\right)\psi_{xxx}-\psi_x\psi_{xxy}\right]-\varepsilon^4\psi_{xxxx}.\end{aligned} \tag{12}$$

Здесь и далее индексами x и y обозначены частные производные по соответствующим переменным.

Как видно, уравнение (12) представляет собой естественное разложение функции тока ψ по малому параметру ε.

Уравнение (12) необходимо дополнить следующими граничными условиями.

Условие на поверхности раздела жидкость – проницаемая поверхность:

$$\psi_y=0, \quad \psi_x=a\,Re\,h \text{ при } y=0. \tag{13}$$

Здесь обозначено $a=\gamma B/U_o^2$.

На свободной поверхности потока нормальная составляющая скорости жидкости равна скорости поверхности раздела:

$$h_x\left(U+\psi_y\right)+\psi_x=0 \text{ при } y=h. \tag{14}$$

Кроме того, на свободной поверхности касательное напряжение обращается в нуль:

$$\left(U' + \psi_{yy} - \varepsilon^2 \psi_{xx}\right)\left(1 - \varepsilon^2 h_x^2\right) - 4\varepsilon^2 \psi_{xy} h_x = 0 \text{ при } y = h, \tag{15}$$

а градиент давления в направлении оси x, согласно уравнению (9),

$$p_x = \frac{1}{2}\varepsilon^{-1}\psi_{yyy} - \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left[\psi_{xy}\left(\psi_y + U\right) - \psi_x\left(\psi_{yy} + U'\right)\right] + \frac{1}{2}\varepsilon\psi_{xxy}. \tag{16}$$

Для описания безразмерного изменения возмущенной поверхности потока определим разложение по степеням малого параметра ε зависимостей (12), (13), (15) и (16) для использования их в уравнении (14) поверхности потока. Разложение по степеням ε для возмущенного решения задачи [18]:

$$\begin{gathered} \psi = \psi_0 + \varepsilon\psi_1 + \varepsilon^2\psi_2 + \ldots \\ p = \varepsilon^{-1} p_{-1} + p_0 + \varepsilon p_1 + \ldots \end{gathered} \tag{17}$$

Подставим разложение (17) в предыдущие уравнения и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε.

Для порядка ε^o имеем:

$$\psi_{0yyyy} = 0, \tag{18}$$

$$\psi_{0y} = 0 \text{ при } y = 0, \tag{19}$$

$$\psi_{0x} = a\operatorname{Re} h \text{ при } y = 0, \tag{20}$$

$$\psi_{0yy} = 2\left(y - 1\right) \text{ при } y = h, \tag{21}$$

$$\psi_{0yyy} = 0 \text{ при } y = h. \tag{22}$$

Последнее условие вытекает из (16).

Для порядка ε^1:

$$\psi_{1yyyy} = \operatorname{Re}[(U + \psi_{0y})\psi_{0xyy} - (U'' + \psi_{0yyy})\psi_{0x}], \tag{23}$$

$$\psi_{1y} = 0 \text{ при } y = 0, \tag{24}$$

$$\psi_{1yy} = 0 \text{ при } y = h, \tag{25}$$

$$\psi_{1yyy} = 2\operatorname{Re} y^3 h_x \text{ при } y = h. \tag{26}$$

Интегрируя последовательно уравнение (18) с использованием граничных условий (19)-(22), получим решение задачи нулевого порядка:

$$\psi_0 = (h-1)y^2 + \mathrm{Re}\, a\int_o^x h(x)\,dx. \tag{27}$$

Решение (27) дает:

$$\psi_{0y} = 2y\,(h-1), \tag{28}$$

$$\psi_{0x} = h_x y^2 + \mathrm{Re}\, ah, \tag{29}$$

$$\psi_{0xyy} = 2h_x, \tag{30}$$

$$\psi_{0yyy} = 0. \tag{31}$$

Тогда, после подстановки полученных решений в уравнение (23), оно принимает вид:

$$\psi_{1yyyy} = 2\,\mathrm{Re}\,(2yhh_x + \mathrm{Re}\, ah). \tag{32}$$

Интегрируя последовательно это уравнение с учетом условий (24)-(26), имеем:

$$\psi_{1yyy} = 2\,Re[hh_x y^2 + Reah\,(y-h)], \tag{33}$$

$$\psi_{1yy} = \mathrm{Re}\left[\frac{2}{3}hh_x\left(y^3 - h^3\right) + \mathrm{Re}\, ah\,(y-h)^2\right], \tag{34}$$

$$\psi_{1y} = \mathrm{Re}\left[\frac{2}{3}hh_x y\left(\frac{y^3}{4} - h^3\right) + \mathrm{Re}\, ahy\left(\frac{y^2}{3} - yh + h^2\right)\right], \tag{35}$$

$$\psi_1 = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{3}hh_x y^2\left(\frac{y^3}{10} - h^3\right) + \mathrm{Re}\, ahy^2\left(\frac{y^2}{12} - \frac{hy}{3} + \frac{h^2}{2}\right)\right] + C, \tag{36}$$

где C – постоянная интегрирования.

Тогда

$$\psi_{1x} = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{30}y^5\left(h_x^2 + h_{xx}h\right) - \frac{1}{3}y^2\left(4h_x^2h^3 + h_{xx}h^4\right) + a\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{12}y^4h_x - \frac{2}{3}y^3h_xh + \frac{3}{2}y^2h_xh^2\right)\right], \tag{37}$$

а для поверхности потока ($y = h$)

$$\psi_{1x} = \mathrm{Re}\, h^4\left(-\frac{13}{10}hh_x^2 - \frac{3}{10}h^2h_{xx} + \frac{11}{12}a\,\mathrm{Re}\,h_x\right). \quad (38)$$

Подставив полученные решения для ψ_{0y}, ψ_{1y}, ψ_{0x} и ψ_{1x} в уравнение (14) и, положив $\psi = \psi_0 + \varepsilon\psi_1 + O(\varepsilon^2)$, имеем уравнение свободной поверхности потока:

$$2h^2h_x + a\,\mathrm{Re}\,h + \varepsilon\,\mathrm{Re}\left(-\frac{9}{5}h^5h_x^2 - \frac{3}{10}h^6h_{xx} + \frac{5}{4}\mathrm{Re}\,ah^4h_x\right) = O(\varepsilon^2). \quad (39)$$

Для решения этого уравнения положим $h = h_0 + \varepsilon h_1 + O(\varepsilon^2)$. После подстановки этого разложения в уравнение (39) и приравнивания коэффициенты при одинаковых степенях ε, имеем:

для ε^o:

$$2h_0h_{0x} + a\,\mathrm{Re} = 0, \quad (40)$$

для ε^1:

$$2h_0h_{1x} + 2h_{0x}h_1 - \frac{9}{5}\mathrm{Re}\,h_0^4h_{0x}^2 - \frac{3}{10}\mathrm{Re}\,h_0^5h_{0xx} + \frac{5}{4}a\,\mathrm{Re}^2\,h_0^3h_{0x} = 0. \quad (41)$$

Решая уравнение (40) при начальном условии

$$h_0 = 1 \text{ при } x = 0, \quad (42)$$

получим:

$$h_0 = (1 - a\,\mathrm{Re}\,x)^{\frac{1}{2}}. \quad (43)$$

После подстановки этого решения в уравнение (41), имеем:

$$h_{1x} - \frac{1}{2}a\,\mathrm{Re}\,\varphi^{-1}h_1 - \frac{1}{2}a^2\,\mathrm{Re}^3\,\varphi^{\frac{1}{2}} = 0, \quad (44)$$

где обозначено $\varphi \equiv \varphi(x) = 1 - a\,Re\,x$.

Начальное условие для уравнения (44):

$$h_1 = 0 \text{ при } x = 0. \quad (45)$$

Тогда уравнение (44) будет иметь своим решением функцию

$$h_1 = \frac{1}{4} a \operatorname{Re}^2 \left(\varphi^{-\frac{1}{2}} - \varphi^{\frac{3}{2}} \right), \tag{46}$$

а общее решение для глубины потока по длине ситовой поверхности

$$h = \varphi^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \varepsilon a \operatorname{Re}^2 \left(\varphi^{-\frac{1}{2}} - \varphi^{\frac{3}{2}} \right). \tag{47}$$

Подстановка решения (46) в выражения (28), (29), (35) и (37) позволяет получить зависимости для нормальной составляющей скорости и возмущения параболического профиля вдоль направления потока:

$$\psi_x = a \operatorname{Re} \left(\varphi^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} y^2 \varphi^{-\frac{1}{2}} \right) + \\ + \varepsilon\, a^2 \operatorname{Re}^3 \left[\frac{1}{4} \left(\varphi^{-\frac{1}{2}} - \varphi^{\frac{2}{3}} \right) + \frac{1}{8} y^2 \left(\varphi^{-\frac{3}{2}} - 5\varphi^{\frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{24} y^4 \varphi^{-\frac{1}{2}} \right], \tag{48}$$

$$\psi_y = 2y \left(\varphi^{\frac{1}{2}} - 1 \right) + \varepsilon\, a \operatorname{Re}^2 y \left(\frac{1}{2} \varphi^{-\frac{1}{2}} + \frac{5}{6} \varphi^{\frac{3}{2}} - y\varphi + \frac{1}{3} y^2 \varphi^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{12} y^3 \right). \tag{49}$$

Таким образом, на основании принятого условия (1) уравнения движения жидкости (2)-(4) приведены к виду (12), содержащему малый параметр. Так как каждая последующая производная функции ψ пропорциональна числу *Re*, то решение (12) будет сходящимся при $\varepsilon\mathrm{Re} << 1$. Это условие соответствует "медленным" течениям, например, течению высококонцентрированной суспензии, что и свидетельствует о переходе вязкой суспензии в вязкопластинчатый материал. Получено также уравнение изменения глубины потока по ситовой поверхности (47), а также в зависимости для нормальной составляющей скорости и возмущения параболического профиля вдоль направления потока (48, 49), что позволяет определить параметры вибровозбуждения.

Список литературы

1. Надутый В.П., Калиниченко В.В. Вибрационное грохочение горной массы повышенной влажности. – Днепропетровск: НГУ, 2004. – 135 с.

2. Любимов Д.В., Любимова Г.П., Черепанов А.А. Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. – М.: Физматлит, 2003. – 216 с.

3. Надутый В.П., Лапшин Е.С., Шевченко А.И. Определение условий прохождения жидкости через просевающую поверхность вибрационного грохота // Збагачення корисних копалин: Наук.-техн. зб. – 2001. – Вип.44(85). – С. 54-61.

5. Бейлин М.И. Теоретические основы процессов обезвоживания углей. – М.: Недра,

1969. – 240 с.

6. Гирчидов А.Д. Два подхода к описанию турбулентной диффузии // Гидравлика и гидромеханика. – 1973. – Вып. 17. – С. 24-30.

7. Шрайбер А.А., Милютин В.Н., Яценко В.П. Гидромеханика двухкомпонентных потоков с твердым полидисперсным материалом. – К.: Наук. думка, 1980. – 252 с.

8. Жужиков В.А. Фильтрование. Теория и практика разделения суспензий. – М.: Химия, 1980. – 398 с.

9. Надутый В.П., Лапшин Е.С., Шевченко А.И. Исследование кинетики обезвоживания при вибрационном грохочении // Збагачення корисних копалин: Наук.-техн. зб. – 2012. – Вип. 49(90). – С. 112-119.

10. Назимко Е.И., Науменко В.Г. Моделирование процесса удаления влаги из осадков // Збагачення корисних копалин: Наук.-техн. зб. – 2011. – Вип. 45(86). – С. 153-158.

11. Петров Г.А. Гидравлика переменной массы (Движение жидкости с изменением расхода вдоль пути). – Харьков: Изд-во Харьковского ун-та, 1964. – 224 с.

12. Ерошенко В.М., Зайчик Л.И. Гидродинамика и тепломассообмен на проницаемых поверхностях. – М.: Наука, 1984. – 275 с.

13. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 840 с.

14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. – М.: Наука, 1988. – 736 с.

15. Сансиев В.Г. Стационарный поток вязкой жидкости с медленно меняющейся глубиной // Збагачення корисних копалин: Наук.-техн.зб. – 2000. – Вип. 9(50). – С. 14-21.

16. Сансиев В.Г. Течение жидкости через щель колосникового сита тонкого грохочения // Обогащение полезных ископаемых: Наук.-техн. сб. – 2004. – Вып. 20(61). – С. 88-94.

17. ГОСТ 9074-71. Сетка щелевая колосниковообразная из проволоки фасонного сечения. – М.: Госкомстандарт, 1971. – 6 с.

18. Найфе А. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 456 с.

Надійшла до редколегії 05.09.2012 р.
Рекомендовано до публікації д.т.н. П.І. Піловим