

**П.И. ПИЛОВ**, д-р техн. наук

(Украина, Днепропетровск, Национальный горный университет),

**Н.С. ПРЯДКО**, канд. техн. наук

(Украина, Днепропетровск, Институт технической механики НАНУ и НКАУ)

### **МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАМКНУТЫХ ЦИКЛОВ ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ ГИПОТЕЗЫ РИТТИНГЕРА**

Процессы измельчения минерального широко используются в различных отраслях промышленности.

Механическое измельчение – это процесс разрушения твердых тел путем создания в нагружаемом материале критических напряжений. Процесс измельчения рассматривают с позиций связи эффектов измельчения с закономерностями разрушения, с одной стороны, и связи параметров разрушения с технологией измельчения полезных ископаемых.

В процессе измельчения разрушение осуществляют под действием механических, тепловых или электрических сил, направленных на преодоление внутренних сил сцепления частиц твердого тела. На практике измельчение с целью уменьшения размеров кусков до заданной крупности происходит под действием внешних механических усилий, создаваемых рабочими органами дробильного или измельчительного агрегата. Это довольно энергоемкий процесс, при котором подводимая энергия расходуется на образование новых поверхностей, на преодоление внешнего трения, на преодоление трения между материалом и рабочими частями измельчительных аппаратов. На процессы дробления и измельчения в мире расходуется более 20% всей вырабатываемой энергии [1]. При огромных масштабах производства уменьшение этих затрат является актуальной проблемой.

Основная задача при исследовании процесса измельчения, заключающаяся в установлении связи между затраченной энергией и достигнутой дисперсностью материала, решалась различными путями:

– сопоставлением результатов усредняющих испытаний исследуемого процесса результатам опытного измельчения материала в некоторых стандартных условиях;

– получением математических соотношений, связывающих технологические параметры;

– моделированием процессов, происходящих в технологических аппаратах измельчения, на основе решения уравнений баланса массы фракций материала, стохастического подхода и решения уравнения Колмогорова-Чепмена, описания процессов матричными моделями [2-4].

При разделении минеральных частиц по крупности, применяемом при обогащении полезных ископаемых, обычно исходный продукт разделяется на два класса, т.е. происходит контроль гранулометрического состава измельчаемого материала не во всем спектре размеров частиц, а по одному контрольному раз-

## **Підготовчі процеси збагачення**

меру  $x_c$ , характерному для даного процесу або устрою [2]. При такому моделюванні, коли змельчаємий матеріал представляється в вигляді бінарної суміші крупної і мелкої фракції, процес описують кінетичним рівнянням виду  $\frac{dR}{dt} = -pR$ , яке має рішення  $R = R_0 \exp(-pt)$ , де  $R_0$  – вміст крупної фракції в вихідному матеріалі,  $p$  – постійна швидкості змельчення,  $t$  – час змельчення. Однак при експериментальному визначенні часу змельчення при неперервному процесі виникає неопределенність, яка призводить до неопределенності встановлення величини  $p$ , в результаті чого може бути неточний результат, прогноз змельчення. При введенні додаткових уточнюючих множників втрачається фізичний зміст рішення і важко оцінити вплив технологічних параметрів на кінетику змельчення [4].

Багато досліджень спрямовані на виявлення зв'язку енергії, споживаної змельчальним апаратом, і ступеня зменшення крупності. При цьому, зменшення крупності розумілося як функція об'єму, діаметра утворених частинок і площі знову утвореної поверхні. Було встановлено, що невеликі зміни крупності частинок були пропорційні енергії, витраченої на одиницю їх маси, а енергія, необхідна для досягнення однакових відносних змін крупності обернено пропорційна якійсь функції початкової крупності частинок. Таким чином, співвідношення між енергією і руйнуванням може бути виражено в вигляді [3]:

$$dE = -Kdx / x^n \quad (1)$$

К цьому висновку зводяться відомі гіпотези різних вчених по відношенню до енергетичної оцінки процесів змельчення і дроблення:

$$E = 2K(1/x_2 - 1/x_1); \quad (2)$$

$$E = K \ln(x_1/x_2); \quad (3)$$

$$E = 2K(1/\sqrt{x_2} - 1/\sqrt{x_1}). \quad (4)$$

Риттингер передбачав, що витрати енергії на дроблення пропорційні величині знову утвореної поверхні (2). Згідно гіпотези Кирпичева – Кика енергія, необхідна для дроблення і змельчення матеріалу, пропорційна його вазі або об'єму (3). Обидві ці гіпотези математично виражаються з (1) при  $n = 1,0$  і  $n = 2,0$ , відповідно. При  $n = 1,5$  отримуємо математичне вираження гіпотези Бонда, являючоїся проміжною між першими двома (4).

Всі ці співвідношення мають свої області застосування і умови, при яких вони не діють. Так, гіпотеза Риттингера добре узгоджується з практикою при тонкому змельченні, гіпотеза Кирпичева – Кика – при крупному

## **Підготовчі процеси збагачення**

дроблення. Гипотеза Ребиндера связывает процесс разрушения с физико-механическими свойствами пород и минералов, охватывает любой случай разрушения и при определенных значениях крупности сводится к двум первым гипотезам:  $A = \sigma \Delta S + K \Delta V$ , где  $A$  – работа, затрачиваемая на разрушение,  $\sigma$  – избыток свободной энергии в пограничном слое,  $\Delta S$  – поверхность, образованная при разрушении,  $\Delta V$  – часть объема, подвергшаяся деформации,  $K$  – работа упругой и пластической деформации, приходящаяся на единицу объема.

Общая форма соотношения между энергией и сокращением крупности дана Хукки (1961):

$$dE = -K dx / x^{f(x)}. \quad (5)$$

Этот американский ученый показал, что энергия, необходимая для одинакового сокращения крупности частиц, увеличивается с уменьшением их крупности. Однако энергия, расходуемая непосредственно на процесс разрушения, весьма мала по сравнению с потребляемой энергией (3-0,5%). Поэтому «энергокрупностные» соотношения неадекватно определяют процесс сокращения крупности. Для более корректного описания этого процесса необходимо как можно более точно определить соотношение между исходным продуктом и продуктом измельчения. Кроме того, есть зоны действия выведенных законов измельчения (см. рис. 1: кривые 1, 3, 4 – законы Риттингера, Бонда, Кирпичева-Кика, 5, 6 – диапазоны измельчения дробления) и есть плохо изученный диапазон крупности частиц (кривые 2 на рис. 1) [3].

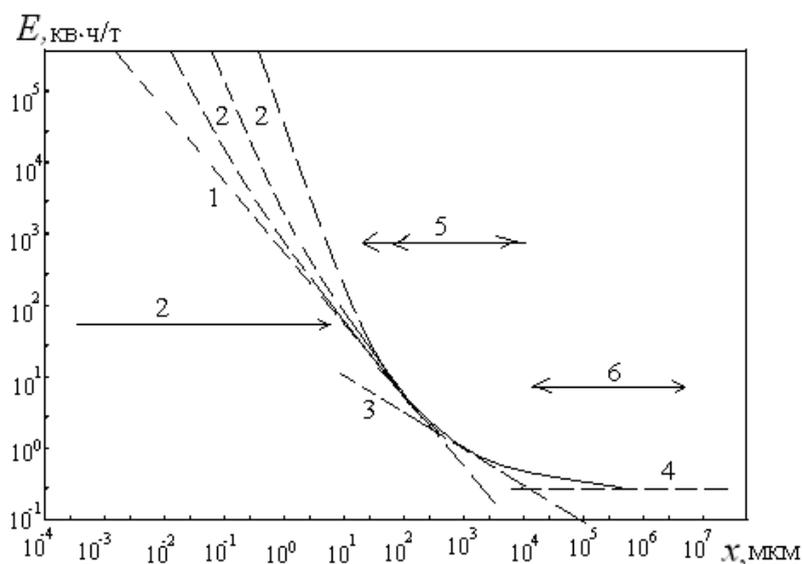


Рис. 1.

Для исследования и дальнейшего моделирования процесс измельчения необходимо разделить на последовательность подпроцессов. В общем, процесс измельчения можно рассматривать как процесс, состоящий из повторяющихся шагов, каждый из которых состоит из двух основных операций: отбор материала

## **Підготовчі процеси збагачення**

ла для разрушения и последующее разрушение отобранного материала. В таком случае можно ввести [3] количественные характеристики этих операций:  $p_n(y)$  – вероятность разрушения частиц, имеющих размер  $y$  на  $n$ -м шаге процесса разрушения,  $F(x,y)$  – кумулятивное распределение в диапазоне крупности  $x < y$  массы частиц размером  $y$ . После  $n$  шагов повторяющегося разрушения результирующая функция распределения измельченного материала асимптотически приближается к логарифмически нормальному закону, что часто подтверждается на практике.

Такой подход к процессу измельчения стал основой матричных и кинетических моделей процесса. В матричной модели процесс дробления или измельчения рассматривается как последовательность актов разрушения, причем исходным материалом каждого следующего акта есть продукт предыдущего. Чем продолжительнее процесс измельчения, тем больше число таких актов, тем выше степень сокращения крупности. В кинетической модели процесс рассматривается как непрерывный, характеризующийся скоростью протекания, и степень сокращения крупности непрерывно сокращается по мере течения процесса. Известные модели обоих типов [3, 4] рассматривали процесс измельчения по изменению грансостава материала, т.е. сокращение крупности понималось как уменьшение размера частиц в классах, определенных гранулометрическим составом.

Из рис.1 следует, что для диапазона крупности измельченных частиц, характерного для переработки минерального сырья, наиболее применима гипотеза Риттингера, согласно которой вновь образованная при измельчении поверхность пропорциональна затраченной энергии, т.е.

$$\Delta S = k_R \Delta E . \quad (6)$$

Допустим, что в измельчительный аппарат поступает в единицу времени  $Q_0$  исходного материала с начальной поверхностью  $s_0$  и гранулометрическим составом, который характеризуется функцией распределения по крупности  $\varphi_0(x)$ . Выход частиц крупностью менее  $x$  при этом составит  $\gamma_{-x} = \int_0^x \varphi_0(x) dx$ ,

а удельная поверхность исходного продукта будет равна  $s_0 = k_s \int_0^{x_{\max}} \frac{\varphi_0(x)}{x} dx$ .

При этом его поверхность составит  $S_0 = Q_0 s_0$ .

К исходному продукту внутри измельчительного аппарата подводится энергия  $\Delta E$ , которая приводит к разрушению поступившего материала и образованию новой поверхности  $\Delta S$ . Величина подведенной к измельчаемому материалу энергии определяется мощностью и временем пребывания в рабочем пространстве мельницы, т.е.  $\Delta E = k_N \Delta t$ . Время пребывания связано с рабочим объемом мельницы и объемным расходом поступающих продуктов (твердая

## Підготовчі процеси збагачення

фаза и транспортирующая среда)  $\Delta t = \frac{V}{Q_v}$ .

Из рабочего объема мельницы с целью недопущения переизмельчения поступающего материала с помощью транспортирующей среды извлекается заведомо недоизмельченный продукт, который затем во внешнем классификаторе разделяется на готовый по крупности продукт и более крупный, который вновь направляется в ту же мельницу. Таким способом формируется замкнутый цикл измельчения (рис. 2).

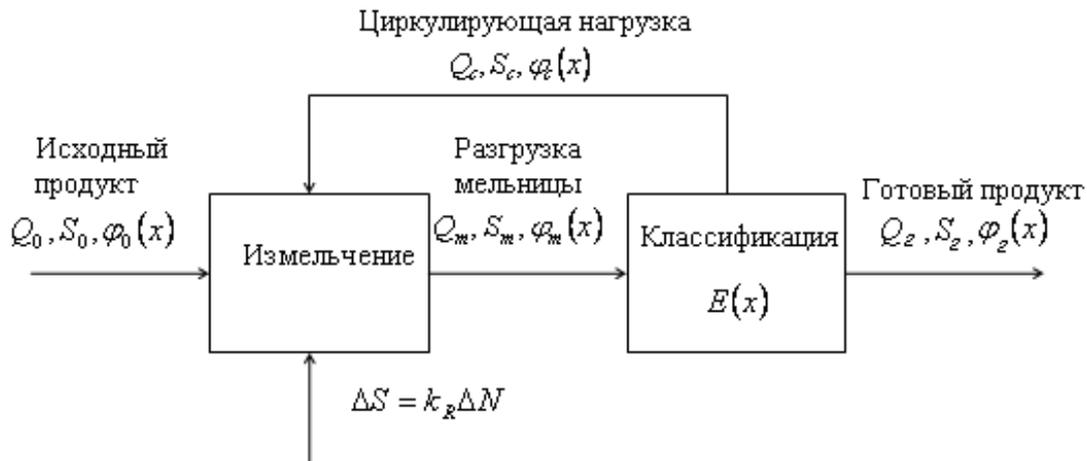


Рис. 2. Схема замкнутого цикла измельчения

В мельницу, таким образом, поступает исходный материал и циркулирующая нагрузка  $Q_m = Q_0 + Q_c$  с поверхностью  $S_0 + S_c$ , а из мельницы выходит этот продукт с поверхностью, возросшей за счет разрушения на величину  $\Delta S$ , т.е.  $S_m = S_0 + S_c + \Delta S$ .

Разгрузка мельницы имеет гранулометрический состав, описываемый функцией распределения  $\varphi_m(x)$ . При известной сепарационной характеристике классификатора  $E(x)$  и условии  $Q_0 = Q_z$  величина циркулирующей нагрузки составит:

$$Q_c = Q_0 \left( \frac{1}{\int_0^{x_{\max}} \varphi_m(x) E(x) dx} - 1 \right). \quad (7)$$

Зная величину циркулирующей нагрузки и определяя гранулометрический состав разгрузки мельницы с помощью уравнения кинетики измельчения, можно оптимизировать процесс измельчения, взявши за основу целевую функцию  $s \Rightarrow s_{\min}$  при достижении заданного технологией последующего использования

## Підготовчі процеси збагачення

измельченного продукта содержания в нем расчетного (контрольного) класса

$$\text{крупности, т.е. } \beta_{<a} = \frac{\int_0^{x_{\max}} \varphi_m(x) E(x) dx}{\int_0^a \varphi_m(x) E(x) dx}.$$

Для успешного применения данной модели необходимо уточнение уравнения кинетики измельчения и установление взаимосвязи удельной поверхности измельченного продукта и функции распределения частиц измельченного материала по крупности.

Для решения этих проблем рассмотрим статистический подход. Более формальный смысл, удобный для математического моделирования, имеет кривая распределения числа зерен. Многие теоретические результаты были получены именно исходя из нее. О.Н. Тихонов [2] пользуется, кроме указанных, еще функцией распределения в объемных долях и поверхностных долях. Он показывает, что этот способ описания гранулометрического состава оказывается более естественным при решении многих задач массопереноса в обогатительных аппаратах. Однако необходимо задать универсальный способ определения гранулометрического состава, т.е. чтобы его можно было применять для различных задач технологии. Нужно указать такую функцию распределения, которая бы совмещала всю информацию о распределении частиц, содержащуюся в различных способах задания смеси зерен.

Такой функцией может служить истинная функция распределения частиц по размерам, которую нужно понимать в строгом теоретико-вероятностном смысле, вытекающем из результата Колмогорова. Как показал Колмогоров А.Н., это распределение подчиняется логарифмическому закону

$$F(x) = \Phi\left(\frac{1}{\sigma} \ln \frac{x}{\mu}\right), \quad \text{где} \quad \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-t^2/2} dt \quad - \quad \text{интеграл вероятностей.}$$

Логарифмически нормальное распределение используется для представления асимметричных распределений, характерных для продуктов дробления и измельчения, причем, если распределение числа частиц логарифмически нормальное, то логарифмически нормальным является также распределение поверхностей и объема частиц.

Уравнение логарифмически нормального распределения имеет вид:

$$N = [(\sum N) \exp\{-(\ln d - \ln \bar{d})^2 / 2(\ln \chi)^2\}] / (\ln \chi \sqrt{2\pi}), \quad (8)$$

где  $\ln \bar{d} = \sum(N / \ln d) / \sum N$  – логарифм среднего геометрического диаметра;  
 $\ln \chi = [\sum N (\ln d - \ln \bar{d})^2 / \sum N]^{1/2}$  – среднее квадратическое отклонение логарифма диаметра.

В работе [6] показано, что при различном усреднении размеров частиц продуктов наиболее близкие объемные коэффициенты теплообмена получены

## **Підготовчі процеси збагачення**

по узким классам, а поверхности – по среднему диаметру классов. Поэтому рассмотрим связь функций распределения частиц по классам крупности и поверхности, когда последняя выражена через средний диаметр частиц класса.

Обозначим  $M$  – общую массу совокупности частиц, к которым относится выбранный класс  $(x, x + dx)$ ;  $F(x)$  – функцию весового распределения (кривая гранулометрического состава);  $dF(x)$  – элементарный выход бесконечно узкого класса;  $\rho$  – средняя плотность частиц;  $K_v, K_s$  – коэффициенты формы, определяющие объем и поверхность частицы через ее диаметр  $x$  (для шара  $K_v = \pi/6, K_s = \pi$ ). Тогда в бесконечно узком классе крупности  $(x, x + dx)$  число зерен и поверхность  $dS$  связаны следующим соотношением:  $ds = K_s x^2 dn$ , где  $K_s$  – коэффициент формы, определяющий поверхность частицы через ее диаметр  $x$  (для шара  $K_s = \pi$ ). Величины  $dn$  и  $ds$  можно выразить через элементарный выход  $dF(x)$ :

$$dn = \frac{M}{K_v \rho} \frac{dF(x)}{x^3}, \quad ds = \frac{MK_s}{K_v} \frac{1}{\rho} \frac{dF(x)}{x}. \quad (9)$$

Отсюда найдем удельную поверхность  $S/M$  и удельное число частиц, попавших в любой класс  $(a, b)$ , на единицу массы  $N/M$ :

$$\frac{S}{M} = \frac{1}{\rho} \frac{K_s}{K_v} \int_a^b x^{-1} dF(x), \quad \frac{N}{M} = \frac{1}{\rho} \frac{1}{K_v} \int_a^b x^{-3} dF(x). \quad (10)$$

Формулы (9, 10) позволяют рассчитать удельную поверхность и число частиц для произвольного гранулометрического состава частиц. Например для шарообразной формы зерен, получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{S}{M} = \frac{6}{\rho} \frac{1}{K_v} \int_a^b x^{-1} dF(x) = \frac{6}{\rho} \frac{1}{K_v} \int_a^b x^{-1} \varphi(x) dx; \\ \frac{N}{M} = \frac{1}{\rho} \frac{1}{K_v} \int_a^b x^{-3} dF(x) = \frac{1}{\rho} \frac{1}{K_v} \int_a^b x^{-3} \varphi(x) dx. \end{array} \right. \quad (11)$$

Результаты исследований [5] показывают, что если массив размеров частиц  $\{x_i\}$  задан в результате проведенных натурных замеров, то проще будет не определять параметры закона распределения, а сразу определить среднее по формуле

$$x_{cp} = \left( \sum x_i^3 \right) / \left( \sum x_i^2 \right). \quad (12)$$

## Підготовчі процеси збагачення

Таким образом, имея распределение частиц по классам крупности  $\{x_i\}$ , определяем средний диаметр частиц в классе по формуле (12). Затем по распределению частиц по крупности  $\varphi(x)$  находим приращение площади через удельную поверхность по (11) для частиц каждого класса, считая, что их диаметр равен вычисленному среднему диаметру класса или в общем случае по (10).

Выразим формулы в матричном виде через гранулометрическое распределение  $\varphi(x_i)$ . В ходе измельчения поверхность частиц каждого класса изменяется. Пусть  $\Delta S_{i,j}$  – изменение поверхности частиц  $i$  класса, перешедших в  $j$  класс.

Тогда можно записать  $\Delta S_{i,j} = \sum_{i=1}^n x_{i,j} f_i$ , где распределение поверхностей по

классам крупности выражается  $f_i = S_i = k_s \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ .

Краткая матричная запись уравнения изменения поверхности при измельчении:

$$\Delta S = Xf \quad (13)$$

Необходимо отметить, что не во всех классах происходит изменение поверхности, поэтому обозначим вектором разрушения  $R = \{r_1 \dots r_n\}$  долю тех частиц в классах, которые разрушились и изменили поверхность, тогда изменения поверхности разрушенными частицами  $B$  будет представлены функцией  $Rf$ , где  $B \subset X$  – часть частиц материала, которые разрушены.

$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & R_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 f_1 \\ R_2 f_2 \\ \vdots \\ R_n f_n \end{bmatrix}$$

В этом случае оставшаяся без изменений поверхность неразрушенных частиц может быть выражена произведением  $(I-R)f$ . Поэтому уравнение (13) можно уточнить в виде:

$$\Delta S = BRf + (I - R)f \quad (14)$$

Возвращаясь к схеме процесса измельчения с классификацией (см. рис. 2), получаем систему матричных уравнений:

$$\begin{cases} S_m = S_c + S_z \\ S_m = S_0 + S_c + \Delta S \\ \Delta S = BRf + (1 - R)f \end{cases} \quad (15)$$

После преобразований системы получаем окончательное матричное уравнение процесса увеличения поверхности при порционном измельчении (дроблении):

$$S_z = S_0 + BRf + (1 - R)f \quad (16)$$

Оптимизация процесса измельчения направлена на поиск наименьшей поверхности измельченного продукта при достижении заданного содержания расчетного (контрольного) класса крупности.

Рассмотренные варианты моделирования процесса измельчения минерального сырья дополняют друг друга. Их совместное использование может оказаться весьма продуктивным, однако требует дополнительного изучения уравнение кинетики измельчения, основанного на пропорциональности вновь образованной поверхности при измельчении величине подведенной энергии.

### Список литературы

1. Подготовка минерального сырья к обогащению и переработке / В.И. Ревнивцев, Е.И. Азбель, Е.Г. Баранов и др. – М.: Недра, 1987. – 307 с.
2. Тихонов О. Н. Закономерности эффективного разделения минералов в процессах обогащения полезных ископаемых. – М.: Недра, 1984. – 200 с.
3. Линч А. Дж. Циклы дробления и измельчения. – М: Недра, 1981. – 343 с.
4. Обобщенная ячеечная модель совмещенного процесса измельчения-классификации в технологических системах измельчения / С.Ф. Смирнов, В.П. Жуков, С.В. Федосов и др. // Строительные материалы. – 2008. – №8. – С. 74-76.
5. Формализация результатов разделительных процессов в углеобогащении / В.К. Гарус, О.В. Грачов, В.Ф. Пожидаев и др. – Луганск: Изд-во «НВФ «СТЕК», 2003. – 176 с.
6. Самыгин В.Д., Митрофанов С.И., Барский М.Д. Исследование полезных ископаемых на обогатимость. – М.: Недра, 1974. – 435 с.

© Пилов П.И., Прядко Н.С., 2012

*Надійшла до редколегії 19.09.2012 р.  
Рекомендовано до публікації д.т.н. Л.Ж. Горобець*