УДР 519.85

© С.А. Ус, О.Д.Станина

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ В ЗАДАЧЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНЫХ ПОТОКОВ

© S. Us, O. Stanina

MATHEMATICAL METHODS OF OPTIMAL PARTITION SETS IN PROBLEM OF MATERIAL STREAM DISTRIBUTION

Целью статьи является математическое обоснование метода решения задачи формирования материальных потоков, с учетом непрерывно распределенного ресурса.

Методы исследований. При построении математических моделей использовались методы системного анализа, математического моделирования; для доказательства необходимых условий оптимальности применялись методы бесконечномерной оптимизации и функционального анализа; для обоснования методов решения задач использовалась теория выпуклой оптимизации, двойственности, теория непрерывных задач оптимального разбиения множеств.

Результаты. Статья является последовательным продолжением исследований, связанных с анализом особенностей непрерывных многоэтапных задач оптимального разбиения множеств и их решением. В работе проведено строгое теоретическое обоснование метода решения задачи распределения материальных потоков с непрерывно распределенным ресурсом, которая в математической постановке является линейной однопродуктовой задачей оптимального разбиения множества Ω из n-мерного евклидова пространства En на подмножества без отыскания их центров координат и при наличии дополнительных связей. Теоретически обоснован предложенный метод решения. Получены необходимые и достаточные условия оптимальности решения.

Научная новизна. Усовершенствованы методы распределения материальных потоков при организации двухэтапного производства путем учета непрерывности распределения ресурса и наличия нескольких этапов производства при построении и реализации математических моделей соответствующих задач. В дальнейшем результаты работы могут быть использованы при усовершенствовании численных алгоритмов для решения этих задач и обобщены в случае ограничения возможностей предприятий.

Практическое значение. Полученные теоретические результаты доведены до уровня конкретных рекомендаций, которые могут быть использованы государственными и частными предприятиями при решении логистических задач, связанных с организацией сбора определенного ресурса, его доставкой к пунктам переработки, а также дальнейшей перевозки полученного продукта по месту назначения.

Ключевые слова: *распределение материальных потоков, задачи размещения-распределения, оптимальное разбиение множеств, многоэтапная транспортная задача, необходимые и достаточные условия оптимальности.*

Введение. Анализ тенденции развития открытых горных работ в Украине, странах СНГ и дальнего зарубежья показывает, что все большое значение в формировании издержек и затрат производства приобретает транспортировка сырья. Затраты на транспортировку горной массы, достигающие в настоящее время 40-60 % общих затрат на добычу руды, с увеличением глубины карьеров до 500-1000 м возрастают до 70 % [1]. В связи с этим эффективность использования транспорта существенно влияет на себестоимость получаемого конечного продукта.

Задачи, возникающие при составлении оптимальных транспортных путей, включают в себя много факторов, наличие большого числа неопределенностей, многих критериев и часто нескольких этапов (производства, транспортировки и пр) поэтому требуют для своего решения комплексного подхода, который включает проведение аналитических исследований, разработку специального математического аппарата и построение на его основе современных систем поддержки принятия решений.

Одним из теоретических направлений, направленных на решение задач размещения с учетом непрерывно распределенного ресурса является теория непрерывных задач оптимального разбиения множеств (ОРМ). Различные классы таких задач представлены в монографии [2]. Математические модели непрерывных многоэтапных задач размещения и их связь с задачами ОРМ рассматривались авторами в работах [3, 4], там же были предложены подходы к их решению.

В данной работе рассматривается двухэтапная задача распределения материальных потоков, которая в математической постановке представляет собой задачу ОРМ при фиксированных центрах подмножеств и наличии дополнительных связей и является обобщением двухэтапной транспортной задачи.

Постановка задачи. Содержательная постановка задачи может быть сформулирована следующим образом.

Предположим, проводится организация некоторого производства, которое использует ресурс, непрерывно распределенный в области Ω. Переработка ресурса проводится в два этапа, а именно: конечное число N предприятий первого этапа (пунктов первичной обработки), расположенных в изолированных точках τ_i^I, $i=\overline{1,N}$ области Ω собирают сырье от поставщиков непрерывно распределенных в области Ω, перерабатывают его и отправляют для реализации (или дальнейшей обработки) в пункты конечного потребления (предприятия второго этапа), координаты которых: $\tau_1^{II},...,\tau_M^{II}$, заранее определены. Предполагается, также, что известны: спрос b_j на продукцию для каждого конечного пункта потребления, $j=\overline{1,M}$; запас $\rho(x)$ ресурса в каждой точке области Ω; стоимость доставки единицы ресурса $c_i^I\left(x,\tau_i^I\right)$, – из точки x области Ω в пункт первичной обработки $\tau_i^I, i=\overline{1,N}$; стоимость перевозки единицы продукта c_{ij}^{II} из пункта первичной обработки τ_i^I в пункт $\tau_j^{II}, i=\overline{1,N}$, $j=\overline{1,M}$. Кроме того, будем считать, что мощность предприятия первого этапа определяется суммарным запасом ресурса в обслуживаемой области, а прибыль предприятия зависит только от транспортных расходов.

Необходимо разбить область Ω на зоны обслуживания $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_N$, каждым из предприятий первого этапа и определить объемы перевозок $v_{ij} \geq 0$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, M}$, между предприятиями первого этапа и пунктами конечного потребления таким образом, чтобы обеспечить минимальную суммарную стоимость доставки сырья и конечной продукции.

Целью статьи является математическое обоснование метода решения задачи формирования материальных потоков с учетом непрерывно распределенного ресурса.

Изложение основного материала. Математическая постановка задачи имеет следующий вид [3]:

Требуется найти разбиение множества $\Omega \in E_2$ на N измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_N$ (среди которых могут быть и пустые) и неотрицательные числа $v_{11}, ..., v_{NM}$, которые являются решением следующей оптимизационной задачи.

Задача 1.

$$F(\{\Omega_1, ..., \Omega_N\}, \{v_{11}, ... v_{NM}\}) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c_i^I(x, \tau_i^I)\rho(x)dx + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} c_{ij}^{II} v_{ij} \to \min_{\substack{\{\Omega_1, ..., \Omega_N\}, \\ \{v_{11}, ... v_{NM}\}}} \quad (1)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{N} v_{ij} = b_j, \; j = \overline{1, M}, \quad (2)$$

$$\int_{\Omega_i} \rho(x)dx = \sum_{j=1}^{M} v_{ij}, \; i = \overline{1, N}, \quad (3)$$

$$\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega, \; mes(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \; i \neq j, \; i, j = \overline{1, N}.$$

Функции $c_i^I(x, \tau_i^I)$, $i = \overline{1, N}$ – действительные, ограниченные, измеримые по аргументу x на Ω; $\rho(x)$ – действительная, интегрируемая, определенная на Ω функция; τ_i^I, $i = \overline{1, N}$, τ_j^{II}, $j = \overline{1, M}$ – заданные точки области Ω; c_{ij}^{II}, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, M}$ – заданные неотрицательные числа, $x = (x^{(1)}, ..., x^{(n)}) \in \Omega$; b_j, $j = \overline{1, M}$ – заданные действительные неотрицательные числа, удовлетворяющие условию:

$$\sum_{j=1}^{M} b_j = S, \text{ где } S = \int_{\Omega} \rho(x)dx. \quad (4)$$

Следуя [1], введем характеристическую функцию подмножеств $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_N$ в виде:

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, \ x \in \Omega_i, \\ 0, \ x \in \Omega \setminus \Omega_i, \quad i = \overline{1,N}, \end{cases}$$

и перейдем от задачи 1 к задаче в терминах характеристических функций, а затем к соответствующей задаче со значениями $\lambda(\cdot)$ из отрезка [0;1].

Задача 3.

$$I(\lambda(\cdot), v) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) \lambda_i(x) dx + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} c_{ij}^{II} v_{ij} \to \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_2, v \in T}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{N} v_{ij} = b_j, \ j = \overline{1,M}, \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{M} v_{ij} = \int_{\Omega_i} \rho(x) \lambda_i(x) dx, \ i = 1, 2, ..., N, \tag{6}$$

$$\lambda(\cdot) \in \Gamma_2, \ \nu \in T = \left\{ \nu = (\nu_{11}, \nu_{12}, \ldots \nu_{NM}) : \nu_{ij} \geq 0, i = \overline{1,N}, \ j = \overline{1,M} \right\},$$

где

$$\Gamma_2 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), ..., \lambda_N(x)) : \lambda(x) \in \Gamma, \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega \},$$

$$\Gamma = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), ..., \lambda_N(x)) : 0 \leq \lambda(x) \leq 1, \ \forall x \in \Omega, \ i = \overline{1,N} \}.$$

Опишем метод решения задачи.

Рассмотрим множество $V = \{ v \in R_{NM} : v_{ij} \geq 0, \sum_{i=1}^{N} v_{ij} = b_j, j = \overline{1,M} \}$.

При каждом фиксированном $\overline{v} \in V$ задача 3 представляет собой линейную однопродуктовую задачу ОРМ с фиксированными центрами подмножеств. Тогда, согласно монографии [2], среди множества оптимальный решений задачи 3, сформулированной для фиксированного параметра $\overline{v} \in V$, найдется хотя бы одна крайняя точка множества Γ_2. А крайние точки множества Γ_2 представляют собой характеристические функции подмножеств Ω_i, $i = 1, ..., N$, которые образуют разбиение множества Ω. Таким образом, среди оптимальных решений задачи 3 содержатся оптимальные решения исходной задачи.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть в задаче 3:

1) Ω – замкнутое, ограниченное, измеримое по Лебегу множество евклидового пространства E_n;

2) функции $c_i^I(x, \tau_i^I)$, $i = \overline{1,N}$ – действительные, ограниченные, измеримые по аргументу *x* для всех $i = \overline{1,N}$;

3) выполняется условие разрешимости задачи (4).

Тогда задача 3 имеет решение.

Доказательство. При условиях теоремы, множество допустимых решений задачи 3 не пусто.

Пусть $v \in V$. Покажем, что целевой функционал задачи 3 ограничен на множестве допустимых решений.

Запишем функционал $I(\lambda(\cdot),v)$ в виде $I(\lambda(\cdot),v) = I_1(\lambda(\cdot)) + I_2(v)$,

где $I_1(\lambda(\cdot)) = \int\limits_{\Omega} \sum\limits_{i=1}^{N} c_i^I(x,\tau_i^I)\rho(x)\lambda_i(x)dx$, $I_2(\overline{v}) = \sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{M} c_{ij}^{II} v_{ij}$.

Оценим снизу слагаемое $I_1(\lambda(\cdot))$:

$$I_1(\lambda(\cdot)) = \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} c_i^I(x,\tau_i^I)\rho(x)\lambda_i(x)dx \geq \int_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\rho(x)\min_{i=\overline{1,N}} c_i^I(x,\tau_i^I)\lambda_i(x)dx \geq$$

$$\geq \int_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\rho(x)\min_{x\in\Omega}\min_{i=\overline{1,N}} c_i^I(x,\tau_i^I)\lambda_i(x)dx \geq c_{\min}\cdot S.$$

Покажем, что слагаемое $I_2(v)$ ограничено. Условия (5) и неотрицательность v_{ij} обеспечивают выполнение неравенства:

$$0 \leq \overline{v}_{ij} \leq b_j,\ i=\overline{1,N},\ j=\overline{1,M}.$$

Тогда:

$$I_2(v) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} c_{ij}^{II} v_{ij} \geq \sum_{j=1}^{M}\min_{i=\overline{1,N}} c_{ij}^{II} b_j.$$

Итак, функционал задачи 3 ограничен снизу на допустимом множестве решений, допустимое множество решений замкнуто и ограничено. Согласно теореме Вейерштрасса, задача 3 разрешима. Теорема доказана.

Применяя подход, описанный в [2], для получения необходимых и достаточных условий экстремума построим для задачи 3 функционал Лагранжа:

$$L(\lambda(\cdot),v,\Psi) = \int_{\Omega}\sum_{i=1}^{N} c_i^I(x,\tau_i^I)\rho(x)\lambda_i(x)dx + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} c_{ij}^{II} v_{ij} + \sum_{j=1}^{M}\eta_j(b_j - \sum_{i=1}^{N} v_{ij}) +$$

$$+\int_{\Omega}\psi_0(x)(\sum_{i=1}^{N}\lambda_i^*(x)-1)dx + \sum_{i=1}^{N}\psi_i(\sum_{j=1}^{M} v_{ij} - \int_{\Omega}\rho(x)\lambda_i(x)dx) =$$

$$= \int_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}(c_i^I(x,\tau_i^I)-\psi_i)\rho(x)\lambda_i(x)dx + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}(c_{ij}^{II} - \eta_j + \psi_i)v_{ij} - \sum_{j=1}^{M}\eta_j b_j +$$

$$+\int_{\Omega}\psi_0(x)(\sum_{i=1}^{N}\lambda_i^*(x)-1)dx, \tag{7}$$

где $\lambda(x)\in\Gamma$, $v\in T$, $\Psi(\cdot) = (\Psi_0(\cdot),\Psi,\eta)$, $\Psi(\cdot)\in\Lambda$,

$$\Lambda = \{\Psi(\cdot) = (\Psi_0(\cdot), \Psi, \eta) : \Psi_0(\cdot) \in L^2_\Omega, \Psi \in E_N, \eta \in E_M\}.$$

Пару элементов $(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi)$ назовем седловой точкой функционала (7) на множестве $\{\Gamma \times T \times \Lambda\}$, если для всех $\lambda(\cdot) \in \Gamma$, $v \in T$, $\Psi \in \Lambda$ будет выполнено

$$L(\{\lambda^*(\cdot), v^*\}, \Psi) \le L(\{\lambda^*(\cdot), v^*\}, \Psi^*) \le L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi^*)$$

или

$$L(\{\lambda^*(\cdot), v^*\}, \Psi^*) = \min_{\{\lambda, v\} \in \Gamma \times T} \max_{\Psi \in \Lambda} L(\{\lambda, v\}, \Psi) = \max_{\Psi \in \Lambda} \min_{\{\lambda, v\} \in \Gamma \times T} L(\{\lambda, v\}, \Psi).$$

С помощью функционала Лагранжа (7) построим функционалы:

$$X(\{\lambda(\cdot), v\}) = \max_{\Psi \in \Lambda} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi), \ \lambda(\cdot) \in \Gamma, v \in T,$$

$$U(\Psi) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma, v \in T} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi), \ \Psi \in \Lambda.$$

Будем рассматривать задачи:

$$X(\{\lambda, v\}) \to \min, \ \lambda(\cdot) \in \Gamma, v \in T, \tag{8}$$

$$U(\Psi) \to \max, \ \Psi \in \Lambda. \tag{9}$$

Задачу (8) назовем прямой, а задачу (9) двойственной к (8).

Покажем, что для задач (8) и (9) выполняются соотношения двойственности $X_* = G^*$, причем максимум в двойственной задаче достигается, а задача 3 может быть сведена к задаче нахождения седловой точки $(\{\lambda^*, v^*\}, \Psi^*)$ функционала (7) на множестве $(\{\Gamma \times T\} \times \Lambda)$.

Теорема 2. (Необходимое условие экстремума). Если пара $(\{\lambda(\cdot)^*, v^*\}, \Psi^*(\cdot))$ – седловая точка функционала Лагранжа (7) на множестве $(\{\Gamma \times T\} \times \Lambda)$, то $\{\lambda(\cdot)^*, v^*\}$ – решение задачи 3.

Доказательство. Пусть пара $(\{\lambda(\cdot)^*, v^*\}, \Psi^*(\cdot)) \in (\{\Gamma \times T\} \times \Lambda)$ – седловая точка функционала (7), то есть имеет место неравенство:

$$I(\lambda^*(\cdot), v^*) + \sum_{j=1}^{M} \eta_j (b_j - \sum_{i=1}^{N} v_{ij}^*) + \int_\Omega \psi_0(x) (\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^*(x) - 1) dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \psi_i (\sum_{j=1}^{M} v_{ij}^* - \int_\Omega \rho(x) \lambda_i^*(x) dx) \le I(\lambda_i^*(\cdot), v^*) + \sum_{j=1}^{M} \eta_j^* (b_j - \sum_{i=1}^{N} v_{ij}^*) +$$

$$+ \int_\Omega \psi_0^*(x) (\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^*(x) - 1) dx + \sum_{i=1}^{N} \psi_i^* (\sum_{j=1}^{M} v_{ij}^* - \int_\Omega \rho(x) \lambda_i^*(x) dx) \le I(\lambda(\cdot), v) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{M} \eta_j^* (b_j - \sum_{i=1}^{N} v_{ij}) + \int_\Omega \psi_0^*(x) (\sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x) - 1) dx + \sum_{i=1}^{N} \psi_i^* (\sum_{j=1}^{M} v_{ij} - \int_\Omega \rho(x) \lambda_i(x) dx), \tag{10}$$

$$\forall\lambda(\cdot)\in\Gamma,\ v\in T,\ \ \Psi(\cdot)\in\Lambda.$$

Покажем, что $\lambda^*(\cdot)\in\Gamma_2$, $v^*\in T$. Из левого неравенства (10) при $\psi_0=\psi_0^*$ и $\eta=\eta^*$ получим $\sum\limits_{i=1}^{N}(\psi_i^*-\psi_i)(\sum\limits_{j=1}^{M}v_{ij}-\int\limits_{\Omega}\rho(x)\lambda_i^*(x)dx)\geq 0$, при любых $(\psi_1,...,\psi_N)\in E_N$, что возможно только при

$$\sum_{j=1}^{M}v_{ij}^*=\int_{\Omega}\rho(x)\lambda_i^*(x)dx, \tag{11}$$

Дальше при $\eta=\eta^*$ и $\psi_i=\psi_i^*, i=\overline{1,N}$, из левого неравенства (10) также следует следующее соотношение: $\int\limits_{\Omega}(\psi_0^*(x)-\psi_0(x))(\sum\limits_{i=1}^{N}\lambda_i^*(x)-1)dx\geq 0$, при любых $\psi_0(\cdot)\in L_{\Omega}^2$, что возможно только при

$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_i^*(x)=1,\ \text{п.в. для}\ x\in\Omega. \tag{12}$$

Кроме того, при $\psi_0=\psi_0^*$ и $\psi=\psi^*$, левое неравенство (10) дает $\sum\limits_{i=1}^{N}(\eta_i^*-\eta_i)(b_j-\sum\limits_{i=1}^{N}v_{ij}^{*II})\geq 0$ при любых $\eta\in E_M$,что возможно только при

$$\sum_{i=1}^{N}v_{ij}^*=b_j\,. \tag{13}$$

Следовательно, $\lambda^*(\cdot)\in\Gamma_2$, $v^*\in V$. С учетом (11) – (13) и правого неравенства (10) при любом $\lambda(\cdot)\in\Gamma_2$, $v\in V$ имеет место:

$$I(\lambda^*(\cdot),v^*)\leq I(\lambda(\cdot),v)+\sum_{j=1}^{M}\eta_j^*(b_j-\sum_{i=1}^{N}v_{ij})+\int_{\Omega}\psi_0^*(x)(\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(x)-1)dx+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\psi_i^*(\sum_{j=1}^{M}v_{ij}-\int_{\Omega}\rho(x)\lambda_i(x)dx).$$

В силу того, что пара $\{\lambda(\cdot),v\}$ – допустимая пара в задаче 3, то есть выполняются условия (5), (6), второе и четвертое слагаемые в приведенном неравенстве равны нулю. Из того, что $\lambda(\cdot)\in\Gamma_2$ следует равенство нулю и третьего слагаемого. То есть, $I(\lambda^*(\cdot),v^*)\leq I(\lambda(\cdot),v)$. Теорема доказана.

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 3. Для того чтобы пара $\left\{\lambda(\cdot)^*, v^*\right\}$ была решением задачи 3, необходимо и достаточно существования такой ненулевой вектор–функции $\Psi^*(\cdot) \in \Lambda$, чтобы выполнялись условия:

1. для любой фиксированной вектор-функции $\bar{\Psi}(\cdot)$ пара $\left\{\lambda(\cdot)^*, v^*\right\}$ была решением задачи:

$$L(\{\lambda(\cdot)^*, v^*\}, \Psi(\cdot)) = \min_{\lambda(\cdot)\in\Gamma, v\in T} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi(\cdot));$$

2. удовлетворялись равенства (5), (6) и $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^*(x) = 1$, п.в. для $x \in \Omega$.

Лемма. Задача (8) равносильна задаче 3, т.е.

$$\min_{\lambda(\cdot)\in\Gamma, v\in \mathrm{T}} \max_{\Psi\in\Lambda} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \{\psi, \eta\}) = \min_{(\lambda(\cdot), v)\in W} I(\lambda(\cdot), v),$$

где $W = \{(\lambda(\cdot), v) : \lambda(x) \in \Gamma_2;\ \ v \in V : \sum_{j=1}^{M} v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x)\lambda_i(x)dx,\ \ i = \overline{1,\mathrm{N}}\}$.

Утверждение. При любой фиксированной вектор-функции $\bar{\Psi}(\cdot) \in \Lambda$, $\bar{\Psi}(\cdot) = (\bar{\psi}_0(\cdot), \bar{\psi}_i, \bar{\eta}_j)$ имеет место равенство:

$$\min_{(\lambda(\cdot), v)\in \Gamma\times T} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \bar{\Psi}(\cdot)) = \min_{\lambda(\cdot)\in\Gamma} \min_{v\in T} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \bar{\Psi}(\cdot)) = \min_{v\in T} \min_{\lambda(\cdot)\in\Gamma} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \bar{\Psi}(\cdot)).$$

Доказательство. Пусть $\bar{\Psi}(\cdot) \in \Lambda$ произвольная, но фиксированная вектор-функция. Для краткости изложения введем следующие обозначения:

$$g_i(x, \bar{\psi}_0(\cdot), \bar{\psi}_i) = (c_i^I(x, \tau_i^I) + \bar{\psi}_0(\cdot) + \bar{\psi}_i)\rho(x), \quad s_{ij}(\bar{\eta}_j, \bar{\psi}_i) = c_{ij}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + \bar{\eta}_j - \bar{\psi}_i,$$

$$C(\bar{\eta}_j, \bar{\psi}_0(\cdot)) = -\sum_{j=1}^{M} \bar{\eta}_j b_j - \int_{\Omega} \bar{\psi}_0(x)dx.$$

Очевидно, при фиксированных $\bar{\psi}_0(\cdot), \bar{\psi}_i, i = \overline{1,N}$, $\bar{\eta}_j, j = \overline{1,M}$, $g_i(x, \bar{\psi}_0(\cdot), \bar{\psi}_i)$ – функция переменной *x*, а $s_{ij}(\bar{\eta}_j, \bar{\psi}_i)$ и $C(\bar{\eta}_j, \bar{\psi}_0(\cdot))$ – постоянные величины.

Пусть

$$L_\lambda^*(v, \bar{\Psi}(\cdot)) = \min_{\lambda(\cdot)\in\Gamma} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \bar{\Psi}(\cdot)) = L(\{\lambda^*(\cdot), v\}, \bar{\Psi}(\cdot)), \tag{14}$$

Тогда имеет место неравенство:

$$L(\{\lambda^*(\cdot), v\}, \bar{\Psi}(\cdot)) \le L(\{\lambda(\cdot), v\}, \bar{\Psi}(\cdot)),\ \ \forall \lambda(\cdot) \in \Gamma. \tag{15}$$

Рассмотрим разность:

$$L_\lambda^*(v, \bar{\Psi}) - L(\{\lambda(\cdot), v\}, \bar{\Psi}) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} g_i(x, \bar{\psi}_0(\cdot), \bar{\psi}_i)(\lambda_i^*(x) - \lambda(x))dx$$

Согласно (15) имеем:

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N} g_i(x,\bar{\psi}_0(\cdot),\bar{\psi}_i)(\lambda_i^*(x)-\lambda_i(x))dx \le 0\,, \tag{16}$$

при любых $\lambda(\cdot)\in\Gamma$ и фиксированных $\bar{\psi}_0(\cdot),\bar{\psi}_i, i=\overline{1,N}$.

Теперь пусть

$$L_v^*(\lambda(\cdot),\bar{\Psi}) = \min_{v\in T} L(\{\lambda(\cdot),v\},\bar{\Psi}(\cdot)) = L(\lambda(\cdot),v^*\},\bar{\Psi}(\cdot))\,, \tag{17}$$

Рассмотрим разность:

$$L(\{\lambda(\cdot),v^*\},\bar{\Psi}) - L(\{\lambda(\cdot),v\},\bar{\Psi}) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} s_{ij}(\bar{\eta}_J,\bar{\psi}_i)(v_{ij}^*-v_{ij}).$$

В силу (17) можно записать для любого $v\in T$:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} s_{ij}(\bar{\eta}_j,\bar{\psi}_i)(v_{ij}^*-v_{ij}) \le 0 \tag{18}$$

Просуммировав неравенства (16) и (18) и оставив слагаемые с $\lambda^*(\cdot)\in\Gamma$ и $v^*\in T$ слева, а остальные в правой части неравенства, получаем для любых $\lambda(\cdot)\in\Gamma$, $v\in T$:

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N} g_i(x,\bar{\psi}_0(\cdot),\bar{\psi}_i)\lambda_i^*(x)dx + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} s_{ij}(\bar{\eta}_j,\bar{\psi}_i)v_{ij}^* \le \int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N} g_i(x,\bar{\psi}_0(\cdot),\bar{\psi}_i)\lambda_i(x)dx +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} s_{ij}(\bar{\eta}_j,\bar{\psi}_i)v_{ij}$$

Откуда следует, что для любых $\lambda(\cdot)\in\Gamma$, $v\in T$ следующее неравенство:

$$L(\{\lambda^*(\cdot),v^*\},\bar{\Psi}(\cdot)) \le L(\{\lambda(\cdot),v\},\bar{\Psi}(\cdot)). \tag{19}$$

А это значит, что пара $\left\{\lambda(\cdot)^*,v^*\right\}\in\Gamma\times T$ доставляет минимальное значение функционалу $L(\left\{\lambda(\cdot)^*,v^*\right\},\bar{\Psi}(\cdot))$ на всем множестве $\left\{\lambda(\cdot)^*,v^*\right\}\in\Gamma\times T$ при фиксированной вектор-функции $\bar{\Psi}(\cdot)\in\Lambda$.

Учитывая то, что равенство (14) имеет место при любых фиксированных $v\in T$ и $\bar{\Psi}(\cdot)\in\Lambda$ подставим в него $v=v^*$ и с учетом (17) получим:

$$L_\lambda^*(v^*,\bar{\Psi}) = \min_{\lambda(\cdot)\in\Gamma} L(\{\lambda(\cdot),v^*\},\bar{\Psi}(\cdot)) = \min_{\lambda(\cdot)\in\Gamma}\min_{v\in T} L(\{\lambda(\cdot),v\},\bar{\Psi}(\cdot))$$

С другой стороны из (19) следует, что:

$$L_\lambda^*(v^*,\bar{\Psi}) = L(\{\lambda^*(\cdot),v^*\},\bar{\Psi}(\cdot)) = \min_{(\lambda(\cdot),v)\in\Gamma\times T} L(\{\lambda(\cdot),v\},\bar{\Psi}(\cdot))$$

Аналогично, подставляя в (17) $\lambda(\cdot)=\lambda^*(\cdot)$ из (14) и учитывая (19) можно показать, что

$$L_\lambda^*(\lambda^*(\cdot),\bar{\Psi}(\cdot)) = \min_{v\in T}\min_{\lambda(\cdot)\in\Gamma} L(\{\lambda(\cdot),v\},\bar{\Psi}(\cdot)) = \min_{(\lambda(\cdot),v)\in\Gamma\times T} L(\{\lambda(\cdot),v\},\bar{\Psi}(\cdot)).$$

Таким образом справедливость утверждения доказана.

Сформулируем итоговые теоремы.

Теорема 4. Если пара $(\{\lambda^*,v^*\},\{\psi^*,\eta^*\})\in(\{\Gamma\times T\}\times\{E_N\times E_M\})$ – седловая точка функционала Лагранжа (7), то $\{\lambda^*,v^*\}$ – оптимальное решение прямой задачи, а $\{\psi^*,\eta^*\}$ – оптимальное решение двойственной задачи и $G(\psi^*,\eta^*)=I(\lambda^*,v^*)$.

Теорема 5. Пусть в задаче 3 $\rho(x)\ge 0$ почти всюду для $x\in\Omega$. Тогда для того, чтобы пара $(\lambda^*(\cdot),v^*)\in\Gamma\times T$ была решением задачи 3 необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа $\psi_i, i=\overline{1,N}$ и $\eta_j, j=\overline{1,M}$, чтобы:

1) $c_i^I(x,\tau_i^I)+\psi_i\le c_k^I(x,\tau_k^I)+\psi_k,\ \ i\ne k, \forall x\in\Omega_i,\ i=\overline{1,N},\ k=\overline{1,N}$;

2) $\begin{cases} c_{ij}^{II}=\psi_i-\eta_j,\ \text{\textit{если}}\ v_{ij}^*>0, \\ c_{ij}^{II}>\psi_i-\eta_j.\ \text{\textit{если}}\ v_{ij}^*=0. \end{cases}$

Следствие 1. (необходимое условие оптимальности разбиения). Если $\left\{\Omega_1^*,\Omega_2^*\ldots\Omega_N^*\right\}\left\{v_{11}^*,v_{12}^*\ldots v_{NM}^*\right\}$оптимальное решение задачи 1, то для всех $x\in\Omega_i^*$, и $v_{ij}^*>0$, $v_{kj}^*>0$, $i,k=\overline{1,N}$, $j=\overline{1,M}$, имеет место неравенство:

$$c_i^I(x,\tau_i^I)+c_{ij}^{II}\le c_k^I(x,\tau_k^I)+c_{kj}^{II},$$

причем уравнение границы между подмножествами Ω_i^* и Ω_k^*, можно записать в виде:

$$c_i^I(x,\tau_i^I)+c_{ij}^{II}=c_k^I(x,\tau_k^I)+c_{kj}^{II}.$$

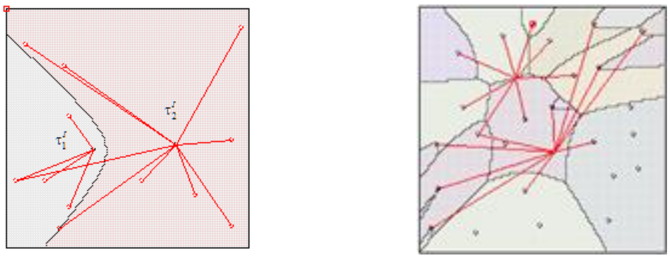
Следствие 2. Функционал двойственной задачи имеет вид:

$$G(\psi,\eta)=\int_\Omega \min_{k=\overline{1,N}}(c_k^I(x,\tau_k^I)+\psi_k)\rho(x)dx-\sum_{j=1}^M b_j\min_{k=\overline{1,N}}\left(c_{kj}^{II}(\tau_k^I,\tau_j^{II})-\psi_k\right).$$

Следствие 3. Характеристическая функция $\lambda^*(\cdot)\in\Gamma$, соответствующая оптимальному решению задачи 1 определяется п.в. для $x\in\Omega$ следующим образом:

$$\lambda_i^*(\cdot)=\begin{cases} 1,\ \text{если}\ c_i^I(x,\tau_i^I)+c_{ij}^{II}=\min\limits_{\substack{k=\overline{1,N},\,j=\overline{1,M}\\ \nu_{kj}>0}}\left(c_k^I(x,\tau_k^I)+c_{kj}^{II})\right), \\ 0,\ \text{если}\ c_i^I(x,\tau_i^I)+c_{ij}^{II}\ne\min\limits_{\substack{k=\overline{1,N},\,j=\overline{1,M}\\ \nu_{kj}>0}}\left(c_k^I(x,\tau_k^I)+c_{kj}^{II}\right), \qquad i=\overline{1,N}. \end{cases}$$

Для решения задачи 1 авторами был предложен итерационный алгоритм [4], составной частью которого является метод потенциалов решения транспортной задачи. Ниже приведены результаты его применения к решению модельных задач. Как видно из рисунка (рис., а), в том случаи, когда центры первого этапа фиксированы, оптимальные границы подмножеств представляют собой параболы, что соответствует аналитическим результатам, представленным в данной работе. Рисунок (рис., б) также демонстрирует тот факт, что при решении задачи с достаточно большим количеством предприятий первого этапа (начиная с 15), может возникнуть ситуация при которой некоторые из центров становятся фиктивными. Это происходит в результате того, что стоимость доставки сырья к предприятиям второго этапа от соответствующего центра на порядок выше чем стоимость сбора сырья для данной области.



а) б)

Рис. Результат решения задачи

Выводы. В работе теоретически обоснован метод решения задачи распределения материальных потоков на основе метода ОРМ. Доказана разрешимость линейной однопродуктовой задачи ОРМ без отыскания координат центров подмножеств и при наличии дополнительных связей. Теоретически обоснован предложенный метод решения. Получены необходимые и достаточные условия оптимальности.

Перечень ссылок

1. Альжанов М.К., Койлыбаев Ж.А. (2014). Современное состояние разработки рудных месторождений открытым способом. «Технические науки – основа современной инновационной системы», III Международная науч.-практ. конф. (2014; Йошкар-Ола). III Международная научно-практическая конференция «Технические науки – основа современной инновационной системы». Приволжский научно-исследовательский центр. Йошкар-Ола: Коллоквиум, 26-27
2. Киселева Е.М. Шор Н.З. (2005). Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: Монография. К.: Наукова Думка., 564 с.
3. Киселева Е.М., Ус С.А., Станина О.Д. (2017) Про алгоритм решения одной задачи оптимального разбиения множеств с дополнительными связями. Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. пр. Д: ЛІРА, (17), 107–116
4. Ус С.А., Станина О.Д. (2014). О математических моделях многоэтапных задач размещения предприятий. Питания прикладної математики і математичного моделювання: зб.наук.пр. Д.: Вид-во «Ліра»,.258 – 268.

АНОТАЦІЯ

Метою роботи є математичне обґрунтування метода розв’язку задачі формування матеріальних потоків з урахуванням неперервно розподіленого ресурсу.

Методи дослідження. При побудові математичних моделей використовувалися методи системного аналізу та математичного моделювання; для доведення необхідних умов оптимальності використовувалися методи нескінченого вимірної оптимізації та функціонального аналізу; для обґрунтування методів розв’язку задачі формування матеріальних потоків з урахуванням неперервно розподіленого ресурсу використовувалася теорія опуклої оптимізації, двоїстості та теорія неперервних задач оптимального розбиття множин.

Результати. Стаття є послідовним продовженням досліджень, пов'язаних з аналізом особливостей неперервних багатоетапних задач оптимального розбиття множин та їх розв’язанням. В роботі доведена розв’язність лінійної одно продуктової задачі оптимального розбиття множини з n-мірного евклідового простору En на підмножини без відшукання їх центрів координат та при наявності додаткових зв’язків. Теоретично обґрунтований запропонований метод розв’язку. Отримані необхідні та достатні умови оптимальності.

Наукова новизна. Удосконалені методи розміщення двоетапного виробництва завдяки урахуванню неперервності розповсюдження ресурсу та наявності декількох етапів виробництва при побудові та реалізації математичних моделей відповідних задач. Надалі результати роботи можуть бути використані при удосконаленні чисельних алгоритмів для вирішення цих задач та узагальнені в разі обмеження можливостей підприємств.

Практичне значення. Отримані теоретичні результати доведені до рівня конкретних рекомендацій, які можуть бути використані державними та приватними підприємствами при розв’язанні логістичних задач, пов’язаних з організацією збору деякого ресурсу, його доставкою до пунктів переробки, а також подальшою перевозкою отриманого продукту за місцем призначення. Окрім того, оскільки, транспортні витрати становлять близько 50% вартості логістичних витрат, навіть незначне зниження цього показника призводить до значного економічного ефекту.

Ключові слова: *оптимальне розбиття множин, багатоетапна транспортна задача, необхідні та достатні умови оптимальності.*

ABSTRACT

The purpose of the work is mathematical substantiation of the method for solving the problem of the material stream distribution, taking into account the continuously distributed resource.

Research methods. For the construction of mathematical models used methods of system analysis and mathematical modelling. For the prove the necessary optimality conditions used methods of infinite-dimensional optimization and functional analysis. For the confirmation the method of solving the problem of the material stream distribution, taking into account the continuously distributed resource used the theory of convex optimization, duality and the theory of continuous problems of optimal partitioning of sets.

The results. The paper is a sequential continuation of studies connected with the analysis of features of continual multistage problems of optimum partition of sets and their solving. In the paper, the solvability of a linear product problem is proved for the optimal partition of a set of n-dimensional Euclidean space En into a subset without finding their coordinate centres and in the presence of additional connections. The proposed solution method is theoretically justified. The

necessary and sufficient conditions of optimality are provided. In the future, the results of work can be used during the development of numerical algorithms for solving these problems and summarized in the event of restrictions on the capacity of enterprises.

Scientific novelty. Improved methods for the placement of two-stage production by taking into account the allocation continuity of resource and the presence of several stages of production in the construction and implementation of mathematical models of these problems.

The practical significance. The obtained theoretical results are brought to the level of specific recommendations that can be used by public and private enterprises in solving logistical tasks. It should be noted that transport costs account for over 50% of the cost of the logistical tasks. Therefore, even a slight decrease in this index will allow reducing the cost of transportation of raw materials and final products, and eventually reducing the production cost.

Key words: *optimal partitioning of sets, multi-stage transport problem, necessary and sufficient optimality conditions.*