МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

ГЕОЛОГОРОЗВІДУВАЛЬНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра вищої математики

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

МАТЕРІАЛИ МЕТОДИЧНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ
поглибленого вивчення розділу
студентами технічних спеціальностей

Дніпро
НТУ «ДП»
2019

Вступ до математичного аналізу. Матеріали методичного забезпечення поглибленого вивчення розділу студентами технічних спеціальностей / Упоряд.: Л.І. Шелест, В.В. Приходько, Т.С. Кагадій, О.В. Бугрим; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро: НТУ «ДП», 2019. – 63 с.

Упорядники: Л.І. Шелест, ст. викл. (розділи I, II, Ш),
В.В. Приходько, канд. техн.наук, доц. (розділи I, II, Ш, IV),
Т.С. Кагадій, д-р фіз.-мат. наук, проф. (розділи I, II),
О.О. Бугрим, канд. техн. наук, доц. (розділи I, III).

Затверджено редакційною радою університету (протокол № 3 від 26.03.2019) за поданням методичної комісії факультету інформаційних технологій зі спеціальності 122 Комп’ютерні науки (протокол № 7 від 12.03.2019).

Подано основні теоретичні відомості до розділу «Вступ до математичного аналізу», наведено розв’язання задач підвищеної складності та приклади для самостійного розгляду.

Відповідальна за випуск зав. кафедри вищої математики О.О. Сдвижкова, д-р техн. наук, проф.

ВСТУП

Дані методичні матеріали є частиною з циклу, що призначений для студентів, які цікавляться вищою математикою і прагнуть поглибити свої знання з цього предмету.

Мета цього видання:

- сформувати й розвинути математичне мислення студентів, розвити у них практичні навички при розв’язуванні нестандартних задач;
- не виходячи за рамки програми курсу для технічних спеціальностей, допомогти студентам самостійно вивчити нові прийоми та методи розв'язання, а також ознайомитися з деякими теоретичними відомостями.

Навчальний посібник складається з таких розділів: елементарні функції та їх графіки, метод математичної індукції, многочлени, різні задачі. У програмі дисципліни «Вища математика» цим питанням приділяється мало часу, але шкільного курсу для глибокого вивчення теж недостатньо. Тому для студентів, які цікавляться математикою та прагнуть підготуватися до розуміння питань курсу математичного аналізу даний посібник є необхідним.

1. ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ГРАФІКИ

Нагадаємо найбільш поширені елементарні функції та їх основні властивості.

1. Степенева функція $y = x^n$, $n \in Z$; $x \in R$.

2. Показникова функція $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$; $x \in R$, $y \in (0;\infty)$.

3. Логарифмічна функція $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$; $x > 0$, $y \in R$.

4.Тригонометричні функції: $y = \sin x$ та $y = \cos x$; $x \in R$, $-1 \leq y \leq 1$;

$$y = \mathrm{tg}\, x; \quad -\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z;\ \ y \in R;$$

$$y = \mathrm{ctg}\, x; \quad \pi k < x < \pi + \pi k,\ k \in Z;\ \ y \in R.$$

5. Обернені тригонометричні функції:

5.1. $y = \arcsin x$; $-1 \leq x \leq 1$, $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Функцію $y = \arcsin x$ називають оберненою до функції $y = \sin x$ на проміжку $x \in \left[-\pi/2;\pi/2\right]$. Вона має такі властивості:

1) $\sin(\arcsin x) = x$; 2) $\arcsin(\sin x) = x$, якщо $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$;

3) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

Графік арксинуса (рис. 1.1) можна отримати з графіка синуса, якщо осі абсцис та ординат поміняти місцями. Щоб уникнути багатозначності, область значень обмежують інтервалом $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$, на якому функція $y = \sin x$ монотонна. Одержану функцію називають головним значенням арксинуса.

Для функції $y = \sin x$, визначеної на всій числовій осі, існує багатозначна обернена функція $y = \mathrm{Arcsin}\, x = (-1)^k \arcsin x + k\pi$, $k \in Z$.

5.2. $y = \arccos x$; $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \pi$.

Функція $y = \arccos x$ зветься оберненою до функції $y = \cos x$ на проміжку $x \in [\,0;\pi]$. Її властивості:

1) $\cos(\arccos x) = x$; 2) $\arccos(\cos x) = x$, якщо $0 \le x \le \pi$;

3) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

Для функції $y = \cos x$, визначеної на всій числовій осі, існує багатозначна обернена функція $y = \mathrm{Arccos}\, x = 2\pi k \pm \arccos x$, $k \in Z$.

Графіки функцій $y = \arcsin x$ та $y = \arccos x$ показано на рис. 1.1, 1.2.

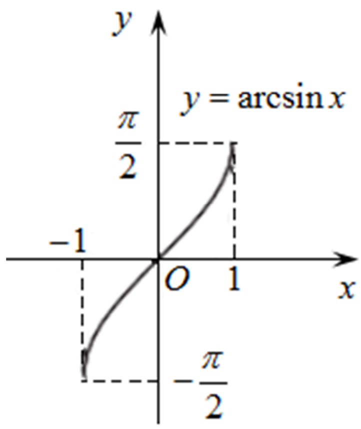

Рис. 1.1

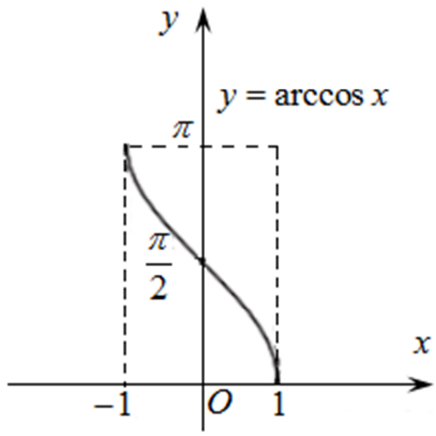

Рис. 1.2

5.3. $y = \mathrm{arctg}\, x$; $x \in R$, $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$.

Функцію $y = \mathrm{arctg}\, x$ називають оберненою до функції $y = \mathrm{tg}\, x$ на інтервалі $x \in (-\pi/2; \pi/2)$. Властивості функції $y = \mathrm{arctg}\, x$:

1) $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\, x) = x$; 2) $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x) = x$, якщо $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$;

3) $\mathrm{arctg}(-x) = -\mathrm{arctg}\, x$.

Оберненою до функції $y = \mathrm{tg}\, x$ на всій області її визначення буде багатозначна функція $y = \mathrm{Arctg}\, x = \mathrm{arctg}\, x + k\pi$, $k \in Z$.

5.4. $y = \mathrm{arcctg}\, x$, $x \in R$, $0 < y < \pi$.

Функція $y = \mathrm{arcctg}\, x$ зветься оберненою до функції $y = \mathrm{ctg}\, x$ на інтервалі $x \in (0; \pi)$. Мають місце наступні властивості:

1) $\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\, x) = x$; 2) $\mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}\, x) = x$, якщо $0 < x < \pi$;

3) $\mathrm{arcctg}(-x) = \pi - \mathrm{arcctg}\, x$.

Існує багатозначна функція $y = \operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arcctg} x + k\pi$, $k \in Z$, яка служить оберненою до всієї функції $y = \operatorname{ctg} x$.

Графіки функцій $y = \operatorname{arctg} x$ та $y = \operatorname{arcctg} x$ представлені на рис. 1.3, 1.4.

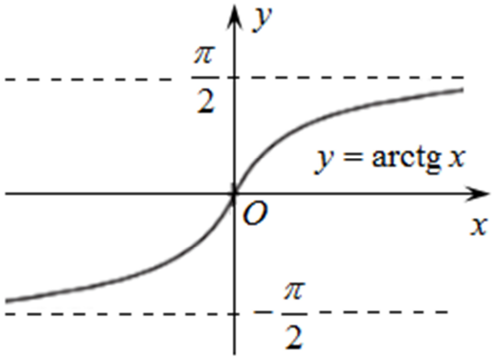

Рис. 1.3

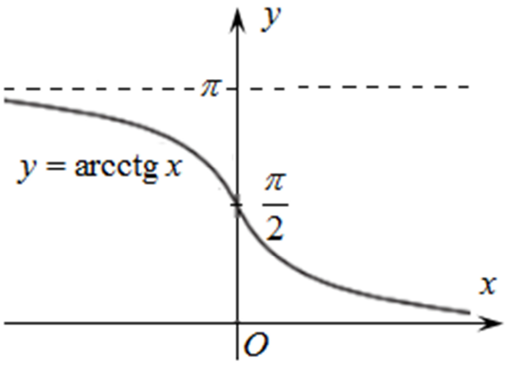

Рис. 1.4

6. Гіперболічні функції:

6.1. $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (гіперболічний синус); $x \in R$, $y \in R$;

6.2. $y = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (гіперболічний косинус); $x \in R$, $y \in [1;\infty)$;

6.3. $y = \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (гіперболічний тангенс); $x \in R$, $y \in (-1;1)$;

6.4. $y = \operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ (гіперболічний котангенс); $x \in (-\infty;0) \cup (0;\infty)$, $y \in (-\infty;-1) \cup (1;\infty)$.

Графіки функцій $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{th} x$, $y = \operatorname{cth} x$ показано на рис. 1.5, 1.6.

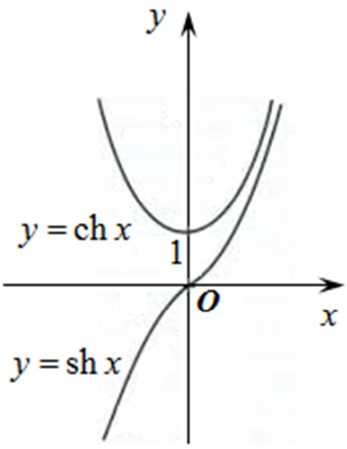

Рис. 1.5

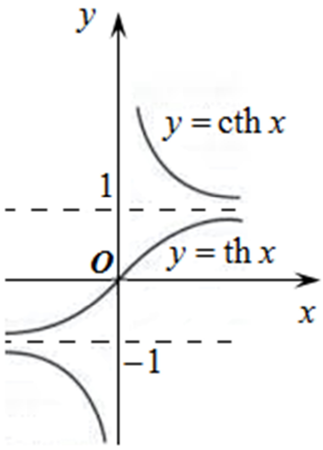

Рис. 1.6

7. Обернені гіперболічні функції:

7.1. $y = \mathrm{Arsh}\, x$ (гіперболічний ареасинус); $x \in R$, $y \in R$;

7.2. $y = \mathrm{Arch}\, x$ (гіперболічний ареакосинус); $x \in [1;\infty)$, $y \in [0;\infty)$;

7.3. $y = \mathrm{Arth}\, x$ (гіперболічний ареатангенс); $x \in (-1;1)$, $y \in R$;

7.4. $y = \mathrm{Arcth}\, x$ (гіперболічний ареакотангенс); $x \in (-\infty;-1) \cup (1;\infty)$, $y \in (-\infty;0) \cup (0;\infty)$.

Графіки функцій $y = \mathrm{Arsh}\, x$, $y = \mathrm{Arch}\, x$, $y = \mathrm{Arth}\, x$, $y = \mathrm{Arcth}\, x$ показано на рис. 1.7, 1.8.

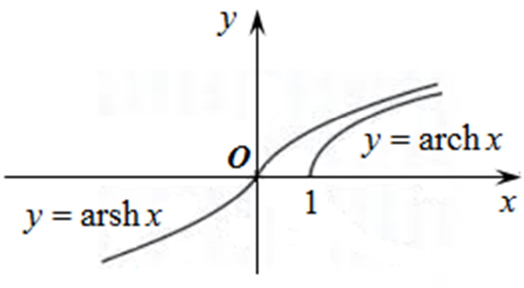

Рис. 1.7

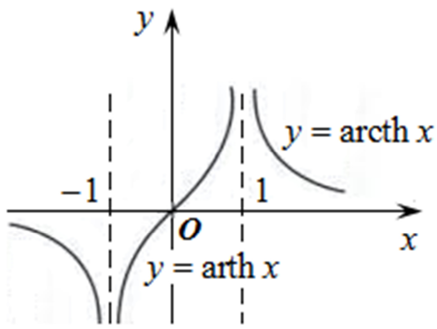

Рис. 1.8

8. Функція $y = [x]$ (ціла частина від x) визначається наступним чином:

$$y = n, \text{ якщо } x \in [n;n+1), \text{ де } n \in Z.$$

9. Функція $y = \{x\}$ (дробова частина від x) визначається так:

$$y = x - n, \text{ якщо } x \in [n;n+1), \text{ де } n \in Z.$$

10. Функція $y = \mathrm{sgn}\, x$ (сигнум x):

$$\mathrm{sgn}\, x = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x = 0; \\ -1, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Геометричні перетворення графіків

На площині з фіксованою декартовою прямокутною системою координат *xOy* графік функції зображується множиною точок $(x;y)$, координати яких задовольняють співвідношенню $y = f(x)$.

При побудові графіків зазвичай користуються наступними геометричними перетвореннями. Нехай ми маємо графік функції

$$y = f(x). \tag{1}$$

Тоді:

1). Графік $y_1 = -f(x)$ утворюється симетричним відображенням графіка (1) відносно осі *Ox*;

2). Графік $y_2 = f(-x)$ є симетричним відображенням графіка (1) відносно осі *Oy*;

3). Графік $y_3 = f(x-a)$ одержимо зміщенням графіка (1) вздовж осі *Ox* на величину *a* вправо, якщо $a > 0$ або вліво при $a < 0$;

4). Графік $y_4 = b + f(x)$ утворюється зміщенням графіка (1) вздовж осі *Oy* на величину *b*;

5). Графік $y_5 = f(ax)$, де $a > 0$, $a \neq 1$, одержимо шляхом стиснення в *a* раз (при $a > 1$) або розтягнення в $\dfrac{1}{a}$ раз (при $a < 1$) графіка (1) вздовж осі *Ox*;

6). Графік $y_6 = b \cdot f(x)$, де $b > 0$, $b \neq 1$, одержимо шляхом розтягнення в *b* раз (при $b > 1$) або стиснення в $\dfrac{1}{b}$ раз (при $b < 1$) графіка (1) вздовж осі *Oy*;

7). Графік функції $y = f(|x|)$ будують так: ту частину графіка, яка лежить у лівій півплощині, відкидаємо, а частину, розташовану в правій півплощині, зберігаємо та відображуємо симетрично осі *Oy*;

8). Графік функції $y = |f(x)|$ отримують так: ту частину графіка, яка лежить вище *Ox*, залишаємо незмінною, а частину, розташовану нижче осі *Ox*, відображуємо симетрично цієї осі;

9). Графік $|y| = f(x)$ будують так: ту частину графіка, яка лежить нижче осі *Ox*, відкидаємо, а частину, розташовану вище осі *Ox*, зберігаємо і відображуємо симетрично цієї осі.

Приклад 1. Побудувати графіки функцій 1.1 – 1.12.

1.1. $y=\sqrt{\ln \sin x}$.

Розв’язання. Область визначення функції (далі $D(y)$) знайдемо з умови $\ln \sin x \ge 0$, звідки $\sin x \ge 1$, тобто $\sin x = 1$. Отже, функція існує тільки в точках $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in Z$ і при цьому набуває значень $y=\sqrt{\ln 1}=0$. Таким чином, графік складається з окремих точок, розташованих на осі *Ox* (рис. 1.9).

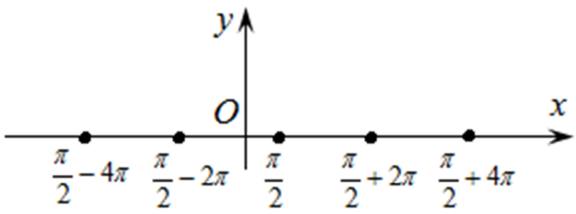

Рис. 1.9

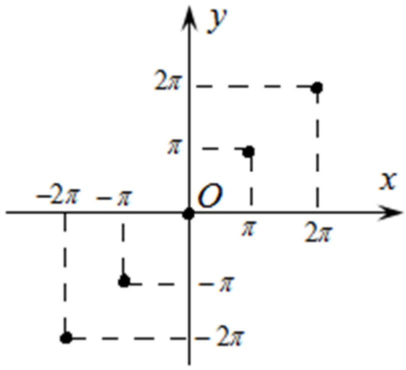

Рис. 1.10

1.2. $y=x+\sqrt{1-\left|\dfrac{1}{\cos x}\right|}$.

Розв’язання. Область визначення функції знайдемо з умови $1-\left|\dfrac{1}{\cos x}\right| \ge 0$, яка виконується, якщо $|\cos x|=1$, тобто $\cos x=\pm 1$, звідки $x=\pi k$, $k \in Z$. При цьому $y(k\pi)=k\pi$. Отже, графік утворюється окремими точками, які належать прямій $y=x$ (рис. 1.10).

1.3. $y=\sqrt{-\left|x^2-1\right|}+2$.

Розв’язання. Область визначення: $-\left|x^2-1\right| \ge 0$, звідки $x^2-1=0$, $x=\pm 1$. При цьому $y(\pm 1)=2$. Графік складається з двох точок $A(-1;2)$ і $B(1;2)$, (рис 1.11).

1.4. $y=\sqrt{\cos x-1}+\dfrac{x}{2}$.

Розв'язання. Функція визначена за умови: $\cos x - 1 \geq 0$, звідки $\cos x = 1$, $x = 2k\pi$, $k \in Z$. Графік складається з точок, що лежать на прямій $y = \dfrac{x}{2}$; їхні координати $(2k\pi; k\pi)$, $k \in Z$ (рис. 1.12).

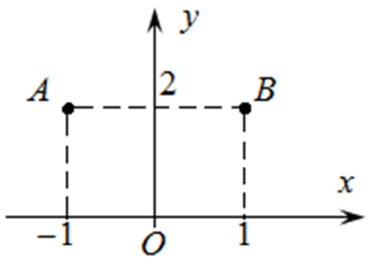

Рис. 1.11

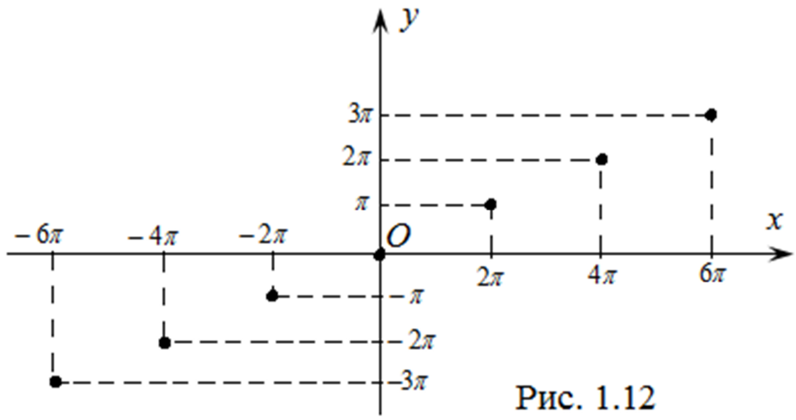

Рис. 1.12

1.5. $y = 1 + \sqrt{\sin x} + \sqrt{-\sin x}$.

Розв'язання. Область визначення знайдемо з умов існування квадратних коренів $\begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \sin x \leq 0 \end{cases}$, звідки $\sin x = 0$, $x = \pi k$, $k \in Z$.

Оскільки $y(k\pi) = 1$, графік утворюють точки $(k\pi; 1)$, де $k \in Z$ (рис. 1.13).

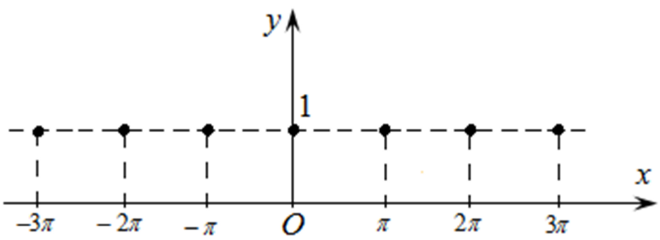

Рис. 1.13

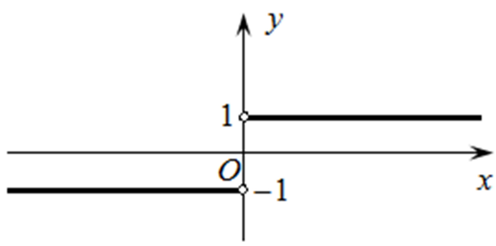

Рис. 1.14

1.6. $y = \operatorname{sgn} x$.

Розв'язання. Побудуємо графік (рис. 1.14) за визначенням функції :

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x = 0; \\ -1, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

1.7. $y=[x]$, де $[x]$ – ціла частина x.

Розв'язання. За визначенням $[x]=n$, якщо $x\in[n;n+1)$, де $n\in Z$. Графік складається з відрізків прямих (рис. 1.15).

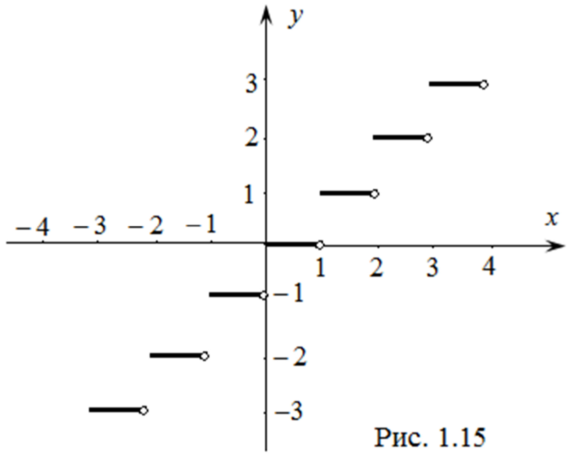

Рис. 1.15

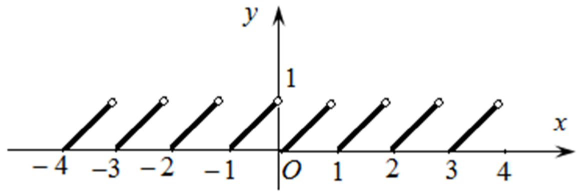

Рис. 1.16

1.8. $y=\{x\}$, де $\{x\}$ – дробова частина x.

Розв'язання. За визначенням $\{x\}=x-n$, якщо $x\in[n;n+1)$, де $n\in Z$, графік складається з відрізків прямих (рис. 1.16).

1.9. $y=\arcsin\sin(x+\pi/4)$.

Розв'язання. Область визначення $x\in R$. Спочатку побудуємо графік $y=\arcsin\sin x$. Відомо, що $\arcsin\sin x=x$ тільки в тому разі, коли $x\in\left[-\pi/2;\pi/2\right]$. Щоб застосувати цю властивість до інших проміжків, будемо виконувати наступні перетворення.

Нехай $-\frac{3\pi}{2}\le x\le-\frac{\pi}{2}$. Додамо π до всіх частин нерівності, одержимо $-\frac{\pi}{2}\le x+\pi\le\frac{\pi}{2}$. Тоді $\sin x=-\sin(x+\pi)$, отже

$$\arcsin\sin x=\arcsin(-\sin(x+\pi))=-\arcsin\sin(x+\pi)=-x-\pi .$$

Тепер візьмемо $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$, віднімемо π від усіх частин нерівності, отримаємо $-\frac{\pi}{2}\le x-\pi\le\frac{\pi}{2}$. Тоді $\sin x=-\sin(x-\pi)$, тому

$$\arcsin\sin x = \arcsin(-\sin(x-\pi)) = -\arcsin\sin(x-\pi) = -x+\pi .$$

Якщо далі взяти $\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{5\pi}{2}$, доведеться відняти 2π, щоб отримати $-\frac{\pi}{2} \le x - 2\pi \le \frac{\pi}{2}$. Тоді $\sin x = \sin(x-2\pi)$, отже

$$\arcsin\sin x = \arcsin\sin(x-2\pi) = x - 2\pi .$$

Далі в результаті аналогічних перетворень одержимо

$$\arcsin\sin x = \begin{cases} -x-\pi, & \text{якщо } -\frac{3\pi}{2} \le x \le -\frac{\pi}{2}; \\ x, & \text{якщо } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}; \\ -x+\pi, & \text{якщо } \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}; \\ x-2\pi, & \text{якщо } \frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{5\pi}{2}; \\ \text{і т. д.} & \end{cases}$$

Графік заданої функції $y = \arcsin\sin(x+\pi/4)$ одержимо зміщенням вздовж осі Ox на величину $\pi/4$ вліво (рис. 1.17).

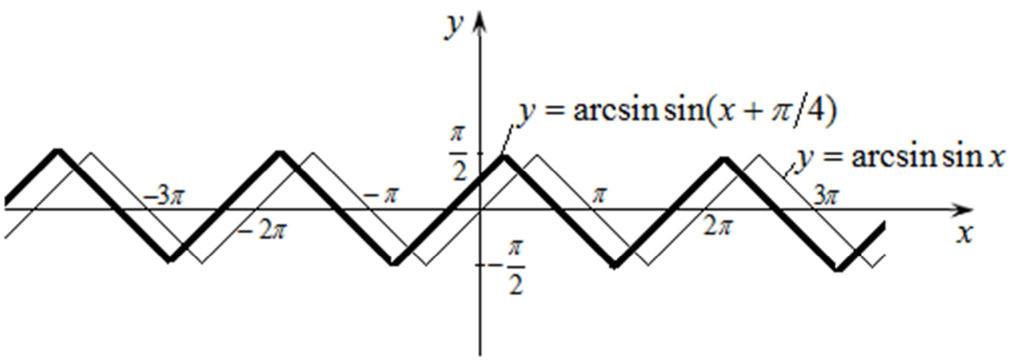

Рис. 1.17

1.10. $y = \arccos\cos 3x$.

Розв'язання. Область визначення $x \in R$. Спочатку побудуємо графік $y = \arccos\cos x$. Будемо враховувати наступне:

1) $\arccos(\cos x) = x$ тільки тоді, коли $0 \le x \le \pi$;

2) $\cos(x+\pi k)=\begin{cases}-\cos x, & \text{якщо } k \text{ непарне};\\ \cos x, & \text{якщо } k \text{ парне}.\end{cases}$

Розглянемо випадок, коли $-\pi \le x \le 0$. Додавши π до всіх частин нерівності, матимемо $0 \le x+\pi \le \pi$. Тоді $\cos x = -\cos(x+\pi)$, отже

$$\arccos\cos x = \arccos(-\cos(x+\pi)) = \pi - \arccos\cos(x+\pi) = \pi - (x+\pi) = -x.$$

Перебуваючи на проміжку $\pi \le x \le 2\pi$, віднімемо π і одержимо $0 \le x-\pi \le \pi$. Тоді $\cos x = -\cos(x-\pi)$, тому

$$\arccos\cos x = \arccos(-\cos(x-\pi)) = \pi - \arccos\cos(x-\pi) = \pi - (x-\pi) = 2\pi - x.$$

Продовжуючи перетворення, одержимо

$$\arccos\cos x = \begin{cases}-x, & \text{якщо } -\pi \le x \le 0;\\ x, & \text{якщо } 0 \le x \le \pi;\\ 2\pi - x, & \text{якщо } \pi \le x \le 2\pi;\\ x - 2\pi, & \text{якщо } 2\pi \le x \le 3\pi;\\ \text{і т. д.}\end{cases}$$

Графік функції $y = \arccos\cos 3x$ отримаємо шляхом стискання попереднього графіка у 3 рази вздовж осі *Ox* (рис. 1.18).

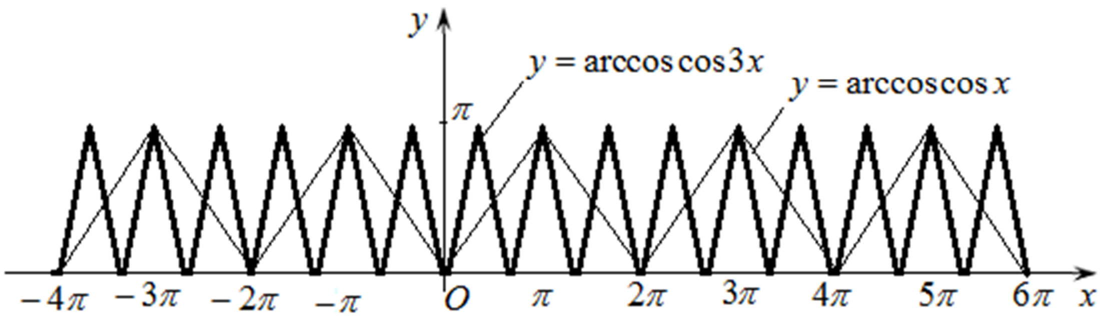

Рис. 1.18

1.11. $y = x\,\mathrm{sgn}\cos x$.

Розв'язання. Область визначення $x \in R$. Враховуючи визначення функції $y = \mathrm{sgn}\, x$, одержимо

$$y=\begin{cases} x, & \text{якщо } \cos x>0, \quad -\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\le x\le\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\\ 0, & \text{якщо } \quad x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\\ -x, & \text{якщо } \quad \dfrac{\pi}{2}+2\pi k\le x\le\dfrac{3\pi}{2}+2\pi k, \quad k\in Z.\end{cases}$$

Побудуємо пунктиром допоміжні графіки $y=x$ та $y=-x$, а суцільною жирною лінією – графік заданої функції $y=x\,\mathrm{sgn}\cos x$ (рис. 1.19).

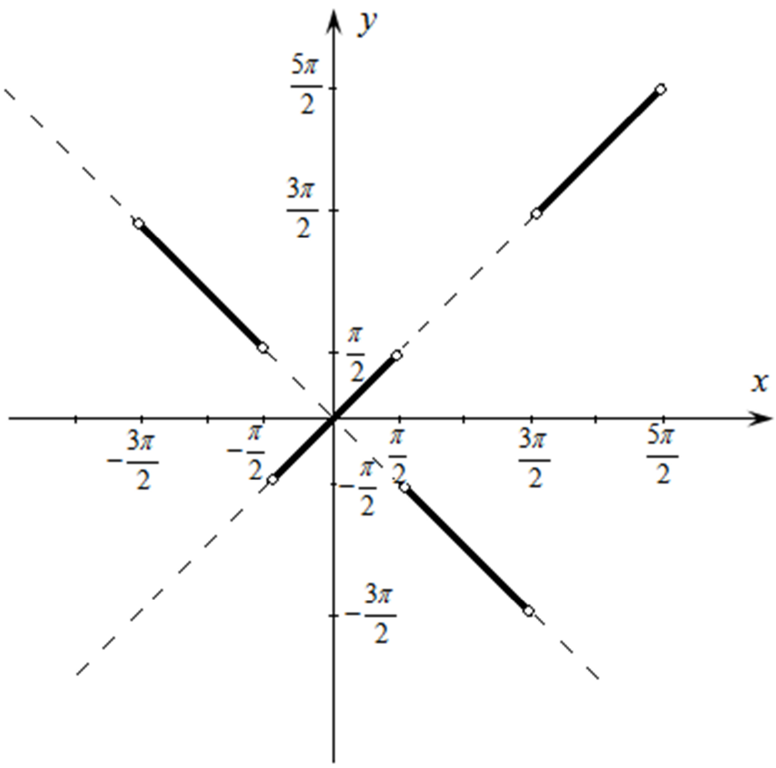

Рис. 1.19

1.12. $y=\sin\arcsin\dfrac{x+2}{3}$.

Розв'язання. Знайдемо область визначення функції: $-1\le\dfrac{x+2}{3}\le 1$, звідки $-3\le x+2\le 3$, $-5\le x\le 1$. Для всіх x із цієї області вірна властивість $\sin\arcsin\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{x+2}{3}$. Отже, графіком функції буде відрізок прямої $y=\dfrac{x+2}{3}$ на проміжку $x\in[-5;1]$ (рис. 1.20).

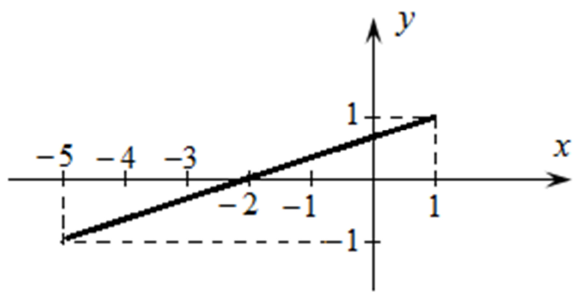

Рис. 1.20

Приклад 2. На площині xOy зобразити множину точок, координати яких задовольняють заданим умовам 2.1 – 2.4.

2.1. $|y| = \left|x^2 - 2|x| - 3\right|$.

Розв'язання. Скористаємось геометричними перетвореннями 1) – 9), наведеними на початку параграфа, і побудуємо графік за кілька кроків.

Крок 1. Пунктиром будуємо параболу $y = x^2 - 2x - 3$: координати вершини $x_в = -\dfrac{b}{2a} = 1$, $y_в = 1 - 2 - 3 = -4$, $(1;-4)$; точки перетину з осями координат: $(3;0)$, $(-1;0)$ та $(0;-3)$, рис. 1.21а.

Крок 2. Враховуючи, що $x^2 = \left|x^2\right|$, застосуємо правило перетворення графіка $y = f(x)$ на $y = f(|x|)$, а саме: частину параболи, розташовану в лівій півплощині, відкинемо, а ту, що лежить у правій півплощині, збережемо і симетрично відобразимо відносно осі *Oy*. Суцільною лінією на рис. 1.21а показано графік $y = x^2 - 2|x| - 3$.

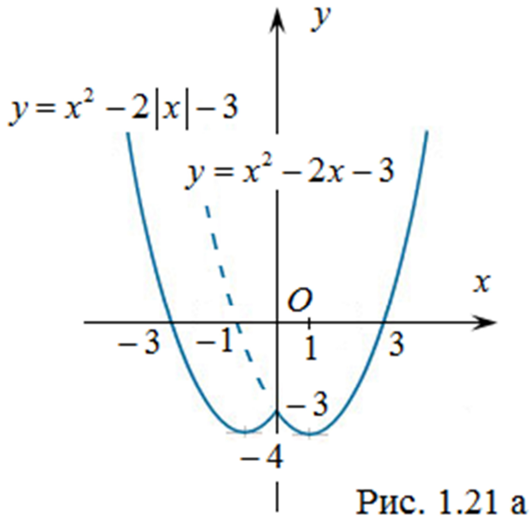

Рис. 1.21 а

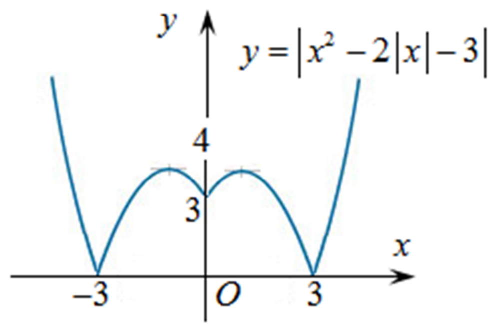

Рис. 1.21 б

Крок 3. Для побудови графіка $y = \left|x^2 - 2|x| - 3\right|$ частину кривої на рис. 1.21а, розташовану вище осі *Ox*, зберігаємо незмінною, а ту, що лежить нижче осі *Ox*, симетрично відобразимо відносно цієї осі (рис. 1.21б).

Крок 4. Одержимо графік заданої функції $|y| = \left|x^2 - 2|x| - 3\right|$ наступним чином. За правилом ми мали б частину графіка, розташовану нижче осі *Ox*, відкинути (її на рис. 1.21б немає), а ту, що лежить вище осі, симетрично відобразити у нижню півплощину (рис.1.21в).

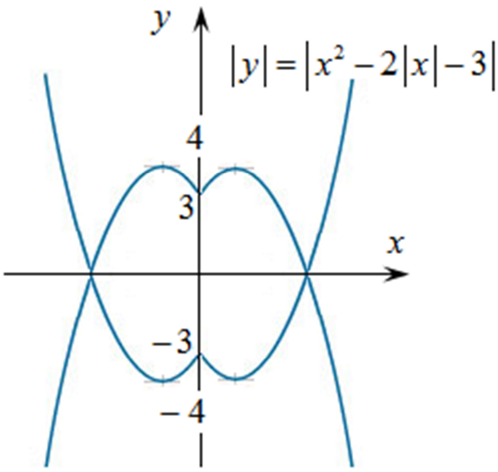

Рис. 1.21 в

2.2. $|y + x| + |x - y| = 1$.

Розв'язання. Задану рівність замінимо на еквівалентну $|y + x| + |y - x| = 1$. Побудуємо прямі $y + x = 0$ та $y - x = 0$, які поділять усю площину на області, в яких підмодульні вирази зберігають знак (кути *AOB*, *BOC*, *COD* і *DOA*), див. рис. 1.22.

Для точок, розташованих вище прямої $y = x$, вірна нерівність $y > x$, тобто $y - x > 0$. І навпаки, для точок, які лежать нижче прямої, виконується нерівність $y - x < 0$, або $y < x$.

Щодо прямої $y = -x$, можна стверджувати, що для точок, розташованих вище неї, $y + x > 0$, а для тих,що нижче прямої $y + x < 0$.

Розкриємо модулі в рівності $|y + x| + |x - y| = 1$ в кожному з виділених кутів.

AOB ($y + x \geq 0$, $y - x \geq 0$): $y + x + y - x = 1$, $y = \frac{1}{2}$;

BOC ($y + x \geq 0$, $y - x < 0$): $y + x + x - y = 1$, $x = \frac{1}{2}$;

COD ($y + x < 0$, $y - x < 0$): $-y - x + x - y = 1$, $y = -\frac{1}{2}$;

DOA ($y + x < 0$, $y - x \geq 0$): $-y - x + y - x = 1$, $x = -\frac{1}{2}$.

Таким чином, одержимо відрізки прямих, що утворюють квадрат (рис. 1.22).

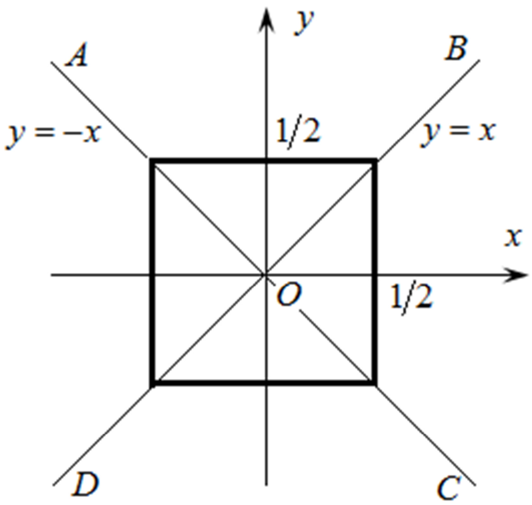

Рис. 1.22

2.3. $\left||x|-|y|\right|=1$.

Розв'язання. Розкривши зовнішній модуль, одержимо $|x|-|y|=\pm 1$. Ці дві рівності визначають криві $|y|=|x|-1$ і $|y|=|x|+1$.

Для побудови графіка $|y|=|x|-1$ виконаємо наступні кроки. Спочатку пунктиром наносимо пряму $y=x-1$. Далі, щоб отримати графік $y=|x|-1$, частину прямої, розташовану в лівій півплощині, відкинемо, а іншу частину збережемо і симетрично відобразимо відносно осі *Oy* (рис.1.23а). Після цього, щоб перейти до графіка $|y|=|x|-1$, частину кривої $y=|x|-1$, яка лежить нижче осі *Ox*, відкинемо, а ту, що розташована вище цієї осі, збережемо і симетрично відобразимо відносно самої осі (рис.1.23б).

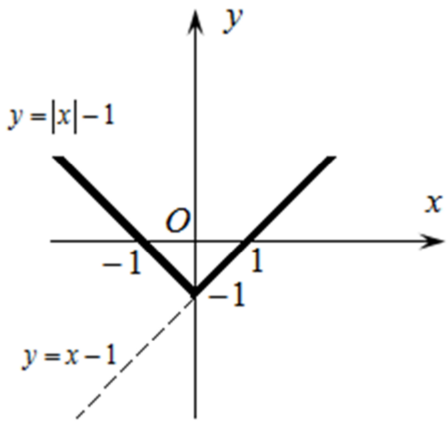

Рис. 1.23 а

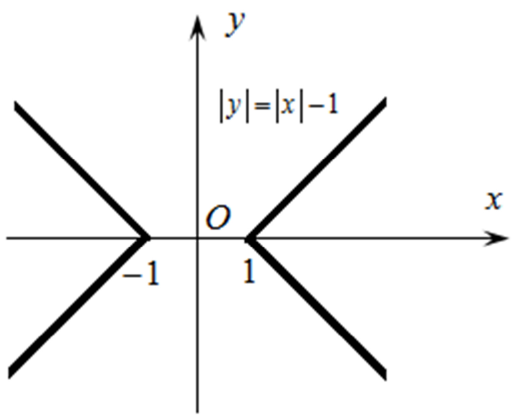

Рис. 1.23 б

Криву $|y|=|x|+1$ побудуємо, виконуючи такі самі кроки, як описано вище (рис. 1.23в). Приєднавши до цієї кривої попередню, остаточно одержимо графік, який визначає шукану множину точок $||x|-|y||=1$ (рис. 1.23г).

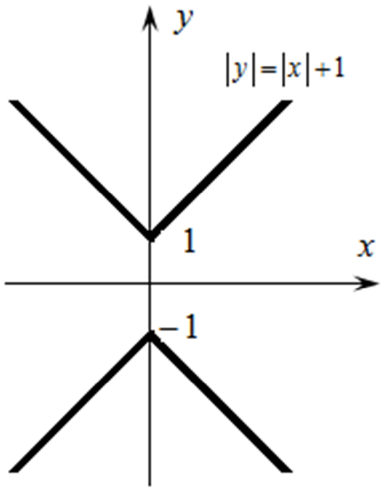

Рис. 1.23 в

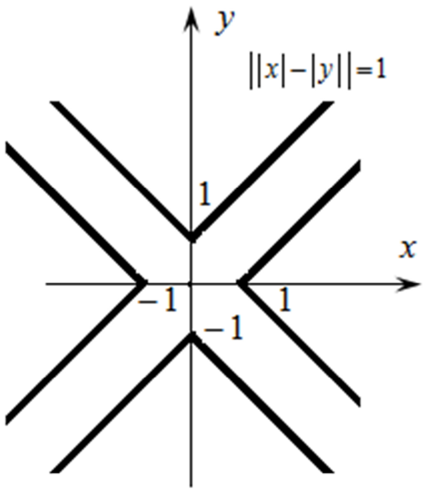

Рис. 1.23 г

2.4. $|2y-1|+|2y+1|+\dfrac{4}{\sqrt{3}}|x|=4$.

Розв'язання. Спочатку побудуємо криву $|2y-1|+|2y+1|+\dfrac{4}{\sqrt{3}}x=4$. Для цього на осі Oy нанесемо нулі та визначимо знаки підмодульних виразів $(2y-1)$ і $(2y+1)$ на кожному з отриманих інтервалів.

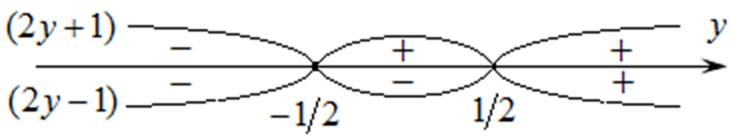

Рис. 24

Рівняння $|2y-1|+|2y+1|+\dfrac{4}{\sqrt{3}}x=4$ рівносильне сукупності систем, записаній нижче. Точки, що задовольняють цьому рівнянню, утворюють криву, показану на рис. 1.24а.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y \in (-\infty; -1/2), \\ -2y + 1 - 2y - 1 + \dfrac{4}{\sqrt{3}}x = 4; \end{cases} \\ \begin{cases} y \in [-1/2; 1/2], \\ -2y + 1 + 2y + 1 + \dfrac{4}{\sqrt{3}}x = 4; \end{cases} \\ \begin{cases} y \in (1/2; \infty), \\ 2y - 1 + 2y + 1 + \dfrac{4}{\sqrt{3}}x = 4 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y \in (-\infty; -1/2), \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x - 1; \end{cases} \\ \begin{cases} y \in [-1/2; 1/2], \\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} y \in (1/2; \infty), \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x + 1. \end{cases}\end{array}\right.$$

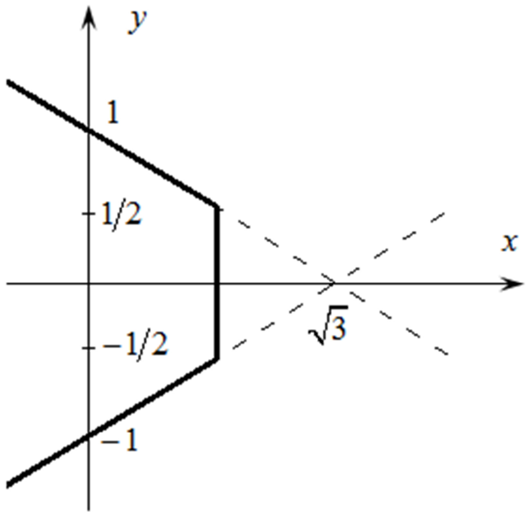

Рис. 1.24 а

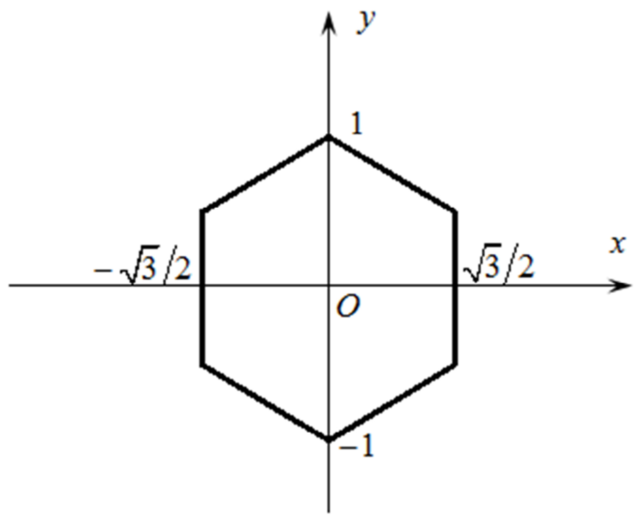

Рис. 1.24 б

Тепер побудуємо задану криву $|2y-1| + |2y+1| + \dfrac{4}{\sqrt{3}}|x| = 4$. Для цього на рис. 1.24а відкинемо ту частину, яка лежить в лівій півплощині, а частину, розташовану в правій півплощині, залишимо і симетрично відобразимо відносно осі Oy (рис. 1.24б).

Приклад 3. Побудувати геометричне місце точок, які задовольняють нерівності 3.1 – 3.4.

3.1. $\log_{y-x}(y^2 + x^2) \le \log_{y-x} 9$.

Розв’язання. Задана нерівність рівносильна наступній сукупності нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y - x > 1, \\ x^2 + y^2 \neq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < y - x < 1, \\ x^2 + y^2 \geq 9 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\begin{cases} y > x + 1, \\ x^2 + y^2 \neq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9; \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x < y < x + 1, \\ x^2 + y^2 \geq 9. \end{cases} & (2)\end{array}\right.$$

Система нерівностей (1) визначає множину точок, які лежать вище прямої $y = x + 1$ і всередині кола $x^2 + y^2 = 9$. Системі (2) відповідають точки, розташовані між прямими $y = x$ та $y = x + 1$ і поза колом $x^2 + y^2 = 9$.

Об'єднуючи області (1) і (2), матимемо фігуру, зображену на рис. 1.25.

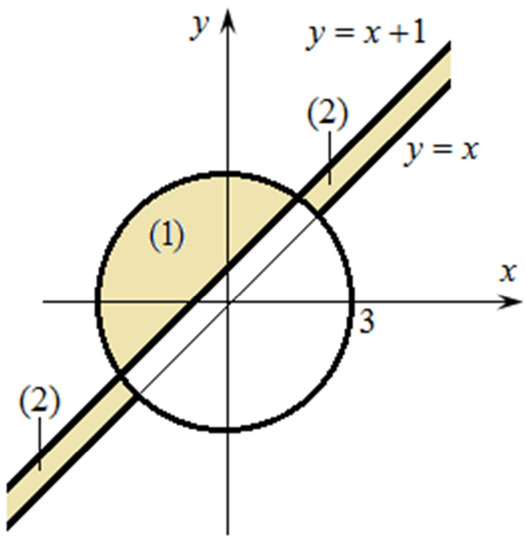

Рис. 1.25

3.2. $\log_{\frac{1}{7}}(y^2 + x^2) \geq 2\log_{\frac{1}{7}}(x + y)$.

Розв'язання. Подамо нерівність у вигляді $\log_{\frac{1}{7}}(y^2 + x^2) \geq \log_{\frac{1}{7}}(x + y)^2$ і запишемо рівносильну систему нерівностей:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \neq 0, \\ x + y > 0, \\ x^2 + y^2 \leq (x + y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \neq 0, \\ y > -x, \\ xy \geq 0. \end{cases}$$

Остання нерівність $xy \geq 0$ еквівалентна сукупності систем

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (1) \qquad \text{або} \qquad \begin{cases} x \leq 0, \\ y \leq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Оскільки $y > -x$, шукані точки лежать вище прямої $y = -x$. Тому обираємо систему (1), відкинувши точку $O(0;0)$ згідно першій нерівності. Остаточно одержимо множину точок, які утворюють перший квадрант, включаючи координатні осі Ox та Oy з виколотою точкою $O(0;0)$ (рис. 1.26).

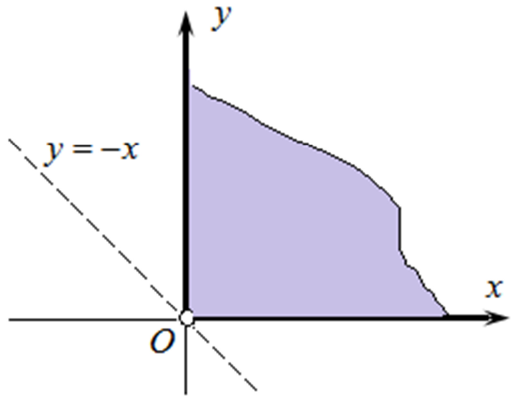

Рис. 1.26

3.3. $\log_{y-x^2}(x^2 + y^2) \leq \log_{y-x^2} 4$.

Розв'язання. Ця логарифмічна нерівність рівносильна сукупності систем нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y - x^2 > 1, \\ x^2 + y^2 \geq 4; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < y - x^2 < 1, \\ x^2 + y^2 \leq 4, \\ x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} y > x^2 + 1, \\ x^2 + y^2 \geq 4; \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x^2 < y < x^2 + 1, \\ x^2 + y^2 \leq 4, \\ x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Побудуємо параболи $y = x^2$ і $y = x^2 + 1$ та коло $x^2 + y^2 = 4$. Система (1) визначає точки, які лежать вище параболи $y = x^2 + 1$ і поза колом, системі (2) відповідають точки між параболами і всередині кола, виключаючи точку $O(0;0)$. Об'єднуючи ці дві області, одержимо фігуру, зображену на рис. 1.27.

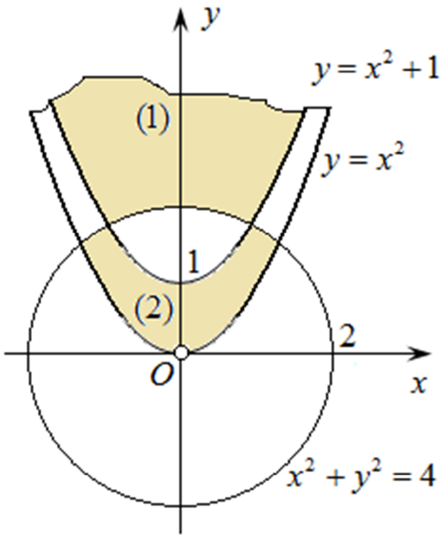

Рис. 1.27

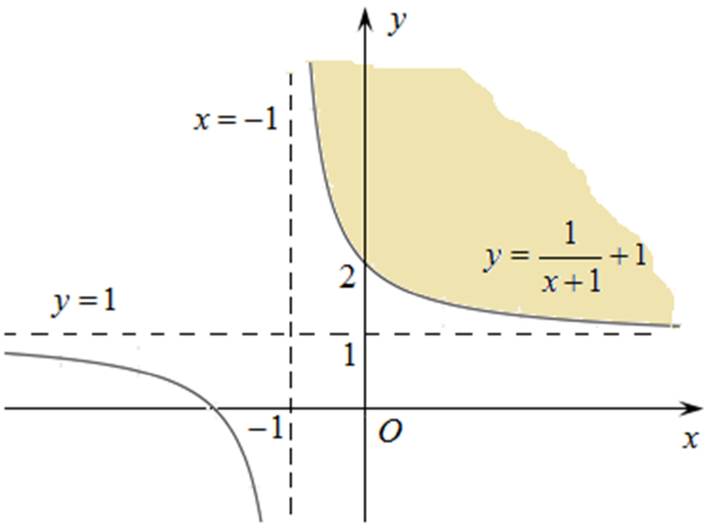

Рис. 1.28

3.4. $\log_3(y-1) > \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$.

Розв'язання. Переходячи до основи 3, одержимо нерівність $\log_3(y-1) > \log_3 \frac{1}{x+1}$, яка рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases} y-1>0, \\ x+1>0, \\ y-1>\dfrac{1}{x+1} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y>1, \\ x>-1, \\ y>\dfrac{1}{x+1}+1. \end{cases}$$

Побудуємо прямі $y=1$, $x=-1$ та гіперболу $y=\frac{1}{x+1}+1$. Останню криву можна одержати з гіперболи $y=\frac{1}{x}$ шляхом зміщення на "1" вліво вздовж осі Ox та на "1" вгору вздовж осі Oy. Системі нерівностей відповідають точки, розташовані вище правої вітки гіперболи, оскільки всі вони задовольняють умовам $y>1$, $x>-1$ (рис. 1.28).

Приклад 4. Знайти площу фігури, координати точок якої задовольняють системі нерівностей $\begin{cases} (x-|x|)^2+(y-|y|)^2 \le 4, \\ x+y \le 0. \end{cases}$

Розв'язання. Розкриємо модулі і одержимо рівносильну сукупність систем нерівностей

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ 0 \le 4, \\ x + y \le 0; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x \ge 0, \\ y < 0, \\ y^2 \le 1, \ -1 \le y \le 1, \\ x + y \le 0; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x < 0, \\ y < 0, \\ x^2 + y^2 \le 1, \\ x + y \le 0; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x < 0, \\ y \ge 0, \\ -1 \le x \le 1, \\ x + y \le 0. \end{cases}$$

До кожної з систем входить нерівність $x + y \le 0$, яка визначає множину точок, розташованих нижче прямої $y = -x$.

В першій системі розв'язком третьої нерівності є вся площина xOy, а перші дві визначають перший квадрант цієї площини. Отже, першій системі задовольняє тільки точка $O(0;0)$.

Друга система визначає всі точки трикутника OAB. Розв'язком третьої системи є чверть круга $x^2 + y^2 \le 1$, яка лежить у третьому квадранті. Четверта система визначає всі точки трикутника COD.

Об'єднавши ці області, одержимо фігуру, зображену на рис. 1.29. Обчислимо її площу $S = S_{\Delta COD} + \frac{1}{4} S_{\text{круга}} + S_{\Delta ABO} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{\pi}{4}$.

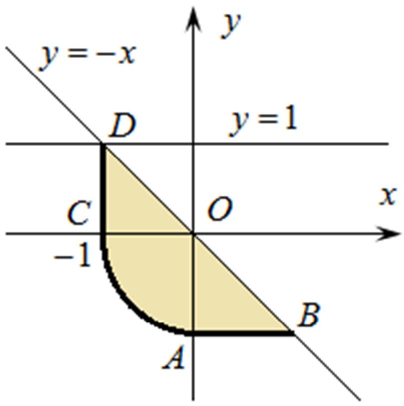

Рис. 1.29

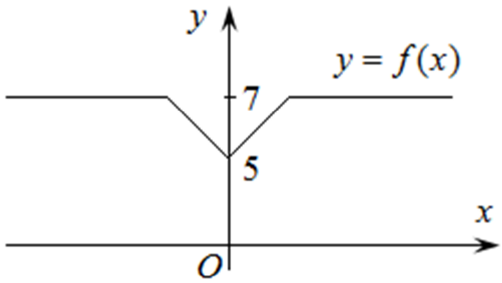

Рис. 1.30

Приклад 5. Задано графік функції $y = f(x)$ (рис.1.30). Визначити, скільки розв'язків мають рівняння а) $\cos f(x) = 0,9$; б) $\cos f(x) = 0,6$.

Розв'язання. а). З рівняння $\cos f(x) = 0,9$ знайдемо $f(x) = \pm \arccos 0,9 + 2\pi k$, $k \in Z$, де $0 < \arccos 0,9 < \frac{\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{6} < -\arccos 0,9 < 0$; $5 \le f(x) \le 7$.

Розглянемо множину прямих $y = \pm\arccos 0,9 + 2\pi k$, $k \in Z$. Серед них лише дві прямі перетинають графік $y = f(x)$, оскільки виконуються нерівності

$$5 < 2\pi < \arccos 0,9 + 2\pi < \frac{\pi}{6} + 2\pi < 7 \quad \text{і} \quad 5 < 2\pi - \frac{\pi}{6} < -\arccos 0,9 + 2\pi < 2\pi < 7.$$

Кожна з двох прямих двічі перетинає заданий графік, отже рівняння має 4 розв'язки.

б). Розв'язавши рівняння $\cos f(x) = 0,6$, одержимо $f(x) = \pm\arccos 0,6 + 2\pi k$, $k \in Z$, де $\frac{\pi}{4} < \arccos 0,6 < \frac{\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3} < -\arccos 0,6 < -\frac{\pi}{4}$; $5 \le f(x) \le 7$.

Серед прямих $y = \pm\arccos 0,6 + 2\pi k$, $k \in Z$, лише одна перетинає графік $y = f(x)$. Це пряма $y = -\arccos 0,6 + 2\pi$, тому що

$$5 < 2\pi - \frac{\pi}{3} < -\arccos 0,6 + 2\pi < 2\pi - \frac{\pi}{4} < 7.$$

Пряма $y = \arccos 0,6 + 2\pi$ проходить вище графіка $y = f(x)$, оскільки $2\pi + \frac{\pi}{4} > 7$. Отже, рівняння $\cos f(x) = 0,6$ має два розв'язки.

Приклад 6. Обчислити:

а) $\arccos(\cos(2\operatorname{arcctg}(\sqrt{2} - 1)))$; б) $\arcsin(\cos(2\operatorname{arcctg}(\sqrt{2} - 1)))$.

Розв'язання. а) позначимо $\operatorname{arcctg}(\sqrt{2} - 1) = \alpha$ і обчислимо $\cos(2\operatorname{arcctg}(\sqrt{2} - 1)) = \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$. Для цього побудуємо прямокутний трикутник з гострим кутом α, для якого $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{2} - 1$. Катети такого трикутника можуть дорівнювати 1 і $\sqrt{2} - 1$ (або бути пропорційними цим числам). Далі, позначивши гіпотенузу як c, знайдемо

$$c^2 = 1^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1),\ c = \sqrt{2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}.$$

Тоді $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}} = \dfrac{\sqrt{\sqrt{2} - 1}}{\sqrt{2\sqrt{2}}}$, $\cos 2\alpha = 2\dfrac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}} - 1 = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} - 1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Тепер знайдемо $\arccos(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$; $\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{2}}) =$ $= -\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{4}$.

2. МЕТОД МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ

В математиці відомі два принципи – дедукція та індукція. Перехід від загальних тверджень до окремих називають дедукцією. Дедукцію використовують в математиці повсякчас, оскільки загальні теореми доводять, як правило, для подальшого застосування при розв'язанні конкретних задач.

Індукцією називають перехід від окремих тверджень до загальних. Наприклад, розглядаючи геометричну прогресію $b_1, \ b_2, \ldots \ , \ b_n, \ \ldots$, можна помітити, що $b_2 = b_1 q, \ b_3 = b_1 q^2, \ b_4 = b_1 q^3$ і, виходячи з отриманих окремих формул, зробити висновок, що $b_n = b_1 q^{n-1}$ для будь-якого натурального *n*.

Але індукція може привести й до неправильного висновку. Якщо твердження справедливе в кількох окремих випадках, щоб дізнатися, чи справедливе воно взагалі, користуються ***методом математичної індукції***. Суть цього методу полягає в наступному. Нехай деяке твердження, сформульоване для деякого числа *n*, перевірено для $n = 1$. Коли з припущення справедливості цього твердження для деякого значення $n = k$ випливає його істинність для значення $n = k + 1$, то твердження правильне для будь-якого натурального *n*.

Доведення деякого твердження (теореми або формули) за методом математичної індукції виконують за схемою:

1) перевіряємо виконання твердження для $n = 1$;

2) припускаємо, що твердження виконується для $n = k$;

3) з урахуванням зробленого припущення доводимо справедливість твердження для $n = k + 1$.

Приклад 2.1. Довести справедливість формул

а) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2} \right)^2$;

б) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \ \ n \in N$.

Розв'язання. а). Позначимо $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2} \right)^2$.

1) перевіримо формулу для $n=1$: $1^3=\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$, формула вірна;

2) припустимо, що вона вірна для $n=k$, тобто $1^3+2^3+3^3+...+k^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$;

3) доведемо справедливість формули для $n=k+1$:

$$1^3+2^3+...+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3=(k+1)^2\left(\frac{k^2}{2^2}+k+1\right)=$$

$$=(k+1)^2\frac{k^2+4k+4}{2^2}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{2^2}=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.$$

Отже, формула вірна для будь-якого натурального $n\in N$, тобто $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

б). Перевіримо формулу $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ для $n=1$: $1^2=\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}=1$, отже, формула вірна. Припустивши, що вона вірна для $n=k$, тобто $1^2+2^2...+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$, доведемо її правильність для $n=k+1$:

$$1^2+2^2+...+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=$$

$$=(k+1)\left(\frac{k(2k+1)}{6}+k+1\right)=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=$$

$$=\left\{\ 2k^2+7k+6=2(k+2)(k+3/2)=(k+2)(2k+3)\ \right\}=$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}.$$

Останнє доводить вірність формули для будь-якого натурального n, тобто $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Операції підсумовування та множення

Нехай задано послідовність

$$a_1,\ a_2, \dots ,\ a_n,\ \dots\ . \qquad (1)$$

Позначимо символом $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ ***суму перших n членів*** послідовності, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad i, n \in N.$$

Тут число i – індекс підсумовування. Зазначимо, що під знаком $\sum$ можна починати не з "1", а з будь-якого числа "m", де $m \in N$, $m > 1$, тобто

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

Визначимо деякі властивості операції підсумовування:

1. $\sum\limits_{i=1}^{n}(-a_i) = -\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$; **2.** $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \pm \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$; **3.** $\sum\limits_{i=1}^{n}(\lambda a_i) = \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$.

Добуток перших n членів послідовності (1) позначимо символом $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i$, тобто

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n, \quad i, n \in N.$$

Якщо множення під знаком $\prod$ починається з деякого числа "m", де $m \in N$, $m > 1$, матимемо вираз

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n.$$

Приклад 2.2. Довести справедливість формул

а) $\prod\limits_{i=2}^{n}\left(1 - \dfrac{1}{i}\right) = \dfrac{1}{n}$; **б)** $\prod\limits_{i=2}^{n}\left(1 - \dfrac{1}{i^2}\right) = \dfrac{n+1}{2n}$; **в)** $\prod\limits_{i=3}^{n}\left(1 - \dfrac{2}{(i-1)i}\right) = \dfrac{n+1}{3(n-1)}$.

Розв'язання. а). При $n=2$ рівність виконується: $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. Припустимо, що вона виконується при $n=k$, тобто $\prod_{i=2}^{k}\left(1-\frac{1}{i}\right)=\frac{1}{k}$. Враховуючи останню рівність, знайдемо

$$\prod_{i=2}^{k+1}\left(1-\frac{1}{i}\right)=\left(1-\frac{1}{k+1}\right)\prod_{i=2}^{k}\left(1-\frac{1}{i}\right)=\left(1-\frac{1}{k+1}\right)\frac{1}{k}=\frac{1}{k}\cdot\frac{k+1-1}{k+1}=\frac{1}{k+1},$$

а це підтверджує вірність формули при $n=k+1$ та дозволяє стверджувати, що формула вірна при будь-якому *n*, а саме $\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i}\right)=\frac{1}{n}$.

Зауваження. Задану рівність можна перевірити безпосередньо (що не завжди можливо):

$$\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}.$$

б). Очевидно, що формула $\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$ виконується при $n=2$, оскільки $1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}$. Припустивши її вірність при $n=k$, тобто $\prod_{i=2}^{k}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{k+1}{2k}$, доведемо, що вона буде виконуватись і при $n=k+1$:

$$\prod_{i=2}^{k+1}\left(1-\frac{1}{(i+1)^2}\right)=\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\prod_{i=2}^{k}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{k+1}{2k}\cdot\frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2}=$$

$$=\frac{(k+1+1)(k+1-1)}{2k(k+1)}=\frac{k+2}{2(k+1)}.$$

Згідно з методом математичної індукції формула вірна для будь-якого *n*, тобто $\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$.

в). При $n=3$ формула виконується: $1-\frac{2}{(3-1)^3}=\frac{2}{3}$. Допустимо, що вона вірна при $n=k$, тобто $\prod_{i=3}^{k}\left(1-\frac{2}{(i-1)i}\right)=\frac{k+1}{3(k-1)}$, та перевіримо її для $n=k+1$:

$$\prod_{i=3}^{k+1}\left(1-\frac{2}{(i-1)i}\right)=\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)\prod_{i=3}^{k}\left(1-\frac{2}{(i-1)i}\right)=\frac{k+1}{3(k-1)}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)=$$

$$=\frac{k+1}{3(k-1)}\cdot\frac{k^2+k-2}{k(k+1)}=\frac{(k+2)(k-1)}{3(k-1)k}=\frac{k+2}{3k}.$$

Отже, формула вірна для будь-якого натурального n.

Приклад 2.3. Довести методом математичної індукції наступні формули та нерівності.

а) $\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{1}{2^i}\cdot tg\frac{\alpha}{2^i}=\frac{1}{2^n}ctg\frac{\alpha}{2^n}-2ctg2\alpha$;

б) $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n}<n\sqrt{\frac{n+1}{2}}$, $n\in N$, $n\geq 2$;

в) $(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n)\geq 1+x_1+x_2+...+x_n$, де $x_1,x_2,...,x_n$ – числа одного знака, $x_i>-1$, $i=1,2,...,n$ (нерівність Бернуллі);

г) $(1+x)^n\geq 1+nx$, де $x>-1$;

д) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$, $n\geq 2$.

Розв'язання. а). Щоб перевірити формулу при $k=0$, доведемо тотожність $tg\alpha=ctg\alpha-2ctg2\alpha$:

$$ctg\alpha-2ctg2\alpha=\frac{1}{tg\alpha}-\frac{1-tg^2\alpha}{tg\alpha}=tg\alpha.$$

Тепер припустимо, що формула вірна при $n=k$, тобто $\sum\limits_{i=0}^{k}\frac{1}{2^i}\cdot tg\frac{\alpha}{2^i}=\frac{1}{2^k}ctg\frac{\alpha}{2^k}-2ctg2\alpha$, та доведемо її вірність при $n=k+1$:

$$\sum_{i=0}^{k+1}\frac{1}{2^i}\cdot tg\frac{\alpha}{2^i}=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{2^i}\cdot tg\frac{\alpha}{2^i}+\frac{1}{2^{k+1}}tg\frac{\alpha}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^k}ctg\frac{\alpha}{2^k}-2ctg2\alpha+\frac{1}{2^{k+1}}tg\frac{\alpha}{2^{k+1}}=$$

$$=\frac{1}{2^{k+1}}tg\frac{\alpha}{2^{k+1}}-2ctg2\alpha-\frac{1}{2^{k+1}}ctg\frac{\alpha}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^k}ctg\frac{\alpha}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}tg\frac{\alpha}{2^{k+1}}.$$

Покажемо, що сума останніх трьох доданків дорівнює нулю:

$$\frac{1}{2^k}ctg\frac{\alpha}{2^k}-\frac{1}{2^{k+1}}ctg\frac{\alpha}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}tg\frac{\alpha}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^k}\left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2^k}}{\sin\frac{\alpha}{2^k}}+\frac{\sin\frac{\alpha}{2^{k+1}}}{2\cos\frac{\alpha}{2^{k+1}}}-\frac{\cos\frac{\alpha}{2^{k+1}}}{2\sin\frac{\alpha}{2^{k+1}}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2^k}\left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2^k}}{\sin\frac{\alpha}{2^k}}+\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2^{k+1}}-\cos^2\frac{\alpha}{2^{k+1}}}{2\cos\frac{\alpha}{2^{k+1}}\sin\frac{\alpha}{2^{k+1}}}\right)=\frac{1}{2^k}\left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2^k}}{\sin\frac{\alpha}{2^k}}-\frac{\cos\frac{2\alpha}{2^{k+1}}}{\sin\frac{2\alpha}{2^{k+1}}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2^k}\left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2^k}}{\sin\frac{\alpha}{2^k}}-\frac{\cos\frac{\alpha}{2^k}}{\sin\frac{\alpha}{2^k}}\right)=0.$$

Таким чином, $\sum\limits_{i=0}^{k+1}\frac{1}{2^i}tg\frac{\alpha}{2^i}==\frac{1}{2^{k+1}}tg\frac{\alpha}{2^{k+1}}-2ctg2\alpha$. За методом математичної індукції це означає, що задана рівність виконується для будь-якого n.

б). Покажемо, що нерівність $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n}<n\sqrt{\frac{n+1}{2}}$ справедлива при $n=2$. Дійсно, $1+\sqrt{2}<2\sqrt{\frac{3}{2}}$, тобто $1+\sqrt{2}<\sqrt{6}$, тому що $(1+\sqrt{2})^2<6$, $1+2\sqrt{2}+2<6$, $2\sqrt{2}<3$, $8<9$. При $n=k$ маємо $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{k}<k\sqrt{\frac{k+1}{2}}$, а щоб довести справедливість нерівності при $n=k+1$, додамо $\sqrt{k+1}$ до обох її частин $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{k}+\sqrt{k+1}<k\sqrt{\frac{k+1}{2}}+\sqrt{k+1}$, а далі у правій частині додамо та віднімемо $(k+1)\sqrt{\frac{k+2}{2}}$, матимемо $(k+1)\sqrt{\frac{k+2}{2}}+k\sqrt{\frac{k+1}{2}}+$ $+\sqrt{k+1}-(k+1)\sqrt{\frac{k+2}{2}}=(k+1)\sqrt{\frac{k+2}{2}}+\sqrt{\frac{k+1}{2}}\left(k+\sqrt{2}-\sqrt{(k+1)(k+2)}\right)$.

Покажемо, що $k+\sqrt{2}-\sqrt{(k+1)(k+2)}<0$: $k+\sqrt{2}<\sqrt{(k+1)(k+2)}$, $k^2+2\sqrt{2}k+2<k^2+3k+2$, $2\sqrt{2}k<3k$, $2\sqrt{2}<3$, $8<9$. Таким чином, доведено, що $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{k}+\sqrt{k+1}<(k+1)\sqrt{\frac{k+2}{2}}$, а це й означає справедливість заданої нерівності для будь-якого n.

в). Нерівність $\left(1+x_1\right)\left(1+x_2\right)\ldots\left(1+x_n\right)\geq 1+x_1+x_2+\ldots+x_n$ виконується при $n=1$, оскільки $1+x_1=1+x_1$. Припустимо її справедливість при $n=k$: $\left(1+x_1\right)\left(1+x_2\right)\ldots\left(1+x_k\right)\geq 1+x_1+x_2+\ldots+x_k$, а щоб довести її при $n=k+1$, помножимо обидві частини на $(1+x_{k+1})$, тоді одержимо:

$$\left(1+x_1\right)\left(1+x_2\right)\ldots\left(1+x_k\right)\left(1+x_{k+1}\right)\geq(1+x_1+x_2+\ldots+x_k)\left(1+x_{k+1}\right).$$

Перетворимо праву частину $(1+x_1+x_2+\ldots+x_k)\left(1+x_{k+1}\right)=$ $=1+x_1+x_2+\ldots+x_k+x_{k+1}(1+x_1+x_2+\ldots+x_k)\geq 1+x_1+x_2+\ldots+x_k+x_{k+1}$, оскільки $x_{k+1}(x_1+x_2+\ldots+x_k)\geq 0$ через те, що всі числа $x_1,x_2,\ldots,x_k,x_{k+1}$ одного знака. Таким чином, доведено, що

$$\left(1+x_1\right)\left(1+x_2\right)\ldots\left(1+x_k\right)\left(1+x_{k+1}\right)\geq 1+x_1+x_2+\ldots+x_k+x_{k+1}.$$

Отже, нерівність справедлива для будь-якого n.

г). Нерівність $\left(1+x\right)^n\geq 1+nx$ вірна при $n=1$: $1+x_1=1+x_1$. Припустимо, що вона справедлива й при $n=k$: $\left(1+x\right)^k\geq 1+kx$. Треба довести, що нерівність виконується при $n=k+1$. Помножимо обидві частини на $1+x>0$, одержимо $\left(1+x\right)^{k+1}\geq(1+kx)\left(1+x\right)$, $(1+kx)\left(1+x\right)=1+kx+x+kx^2=1+(k+1)x+kx^2>$

$>1+(k+1)x$, отже, $\left(1+x\right)^{k+1}\geq 1+(k+1)x$, тобто нерівність виконується при $n=k+1$. Звідси випливає, що нерівність вірна для будь-якого натурального n.

д). Розглянемо нерівність $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ при $n=2$: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$, оскільки $1+\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}+\sqrt{2}>2$. Припустимо, що нерівність виконується при $n=k$, тобто $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$ та доведемо її справедливість при $n=k+1$. Додамо до обох частин $\sqrt{\frac{1}{k+1}}$, матимемо $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\sqrt{\frac{1}{k+1}}>\sqrt{k}+\sqrt{\frac{1}{k+1}}$. Права частина $\sqrt{k}+\sqrt{\frac{1}{k+1}}=$

$$=\sqrt{k+1}+\sqrt{k}+\sqrt{\frac{1}{k+1}}-\sqrt{k+1}=\sqrt{k+1}+\frac{\sqrt{k}\sqrt{k+1}+1-k-1}{\sqrt{k+1}}=$$

$$=\sqrt{k+1}+\frac{\sqrt{k}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}\text{, оскільки } \frac{\sqrt{k}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{\sqrt{k+1}}>0.$$

Таким чином, доведено, що $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$, отже, нерівність справедлива для будь-якого натурального n.

Приклад 2.4. Знайти суму $S_n = \mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\mathrm{arctg}\frac{1}{8}+\mathrm{arctg}\frac{1}{18}+...+\mathrm{arctg}\frac{1}{2n^2}$.

Розв'язання. Скористаємось методом математичної індукції. Нехай $S_1 = \mathrm{arctg}\frac{1}{2}$. Аби обчислити наступну суму $S_2 = \mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\mathrm{arctg}\frac{1}{8}$, знайдемо $tg\, S_2 = tg\left(\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\mathrm{arctg}\frac{1}{8}\right)$ за формулою $tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$. Одержимо

$$tg\, S_2 = tg\left(\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\mathrm{arctg}\frac{1}{8}\right)=\frac{tg\left(arctg\frac{1}{2}\right)+tg\left(arctg\frac{1}{8}\right)}{1-tg\left(arctg\frac{1}{2}\right)\cdot tg\left(arctg\frac{1}{8}\right)}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}}=\frac{2}{3}.$$

Таким чином, $S_2 = \mathrm{arctg}\frac{2}{3}$. Далі $S_3 = \mathrm{arctg}\frac{2}{3}+\mathrm{arctg}\frac{1}{18}=arctg\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{18}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{18}}=arctg\frac{3}{4}$.

Доведемо, що $S_n = \mathrm{arctg}\frac{n}{n+1}$ за допомогою метода математичної індукції. При $n=1$ рівність вірна, оскільки $S_1 = \mathrm{arctg}\frac{1}{2}$. Припустимо її справедливість при $n=k$, тобто $S_k = \mathrm{arctg}\frac{k}{k+1}$, і покажемо, що рівність виконується при $n=k+1$, тобто $S_{k+1} = \mathrm{arctg}\frac{k+1}{k+2}$.

$$S_{k+1} = \mathrm{arctg}\frac{k}{k+1}+arctg\frac{1}{2(k+1)^2}=arctg\frac{\frac{k}{k+1}+\frac{1}{2(k+1)^2}}{1-\frac{k}{k+1}\cdot\frac{1}{2(k+1)^2}}=$$

$$=arctg\frac{2k^2+2k+1}{2(k+1)^2}\cdot\frac{2(k+1)^3}{2k^3+6k^2+5k+2}=$$

$$=arctg\frac{2k^2+2k+1}{1}\cdot\frac{(k+1)}{(k+2)(2k^2+2k+1)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

Таким чином, рівність доведена при $n=k+1$, отже вона вірна для будь-якого натурального n.

В прикладах 2.5 – 2.14 довести, що при будь-якому натуральному n число $f(n)$ ділиться на число m.

Вказівка. Для розв'язання таких задач потрібно або розкласти $f(n)$ на множники, або застосувати метод математичної індукції.

Приклад 2.5. Довести, що число n^3+5n ділиться на 6.

Розв'язання. Задане число розкладемо на множники $n^3+5n=n(n^2+5)$ і покажемо, що воно ділиться на 2 і на 3.

Нехай n не ділиться на 2 (при цьому й n^2 не ділитиметься на 2), тоді на 2 ділиться n^2+5, оскільки сума двох непарних чисел завжди парна. Якщо при цьому n ділиться на 3, то добуток $n(n^2+5)$ ділиться на 6, що й потрібно було довести.

Тепер припустимо, що n не ділиться на 3, тоді остача від ділення на 3 складатиме або 1, або 2, тобто $n=3k+1$ або $n=3k+2$, де $k\in N_0$. Якщо $n=3k+1$, то $n^2+5=9k^2+6k+6=3(3k^2+2k+2)$, а коли $n=3k+2$, то $n^2+5=\,=9k^2+12k+9=3(3k^2+4k+3)$, тобто n^2+5 ділиться на 3.

Приклад 2.6. Довести, що число $2n^3+3n^2+7n$ ділиться на 6.

Розв'язання. Записавши $2n^3+3n^2+7n=n(2n^2+3n+7)$, скористаємось методом, застосованим у задачі 2.5.

Приклад 2.7. Довести, що число n^5-n ділиться на 30.

Розв'язання. Розкладемо задане число на множники $n^5-n=n(n-1)(n+1)(n^2+1)$ і покажемо, що воно ділиться на 2, на 3 і на 5.

Оскільки множники $(n-1)$, n і $(n+1)$ є послідовними числами, одне з них обов'язково ділиться на 2, а інше ділиться на 3. Покажемо, що число n^5-n ділиться на 5.

Припустимо, що число n не ділиться на 5. Тоді його можна подати у вигляді $n=5k+1$, або $n=5k+2$, або $n=5k+3$ або $n=5k+4$, де $k\in N_0$.

Якщо $n=5k+1$, то на 5 ділитиметься множник $(n-1)$, а коли $n=5k+4$, то $(n+1)$ поділиться на 5.

У випадках $n=5k+2$ та $n=5k+3$ на 5 ділитиметься множник (n^2+1), оскільки $n^2+1=(5k+2)^2+1=25k^2+10k+5=5(5k^2+2k+1)$ або ж $n^2+1=$ $=(5k+3)^2+1=25k^2+30k+10=5(5k^2+6k+2)$.

Приклад 2.8. Довести, що число $2^{2n}-1$ ділиться на 3.

Розв'язання. Застосуємо метод математичної індукції. При $n=1$ маємо $2^2-1=3$, тобто твердження вірне. Припустивши, що число $2^{2k}-1$ ділиться на 3, доведемо, що число $2^{2(k+1)}-1$ поділиться на 3.

Число $2^{2(k+1)}-1$ подамо у вигляді $2^{2(k+1)}-1=4\cdot 2^{2k}-1=(2^{2k}-1)+3\cdot 2^{2k}$. Одержали доданки, кожен з яких ділиться на 3, тоді й число $2^{2(k+1)}-1$ ділиться на 3. А це й означає, що задане число ділиться на 3 при будь-якому натуральному n.

Приклад 2.9. Довести, що число $11^{6n+3}+1$ ділиться на 148.

Розв'язання. Скористаємось методом математичної індукції. Для $n=1$ твердження справджується, оскільки $11^9+1=(11^3+1)(11^6-11^3+1)=$ $=(11+1)(11^2-11+1)(11^6-11^3+1)=12\cdot 111\cdot(11^6-11^3+1)$, перший множник ділиться на 4, а другий на 37, а $148=2^2\cdot 37$.

Згідно з методом математичної індукції припустимо, що задане твердження виконується при деякому натуральному k, тобто $11^{6k+3}+1$ ділиться на 148, а тоді доведемо, що й $11^{6(k+1)+3}+1$ поділиться на 148.

Запишемо число у вигляді $11^{6(k+1)+3}+1=11^{6k+9}+1+11^{6k+3}-11^{6k+3}=$

$=(11^{6k+3}+1)+11^{6k+3}(11^6-1)=(11^{6k+3}+1)+11^{6k+3}(11^3-1)(11^3+1)$. Тут перший доданок ділиться на 148 за припущенням, а в другому множник (11^3+1) ділиться на 148.

Таким чином, задане твердження вірне при будь-якому натуральному n.

Приклад 2.10. Довести, що число $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ ділиться на 9.

Розв'язання. Для доведення цього твердження скористаємось методом математичної індукції. При $n=1$ воно вірне, оскільки $1^3+2^3+3^3=36$ ділиться на 9. Припустимо, що твердження справджується для деякого значення *k*, тобто вважатимемо, що $k^3+(k+1)^3+(k+2)^3$ ділиться на 9. Тепер доведемо його вірність для значення $k+1$.

Розглянемо число $(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3$, подамо його у вигляді $(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3+k^3-k^3=\left(k^3+(k+1)^3+(k+2)^3\right)+\left((k+3)^3-k^3\right)=$

$$=\left(k^3+(k+1)^3+(k+2)^3\right)+\left((k+3)^3-k^3\right)=\left(k^3+(k+1)^3+(k+2)^3\right)+$$

$$+\left(k+3-k\right)\left((k+3)^2+(k+3)k+k^2\right)=\left(k^3+(k+1)^3+(k+2)^3\right)+3\left(3k^2+9k+9\right).$$

В останньому виразі обидва доданки діляться на 3 (перший доданок ділиться на 3 згідно припущенню). А це й означає, що твердження вірне для будь-якого натурального n.

Приклад 2.11. Довести, що число $7^{2n}-4^{2n}$ ділиться на 33.

Розв'язання. Перетворимо заданий вираз, скориставшись формулою $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1})$, одержимо

$$7^{2n}-4^{2n}=49^n-16^n=(49-16)(49^{n-1}+49^{n-2}\cdot 16+...+49\cdot 16^{n-2}+16^{n-1})=$$

$=33(49^{n-1}+49^{n-2}\cdot 16+...+49\cdot 16^{n-2}+16^{n-1})$. Оскільки останній вираз ділиться на 33, твердження доведено.

Приклад 2.12. Довести наступні твердження: а) число $6^{2n}+3^{n+2}+3^n$ ділиться: на 11; б) число $11^{n+2}+12^{2n+1}$ ділиться на 133.

Розв'язання. а). Розкладемо на множники число $6^{2n}+3^{n+2}+3^n=$

$=3^{2n}\cdot 2^{2n}+3^n\cdot 3^2+3^n=3^n(3^n\cdot 2^{2n}+3^2+1)=3^n(3^n\cdot 4^n+10)=3^n(12^n+10)$.
Перший множник не ділиться на 11. За допомогою метода математичної індукції доведемо, що на 11 ділиться другий множник (12^n+10). При $n=1$ одержимо $12+10=22$ ділиться на 11. Припустимо, що на 11 ділиться число (12^k+10) та доведемо ділимість на 11 числа $(12^{k+1}+10)$. Перетворимо це число до вигляду $12^{k+1}+10=12^k\cdot 12+10=12^k\cdot 12+12\cdot 10-12\cdot 10+10=$

$=12(12^k+10)-110$. Одержаний вираз ділиться на 11, оскільки на це число ділиться кожен з доданків.

б). Перевіримо ділимість числа $11^{n+2}+12^{2n+1}$ на 133 при $n=1$: $11^3+12^3=$ $=(11+12)(11^2-11\cdot 12+12^2)=23\left(11(11-12)+12^2\right)=23(144-11)=23\cdot 133$.

Припустимо, що $11^{k+2}+12^{2k+1}$ ділиться на 133 та доведемо ділимість на 133 числа $11^{(k+1)+2}+12^{2(k+1)+1}$, подавши його у вигляді $11^{k+3}+12^{2k+3}=11^{k+2}\cdot 11+$

$+12^{2k+1}\cdot 12^2=11^{k+2}\cdot 11+12^{2k+1}\cdot 11-12^{2k+1}\cdot 11+12^{2k+1}\cdot 12^2=11(11^{k+2}+12^{2k+1})+$ $+12^{2k+1}(12^2-11)=11(11^{k+2}+12^{2k+1})+12^{2k+1}(12^2-11)=11(11^{k+2}+12^{2k+1})+$

$+12^{2k+1}\cdot 133$.

Обидва доданки останнього виразу діляться на 133, отже, і все число ділиться на 133. Згідно методу математичної індукції це означає, що задане твердження вірне при будь-якому натуральному n.

Приклад 2.13. Знайти суму $S_n=1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!$.

Розв'язання. Складемо послідовність часткових сум:

$$S_1=1!=2!-1;\quad S_2=1!+2\cdot 2!=5=6-1=3!-1;$$

$$S_3=1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!=5+18=23=24-1=4!-1.$$

Закономірність, за якою обчислюються перші три члени цієї послідовності, можна задати формулою $S_n=(n+1)!-1$. Застосувавши метод математичної індукції, доведемо, що ця формула вірна для будь-якого натурального n.

Припустимо вірність формули для деякого $n=k$, тобто $S_k=1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+k\cdot k!=(k+1)!-1$, а тоді доведемо її вірність для $n=k+1$. Розглянемо вираз

$$S_{k+1}=\left(1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+k\cdot k!\right)+(k+1)(k+1)!=(k+1)!-1+(k+1)(k+1)!=$$

$$=(k+1)!(k+2)-1=(k+2)!-1.$$

Доведено, що $S_{k+1}=(k+2)!-1$. А це й означає, що формула вірна для будь-якого натурального n.

3. МНОГОЧЛЕНИ

Многочленом степеня *n* відносно змінної x (поліномом степеня n) називають вираз

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n.$$

Для многочленів справедливі наступні **теореми**.

1. Якщо $P_n(x)=Q_n(x)$, то для будь-якого числа c вірна рівність $P_n(c)=Q_n(c)$.

2. Якщо для будь-якого числа c вірна рівність $P_n(c)=Q_n(c)$, то $P_n(x)=Q_n(x)$.

3. Якщо $P_n(x)\neq Q_n(x)$, то існує таке число c, що $P_n(c)\neq Q_n(c)$.

4. Якщо існує таке число c, що $P_n(c)\neq Q_n(c)$, то $P_n(x)\neq Q_n(x)$.

5. Нехай $P_k(x)$ і $Q_k(x)$ – многочлени, степінь кожного з яких $k\leq n$. Тоді, якщо значення цих многочленів співпадають у $(n+1)$ точках, то $P_k(x)=Q_k(x)$.

6. Нехай $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени з цілими коефіцієнтами, причому старший коефіцієнт многочлена $Q(x)$ дорівнює 1 або (-1). Тоді і частка, і остача при діленні $P(x)$ на $Q(x)$ також є многочленами з цілими коефіцієнтами.

7. Нехай $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени з раціональними коефіцієнтами. Тоді і частка, і остача при діленні $P(x)$ на $Q(x)$ також є многочленами з раціональними коефіцієнтами.

8. Остача від ділення многочлена $P(x)$ на $(x-a)$ дорівнює $P(a)$.

9. Якщо всі коефіцієнти многочлена $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ – цілі числа, то кожен цілий корінь цього многочлена є дільником його вільного члена a_n.

10. Многочленне рівняння степені n у множині комплексних чисел завжди має n коренів. Якщо ж усі коефіцієнти рівняння – дійсні числа, воно має або n, або $(n-2k)$ дійсних коренів, де $k=1,2,...,[n/2]$.

11. Якщо многочлен має корінь $x=x_1$ кратності k, то похідна від нього має корінь $x=x_1$ кратності $(k-1)$.

12. **Терема Вієта** для рівняння $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$:

$$\boxed{\begin{aligned} & x_1 + x_2 + ... + x_n = -a_{n-1}; \\ & x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + ... + x_{n-1} \cdot x_n = a_{n-2}; \\ & x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + ... + x_{n-2} \cdot x_{n-1} \cdot x_n = -a_{n-3}; \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = (-1)^n a_0. \end{aligned}}$$

У другому рядку підсумовуються всі можливі добутки по два корені, кількість доданків C_n^2. У третьому рядку – сума добутків по три корені, кількість доданків C_n^3, і т.д.

Приклад 3.1. Знайти найбільший спільний множник многочленів $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x - 3 = 0$ і $\varphi(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$.

Розв'язання. Скористаємось алгоритмом Евкліда для знаходження найбільшого спільного дільника многочленів $f_n(x)$ і $\varphi_m(x)$, який базується на діленні з остачею. Нехай $n \geq m$. Розділимо $f_n(x)$ на $\varphi_m(x)$:

$$f_n(x) = \varphi_m(x) \cdot q_{n-m}(x) + r_{m-1}(x),$$

де $q_{n-m}(x)$ – частка, а $r_{m-1}(x)$ – остача від ділення. Якщо $r_{m-1}(x) = 0$, то $\varphi_m(x)$ і буде найбільшим спільним дільником. Коли ж $r_{m-1}(x) \neq 0$, то будемо ділити $\varphi_m(x)$ на $r_{m-1}(x)$, одержимо

$$\varphi_m(x) = r_{m-1}(x) \cdot q_1(x) + r_{m-2}(x).$$

Якщо $r_{m-2}(x) \neq 0$, то будемо ділити $r_{m-1}(x)$ на $r_{m-2}(x)$. Процес будемо повторювати до тих пір, поки не одержимо в остачі нуль (це настане обов'язково). Тоді передостання остача $r(x) \neq 0$ і буде найбільшим спільним дільником.

Зауважимо, що найбільший спільний дільник многочленів визначається з точністю до сталого множника. Тому в процесі ділення можна і самі многочлени, і проміжні результати множити на "зручні" коефіцієнти. У записі ділення ці моменти позначають двома рисками замість однієї. Скориставшись цим, поділимо стовпчиком $f(x)$ на $\varphi(x)$:

$$
\begin{array}{r|l}
-\underline{\begin{array}{r}2x^4-4x^3-8x^2+8x-6\\ 2x^4-5x^3-4x^2+3x\end{array}} & \underline{2x^3-5x^2-4x+3}\\
x^3-4x^2+5x-6 & x//+1\\
-\underline{\begin{array}{r}2x^3-8x^2+10x-12\\ 2x^3-5x^2-4x+3\end{array}} & \\
-3x^2+14x-15 &
\end{array}
$$

Тепер поділимо $\varphi(x)=2x^3-5x^2-4x+3=0$ на остачу $r_1(x)=-3x^2+14x-15$.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3-5x^2-4x+3 & \underline{-3x^2+14x-15}\\
-\underline{\begin{array}{r}6x^3-15x^2-12x+9\\ 6x^3-28x^2-30x\end{array}} & -2x//-13\\
13x^2-42x+9 & \\
-\underline{\begin{array}{r}39x^2-126x+27\\ 39x^2-182x+195\end{array}} & \\
56x-168 & \\
x-3 &
\end{array}
$$

Далі ділимо $-3x^2+14x-15$ на $x-3$, попередньо помноживши ділене на -1:

$$
\begin{array}{r|l}
-\underline{\begin{array}{r}3x^2-14x+15\\ 3x^2-9x\end{array}} & \underline{x-3}\\
-\underline{\begin{array}{r}-5x+15\\ -5x+15\end{array}} & 3x-5\\
0 &
\end{array}
$$

Отже, найбільшим спільним дільником многочленів $f(x)$ і $\varphi(x)$ буде $x-3$.

Відповідь: $x-3$.

Приклад 3.2. Нехай $f(x)$ – многочлен із цілими коефіцієнтами. Довести, що при будь-яких цілих a і $b \ge 0$ число $f(a+\sqrt{b})+f(a-\sqrt{b})$ – ціле.

Розв'язання. Розглянемо $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, де $a_i \in Z$.

Тоді $f(a+\sqrt{b})+f(a-\sqrt{b})=a_n\left((a+\sqrt{b})^n+(a-\sqrt{b})^n\right)+$
$+a_{n-1}\left((a+\sqrt{b})^{n-1}+(a-\sqrt{b})^{n-1}\right)+...+a_1(a+\sqrt{b}+a-\sqrt{b})+a_0$.

Скористаємось ***біномом Ньютона***, аби довести, що $(a+\sqrt{b})^n + (a-\sqrt{b})^n$ – ціле число:

$$\boxed{\begin{gathered}(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n,\\ C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n.\end{gathered}}$$

Перетворимо за допомогою бінома Ньютона вираз $(a+\sqrt{b})^n + (a-\sqrt{b})^n =$

$$= a^n + C_n^1 a^{n-1}\sqrt{b} + C_n^2 a^{n-2}(\sqrt{b})^2 + C_n^3 a^{n-3}(\sqrt{b})^3 + \ldots + C_n^{n-1} a(\sqrt{b})^{n-1} + (\sqrt{b})^n +$$

$$+ a^n - C_n^1 a^{n-1}\sqrt{b} + C_n^2 a^{n-2}(\sqrt{b})^2 - C_n^3 a^{n-3}(\sqrt{b})^3 + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} a(\sqrt{b})^{n-1} +$$

$$+(-1)^n(\sqrt{b})^n = \begin{cases} 2a^n + 2C_n^2 a^{n-2}b + \ldots + 2b^{\frac{n}{2}}, & \text{якщо } n \text{ парне;}\\ 2a^n + 2C_n^2 a^{n-2}b + \ldots + 2C_n^{n-1}ab^{\frac{n-1}{2}}, & \text{якщо } n \text{ непарне.}\end{cases}$$

В одержаних сумах усі доданки – цілі числа, тому $(a+\sqrt{b})^n + (a-\sqrt{b})^n$ – також ціле. Отже, виходить, що й заданий вираз $f(a+\sqrt{b}) + f(a-\sqrt{b})$ буде цілим числом.

Приклад 3.3. Визначити, чи ділиться многочлен $f(x) = x^{100} - 3x + 2$ на $\varphi(x) = x^2 - 1$.

Розв'язання. Оскільки $\varphi(\pm 1) = 0$, $x_1 = -1$ і $x_2 = 1$ – корені многочлена $\varphi(x) = x^2 - 1$. При цьому $f(1) = 0$, а $f(-1) = 6$, тобто не всі корені многочлена $\varphi(x)$ є коренями для $f(x)$. А це означає, що $f(x)$ не ділиться на $\varphi(x)$.

Відповідь: не ділиться.

Приклад 3.4. Деякий многочлен $f(x)$ при діленні на $(x-1)$ дає остачу 3, а при діленні на $(x-2)$ – остачу 4. Чому дорівнює остача від ділення цього многочлена на $(x-1)(x-2)$?

Розв'язання. Відповідно до умови маємо для многочлена $f(x)$:

$$\begin{cases} f(x) = (x-1)\cdot q_1(x) + 3,\\ f(x) = (x-2)\cdot q_2(x) + 4.\end{cases}$$

Згідно з теоремою 8 з цих рівностей виходить, що $f(1)=3$, $f(2)=4$.

Оскільки степінь остачі менша за степінь дільника, при діленні $f(x)$ на $(x-1)(x-2)$ остача матиме вигляд $ax+b$, тобто

$$f(x)=(x-1)(x-2)\cdot q_3(x)+ax+b.$$

З цього виразу знайдемо

$$\begin{cases} f(1)=a+b=3, & a=1, \\ f(2)=2a+b=4, & b=2, \end{cases}$$

звідки одержимо $a=1$, $b=2$. Отже, остача дорівнює $x+2$.

Відповідь: $x+2$.

Приклад 3.5. Деякий многочлен $f(x)$ при діленні на $(x+1)$, $(x-2)$ та $(x-3)$ дає в остачі 3, 1 та -1 відповідно. Знайти остачу від ділення $f(x)$ на $(x+1)(x-2)(x-3)$.

Розв’язання. З умови матимемо наступні рівності для многочлена $f(x)$:

$$\begin{cases} f(x)=(x+1)\cdot q_1(x)+3, \\ f(x)=(x-2)\cdot q_2(x)+1, \\ f(x)=(x-3)\cdot q_3(x)-1. \end{cases}$$

Отже, $f(-1)=3$, $f(2)=1$, $f(3)=-1$ згідно з теоремою 8. З іншого боку,

$$f(x)=(x+1)(x-2)(x-3)\cdot q_4(x)+ax^2+bx+c,$$

звідки одержимо

$$\begin{cases} f(-1)=a-b+c=3, \\ f(2)=4a+2b+c=1, \\ f(3)=9a+3b+c=-1. \end{cases}$$

Розв’язавши систему, отримаємо $a=-\dfrac{1}{3}$, $b=-\dfrac{1}{3}$, $c=3$. Отже, шукана остача дорівнює $ax^2+bx+c=-\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{1}{3}x+3$.

Відповідь: $-\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{1}{3}x+3$.

Приклад 3.6. Відомо, що многочлен $f(x)=ax^4+bx^3+1$ ділиться на $(x-1)^2$. Знайти коефіцієнти *a* і *b*.

Розв'язання. Оскільки ax^4+bx^3+1 ділиться на $(x-1)^2$, можна записати $ax^4+bx^3+1=(x-1)^2 q(x)$, тобто $x=1$ є двократним коренем многочлена $f(x)$. Тоді відповідно до теореми 11, $x=1$ буде також коренем похідної $f'(x)=(ax^4+bx^3+1)'=4ax^3+3bx^2$. Отже,

$$\begin{cases} f(1)=a+b+1=0, \\ f'(1)=4a+3b=0. \end{cases}$$

Звідси знаходимо $a=3$, $b=-4$, тобто многочлен $f(x)=3x^4-4x^3+1$.

Відповідь: $a=3$, $b=-4$.

Приклад 3.7. Довести, що при будь-яких цілих невід'ємних *m*, *n* і *p* многочлен $f(x)=x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ ділиться на x^2+x+1.

Розв'язання. Нехай x_1 – корінь многочлена x^2+x+1, тобто $x_1^2+x_1+1=0$. Тоді й $(x-1)(x_1^2+x_1+1)=0$, тобто $x_1^3-1=0$, або $x_1^3=1$. Оскільки многочлен x^2+x+1 має два корені, то окрім x_1 є ще корінь x_2 (вони обидва комплексні). Доведемо, що x_1 і x_2 будуть коренями многочлена $f(x)=x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$, тобто $x_1^{3m}+x_1^{3n+1}+x_1^{3p+2}=0$.

Запишемо

$$x_1^{3m}+x_1^{3n+1}+x_1^{3p+2}=(x_1^3)^m+(x_1^3)^n x_1+(x_1^3)^p x^2=\left\{x_1^3=1\right\}=1+x_1+x_1^2=0.$$

Але якщо x_1 і x_2 є коренями многочлена $f(x)=x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$, то $f(x)$ ділиться на x^2+x+1.

Приклад 3.8. Обчислити суму $x_0^{32}+\dfrac{1}{x_0^{32}}$, якщо x_0 – корінь рівняння $x^2+x+1=0$.

Розв'язання. Довежемо, що коли x_0 – корінь рівняння $x^2+x+1=0$, то $x_0^3=1$. Помножимо обидві частини рівності $x_0^2+x_0+1=0$ на x_0-1, одержимо $(x_0^2+x_0+1)(x_0-1)=0$, тобто $x_0^3-1=0$, або $x_0^3=1$.

Тоді $x_0^{32}+\frac{1}{x_0^{32}}=\frac{x_0^{33}}{x_0}+\frac{x_0}{x_0^{33}}=\frac{(x_0^3)^{11}}{x_0}+\frac{x_0}{(x_0^3)^{11}}=x_0+\frac{1}{x_0}=\frac{x_0^2+1}{x_0}$.

Але оскільки $x_0^2+x_0+1=0$, то $x_0^2+1=-x_0$. Отже, матимемо $\frac{x_0^2+1}{x_0}=\frac{-x_0}{x_0}=-1$.

Відповідь: -1.

Приклад 3.9. Нехай x_1, x_2, x_3 – корені рівняння $x^3+px+q=0$. Довести, що $x_1^3+x_2^3+x_3^3=3q$.

Розв'язання. За теоремою Вієта $x_1+x_2+x_3=0$, $x_1\cdot x_2\cdot x_3=q$. Піднесемо обидві частини першої рівності до куба, одержимо

$$(x_1+x_2+x_3)^3=x_1^3+x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_2^3+x_2^2x_3+x_1x_3^2+x_2x_3^2+x_3^3+$$

$$+2x_1^2x_2+2x_1x_2^2+2x_1x_2x_3+2x_1x_3+2x_1x_2x_3+2x_1x_3^2+2x_1x_2x_3+2x_2^2x_3+2x_2^2x_3^2.$$

Після спрощення матимемо

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+3x_1^2(x_2+x_3)+3x_2^2(x_1+x_3)+3x_3^2(x_1+x_2)+6x_1x_2x_3=0.$$

Оскільки $x_1+x_2+x_3=0$, то $x_2+x_3=-x_1$, $x_1+x_3=-x_2$, $x_1+x_2=-x_3$. Тоді рівняння набирає вигляду $x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1^3-3x_2^3-3x_3^3+6x_1x_2x_3=0$, звідки отримаємо $x_1^3+x_2^3+x_3^3=3x_1x_2x_3$, тобто $x_1^3+x_2^3+x_3^3=3q$.

Приклад 3.10. Визначити, за якої умови рівняння $x^3+px+q=0$ має два рівних кореня.

Розв'язання. За теоремою Вієта $x_1+x_2+x_3=0$, тому враховуючи, що два корені рівні між собою, одержимо $2x_1+x_3=0$, або $x_3=-2x_1$.

Оскільки x_1 - корінь кратності 2 для многочлена $f(x)=x^3+px+q$, він одночасно є коренем для похідної $f'(x)=3x^2+p$, тобто $3x_1^2+p=0$, звідки $3x_1^2=-p$.

За теоремою Вієта добуток коренів $x_1x_2x_3=q$. Тут $x_1=x_2$, $x_3=-2x_1$, отже $2x_1^3 = q$. Таким чином, маємо умови $\begin{cases} 3x_1^2 = -p \\ 2x_1^3 = -q \end{cases}$, з яких отримаємо

$\begin{cases} x_1^2 = -\dfrac{p}{3} \\ x_1^3 = -\dfrac{q}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^6 = -\dfrac{p^3}{27} \\ x_1^6 = \dfrac{q^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{p^3}{27} = \dfrac{q^2}{4}$. Отже, шукана умова $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Відповідь: $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Приклад 3.11. Нехай x_1, x_2, …, x_n – корені многочлена $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$, де $a_0 \neq 0, a_n \neq 0$. Визначити, які корені матимуть многочлени:

а) $A(x) = a_0x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - ... + (-1)^n a_n$;

б) $B(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

Розв'язання. а). Корінь x_1 многочлена $P_n(x)$ одночасно буде й коренем многочлена $A(x)$. Дійсно, $A(x_1)$ можна записати у вигляді $A(x_1) = (-1)^n a_0x_1^n - (-1)^{n-1}a_1x_1^{n-1} + (-1)^{n-2}a_2x_1^{n-2} + ... - a_{n-1}x_1 + (-1)^n a_n =$

$= (-1)^n \left(a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x_1 + a_n \right) = (-1)^n P(x_1) = 0$, а це означає, що x_1 – корінь многочлена $A(x)$.

Таким чином, числа x_1, x_2, …, x_n будуть коренями многочлена $A(x)$.

б). Нехай x_1 – корінь многочлена $P_n(x)$, $x_1 \neq 0$. Доведемо, що $\dfrac{1}{x_1}$ буде коренем многочлена $B(x)$.

Розглянемо $B\left(\dfrac{1}{x_1}\right) = a_n \dfrac{1}{x_1^n} + a_{n-1}\dfrac{1}{x_1^{n-1}} + ... + a_2\dfrac{1}{x_1^2} + a_1\dfrac{1}{x_1} + a_0$, помножимо обидві частини рівності на x_1^n:

$$x_1^n \cdot B\left(\frac{1}{x_1}\right) = a_n + a_{n-1}x_1 + ... + a_{n-2}x^{n-2} + a_1x_1^{n-1} + a_0x_1^n = P_n(x_1) = 0,$$

отже $B\left(\frac{1}{x_1}\right)=0$, тобто $\frac{1}{x_1}$ – корінь многочлена $B(x)$.

Таким чином, числа $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$ будуть коренями многочлена $B(x)$.

Відповідь: а) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будуть коренями многочлена $A(x)$;

б) $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$ будуть коренями многочлена $B(x)$.

Приклад 3.12. Нехай кожен з многочленів $A(x)$ та $B(x)$ можна подати сумою квадратів двох многочленів з дійсними коефіцієнтами. Довести, що таку саму властивість матиме добуток многочленів $A(x)\cdot B(x)$.

Розв'язання. Нехай $A(x)=P_1^2(x)+P_2^2(x)$, $B(x)=Q_1^2(x)+Q_2^2(x)$, тоді $A(x)\cdot B(x)=P_1^2(x)Q_1^2(x)+P_1^2(x)Q_2^2(x)+P_2^2(x)Q_1^2(x)+P_2^2(x)Q_2^2(x)$. У правій частині додамо і віднімемо $2P_1(x)P_2(x)Q_1(x)Q_2(x)$, одержимо

$$A(x)\cdot B(x)=P_1^2(x)Q_1^2(x)+P_2^2(x)Q_2^2(x)+2P_1(x)P_2(x)Q_1(x)Q_2(x)+$$

$$+P_1^2(x)Q_2^2(x)+P_2^2(x)Q_1^2(x)-2P_1(x)P_2(x)Q_1(x)Q_2(x)=$$

$$=\left(P_1(x)Q_1(x)+P_2(x)Q_2(x)\right)^2+\left(P_1(x)Q_2(x)-P_2(x)Q_1(x)\right)^2.$$

Приклад 3.13. Знайти коефіцієнти *A* і *B*, при яких тричлен $Ax^{n+1}+Bx^n+1$ ділиться на $(x-1)^2$.

Розв'язання. Якщо многочлен ділиться на $(x-1)^2$, то $x=1$ є його коренем кратності 2 та коренем його похідної кратності 1.

Нехай $f(x)=Ax^{n+1}+Bx^n+1$, тоді $f'(x)=A(n+1)x^n+Bnx^{n-1}$.

$$\begin{cases} f(1)=0, \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+1=0, \\ A(n+1)+Bn=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=n, \\ B=-(n+1). \end{cases}$$

Відповідь: $A=n;\quad B=-(n+1)$.

Приклад 3.14. Визначити, при яких значеннях параметра k рівняння $x^3-4x^2-3x+k=0$ має в інтервалі $(1;4)$ два розв'язки.

Розв'язання. Розглянемо функцію $y = x^3 - 4x^2 - 3x + k$ і знайдемо її критичні точки: $y' = 3x^2 - 8x - 3$; $3x^2 - 8x - 3 = 0$; $x_1 = 3$, $x_2 = -1/3$. Визначивши знаки похідної y' на числовій осі (рис.1), одержимо: $y_{max} = y(-1/3) = 14/27 + k$, $y_{min} = y(3) = k - 18$.

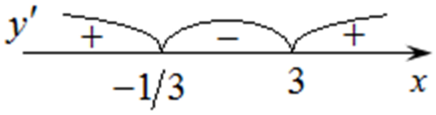

Рис. 1

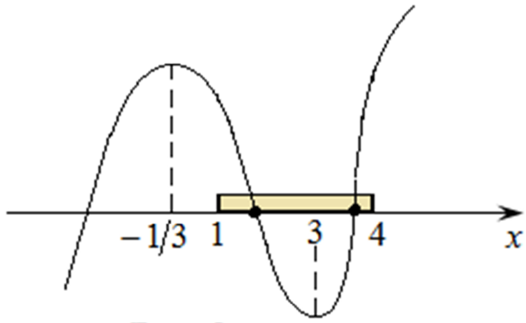

Рис. 2

Будь-який многочлен третього степеня з додатними коефіцієнтами при $x \to \infty$ прямує до нескінченності і має або три дійсних корені, або один. Коли він має 2 корені в інтервалі $(1;4)$ і при цьому $y_{max} = y(-1/3) = 14/27 + k$, $y_{min} = y(3) = k - 18$, то його графік може виглядати, як показано на рис. 2.

Таким чином, задане рівняння матиме 2 корені на інтервалі $(1;4)$, якщо виконуються умови:

$$\begin{cases} y_{min} \le 0, \\ y(4) > 0, \\ y(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k - 18 \le 0, \\ k - 12 > 0, \\ k - 6 > 0 \end{cases} \quad \text{звідки одержимо} \quad k \in (12;18].$$

Відповідь: $k \in (12;18]$.

Приклад 3.15. Довести, що при будь-якому натуральному n число $n^5 - 5n^3 + 4n$ ділиться без остачі на 120.

Розв'язання. Розклавши многочлен на множники

$n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^2 - 4)(n^2 - 1) = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$, отримаємо добуток п'яти послідовних чисел. Такий добуток обов'язково ділиться на 5 і на 4, два множники діляться на 2 і один ділиться на 3. Оскільки число $120 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$, заданий многочлен ділиться на 120.

Приклад 3.16. Довести, що многочлен $P(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}$ не має кратних коренів.

Розв'язання. Припустимо протилежне – що серед коренів многочлена є кратний, тобто $x_1=x_2$. В такому разі похідна від многочлена $P'(x)$ також матиме корінь x_1. Знайдемо цю похідну

$$P'(x)=1+\frac{2x}{2!}+\frac{3x^2}{3!}+...+\frac{nx^{n-1}}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Тоді одержимо дві умови: $P(x_1)=1+\frac{x_1}{1!}+\frac{x_1{}^2}{2!}+...+\frac{x_1{}^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x_1{}^n}{n!}=0$ та $P'(x_1)=1+\frac{x_1}{1!}+\frac{x_1{}^2}{2!}+...+\frac{x_1{}^{n-1}}{(n-1)!}=0$, звідки випливає, що $\frac{x_1{}^n}{n!}=0$, тобто $x_1=0$. Але $x_1=0$ не є коренем многочлена $P(x)$, отже, наше припущення не вірне. Таким чином, многочлен $P(x)$ не має кратних коренів.

Приклад 3.17. Довести, що графік будь-якої парної функції, яка уявляє собою многочлен з додатними коефіцієнтами, всюди опуклий вниз і має тільки одну точку екстремуму.

Розв'язання. Нехай $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, де $a_i>0$, $i=0,1,...,n$; $P(x)=P(-x)$. Розглянемо многочлен $g(x)=P(x)-P(-x)=0$. Очевидно, до многочлена $g(x)$ потраплять тільки непарні степені з подвоєними коефіцієнтами, отже, $P(x)$ містить тільки парні степені, тобто $n=2m$. Тоді $P(x)=a_{2m}x^{2m}+a_{2m-2}x^{2m-2}+...+a_2x^2+a_0$. Знайдемо критичні точки функції $P(x)$ з умови $P'(x)=0$.

Знайдемо $P'(x)=2m\cdot a_{2m}x^{2m-1}+(2m-2)\cdot a_{2m-2}x^{2m-3}+...+2a_2x$ і розв'яжемо рівняння $x\left(2m\cdot a_{2m}x^{2m-2}+(2m-2)\cdot a_{2m-2}x^{2m-4}+...+2a_2\right)=0$. За умовою $a_i>0$, $i=0,1,...,n$, отже, вираз в дужках строго додатний, тому це рівняння має єдиний розв'язок $x=0$. Оскільки $P'(0-\varepsilon)<0$, $P'(0+\varepsilon)>0$, в точці функція має мінімум; цей екстремум єдиний, тому що інших критичних точок немає. Друга похідна від $P(x)$ матиме вигляд

$$P''(x)=2m(2m-1)\cdot a_{2m}x^{2m-2}+(2m-2)(2m-3)\cdot a_{2m-2}x^{2m-4}+...+2a_2.$$

Цей многочлен завжди додатний, тому графік функції $P(x)$ всюди опуклий вниз і має один екстремум (мінімум). Твердження доведено.

Приклад 3.18. Довести, що будь-який многочлен непарного степеня $n \geq 3$ має хоча б одну точку перегину.

Розв'язання. Нехай задано многочлен непарного степеня

$$P(x) = a_{2n-1}x^{2n-1} + a_{2n-2}x^{2n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Знайдемо першу та другу похідні

$$P'(x) = (2n-1)a_{2n-1}x^{2n-2} + (2n-2)a_{2n-2}x^{2n-3} + ... + 2a_2x + a_1,$$

$$P''(x) = (2n-1)(2n-2)a_{2n-1}x^{2n-3} + (2n-2)(2n-3)a_{2n-2}x^{2n-4} + ... + 2a_2.$$

Многочлен $P''(x)$ непарного степеня $2n-3 \geq 1$, отже, він має непарне число дійсних коренів. Серед них може бути або парне число кратних коренів та один однократний, або ж непарне число кратних коренів. Тоді функція $P''(x)$ при переході через такий корінь змінить знак, отже, відповідна точка буде точкою перегину функції $P(x)$. Твердження доведено.

Приклад 3.19. Довести, що не існує многочлена $P(x)$ з цілими коефіцієнтами, для якого б виконувалися умови $P(7) = 5$, $P(15) = 9$.

Розв'язання. Припустимо протилежне – що такий многочлен існує:

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0, \text{ де } a_i \in Z.$$

Тоді за умовою матимемо $P(7) = a_n7^n + a_{n-1}7^{n-1} + ... + 7a_1 + a_0 = 5$, $P(15) = a_n15^n + a_{n-1}15^{n-1} + ... + 15a_1 + a_0 = 9$. Віднімемо від другої рівності першу, одержимо

$$P(15) - P(7) = a_n(15^n - 7^n) + a_{n-1}(15^{n-1} - 7^{n-1}) + ... + (15-7)a_1 = 4.$$

Скориставшись формулою $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$, прийдемо до висновку, що кожен доданок попереднього рівняння матиме множником число $15 - 7 = 8$. При цьому ліва частина рівності

$$a_n(15^n - 7^n) + a_{n-1}(15^{n-1} - 7^{n-1}) + ... + (15-7)a_1 = 4$$

ділиться на 8, а права – ні, отже, ми прийшли до протиріччя, що доводить вірність заданого твердження.

Приклад 3.20. Знайти спільні корені многочленів

$$f(x) = x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2 \quad \text{та} \quad \varphi(x) = x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 6x + 4.$$

Розв'язання. Нехай $g(x)$ – найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ і $\varphi(x)$. Його корені й будуть спільними коренями цих многочленів. Знайдемо $g(x)$ за алгоритмом Евкліда.

1)
$$
\begin{array}{l|l}
\;\; x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2 & x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 6x + 4 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 6x^3 + 4x^2} & x^2 - x \\
\qquad -x^5 - 3x^4 - 4x^3 - x^2 + 2x + 2 & \\
\quad -\underline{-x^5 - 3x^4 - 6x^3 - 6x^2 - 4x} & \\
\qquad\qquad 2x^3 + 5x^2 + 6x + 2 &
\end{array}
$$

2)
$$
\begin{array}{l|l}
\;\; \underline{\underline{x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 6x + 4}} & 2x^3 + 5x^2 + 6x + 2 \\ \cline{2-2}
\;\; 2x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 12x + 8 & x\,//+1\,// \\
-\underline{2x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x} & \\
\qquad \underline{\underline{x^3 + 6x^2 + 10x + 8}} & \\
\qquad 2x^3 + 12x^2 + 20x + 16 & \\
\quad -\underline{2x^3 + 5x^2 + 6x + 2} & \\
\qquad\quad \underline{\underline{7x^2 + 14x + 14}} & \\
\qquad\quad x^2 + 2x + 2 &
\end{array}
$$

3)
$$
\begin{array}{l|l}
\;\; 2x^3 + 5x^2 + 6x + 2 & x^2 + 2x + 2 \\ \cline{2-2}
-\underline{2x^3 + 4x^2 + 4x} & 2x + 1 \\
\qquad x^2 + 2x + 2 & \\
\quad -\underline{x^2 + 2x + 2} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Отже, найбільший спільний дільник многочленів $g(x) = x^2 + 2x + 2$. Знайдемо його корені: $x^2 + 2x + 2 = 0$, $x_{1,2} = -1 \pm i$.

Відповідь: $x_{1,2} = -1 \pm i$.

Приклад 3.21. Вивести формули для сум: а) $P_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1}$; б) $Q_n(x) = 1^2 + 2^2 x + 3^2 x^2 + ... + n^2 x^{n-1}$.

Розв'язання. а). Розглянемо функцію $F(x) = x + x^2 + x^3 + ... + x^n$, це геометрична прогресія, сума якої дорівнює $\dfrac{x(x^n - 1)}{x - 1} = \dfrac{x^{n+1} - x}{x - 1}$. Похідна цієї функції $F'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1}$ співпадає з $P_n(x)$. Тоді маємо

$$P_n(x) = \left(\frac{x^{n+1} - x}{x - 1} \right)' = \frac{\left((n+1)x^n - 1\right)(x-1) - (x^{n+1} - x)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

б). Розглянемо функцію $G(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + ... + nx^n = xP_n(x)$. Похідна цієї функції $G'(x) = 1 + 2^2 x + 3^2 x^2 + ... + n^2 x^{n-1} = Q_n(x)$.

Але $G'(x) = \left(xP_n(x)\right)'$, тому $Q_n(x) = \left(xP_n(x)\right)' = \left(\frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2} \right)' =$

$$= \frac{n^2 x^{n+2} - 2(n^2 + n - 1)x^{n+1} + (n+1)^2 x^n - x - 1}{(x-1)^3}.$$

Відповідь: а) $P_n(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$;

б) $Q_n(x) = \dfrac{n^2 x^{n+2} - 2(n^2 + n - 1)x^{n+1} + (n+1)^2 x^n - x - 1}{(x-1)^3}$.

Приклад 3.22. Знайти всі многочлени, для яких виконується тотожність

$$(x - 2019)P(x) = x \cdot P(x-1).$$

Розв'язання. Тотожність $(x - 2019)P(x) = x \cdot P(x-1)$ виконується при будь-яких значеннях x, зокрема:

при $x = 0$: $-2019\,P(0) = 0$, звідки дістанемо $P(0) = 0$;

при $x = 1$: $-2018\,P(1) = P(0)$, отже, $P(1) = 0$;

при $x = 2$: $-2017\,P(2) = 2P(1) = 0$, звідки $P(2) = 0$.

Продовжуючи підставляти до тотожності $x = 3$, … , $x = 2018$, можна довести, що $P(3) = 0$, … , $P(2018) = 0$.

Тоді можна стверджувати, що числа $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, … , $x = 2018$ є коренями многочлена. Таким чином, умові задачі задовольняє будь-який многочлен виду $P(x) = a\,x\,(x-1)(x-2)...(x-2018)$, де a – довільне дійсне число.

4. Різні задачі

У цьому розділі наведено приклади, які потребують прийомів та перетворень, необхідних при розв'язанні задач підвищеної складності.

Приклад 4.1. Довести, що число $\sqrt{28+10\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ – ціле.

Розв'язання. Перетворимо підкорінні вирази, аби виділити повні квадрати:

$$\sqrt{28+10\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{25+2\cdot 5\sqrt{3}+3}+\sqrt{4-2\cdot 2\sqrt{3}+3}=$$

$$=\sqrt{(5+\sqrt{3})^2}+\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=\left|5+\sqrt{3}\right|+\left|2-\sqrt{3}\right|=5+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=7.$$

Приклад 4.2. Довести, що $1996^2+1996^2\cdot 1997^2+1997^2$ – квадрат цілого числа.

Розв'язання. Виконаємо наступні перетворення:

$$1996^2+1996^2\cdot 1997^2+1997^2=(1996^2+1997^2-2\cdot 1996\cdot 1997)+$$

$$+2\cdot 1996\cdot 1997+1996^2\cdot 1997^2=(1997-1996)^2+2\cdot 1996\cdot 1997+$$

$$+1996^2\cdot 1997^2=1+2\cdot 1996\cdot 1997+1996^2\cdot 1997^2=(1+1996\cdot 1997)^2.$$

Приклад 4.2. Розкласти на множники вирази

а) n^4+n^2+1; **б)** a^4+4; **в)** $4y^4-20xy^3+33x^2y^2-20x^3y+4x^4$.

Розв'язання. а) $n^4+n^2+1=(n^4+2n^2+1)-n^2=(n^2+1)^2-n^2=$

$(n^2+1-n)(n^2+1+n)=(n^2-n+1)(n^2+n+1)$;

б) $a^4+4=(a^4+4a^2+4)-4a^2=(a^2+2)^2-(2a)^2=(a^2-2a+2)(a^2+2a+2)$;

в) $F(x,y)=4y^4-20xy^3+33x^2y^2-20x^3y+4x^4$ – однорідна функція відносно змінних x та y. Перетворимо її наступним чином:

$$F(x,y)=4y^4-20xy^3+33x^2y^2-20x^3y+4x^4=x^4\left(4\frac{y^4}{x^4}-20\frac{y^3}{x^3}+33\frac{y^2}{x^2}-20\frac{y}{x}+4\right).$$

Нехай $t=\dfrac{y}{x}$. Тоді $F(x,y)=x^4(4t^4-20t^3+33t^2-20t+4)$.

Тепер щоб розкласти на множники функцію $f(t)=4t^4-20t^3+33t^2-20t+4$, розв'яжемо рівняння $4t^4-20t^3+33t^2-20t+4=0$. Оскільки $t\neq 0$, розділимо обидві частини на t^2 та перейдемо до рівносильного рівняння $4t^2-20t+33-\frac{20}{t}+\frac{4}{t^2}=0$, або $4\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)-20\left(t+\frac{1}{t}\right)+33=0$. Застосуємо заміну $z=t+\frac{1}{t}$, внаслідок якої $z^2=t^2+2+\frac{1}{t^2}$, $t^2+\frac{1}{t^2}=z^2-2$, і рівняння зводиться до квадратного $4z^2-20z+25=0$, або $(2z-5)^2=0$, звідки одержимо $z_1=z_2=\frac{5}{2}$.

Повертаючись до змінної t, матимемо $t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}$, або $2t^2-5t+2=0$, корені рівняння $t_1=2$, $t_2=\frac{1}{2}$. Враховуючи кратність коренів, отримаємо розкладення на множники $f(t)=2^2(t-2)^2(t-\frac{1}{2})^2$.

Таким чином, задану функцію можна подати у вигляді розкладення: $F(x,y)=4x^4\left(\frac{y}{x}-2\right)^2\left(\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\right)^2=4x^4\left(\frac{y-2x}{x}\right)^2\left(\frac{2y-x}{2x}\right)^2=(y-2x)^2(2y-x)^2$.

Приклад 4.3. Спростити вираз $\left(\frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{\sqrt[4]{5}-1}{\sqrt[4]{5}+1}$.

Розв'язання. Вираз $\frac{\sqrt[4]{5}-1}{\sqrt[4]{5}+1}$ можна подати у вигляді $\left(\left(\frac{\sqrt[4]{5}-1}{\sqrt[4]{5}+1}\right)^4\right)^{1/4}$, оскільки $\frac{\sqrt[4]{5}-1}{\sqrt[4]{5}+1}>0$. Тоді початковий вираз набирає вигляду $\left(\left(\frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{5}-1}{\sqrt[4]{5}+1}\right)^4\right)^{1/4}$.

Далі виконаємо перетворення $\left(\sqrt[4]{5}-1\right)^4=\left(\sqrt{5}-2\sqrt[4]{5}+1\right)^2=5+4\sqrt{5}+1-$ $-4\sqrt{5}\cdot\sqrt[4]{5}+2\sqrt{5}-4\sqrt[4]{5}=6+6\sqrt{5}-4\sqrt[4]{5}\left(\sqrt{5}+1\right)=2\left(\sqrt{5}+1\right)\left(3-2\sqrt[4]{5}\right)$. Аналогічно одержимо $\left(\sqrt[4]{5}+1\right)^4=2\left(\sqrt{5}+1\right)\left(3+2\sqrt[4]{5}\right)$.

Отже, $\left(\left(\frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{5}-1}{\sqrt[4]{5}+1}\right)^4\right)^{1/4}=\left(\frac{(3+2\sqrt[4]{5})\cdot 2\left(\sqrt{5}+1\right)\left(3-2\sqrt[4]{5}\right)}{(3-2\sqrt[4]{5})\cdot 2\left(\sqrt{5}+1\right)\left(3+2\sqrt[4]{5}\right)}\right)^{1/4}=1$.

Приклад 4.4. Середнє арифметичне двох додатних чисел a і b ($a>b$) в m разів більше, ніж їхнє середнє геометричне. Довести, що $\dfrac{a}{b}=\dfrac{m+\sqrt{m^2-1}}{m-\sqrt{m^2-1}}$.

Розв'язання. За умовою $\dfrac{a+b}{2}=m\sqrt{ab}$, або $a+b-2m\sqrt{ab}=0$. Це однорідне рівняння, розділимо обидві частини на *b*: $\dfrac{a}{b}+1-2m\sqrt{\dfrac{a}{b}}=0$. Нехай $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=t>1$, тоді одержимо рівняння $t^2-2mt+1=0$, $t_{1,2}=\dfrac{2m\pm 2\sqrt{m^2-1}}{2}=m\pm\sqrt{m^2-1}$.

Оскільки $t>1$, підходить тільки один корінь $t=m+\sqrt{m^2-1}$.

Тоді $\dfrac{a}{b}=\left(m+\sqrt{m^2-1}\right)^2=\dfrac{\left(m+\sqrt{m^2-1}\right)^2\left(m-\sqrt{m^2-1}\right)}{\left(m-\sqrt{m^2-1}\right)}=\dfrac{\left(m+\sqrt{m^2-1}\right)}{\left(m-\sqrt{m^2-1}\right)}$.

Приклад 4.5. Знайти суми **а)** $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}$;

$$\textbf{б)}\ S_n=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Розв'язання. а). Будь-який правильний дріб, у чисельнику і знаменнику якого стоять многочлени, можна перетворити на суму найпростіших дробів:

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{A}{2k-1}+\frac{B}{2k+1}=\frac{A(2k+1)+B(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)}.$$

Прирівнюючи чисельники першого та останнього дробів, одержимо

$$A(2k+1)+B(2k-1)=1.$$

Якщо многочлени рівні, то їх значення співпадають при будь-яких значеннях *k*, зокрема при $k=\dfrac{1}{2}$ та $k=-\dfrac{1}{2}$ (метод часткових значень):

$$\begin{array}{l|l} k=\dfrac{1}{2} & -2B=1 \\ k=-\dfrac{1}{2} & 2A=1 \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} B=-\dfrac{1}{2}, \\ A=\dfrac{1}{2}. \end{array}$$

Отже, $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) =$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{2n+1-1}{2(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

б). Перетворимо кожен доданок на суму простих дробів, як у попередньому прикладі.

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k+2} = \frac{A(k+1)(k+2) + Bk(k+2) + Ck(k+1)}{k(k+1)(k+2)},$$

отже, $1 = A(k+1)(k+2) + Bk(k+2) + Ck(k+1)$.

Застосуємо метод часткових значень:

$$\begin{array}{l|l} k=0 & 1=2A \\ k=-1 & 1=-B \\ k=-2 & 1=2C \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A=1/2, \\ B=-1, \\ C=1/2. \end{array}$$

Таким чином, одержимо $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right)$.

Тоді $S_n = \frac{1}{2}\left(1 - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{(n+1)} - \frac{2}{(n+1)} + \frac{1}{(n+2)}\right) =$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+2)}\right) = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Приклад 4.6. Визначити, при якому значенні параметра a парабола $y = ax^2$ дотикається до кривої $y = \ln x$.

Розв'язання. Нехай $M_0(x_0; y_0)$ – точка дотику кривих. Дотичні до параболи та логарифмічної кривої, які проходять крізь точку $M_0(x_0; y_0)$, співпадають. Розглянемо кожну з них окремо. Кутовий коефіцієнт параболи $y'(x_0) = 2ax_0$, рівняння дотичної $y - y_0 = 2ax_0(x - x_0)$, де $y_0 = ax_0^2$, тож маємо рівняння

$y = 2ax_0 x - 2ax_0^2$. Для логарифмічної кривої $y'(x_0) = \dfrac{1}{x_0}$, рівняння дотичної $y - y_0 = \dfrac{1}{x_0}(x - x_0)$, де $y_0 = \ln x_0$, одержимо рівняння $y = \dfrac{x}{x_0} + \ln x_0 - 1$.

Оскільки дотичні співпадають, їхні кутові коефіцієнти та вільні члени рівні між собою, отже, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x_0} = 2ax_0, \\ \ln x_0 - 1 = -ax_0^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0^2 = \dfrac{1}{2a},\ a > 0, \\ \ln\sqrt{\dfrac{1}{2a}} = -a \cdot \dfrac{1}{2a} + 1. \end{cases}$$

З другого рівняння одержимо $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2a} = \dfrac{1}{2}$, звідки $\dfrac{1}{2a} = e$, $a = \dfrac{1}{2e}$.

Відповідь: $a = \dfrac{1}{2e}$.

Приклад 4.7. Розв'язати рівняння $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6 - 2x$.

Розв'язання. Область допустимих значень: $x > 0$. Ліву частину рівняння $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x + 2x - 6 = 0$ будемо розглядати, як квадратний тричлен відносно змінної $t = \log_2 x$. Тоді матимемо рівняння $t^2 + (x-1)t + 2x - 6 = 0$,

$D = (x-1)^2 - 4(2x-6) = x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$, $t_{1,2} = \dfrac{1 - x \pm |x-5|}{2}$. Корені рівняння $t_{1,2} = (-2; 3 - x)$ при всіх $x > 0$.

Таким чином, одержимо $\left[\begin{array}{l} \log_2 x = -2, \\ \log_2 x = 3 - x \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2^{-2} = 1/4, \\ x = 2^{3-x}. \end{array}\right.$

Розв'язок $x = 1/4$ входить до ОДЗ. Друге рівняння $x = 2^{3-x}$ задовольняє значення $x = 2$. Покажемо, що воно не має інших розв'язків. Розглянемо функцію $f(x) = 2^{3-x} - x$, її похідна $f'(x) = -2^{3-x} - 1 < 0$ при всіх $x > 0$. Отже, функція $f(x)$ строго спадаюча, вона може обертатись на нуль лише в одній точці.

Відповідь: $x = 1/4$, $x = 2$.

Приклад 4.8. Розв'язати рівняння $\log_5 x = \sqrt{1-x^4}$.

Розв'язання. Область допустимих значень визначається умовами $\begin{cases} x > 0, \\ 1 - x^4 \geq 0, \end{cases}$

звідки одержимо $\begin{cases} x > 0, \\ (1+x^2)(1-x)(1+x) \geq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ -1 \leq x \leq 1, \end{cases} \Rightarrow \quad x \in (0;1]$.

Для $x \in (0;1]$ ліва частина рівняння $\log_5 x \leq 0$, а права частина $\sqrt{1-x^4} \geq 0$. Рівність справджується лише у разі, коли $\log_5 x = 0$ і $\sqrt{1-x^4} = 0$ одночасно, тобто при $x = 1$.

Відповідь: $x = 1$.

Приклад 4.9. Розв'язати рівняння $\log_{1/2}(tg\pi x + ctg\pi x) = 8(2x^2 - 3x + 1)$.

Розв'язання. Розглянемо функцію лівої частини $f(x) = \log_{1/2}(tg\pi x + ctg\pi x)$. Знайдемо область її визначення з умови $tg\pi x + ctg\pi x > 0$. Нехай $t = tg\pi x$, тоді $t + \frac{1}{t} > 0$, звідки $t > 0$. Відомо, що для $t > 0$ вірна нерівність $t + \frac{1}{t} \geq 2$, тоді $\log_{1/2}(tg\pi x + ctg\pi x) \leq -1$, або $f(x) \leq -1$.

Функція правої частини $g(x) = 8(2x^2 - 3x + 1)$ визначає параболу з вітками вгору і вершиною з координатами $x_в = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{4}$, $y_в = 8\left(2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{4}\right) + 1\right) = -1$ (найменше значення функції), отже $g(x) \geq -1$.

Таким чином, ліва частина рівняння $f(x) \leq -1$, а права $g(x) \geq -1$. Рівняння матиме розв'язок лише у тому разі, коли $f(x) = -1$ і $g(x) = -1$ одночасно. Ми прийшли до системи рівнянь $\begin{cases} \log_{1/2}(tg\pi x + ctg\pi x) = -1, \\ 8(2x^2 + 3x + 1) = -1. \end{cases}$

Переконаємось, що єдиний розв'язок другого рівняння $x = 3/4$ задовольняє й перше: $tg\frac{3\pi}{4} + ctg\pi\frac{3\pi}{4} = 2$, $\log_{1/2} 2 = -1$.

Відповідь: $x = 3/4$.

Приклад 4.10. Розв'язати рівняння

$$(2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right)+3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=0.$$

Розв'язання. Розглянемо функцію $y(x)=x\left(2+\sqrt{x^2+1}\right)$, вона є зростаючою і непарною, оскільки $y(-x)=-y(x)$.

Запишемо рівняння у вигляді $(2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right)=-3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)$, тоді ліва частина являє собою $y(2x+1)$, а права – це $-y(3x)$. Оскільки функція $y(x)$ зростаюча і непарна, ліва частина може дорівнювати правій тільки тоді, коли їх аргументи протилежні, тобто $2x+1=-3x$, звідки одержимо $x=-1/5$. Інших коренів рівняння не має через те, що функція $y(x)$ монотонна.

Відповідь: $x=-1/5$.

Приклад 4.11. Розв'язати рівняння $(\cos x)^{\lg\lg x+2}+(\lg x)^{\lg\cos x}\cdot\sin^2 x=1$.

Розв'язання. Область допустимих значень визначається з умов $\begin{cases}\lg x>0,\\ \cos x>0.\end{cases}$

Скористаємося властивістю логарифмічної функції $(\lg x)^{\lg\cos x}=(\cos x)^{\lg\lg x}$, після чого рівняння набере вигляду $(\cos x)^{\lg\lg x+2}+(\cos x)^{\lg\lg x}\cdot\sin^2 x=1$, або $(\cos x)^{\lg\lg x}\cdot\cos^2 x+(\cos x)^{\lg\lg x}\cdot\sin^2 x=1$, звідки отримаємо рівняння $(\cos x)^{\lg\lg x}=1$, яке виконується лише за умов $\left[\begin{array}{l}\cos x=1,\\ \lg\lg x=0.\end{array}\right.$

Якщо $\cos x=1$, то $x=2\pi n$, де $n\in N$, оскільки $x>0$.

Коли ж $\lg\lg x=0$, то $\lg x=1$, $x=10$. Але це значення не задовольняє умову $\cos x>0$, бо $\cos 10<0$.

Відповідь: $x=2\pi n$, $n\in N$.

Приклад 4.12. Розв'язати рівняння

$$(ctgx)^{\lg\lg x}\cdot arctg\lg x+(ctgx)^{\lg\lg x}\cdot arcctg\lg x=\frac{\pi}{2}.$$

Розв'язання. Область визначення $\begin{cases} x > 0, \\ \lg x > 0, \end{cases}$ звідки дістанемо $x > 1$.

Запишемо рівняння у вигляді $(ctgx)^{\lg\lg x}\left(arctg\lg x + arcctg\lg x\right) = \dfrac{\pi}{2}$. Оскільки $arctg\lg x + arcctg\lg x = \dfrac{\pi}{2}$, матимемо $(ctgx)^{\lg\lg x} = 1$, що приводить до сукупності рівнянь $\left[\begin{array}{l} ctgx = 1, \\ \lg\lg x = 0. \end{array}\right.$

Розв'яжемо два останні рівняння: 1) $ctgx = 1$, $x_1 = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in N$; 2) $\lg\lg x = 0$, $\lg x = 1$, $x_2 = 10$. Всі розв'язки входять до області визначення.

Відповідь: $x_1 = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in N$; $x_2 = 10$.

Приклад 4.13. Розв'язати рівняння

$$\left|1 + \cos\pi\sqrt{x}\right| + \left|x^2 - 15x + 44\right| = 15x - x^2 - \cos\pi\sqrt{x} - 45.$$

Розв'язання. Враховуючи, що $1 + \cos\pi\sqrt{x} \ge 0$ для всіх $x \ge 0$, а також розкривши другий модуль, зведемо задане рівняння до сукупності двох систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 15x + 44 \ge 0, \quad x \in (-\infty;4] \cup [11;\infty), \\ 1 + \cos\pi\sqrt{x} + x^2 - 15x + 44 = -x^2 + 15x - \cos\pi\sqrt{x} - 45, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 15x + 44 < 0, \quad x \in (4;11), \\ 1 + \cos\pi\sqrt{x} - x^2 + 15x - 44 = -x^2 + 15x - \cos\pi\sqrt{x} - 45. \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty;4] \cup [11;\infty), \\ 2\cos\pi\sqrt{x} = -2x^2 + 30x - 90, \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (4;11), \\ 2\cos\pi\sqrt{x} = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

З рівняння $2\cos\pi\sqrt{x}=0$ другої системи дістанемо $\pi\sqrt{x}=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $\sqrt{x}=\dfrac{1+2k}{2}$, $x=\dfrac{(1+2k)^2}{4}$, $k\in N\cup\{0\}$. Виберемо значення x, які належать інтервалу $(4;11)$, тобто $x=25/4=6,25$ – це і буде розв'язок другої системи.

Щоб розв'язати першу систему $\begin{cases} x\in(-\infty;4]\cup[11;\infty), \\ \cos\pi\sqrt{x}=-x^2+15x-45, \end{cases}$ розглянемо параболу $y=-x^2+15x-45$. Вона перетинає вісь Ox у точках $x_{1,2}=\dfrac{15\pm3\sqrt{5}}{2}$, $(x_1\approx4,14;\ x_2\approx10,85)$, при цьому $y(4)=y(11)=-1$ (рис. 4.1).

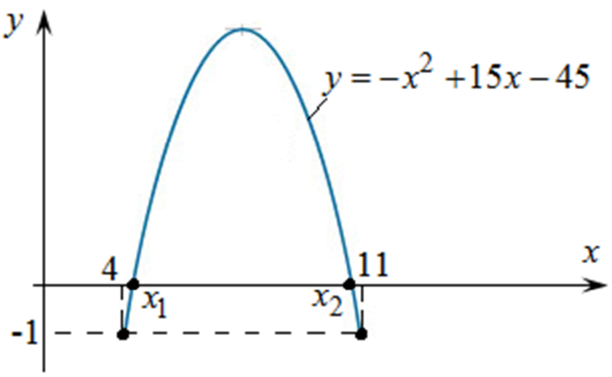

Рис. 4.1

Очевидно, розв'язками рівняння $\cos\pi\sqrt{x}=-x^2+15x-45$ в області $x\in(-\infty;4]\cup[11;\infty)$ можуть бути лише ті значення x, які задовольняють систему

$$\begin{cases} -x^2+15x-45=-1, \\ \cos\pi\sqrt{x}=-1. \end{cases}$$

Перше рівняння має корені $x=4$ та $x=11$, але вони не задовольняють друге рівняння. Таким чином, перша система не має розв'язків. Отже, маємо єдиний розв'язок $x=6,25$.

Відповідь: $x=6,25$.

Приклад 4.14. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{3x^2+6x-2}-\sqrt{x^2-1}=\sqrt{3x^2+8x+4}-\sqrt{x^2-3x-10}.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$\sqrt{3x^2+6x-2}-\sqrt{3x^2+8x+4}=\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-3x-10}$ та відмітимо, що $3x^2+8x+4=3x^2+6x-2+2(x+3)$, $x^2-1=x^2-3x-10+3(x+3)$.

Позначимо вирази $a=3x^2+6x-2$, $b=x^2-3x-10$, після цього рівняння набирає вигляду $\sqrt{a}-\sqrt{a+2(x+3)}=\sqrt{b+3(x+3)}-\sqrt{b}$. Очевидно, що ліва частина може дорівнювати правій тільки за умови $x+3=0$, звідки дістанемо єдиний розв'язок $x=-3$.

Відповідь: $x=-3$.

Приклад 4.15. Розв'язати нерівність $\arccos 2x+\arccos(1-x)>\arccos\frac{1}{3}$.

Розв'язання. Область допустимих значень знайдемо з умов

$$\begin{cases}-1\le 2x\le 1,\\ -1\le 1-x\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1/2\le x\le 1/2,\\ 0\le x\le 2\end{cases}\Rightarrow\quad x\in[0;1/2].$$

На проміжку $x\in[0;1/2]$ аргументи $2x$ та $(1-x)$ додатні, тому $0\le\arccos 2x\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\arccos(1-x)\le\frac{\pi}{2}$, отже, $0\le\arccos 2x+\arccos(1-x)\le\pi$.

Оскільки функція $\cos x$ спадає на проміжку $x\in[0;\pi]$, наслідком початкової нерівності буде наступна

$$\cos(\arccos 2x+\arccos(1-x))<\cos(\arccos 1/3).$$

Виконаємо перетворення правої та лівої частин нерівності:

$$\cos(\arccos 2x+\arccos(1-x))=\cos(\arccos 2x)\cdot\cos(\arccos(1-x))-$$

$$-\sin(\arccos 2x)\cdot\sin(\arccos(1-x))=2x(1-x)-\sqrt{1-4x^2}\sqrt{2x-x^2};$$

$$\cos(\arccos 1/3)=1/3.$$

Після перетворень нерівність набирає вигляду

$2x(1-x)-\sqrt{1-4x^2}\sqrt{2x-x^2}<1/3$, або $6x-6x^2-1<3\sqrt{1-4x^2}\sqrt{2x-x^2}$, де $x\in[0;1/2]$.

Аби розв'язати одержану нерівність, зазначимо, що її права частина невід'ємна, тож розглянемо ліву частину. Якщо ліва частина <0, нерівність виконується автоматично, а коли ж ліва частина ≥ 0, можна обидві частини підвести до квадрата, отже, приходимо до сукупності двох систем, які треба розглядати на проміжку $x \in [0;1/2]$:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3\sqrt{1-4x^2}\sqrt{2x-x^2} \geq 0, \\ 6x-6x^2-1<0, \end{cases} \\ \begin{cases} 3\sqrt{1-4x^2}\sqrt{2x-x^2} \geq 0, \\ 6x-6x^2-1>0, \\ \left(6x-6x^2-1\right)^2 < 9(1-4x^2)(2x-x^2). \end{cases} \end{array}\right.$$

Перша система має розв'язок $x \in \left(-\infty;\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\right) \cup \left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{6};\infty\right)$, враховуючи область допустимих значень $x \in [0;1/2]$, матимемо $x \in \left[0;\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$.

Друга система зводиться до вигляду $\begin{cases} 57x^2-30x+1<0, \\ \dfrac{3-\sqrt{3}}{6} \leq x \leq \dfrac{1}{2}, \end{cases}$ звідки дістанемо розв'язок $x \in \left[\dfrac{3-\sqrt{3}}{6};\dfrac{15+2\sqrt{42}}{57}\right)$.

Об'єднуючи одержані результати, дістанемо розв'язок вихідної нерівності $x \in \left[0;\dfrac{15+2\sqrt{42}}{57}\right)$.

Відповідь: $x \in \left[0;\dfrac{15+2\sqrt{42}}{57}\right)$.

Приклад 4.16. Розв'язати нерівність $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x} \geq 3-\dfrac{1}{\pi}\arccos\left(-\dfrac{x}{4}\right)$.

Розв'язання. Скориставшись властивістю $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$, зведемо нерівність до вигляду $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x} \ge 2+\frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{x}{4}\right)$. Область допустимих значень $\begin{cases} x-3 \ge 0, \\ 5-x \ge 0, \\ -1 \le x/4 \le 1 \end{cases} \Rightarrow \quad x \in [3;4]$.

Розглянемо функції $f_1(x)=2+\frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{x}{4}\right)$ і $f_2(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$ та знайдемо область значень кожної з них.

Оскільки $0 \le \frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{x}{4}\right) \le 1$, $2 \le f_1(x) \le 3$.

Переконаємось у монотонності функції $f_2(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$ на проміжку $x \in [3;4]$. Знайдемо $f_2'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-3}}+\frac{1}{2\sqrt{5-x}}=\frac{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}{2\sqrt{x-3}\sqrt{5-x}}$, $f_2'(x)=0$ в точці $x=4$. Похідна не має інших нулів на вказаному проміжку, отже, вона монотонна на ньому. Тоді можна стверджувати, що $\sqrt{2} \le f_2(x) \le 2$ на $x \in [3;4]$.

Таким чином, маємо: $2 \le f_1(x) \le 3$, а $\sqrt{2} \le f_2(x) \le 2$ на проміжку $x \in [3;4]$. Отже, нерівність має розв'язок лише за умови $\begin{cases} f_1(x)=2, \\ f_2(x)=2, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} 2+\frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{x}{4}\right)=2, \\ \sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}=2. \end{cases}$

Друга рівність виконується при $x=4$. Підставивши це значення до першої рівності, переконаємось, що воно її задовольняє: $2+\frac{1}{\pi}\arccos 1=2$. Отже, розв'язком заданої нерівності буде значення $x=4$.

Відповідь: $x=4$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах / Герасимчук В.С., Васильченко Г.С., Кравцов В.І. – К.: Книги України ЛТД, 2009. – 400 с.
2. Вища математика. Практикум / Кривуца В.Г., Барковський В.В., Барковська Н.В. – К.: ЦУЛ. 2003.- 536 с.
3. Справочное пособие по математическому анализу. Ч. 1. Введение в анализ, производная, интеграл / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай и др. – К.: Вища шк., 1978. – 696 с.
4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1990. – 624 с.
5. Садовничий В.А. Задачи студенческих математических олимпиад / В.А. Садовничий, А.А. Григорьян, С.В. Конягин. – М.: МГУ, 1987. – 310 с.
6. Садовничий В.А. Задачи студенческих олимпиад по математике / В.А. Садовничий, А.С. Подколузин. – М.: Наука, 1978. – 207 с.

ЗМІСТ

Упорядники:
Шелест Людмила Іванівна
Приходько Віра Володимирівна
Кагадій Тетяна Станіславівна
Бугрим Ольга Володимирівна

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

МАТЕРІАЛИ МЕТОДИЧНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ
поглибленого вивчення розділу
студентами технічних спеціальностей

Видано в редакції упорядників

Підписано до друку 01.04.2019. Формат 30х42/4.
Папір офсетний. Ризографія. Ум. друк. арк. 3,2.
Обл.-вид. арк. 3,2. Тираж 50 пр. Зам. №

Національний технічний університет
«Дніпровська політехніка»
49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19.