МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

В.Ф. Сторчай
О.П. Купенко

ГОТУЄМОСЯ ДО ОЛІМПІАДИ
ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Навчальний посібник

Дніпро
НТУ «ДП»
2020

УДК 512.643
С82

Затверджено до видання вченою радою НТУ «Дніпровська політехніка» (протокол № 5 від 28.05.2020) як навчальний посібник для студентів.

Рецензенти:
В.Є. Білозьоров – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри комп’ютерних технологій (Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара),
О.О. Пипка – доктор фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри геометрії та алгебри) (Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара).

Сторчай В.Ф.
С82 Готуємося до олімпіади. Елементи лінійної алгебри: навч. посіб. / В.Ф. Сторчай, О.П. Купенко ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро: НТУ «ДП», 2020. –164 с.

ISBN 978-966-350-720-0

Наведено основні теоретичні положення з лінійної алгебри (матриці, визначники, системи лінійних рівнянь), зразки повного розв'язання олімпіадних завдань різного ступеня складності. Особливу увагу приділено темам, які повністю відсутні в підручниках з вищої математики або недостатньо висвітлені в методичній літературі. Зокрема, це стосується таких питань, як обчислення степенів матриць n-го порядку (розглянуті методи математичної індукції, циклів, рекурентних співвідношень, зворотних перетворень і матричний біном) та обчислення визначників n-го порядку (зведення до трикутного вигляду, виділення лінійних множників, рекурентні співвідношення).

Буде корисним студентам, вчителям і викладачам різних навчальних закладів, які готують студентів до участі в олімпіадах.

УДК 512.643

ISBN 978-966-350-720-0

Зміст

РОЗДІЛ 1

Матриці. Дії над ними

1.1 Поняття прямокутної матриці

Матрицею розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел, яка має m рядків і n стовпців.

Числа, з яких складається матриця, називають її *елементами.* Кожен елемент має два індекси: $a_{i\,j}$, де i – номер рядка, j – номер стовпця, на перетині яких стоїть елемент $a_{i\,j}$.

Матриці позначають великими літерами латинського алфавіту: $A, B, C, X, Y, \ldots$ і для запису користуються одним із символів

$$\begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \ldots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \ldots & a_{2\,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m\,1} & a_{m\,2} & \ldots & a_{m\,n} \end{pmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \ldots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \ldots & a_{2\,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m\,1} & a_{m\,2} & \ldots & a_{m\,n} \end{Vmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \ldots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \ldots & a_{2\,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m\,1} & a_{m\,2} & \ldots & a_{m\,n} \end{bmatrix},$$

або ж для більш стислого викладу користуються записом: $A = (a_{i\,j})_{m \times n}$, $(a_{i\,j})_{m \times n}$.

Матриці A і B називаються *рівними*, якщо вони мають однакові розміри, а їх відповідні елементи, тобто ті, що стоять на однакових місцях, будуть: $a_{i\,j} = b_{i\,j} (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$.

1.2 Види матриць

Якщо в матриці тільки один стовпець, тобто $n = 1$, то вона називається *матрицею-стовпцем* і має такий вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1\,1} \\ a_{2\,1} \\ \dots \\ a_{m\,1} \end{pmatrix}.$$

Матрицю-стовпець називають також вектором-стовпцем. Якщо в матриці тільки один рядок, тобто $m = 1$, то вона називається *матрицею-рядком* або *вектором-рядком*:

$$B = (b_{1\,1}, b_{1\,2}, \dots, b_{1\,n})\,.$$

Кількість елементів у стовпці називають його висотою, а кількість елементів у рядку – довжиною.

Квадратною матрицею n-го порядку називають матрицю, яка має n рядків і n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \dots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \dots & a_{2\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & \dots & a_{n\,n} \end{pmatrix}.$$

Елементи $a_{1\,1}, a_{2\,2}, \dots, a_{n\,n}$ складають головну діагональ квадратної матриці, а елементи $a_{1\,n}, a_{2\,n-1}, \dots, a_{n\,1}$ в тій же матриці – побічну діагональ.

Діагональною матрицею називають квадратну матрицю, у якої всі елементи, що не знаходяться на головній діагоналі, дорівнюють нулю.

Одиничною матрицею називається діагональна матриця, у якої всі діагональні елементи дорівнюють одиниці. Одиничну матрицю позначають буквою E. Наприклад,

$$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

– одинична матриця четвертого порядку.

Нульовою матрицею називається матриця будь-якого розміру, всі елементи якої дорівнюють нулю. Позначатимемо таку матрицю буквою Θ:

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця A називається *трапецієподібною* або *східчастою*, якщо вона має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \dots & a_{1\,r} & \dots & a_{1\,n} \\ 0 & a_{2\,2} & \dots & a_{2\,r} & \dots & a_{2\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{r\,r} & \dots & a_{r\,n} \end{pmatrix}.$$

Якщо в матриці A замінити рядки відповідними стовпцями, то отриману матрицю називають *транспонованою* і позначають A^T:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \dots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \dots & a_{2\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m\,1} & a_{m\,2} & \dots & a_{m\,n} \end{pmatrix}, \ A^T = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{2\,1} & \dots & a_{m\,1} \\ a_{1\,2} & a_{2\,2} & \dots & a_{m\,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1\,n} & a_{2\,n} & \dots & a_{m\,n} \end{pmatrix}.$$

Із означення випливає, що якщо матриця A має розмір $m \times n$, то транспонована матриця A^T має розмір $n \times m$.

Квадратна матриця називається *трикутною*, якщо всі її елементи, які розташовані вище або нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця порядку n називається *симетричною*, якщо її елементи, які є симетричними відносно головної діагоналі, рівні між собою, тобто

$$a_{kl} = a_{lk}, \; k = 1, 2, \dots, n, \; l = 1, 2, \dots, n.$$

Наприклад, симетричною є матриця

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що довільна симетрична матриця збігається зі своєю транспонованою.

Квадратна матриця порядку n називається *кососиметричною*, якщо на її головній діагоналі стоять нулі, а елементи, симетричні відносно головної діагоналі, відрізняються тільки знаком, тобто

$$a_{kl} = -a_{lk}, \; k = 1, 2, \dots, n, \; l = 1, 2, \dots, n.$$

Кососиметрична матриця при транспонуванні змінює свій знак, тобто $A^T = -A$. Наприклад, для кососиметричної матриці

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \text{ маємо } A^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix} = -A.$$

1.3 Дії над матрицями

1. *Додавання матриць.* Сумою матриць $A = (a_{ij})_{m\times n}$ та $B = (b_{ij})_{m\times n}$ однакового розміру називається матриця $C = (c_{ij})_{m\times n}$, елементи якої дорівнюють сумам відповідних елементів матриць-доданків A і B: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$). При цьому пишуть $C = A + B$.

2. *Множення матриці на число.* Добутком матриці $A = (a_{ij})_{m\times n}$ на число λ називається матриця $C = (c_{ij})_{m\times n} = \lambda A$, елементи якої дорівнюють добуткам відповідних елементів матриці A на число λ, тобто $c_{ij} = \lambda\, a_{ij}$ ($i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$).

3. *Віднімання матриць.* Різниця двох матриць B і A однакових розмірів визначається через попередні операції: $B - A = B + (-1)A$.

   Справедливими є такі властивості введених операцій:

   а) $A + B = B + A$ – комутативність операції додавання матриць;

   б) $A + (B + C) = (A + B) + C$ – асоціативність операції додавання матриць;

   в) $A + \Theta = A$, $A - A = \Theta$ – властивість нульового елемента;

   г) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ – асоціативність операції множення на число;

   д) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ – дистрибутивність операції множення на число відносно додавання матриць;

   е) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ – дистрибутивність операції множення на число відносно додавання чисел.

4. *Множення матриць.* Добутком матриці $A = (a_{ij})_{m\times k}$ на матрицю $B = (b_{ij})_{k\times n}$ називається матриця $C = (c_{ij})_{m\times n}$, елементи якої дорівнюють сумі добутків елементів i-го рядка матриці A і j-го

стовпця матриці B, тобто

$$c_{i\,j} = a_{i\,1}b_{1\,j} + a_{i\,2}b_{2\,j} + \cdots + a_{i\,k}b_{k\,j}.$$

Із цього означення випливає, що множення прямокутних матриць можливе тільки тоді, коли число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B. Множення ж квадратних матриць одного порядку завжди можливе. Схематично розміри співмножників і добутку можна записати в такому вигляді:

$$\underbrace{m \times k} \cdot \underbrace{k \times n} = \underbrace{m \times n}.$$

Матриці, що задовольняють співвідношення $AB = BA$ називаються *переставними (комутативними)*. Наприклад, одинична матриця переставна з довільною квадратною матрицею того самого порядку:

$$AE = EA = A.$$

Таким чином, одинична матриця при множенні квадратних матриць виконує ту ж роль, що і число 1 при множенні чисел.

Зазначимо, що добуток двох ненульових матриць може дорівнювати нульовій матриці, тобто із рівності $AB = \Theta$ не випливає, що $A = \Theta$ або $B = \Theta$. Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \neq \Theta, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \Theta, \quad \text{але} \;\; AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \Theta.$$

5. *Піднесення до степеня.* Нехай $n \;\; (n > 1)$ — ціле додатне число, A — квадратна матриця. Тоді A^n є добуток n матриць, кожна із яких дорівнює A, тобто

$$A = \overbrace{A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}^{n \text{ разів}}.$$

Для многочлена $P(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0$ і квадратної матриці A n-го порядку визначимо *многочлен від матриці* $P(A)$, як матрицю

$$P(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_0 E.$$

Операції над матрицями, уведені в пунктах 1 – 5, мають такі властивості (за умови, що зазначені операції множення мають зміст):

а) $A\Theta = \Theta A = \Theta$ — *властивість нульового елемента при множенні матриць;*

б) $AE = EA = A$ — *властивість одиничного елемента;*

в) $A(BC) = (AB)C$ — *асоціативність операції множення матриць;*

г) $\alpha(AB) = A(\alpha B) = (\alpha A)B$ *;*

д) $(A+B)C = AC+BC$, $C(A+B) = CA+CB$ – *дистрибутивність операції множення матриць;*

е) $A^{n+m} = A^n A^m = A^m A^n$, $n, m \in \mathbb{Z}$ *;*

ж) $(A^n)^m = (A)^{nm}$ *;*

и) $A^{-n} = \left(A^{-1}\right)^n$, *де* $n \in \mathbb{N}$, A^{-1} — *обернена матриця до матриці* A *;*

к) $\left(A^T\right)^T = A$ *;*

л) $(A+B)^T = A^T + B^T$ *;*

м) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *;*

н) $(CA)^T = A^T C^T$.

6. *Границя послідовності матриць.* Границею послідовності матриць $\left\{A_n = (a_{i\,j}^{(n)})_{m\times k}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ називається матриця $A = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_{i\,j}^{(n)}\right)_{m\times k}$, іншими словами, границя послідовності матриць дорівнює матриці з границь їх відповідних елементів.

1.4 Блочні матриці

Інколи буває доцільно звести обчислення над матрицями високих порядків до обчислень з матрицями менших порядків. Таке зведення, зокрема, здійснюється шляхом розбиття заданої матриці на блоки.

Кожну матрицю за допомогою вертикальних та горизонтальних ліній, які перетинають усю матрицю, можна розбити на блоки, що є матрицями менших розмірів. Наприклад, матрицю A можна розбити на блоки таким чином:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & | & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & | & a_{23} \\ -- & -- & -|- & -- \\ a_{31} & a_{32} & | & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Введемо такі позначення:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}, \ D = (a_{31}, \, a_{32}), \ E = (a_{33}).$$

У цих позначеннях матриця A має такий вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}.$$

З блочними матрицями можна робити основні математичні операції: додавання, множення на число, множення матриць, транспонування та обернення. Блочні матриці однакових розмірів і однакового розбиття на блоки називаються *конформними.*

Матриця, у якої більшість елементів відмінні від нуля, називається *щільною матрицею.* Матриця, більшість елементів у якої є нульовими, називається *розрідженою матрицею.* Для розріджених матриць корисно виділяти нульові блоки з метою зменшення обчислювальних операцій.

Операції додавання, множення на число і добуток блочних матриць виконуються за тими ж правилами, що і для звичайних матриць, тільки замість елементів у формулах використовують відповідні блоки.

1. *Додавання матриць.* Нехай A і B конформні матриці:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{m1} & B_{m2} & \dots & B_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тоді їх сумма:

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \dots & A_{1n} + B_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} + B_{m1} & A_{m2} + B_{m2} & \dots & A_{mn} + B_{mn} \end{pmatrix}$$

.

2. *Множення матриці на число.* Якщо задані матриця $A = (A_{ij})_{m\times n}$ та число $\alpha \in \mathbb{R}$, то

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} & \dots & \alpha A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha A_{m1} & \alpha A_{m2} & \dots & \alpha A_{mn} \end{pmatrix}.$$

3. *Множення блочних матриць.* При множенні матриці повинні бути розбиті на блоки таким чином, щоб

   а) кількість блочних стовпців першої матриці відповідала кількості блочних рядків другої матриці;

   б) самі матриці, які входять у блоки, повинні задовольняти умови множення звичайних матриць.

Нехай A_{mn} і B_{nk} — матриці, які розбиті на відповідні блоки:

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} C_{pq} & D_{ps} \\ E_{rq} & F_{rs} \end{pmatrix}, \quad B_{nk} = \begin{pmatrix} P_{qk} \\ M_{sk} \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$V_{mk} = A_{mn}B_{nk} = \begin{pmatrix} C_{pq}P_{qk} + D_{ps}M_{sk} \\ E_{rq}P_{qk} + F_{rs}M_{sk} \end{pmatrix}.$$

4. *Транспонування блочних матриць.* При транспонуванні блочної матриці транспонується блочна структура і всі її блоки, тобто

$$A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.1. Задані блочні матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 5 \\ -- & -- & -|- & -- \\ 3 & 1 & | & 4 \\ 2 & 5 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & | & A_{12} \\ -- & -|- & -- \\ A_{21} & | & A_{22} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & | & 2 \\ -- & -- & -|- & -- \\ 0 & 4 & | & 5 \\ 1 & 2 & | & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & | & B_{12} \\ -- & -|- & -- \\ B_{21} & | & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Знайти $C = A + B$, $D = 2B$, B^T .

Розв'язання. Матриці A і B мають блоки однакових розмірів: блоки A_{11} і B_{11} мають розмір 1×2 ; блоки A_{12} і B_{12} — 1×1 ; блоки A_{21} і B_{21} — 2×2 ; блоки A_{22} і B_{22} — 2×1 . Матриця $C = A + B$ буде мати такі ж за розмірами блоки:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & | & C_{12} \\ -- & -|- & -- \\ C_{21} & | & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & | & 7 \\ -- & -- & -|- & -- \\ 3 & 5 & | & 9 \\ 3 & 7 & | & 3 \end{pmatrix}.$$

Матриця $D = 2B$ буде мати блоки тих же розмірів, що і B:

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 2 & | & 4 \\ -- & -- & -|- & -- \\ 0 & 8 & | & 10 \\ 2 & 4 & | & 6 \end{pmatrix}.$$

Скориставшись правилом транспонування блочних матриць, отримаємо

$$B^T = \begin{pmatrix} B_{11}^T & | & B_{21}^T \\ -- & -|- & -- \\ B_{12}^T & | & B_{22}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & | & 0 & 1 \\ 1 & | & 4 & 2 \\ -- & -|- & -- & -- \\ 2 & | & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.2. Задані блочні матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 5 \\ -- & -- & -|- & -- \\ 4 & 3 & | & 2 \\ 3 & 1 & | & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & | & A_{12} \\ -- & -|- & -- \\ A_{21} & | & A_{22} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & | & 0 \\ 3 & 1 & | & 3 \\ -- & -- & -|- & -- \\ 2 & 0 & | & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & | & B_{12} \\ -- & -|- & -- \\ B_{21} & | & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Знайти добуток блочних матриць $C = AB$.

Розв'язання. Матриця A розбита на блоки: блоки A_{11} розміром 1×2; A_{12} — 1×1; A_{21} — 2×2; A_{22} — 2×1. Матриця B розбита на блоки: блоки B_{11} розміром 2×2; B_{12} — 2×1; B_{21} — 1×2; B_{22} — 1×1. Матриця A розбита по стовпцям на два і один (рахуючи зліва), а матриця B розбита по рядках на два і один (рахуючи зверху). Тому добуток AB визначено коректно. Матриця $C = AB$ буде мати такі блоки

$$C == \begin{pmatrix} C_{11} & | & C_{12} \\ -- & -|- & -- \\ C_{21} & | & C_{22} \end{pmatrix}.$$

Для кожного блока знаходимо:

$$C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = (1\ \ 2)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + (5)(2\ \ 0) = (8\ \ 4) + (10\ \ 0) = (18\ \ 4),$$

$$C_{12} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = (1\ \ 2)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + (5)(2) = (6) + (10) = (16),$$

$$C_{21} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}(2\ \ 0) =$$

$$= \begin{pmatrix} 17 & 11 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 11 \\ 21 & 7 \end{pmatrix},$$

$$C_{22} = A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}(2) =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Отже, матриця C буде мати такий вигляд:

$$C = \begin{pmatrix} 18 & 4 & | & 16 \\ -- & -- & -|- & -- \\ 21 & 11 & | & 13 \\ 21 & 7 & | & 15 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.3. Знайти добуток матриць четвертого порядку

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Розіб'ємо задані матриці на блоки розміром 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta & | & E \\ -- & -|- & -- \\ E & | & C \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & | & \Theta \\ -- & -|- & -- \\ E & | & E \end{pmatrix},$$

де $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Запишемо спочатку добуток блочних матриць

$$AB = \begin{pmatrix} \Theta & | & E \\ -- & -|- & -- \\ E & | & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & | & \Theta \\ -- & -|- & -- \\ E & | & E \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \Theta D + EE & | & \Theta\Theta + EE \\ -- & -|- & -- \\ ED + CE & | & E\Theta + CE \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & | & E \\ -- & -|- & -- \\ C + D & | & C \end{pmatrix}.$$

Отже, замість множення матриць A і B достатньо знайти тільки один блок, склавши матриці C і D:

$$C + D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 8 & 1 & 2 \\ 10 & 12 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

РОЗДІЛ 2

Визначники

2.1 Визначники другого та третього порядку

Розглянемо квадратну матрицю другого порядку:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Визначником другого порядку, що відповідає матриці A, називається число, яке визначається рівністю

$$\Delta = \Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Нехай задана квадратна матриця третього порядку:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Визначником третього порядку, що відповідає матриці A, називається число, яке визначається рівністю

$$\Delta = \Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \quad (2.1)$$

При обчисленні визначників третього порядку зручно користуватися правилом трикутників (правилом *Сарруса*), яке схематично зображене на рис. 2.1.

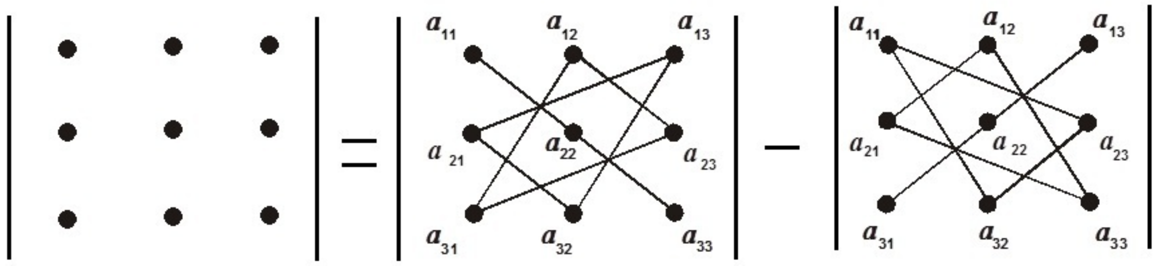

Рис. 2.1: Правило Саррусa

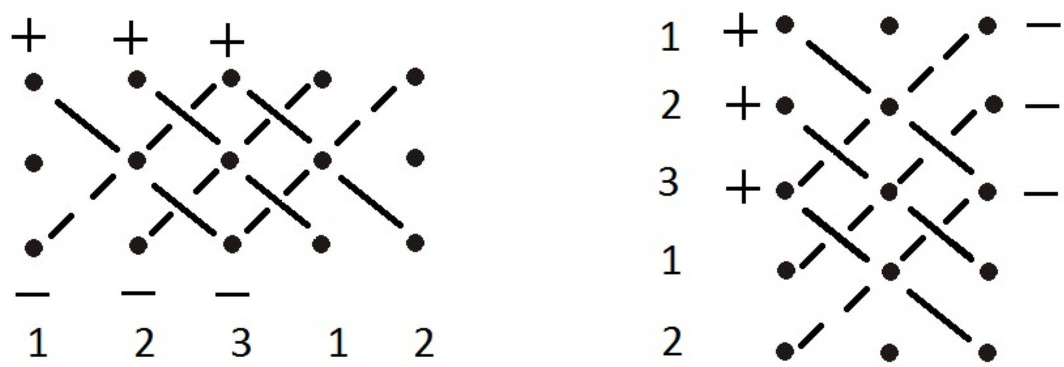

Рис. 2.2: Схема обчилення визначника 3-го порядку

Наведемо також другий спосіб обчислення визначника, який потребує меншого напруження пам'яті та уваги. Для цього в матриці, яка відповідає шуканому визначнику, дописують праворуч перший та другий стовпці або знизу ще раз дописують перший і другий рядки (див. рис. 2.2). З таблиці видно, які добутки трійок чисел мають знак $+$, а які знак $-$.

Слід чітко розрізняти визначник і матрицю, якій цей визначник відповідає, бо визначник — це число, а матриця — таблиця чисел.

2.2 Властивості визначника

Розглянемо властивості визначників третього порядку, хоча вони мають місце для визначників будь-якого порядку.

1. Значення визначника не змінюється, якщо його рядки та стовпці поміняти місцями, тобто
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ або } \Delta(A) = \Delta(A^T).$$
Ця властивість встановлює повну рівноправність рядків і стовпців, тому всі наступні властивості можна формулювати або тільки для рядків, або тільки для стовпців.

2. При перестановці двох рядків визначника змінюється тільки його знак.

3. Визначник з двома однаковими рядками дорівнює нулю.

4. Якщо всі елементи якого-небудь рядка визначника містять спільний множник, то його можна винести за знак визначника.

5. Якщо всі елементи якого-небудь рядка визначника дорівнюють нулю, то й сам визначник дорівнює нулю.

6. Якщо елементи двох рядків пропорційні, то визначник дорівнює нулю.

7. Якщо всі елементи деякого рядка визначника є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких елементи згаданого рядка замінені відповідними доданками, наприклад:
$$\begin{vmatrix} a_{11}+\alpha & a_{12}+\beta & a_{13}+\gamma \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Якщо до елементів деякого рядка визначника додати елементи другого рядка, помножені на довільне число λ, то значення визначника не зміниться. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{11} & a_{22}+\lambda a_{12} & a_{23}+\lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Для формулювання подальших властивостей необхідно ввести нові поняття.

Мінором M_{ik}*, що відповідає елементу* a_{ik} *квадратної матриці* A *порядку* n, називається визначник, який відповідає матриці, утвореній з матриці A викресленням i-го рядка і k-го стовпця.

Алгебраїчним доповненням A_{ik} *елемента* a_{ik} *квадратної матриці* A *порядку* n називається його мінор, узятий зі знаком $(-1)^{i+k}$:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}.$$

9. Визначник квадратної матриці дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка на їх алгебраїчні доповнення. Інакше кажучи, для визначника третього порядку (2.1) справедливі такі рівності:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}, \tag{2.2}$$

$$\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}, \tag{2.3}$$

$$\Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}, \tag{2.4}$$

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}, \tag{2.5}$$

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}, \tag{2.6}$$

$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}. \tag{2.7}$$

Ця властивість дає змогу звести обчислення даного визначника до обчислення визначників, порядок яких на одиницю менший. Формули (2.2) – (2.4) називаються формулами розкладання визначника за елементами деякого стовпця, а формули (2.5) – (2.7) — формулами розкладання за елементами деякого рядка. Користуючись формулами розкладання визначника за елементами стовпця, отримаємо, що визначник трикутної матриці дорівнює добутку елементів її головної діагоналі. Справді,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \dots = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}. \quad (2.8)$$

Отриманий результат дає метод обчислення визначників довільного порядку, який полягає у зведенні даного визначника до трикутного вигляду, використовуючи властивості 1 – 8.

10. Визначник добутку двох квадратних матриць дорівнює добутку їх визначників: $\Delta(AB) = \Delta(A)\Delta(B)$.

Наведені властивості визначників суттєво спрощують їх обчислення, особливо визначників вищих порядків. При обчисленні визначників доцільно спочатку, залучаючи властивості 1 – 8, зробити такі еквівалентні перетворення, щоб в отриманому визначнику був рядок або стовпець з якомога більшою кількістю нульових елементів, а потім залучити одну з формул (2.2) – (2.7) для розкладання визначника за елементами саме цього рядка або стовпця.

2.3 Ранг матриці

Кожний визначник, що складається з елементів матриці $A = (a_{i\,j})_{m\times n}$, які стоять на перетині k $(k \le n,\ k \le m)$ рядків і стовпців, називається *мінором* матриці k-го порядку.

Найвищий порядок відмінних від нуля мінорів матриці A називається рангом матриці й позначається $r(A)$ $(rang\,A)$.

Отже, якщо $r(A) = r$, то серед усіх мінорів матриці r-того порядку знайдеться хоча б один ненульовий, тоді як усі мінори порядків $r+1$ і вищих дорівнюють нулю або не існують.

Із визначення рангу матриці випливають такі властивості:

а) ранг матриці $A = (a_{i\,j})_{m\times n}$ не перевищує її розмірів, тобто $r(A) \le \min\{m, n\}$;

б) $r(A) = 0$ тоді й тільки тоді, коли всі елементи матриці дорівнюють нулю, тобто $A = \Theta$;

в) для квадратної матриці n-го порядку $r(A) = n$ тоді й тільки тоді, коли матриця A – невироджена;

г) $r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$.

При визначенні рангу матриці зручно користуватися її *елементарними перетвореннями*, які зберігають ранг вихідної матриці незмінним. До елементарних перетворень належать такі:

1) відкидання нульового рядка або стовпця;

2) множення всіх елементів рядка (стовпця) на число, яке не дорівнює нулю;

3) зміна порядку рядків (стовпців) матриці;

4) додавання до елементів якого-небудь рядка (стовпця) відповідних елементів другого рядка (стовпця), помножених на одне і те саме ненульове число;

5) транспонування матриці.

Дві матриці називають еквівалентними, якщо від однієї з них можна перейти до другої за допомогою скінченної кількості елементарних перетворень. Знак $\sim$ між матрицями показує, що вони еквівалентні та мають один і той самий ранг.

Мінор, порядок якого визначає ранг матриці, називається *базисним мінором.*

При знаходженні рангу матриці користуються наведеними далі методами.

Метод обвідних мінорів. Мінор M_{k+1} порядку $k+1$, який містить мінор M_k, називається обвідним для мінора M_k. Якщо в матриці A існує мінор r-го порядку, який відрізняється від нуля, а всі обвідні мінори $(r+1)$-го порядку дорівнюють нулю, або не існують, то r – ранг матриці A.

Приклад 2.1. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Оскільки серед мінорів першого порядку (тобто елементів матриці A) є відмінні від нуля, тобто

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0,$$

а обидва обвідні мінори четвертого порядку

$$M_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad M_4' = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

то $r(A) = 3$.

Метод Гаусса знаходження рангу матриці $A = (a_{i\,j})_{m\times n}$. Метод Гаусса полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворень матрицю A можна звести до еквівалентної матриці B трапецієподібної форми:

$$A \sim B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1\,r} & b_{1\,r+1} & \dots & b_{1\,n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2\,r} & b_{2\,r+1} & \dots & b_{2\,n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \dots & b_{3\,r} & b_{3\,r+1} & \dots & b_{3\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{r\,r} & b_{r\,r+1} & \dots & b_{r\,n} \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} b_{ii} \neq 0, \\ i = 1, 2, \dots, r, \\ r \leq n. \end{matrix}$$

Умова $r \leq n$ досягається транспонуванням матриці A. Оскільки $r(B) \leq r$, бо матриця B має розміри $r \times n$, і

$$M_r = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1\,r} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2\,r} \\ 0 & 0 & b_{33} & \dots & b_{3\,r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{r\,r} \end{vmatrix} = b_{11} \cdot b_{22} \cdot \dots \cdot b_{rr} \neq 0,$$

то ранг матриці B, а значить і A, дорівнює r.

Приклад 2.2. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \\ 7 & 4 & 10 \\ 2 & 8 & -4 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Матрицю A спочатку транспонуємо, бо $m > n$, а потім, після очевидних перетворень, отримаємо

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & -4 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 11 & 10 & 8 \\ 0 & -3 & -11 & -10 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 11 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $r(A) \leq 2$ і $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, то $r(A) = 2$.

Поняття рангу матриці тісно пов'язане з поняттям лінійної залежності (незалежності) її рядків чи стовпців. Нижче розглянутий матеріал буде торкатися тільки рядків. Для стовпців все буде аналогічно.

У матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

позначимо її рядки таким чином:

$$\alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}),\ \alpha_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}),\ \dots,\ \alpha_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}).$$

Лінійні арифметичні операції над рядками матриці (множення рядка на число, додавання рядків) означені як операції, що проводяться поелементно:

$$1.\ \lambda\alpha_k = (\lambda\, a_{k1}, \lambda\, a_{k2}, \dots, \lambda\, a_{k\,n}).$$

$$2.\ \alpha_k + \alpha_p = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{k\,n}) + (a_{p1}, a_{p2}, \dots, a_{p\,n}) =$$
$$= (a_{k1} + a_{p1}, a_{k2} + a_{p2}, \dots, a_{k\,n} + a_{p\,n})$$

Введені операції над рядками мають властивості, які випливають із властивостей додавання та множення чисел:

$$\alpha+\beta = \beta+\alpha,\ (\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma),\ \lambda(\alpha+\beta) = \lambda\alpha+\lambda\beta,\ (\lambda+\delta)\alpha = \lambda\alpha+\delta\alpha.$$

Рядок α називається *лінійною комбінацією* рядків $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, якщо існують такі числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, що виконується рівність

$$\alpha = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_m\alpha_m.$$

Система рядків $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ називається *лінійно залежною*, якщо існують числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, не рівні одночасно нулю, і такі, що лінійна комбінація рядків дорівнює нульовому рядку, тобто

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_m\alpha_m = \Theta,\ \Theta = (0, 0, \dots, 0).$$

Лінійна залежність рядків означає, що хоча б один рядок є лінійною комбінацією решти.

Система рядків, яка містить нульовий рядок — лінійно залежна.

Система рядків $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ називається *лінійно незалежною*, якщо лінійна комбінація цих рядків дорівнює нульовому рядку тоді і тільки тоді, коли всі коефіцієнти дорівнюють нулю, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$.

Рангом системи рядків називається максимальна кількість лінійно незалежних серед них.

Мають місце наступні твердження:

(i) Система рядків рангу k, яка містить більше, ніж k рядків, лінійно залежна.

(ii) Базисні рядки (стовпці) матриці лінійно незалежні; будь-який рядок (стовпець матриці) є лінійною комбінацією базисних рядків (стовпців).

(iii) Ранг системи рядків матриці і ранг системі її стовпців збігаються і дорівнюють рангу матриці.

(iv) Якщо визначник квадратної $n \times n$ матриці дорівнює нулю, то $r(A) < n$.

2.4 Обернена матриця

Квадратна матриця називається *виродженою* або *особливою*, якщо її визначник $\Delta(A) = 0$. В протилежному випадку матриця називається *невиродженою*.

Матриця A^{-1} називається *оберненою* до квадратної матриці A , якщо вона задовольняє умовам

$$A^{-1}A = A\,A^{-1} = E.$$

Із означення оберненої матриці та властивості множення визначників маємо

$$\Delta(A^{-1}A) = \Delta(A)\Delta(A^{-1}) = \Delta(E) = 1 \neq 0.$$

Отже, матриця A повинна бути невиродженою. Для виродженої матриці оберненої матриці не існує.

Теорема 2.4.1. *Якщо A – невироджена квадратна матриця порядку n , то існує єдина обернена матриця A^{-1} , яка визначається за фор-*

мулою

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}=\frac{\overline{A}}{\Delta},$$

де A_{ij} *– алгебраїчні доповнення елементів* a_{ij} *матриці* A *, а* $\overline{A}$ *– матриця, яка називається взаємною (приєднаною) до матриці* A *.*

Відмітимо властивості оберненої матриці:

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$;
2. $\Delta\left(A^{-1}\right)=\dfrac{1}{\Delta(A)}$;
3. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$;
4. $\left(A^{-1}\right)^{T}=\left(A^{T}\right)^{-1}$.

Приклад 2.3. Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Обчислюючи визначник даної матриці, дістанемо $\Delta(A)=5$. Отже, матриця A^{-1} існує. Знаходимо алгебраїчні доповнення до елементів матриці та розміщуємо їх у тому самому порядку, що й у взаємній матриці:

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2,\ A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=5,\ \ A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=3,$$

$$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-5,\ A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=10, A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=10,$$

$$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=1,\ A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=0, A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=1.$$

Отже,

$$A^{-1} = \frac{\overline{A}}{\Delta} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ -5 & 10 & 10 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & 1 & \frac{3}{5} \\ -1 & 2 & 2 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Приклад. Розв'язати матричне рівняння $X\,A = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ -5 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Після множення обох частин рівняння справа на A^{-1} отримаємо:

$$X = BA^{-1}.$$

Знайдемо A^{-1}: $\Delta(A) = 4 + 4 + 18 - 3 - 4 - 24 = -5$,

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0,\ A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2,\ \ A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -10,\ A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1, A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7,$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5,\ A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

Таким чином,

$$A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -10 & 1 & 7 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$X = 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\left(-\frac{1}{5}\right)\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -10 & 1 & 7 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 2 & 9 \\ 20 & -3 & -16 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розглянуті вище завдання мають за мету не тільки сприяти неформальному опануванню викладеного теоретичного матеріалу, але також ознайомити читача з рівнем складності та різними методами розв'язання завдань, які були запропоновані на студентських олімпіадах різного рівня.

2.5 Обертання матриць, розбитих на блоки

Нехай M — квадратна матриця, яка розбита на блоки таким чином, щоб верхня ліва і нижня права матриці A і D були квадратними:

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Якщо $\Delta(M) \neq 0$, то існує обернена матриця M^{-1}:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} X & Z \\ Y & W \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

така, що

$$M \cdot M^{-1} = M^{-1} \cdot M = E.$$

Звідси, враховуючи позначення (2.9) і (2.10), випливає, що

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Z \\ Y & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Виконавши множення, отримаємо такі співвідношення:

$$AX + CY = E, \tag{2.12}$$

$$AZ + CW = \Theta, \tag{2.13}$$

$$BX + DY = \Theta, \tag{2.14}$$

$$BZ + DW = E. \tag{2.15}$$

Якщо матрицю (2.9) помножити на матрицю (2.10) зліва, то отримаємо рівність

$$\begin{pmatrix} X & Z \\ Y & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.16}$$

із якої видно, що залежність між тими ж блоками дають такі рівності:

$$XA + ZB = E, \tag{2.17}$$

$$XC + ZD = \Theta, \tag{2.18}$$

$$YA + WB = \Theta, \tag{2.19}$$

$$YC + WD = E. \tag{2.20}$$

Нехай блок A — невироджена квадратна матриця, у якої $\Delta(A) \neq 0$. Тоді скориставшись співвідношеннями (2.13), (2.15), (2.17), (2.19) і виконавши необхідні перетворення, можна отримати вирази для знаходження блоків матриці M^{-1} через блоки заданої матриці M .

Після множення виразу (2.13) зліва на A^{-1} отримаємо:

$$A^{-1}AZ + A^{-1}CW = \Theta.$$

Звідси знаходимо, що

$$Z = -A^{-1}CW. \tag{2.21}$$

Підставляючи вираз (2.21) в рівність (2.15), отримаємо

$$-BA^{-1}CW + DW = E,$$

$$(D - BA^{-1}C)W = E,$$

$$W = (D - BA^{-1}C)^{-1}, \tag{2.22}$$

тобто шуканий блок W оберненої матриці M^{-1} явно виражений через блоки відомої матриці M .

Два інших блоки знаходимо аналогічно. Помноживши співвідношення (2.19) справа на A^{-1} , отримуємо блок Y , тобто

$$Y = -WBA^{-1}. \tag{2.23}$$

Далі, після множення рівності (2.17) на A^{-1} справа знаходимо блок X:

$$X = A^{-1} - ZBA^{-1}. \tag{2.24}$$

Отже, за формулами (2.21) – (2.24) можна знайти всі блоки шуканої матриці M^{-1}.

2.6 Кронекерові добуток і сума матриць

Добутком Кронекера (прямим добутком) двох матриць A та B, де $A = (A_{ij})_{m\times n}$ і $B = (B_{ij})_{k\times l}$, називається блочна матриця $A \otimes B$ розміром $km \times ln$:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

Властивості добутку Кронекера:

а) *якщо* A *і* B *— невироджені матриці, то*

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1};$$

б) якщо A *і* B *— квадратні матриці відповідно* m *-го і* n *-го порядків, то* $|A \otimes B| = |A|^m |B|^n$ *;*

в) $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$ *;*

г) $tr\,(A \otimes B) = tr(A)tr(B)$ *, де* $tr(A)$ *— слід матриці* A *, тобто сума елементів квадратної матриці, які стоять на її головній діагоналі.*

Кронекеровою сумою квадратних матриць A і B n-го і m-го порядків відповідно називається квадратна матриця mn-го порядку, тобто

$$A \oplus B = (E_m \otimes A + B \otimes E_n),$$

де E_m, E_n — одиничні матриці відповідних порядків.

Приклад 2.4. Задані матриці

$$A=\begin{pmatrix}1&3\\5&7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&3&0\\0&4&5\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&2&-1\\0&4&2\end{pmatrix}.$$

Знайти $A\otimes B$ і $A\oplus C$.

Розв'язання. За означенням знаходимо

$$A\otimes B=\begin{pmatrix}1\begin{pmatrix}2&3&0\\0&4&5\end{pmatrix}&3\begin{pmatrix}2&3&0\\0&4&5\end{pmatrix}\\5\begin{pmatrix}2&3&0\\0&4&5\end{pmatrix}&7\begin{pmatrix}2&3&0\\0&4&5\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&0&6&9&0\\0&4&5&0&12&15\\ \\10&15&0&14&21&0\\0&20&25&0&28&35\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}A\oplus C=&(E\otimes A)+(C\otimes E)=\\&=\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1&3\\5&7\end{pmatrix}\right)+\left(\begin{pmatrix}1&2&0\\3&2&-1\\0&4&2\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=\\&=\begin{pmatrix}1\begin{pmatrix}1&3\\5&7\end{pmatrix}&0\begin{pmatrix}1&3\\5&7\end{pmatrix}&0\begin{pmatrix}1&3\\5&7\end{pmatrix}\\0\begin{pmatrix}1&3\\5&7\end{pmatrix}&1\begin{pmatrix}1&3\\5&7\end{pmatrix}&0\begin{pmatrix}1&3\\5&7\end{pmatrix}\\0\begin{pmatrix}1&3\\5&7\end{pmatrix}&0\begin{pmatrix}1&3\\5&7\end{pmatrix}&1\begin{pmatrix}1&3\\5&7\end{pmatrix}\end{pmatrix}+\end{aligned}$$

$$
+\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot 1 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot 0 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot 1 \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{pmatrix}.
$$

РОЗДІЛ 3

Системи лінійних рівнянь

3.1 Основні поняття

Система з m лінійних рівнянь з n невідомими має такий вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{3.1}$$

Числа a_{ij}, b_i ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$) називаються відповідно *коефіцієнтами системи* і *вільними членами*. Коефіцієнти a_{ij} при невідомих мають два індекси, де i — номер рівняння, у якому міститься цей коефіцієнт, а j — номер невідомого, при якому його записано.

Кількість рівнянь m може бути більше, менше або дорівнювати кількості невідомих n.

Система (3.1) називається *однорідною*, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю.

Розв'язком системи (3.1) називається сукупність чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, якщо при підстановці їх у рівняння системи замість відповідних невідомих, ці рівняння перетворюються на тотожності. Система, що має розв'язки, називається *сумісною*; система, що не має жодного розв'язку — *несумісною*. Система, що має єдиний розв'язок називається *визначеною*, а якщо розв'язків більше ніж один — *невизначеною*. Якщо система невизначена, то кожен її розв'язок називається *частинним розв'язком системи.* Множина всіх частинних розв'язків системи називається *загальним розв'язком.*

Дві системи рівнянь називаються *рівносильними* (*еквівалентними*), якщо вони мають одну і ту ж множину розв'язків.

Матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ і } \widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | \, b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & | \, b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & | \, b_m \end{pmatrix}$$

відповідно називаються *основною* і *розширеною* матрицями системи (3.1). Основна матриця системи має m рядків і n стовпців, а розширена — містить m рядків і $n+1$ стовпців.

3.2 Правило Крамера

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{3.2}$$

Зробимо такі позначення:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix},$$

де Δ — визначник системи, $\Delta_i (i = 1, 2, \dots, n)$ — визначники, отримані з визначника Δ шляхом заміни його i-го стовпця на стовпець вільних членів системи.

Теорема 3.2.1. Якщо визначник системи $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який визначається за формулами

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},\ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

які називаються *формулами Крамера.*

Приклад 3.1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислимо спочатку визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 9 + 8 - 12 - 1 - 24 = -16.$$

Оскільки $\Delta = -16 \neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який знайдемо за формулами Крамера. Для цього обчислимо Δ_1, Δ_2, Δ_3.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 9 + 29 - 30 - 24 - 3 = -16,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 45 + 6 - 18 - 18 - 5 = 16,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 9 + 24 - 12 - 60 - 3 = -32,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -1,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 2.$$

3.3 Матричний метод

Нехай знову задана система вигляду (3.2). Таку систему зручно записувати в компактній матричній формі

$$AX = B, \tag{3.3}$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ — основна матриця коефіцієнтів системи, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ — вектор-стовпець з невідомих x_i, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ — вектор-стовпець з вільних членів b_i. Добуток AX визначено коректно, бо в матриці A стовпців стільки ж, скільки рядків у матриці X.

Припустимо, що матриця A невироджена, тобто $\Delta(A) \neq 0$. Тоді існує матриця A^{-1}. Скористаємося цим для розв'язання матричного рівняння (3.3). Помножимо його зліва на A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Оскільки $A^{-1}A = E$, $EX = X$, то має місце рівність

$$X = A^{-1}B.$$

Цей вираз, отриманий для X, дійсно є розв'язком рівняння (3.3), бо

$$AA^{-1}B = B.$$

Приклад 3.2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Позначимо через

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

і перепишемо задану систему у формі $AX = B$. Тоді

$$X = A^{-1}B.$$

Для розв'язання цього матричного рівняння знайдемо A^{-1}. Маємо

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -16 \neq 0,$$

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3,\ A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4,\ \ A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5,\ A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4, A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7,$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2,\ A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8, A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -10.$$

Отже, $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{16} \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ -4 & -4 & 8 \\ -1 & 7 & -10 \end{pmatrix}.$

Тоді $X = -\dfrac{1}{16} \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ -4 & -4 & 8 \\ -1 & 7 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{16} \begin{pmatrix} -16 \\ 16 \\ -32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$
тобто $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2.$

3.4 Метод Гаусса

Розглянемо систему (3.1). *Елементарними перетвореннями* системи називається: переставлення рівнянь, множення обох частин рівняння на одне і те саме число, додавання до обох частин якого-небудь рівняння відповідних частин іншого рівняння системи, помноженого на довільне число.

Формули Крамера і матричний метод мають велике теоретичне значення, але їх практичне значення обмежене через громіздкі обчислення. Тому при розв'язанні систем лінійних рівнянь з великою кількістю невідомих більш ефективними є методи, пов'язані з послідовним виключенням змінних. Одним з таких методів є метод Гаусса, який полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворень задана система рівнянь зводиться до еквівалентної системи більш простого вигляду: трапецієподібної чи трикутної форми.

Приклад 3.3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо розширену матрицю заданої системи і виконаємо такі елементарні перетворення: спочатку перший рядок, помножений відповідно на 3, 2, 4, віднімемо відповідно від другого, третього і четвертого рядків; потім переставимо другий і четвертий рядки і після очевидних перетворень отримаємо

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 9 & 3 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -4 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -11 & -8 & -5 & -4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -11 & -8 & -5 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -11 & -8 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & \frac{35}{11} & -\frac{7}{11} & -\frac{21}{11} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Отже, задана система рівнянь еквівалентна системі

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2, \\ -11x_2 - 8x_3 - 5x_4 &= -4, \\ 35x_3 - 7x_4 &= -21, \\ -x_4 &= 2. \end{cases}$$

З цієї системи послідовно знаходимо (зворотний хід)

$$x_4 = -2,\ x_3 = -1,\ x_2 = 2,\ x_1 = 1.$$

РОЗДІЛ 4

Приклади розв’язання завдань

Матриці

4.1 Операції над матрицями

Приклад 4.1. Знайти всі матриці другого порядку з ненульовими елементами, квадрат яких дорівнює нульовій матриці.

Розв’язання. Нехай $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ – шукана матриця, тоді $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix}$. Звідси та з умови задачі отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a^2+bc=0, \\ ab+bd=0, \\ ac+dc=0, \\ bc+d^2=0. \end{cases} \iff \begin{cases} a^2+bc=0, \\ b(a+d)=0, \\ c(a+d)=0, \\ bc+d^2=0. \end{cases}$$

Оскільки, за умовою $b \neq 0$ і $c \neq 0$, то з другого і третього рівнянь маємо $d=-a$, а з першого знаходимо $b=-\dfrac{a^2}{c}$. Підставивши значення d і b в останнє рівняння, отримаємо тотожність

$$c\left(-\frac{a^2}{c}\right)+(-a)^2 \equiv 0,$$

тобто c може бути будь-яким ненульовим числом. Отже, усі шукані матриці мають вигляд $A = \begin{pmatrix} a & -\dfrac{a^2}{c} \\ c & -a \end{pmatrix}$, де $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Приклад 4.2. Спростити матричний вираз

$$(2E-A)^{-1}+(E+A)^{-1}-3(2E+A-A^2)^{-1},$$

де A – квадратна матриця порядку n, A^{-1} – обернена матриця до матриці A.

Розв'язання. Враховуючи, що

$$(2E+A-A^2)=(E+A)(2E-A)=(2E-A)(E+A),$$

маємо

$$(2E+A-A^2)^{-1}=(E+A)^{-1}(2E-A)^{-1}=(2E-A)^{-1}(E+A)^{-1}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}&(2E-A)^{-1}+(E+A)^{-1}-3(2E+A-A^2)^{-1}=\\=&(E+A)(E+A)^{-1}(2E-A)^{-1}+(2E-A)(2E-A)^{-1}(E+A)^{-1}-\\-&3(2E-A)^{-1}(E+A)^{-1}=(E+A+2E-A-3E)(2E-A)^{-1}(E+A)^{-1}=\\=&\Theta(2E-A)^{-1}(E+A)^{-1}=\Theta,\end{aligned}$$

де Θ – нульова матриця порядку n.

Приклад 4.3. Нехай A і B – квадратні матриці порядку n, а E – одинична матриця того ж порядку. Відомо, що існує обернена матриця до матриці $C=E+AB$. Довести, що існує обернена матриця до матриці $D=E+BA$.

Розв'язання. Позначимо через C^{-1} матрицю, обернену до матриці C. Тоді

$$D=E+BA=E+BCC^{-1}A=E+B(E+AB)C^{-1}A=$$
$$=E+BC^{-1}A+BABC^{-1}A=E+(E+BA)BC^{-1}A=E+DBC^{-1}A,$$

тобто $D=E+DBC^{-1}A$ або $D(E-BC^{-1}A)=E$. Оскільки, аналогічно

$$D=E+BA=E+BC^{-1}CA=E+BC^{-1}(E+AB)A=$$
$$=E+BC^{-1}A+BC^{-1}ABA=E+BC^{-1}AD,$$

то це означає, що $E + BC^{-1}A = D^{-1}$, тобто матриця D має обернену матрицю, що і треба було довести.

Приклад 4.4. Довести, що матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ є коренем многочлена $P(x) = x^3 - 6x^2 + 8x - 9$.

Доведення. Обчислимо спочатку квадрат, а потім куб матриці A:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 4 & 2 & 15 \\ 2 & 5 & 19 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 4 & 2 & 15 \\ 2 & 5 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -18 \\ 8 & 13 & 66 \\ 12 & 22 & 91 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$P(A) = A^3 - 6A^2 + 8A - 9E =$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & -4 & -18 \\ 8 & 13 & 66 \\ 12 & 22 & 91 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 4 & 2 & 15 \\ 2 & 5 & 19 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} -$$

$$-9 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -18 \\ 8 & 13 & 66 \\ 12 & 22 & 91 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & -12 & -18 \\ 24 & 12 & 90 \\ 12 & 30 & 114 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 8 & -8 & 0 \\ 16 & 8 & 24 \\ 0 & 8 & 32 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Theta,$$

що і треба було довести.

4.2 Матричні рівняння і системи

Приклад 4.5. Розв'язати матричне рівняння

$$AX + XA + X = A,$$

де A – задана квадратна матриця, квадрат якої є одиничною матрицею, тобто $A^2 = E$.

Розв'язання. Помножимо задане рівняння зліва і справа на A:

$$\begin{cases} A^2X + AXA + AX = A^2, \\ AXA + XA^2 + XA = A^2, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X + AXA + AX = E, \\ X + AXA + XA = E, \end{cases} \Longrightarrow AX = XA.$$

Тоді вихідне рівняння набуває вигляду

$$2AX + X = A.$$

Помножимо його зліва на $2A$:

$$4X + 2AX = 2E \Longrightarrow 3X = 2E - A, \; X = \frac{2}{3}E - \frac{1}{3}A.$$

Перевіримо результат:

$$\begin{aligned} AX + XA + X =& A(\frac{2}{3}E - \frac{1}{3}A) + (\frac{2}{3}E - \frac{1}{3}A)A + \frac{2}{3}E - \frac{1}{3}A = \\ =& \frac{2}{3}A - \frac{1}{3}E + \frac{2}{3}A - \frac{1}{3}E + \frac{2}{3}E - \frac{1}{3}A = A. \end{aligned}$$

Приклад 4.6. Довести, що матричне рівняння

$$X^2 + 6X + A = \Theta, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

не має розв'язків у класі квадратних матриць третього порядку з дійсними коефіцієнтами.

Доведення. У заданому рівнянні зробимо очевидні перетворення:

$$X^2 + 6EX + 9E^2 - 9E^2 + A = \Theta,$$
$$(X + 3E)^2 = 9E - A,$$
$$(\Delta(X + 3E))^2 = \Delta(9E - A).$$

Оскільки

$$9E - A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

то $\Delta(9E - A) = -12 < 0$, а $\Delta^2(X + 3E) \geq 0$. Отже, задане рівняння дійсно не має розв'язків на класі квадратних матриць з дійсними коефіцієнтами.

Приклад 4.7. Чи має розв'язок рівняння

$$X^3 - X^2 - X = 2A,$$

якщо A – квадратна матриця така, що $A^4 = \Theta$.

Розв'язання. Розв'язок будемо шукати в такому вигляді:

$$X = \alpha A^3 + \beta A^2 + \gamma A.$$

Оскільки $A^4 = \Theta$, то

$$X^2 = \gamma^2 A^2 + 2\beta\gamma A^3,\ X^3 = (\gamma^2 A^2 + 2\beta\gamma A^3)(\alpha A^3 + \beta A^2 + \gamma A) = \gamma^3 A^3.$$

Тоді, підставляючи значення X, X^2, X^3 в задане рівняння, дістанемо

$$(\gamma^3 - 2\beta\gamma - \alpha)A^3 - (\gamma^2 + \beta)A^2 - \gamma A = 2A,$$

звідки, прирівнюючи коефіцієнти при відповідних степенях матриці A в лівій і правій частинах рівності, знаходимо $\alpha = -24$, $\beta = -4$, $\gamma = -2$. Отже,

$$X = -24A^3 - 4A^2 - 2A.$$

Перевірка: підставимо значення X, $X^2 = 16A^3 + 4A^2$, $X^3 = -8A^3$ в задане матричне рівняння. Маємо

$$X^3 - X^2 - X = -8A^3 - 16A^3 - 4A^2 + 24A^3 + 4A^2 + 2A = 2A,$$

тобто матриця $X = -24A^3 - 4A^2 - 2A$ дійсно є розв'язком заданого рівняння.

Приклад 4.8. Розв'язати матричне рівняння

$$X + BX + XB = A,$$

де A і B – матриці розміром $n \times n$, причому $B^2 = \Theta$.

Розв'язання. Помножимо обидві частини рівняння на B зліва і на $(E - B)$ справа. Маємо

$$B(X + BX + XB)(E - B) = BA(E - B);$$
$$B(X + BX + XB)(E - B) = BA - BAB;$$
$$B(BX + X(B + E))(E - B) = BA - BAB;$$
$$BX(E^2 - B^2) = BA - BAB \Longrightarrow BX = BA - BAB.$$

Далі з вихідного рівняння виключимо BX:

$$X + XB = A - BA + BAB.$$

Помноживши обидві частини одержаного рівняння на $(E - B)$ справа, знаходимо

$$X(E + B)(E - B) = (A - BA + BAB)(E - B);$$
$$X = A - AB - BA + 2BAB.$$

Зробимо перевірку:

$$X + BX + XB =$$
$$= A - AB - BA + 2BAB + B(A - AB - BA + 2BAB) +$$

$$+(A-AB-BA+2BAB)B=A-AB-BA+2BAB+$$
$$+BA-BAB-B^2A+2B^2AB+AB-AB^2-BAB+$$
$$+2BAB^2=A.$$

Перевірка показала, що знайдена матриця X задовольняє задане рівняння.

Приклад 4.9. Знайти всі значення параметра α, при яких матричне рівняння $AX+\alpha X=B$, де $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 \\ 1 & 1+\alpha \end{pmatrix}$, має розв'язок. Знайти всі можливі розв'язки.

Розв'язання. У заданому рівнянні виконаємо очевидні перетворення:

$$(A+\alpha E)X=B \Longrightarrow A_1X=B, \text{ де } A_1=\begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 \\ -1 & 2+\alpha \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\Delta(A_1)=(1+\alpha)(2+\alpha)\neq 0$ при $\alpha\neq -2$ і $\alpha\neq -1$, то

$$A_1^{-1}=\frac{1}{(2+\alpha)(1+\alpha)}\begin{pmatrix} 2+\alpha & 0 \\ 1 & 1+\alpha \end{pmatrix}.$$

Далі, помноживши обидві частини рівняння $A_1X=B$ зліва на A_1^{-1}, дістанемо $X=A_1^{-1}B$, тобто

$$X=\frac{1}{(2+\alpha)(1+\alpha)}\begin{pmatrix} 2+\alpha & 0 \\ 1 & 1+\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 \\ 1 & 1+\alpha \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{(2+\alpha)(1+\alpha)}\begin{pmatrix} (2+\alpha)(1+\alpha) & 0 \\ 2(1+\alpha) & (1+\alpha)^2 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2+\alpha}\begin{pmatrix} 2+\alpha & 0 \\ 2 & (1+\alpha) \end{pmatrix}.$$

При $\alpha\neq -2$ це єдиний розв'язок. При $\alpha=-1$ маємо $\Delta(A_1)=0$,

$\Delta(B) = 0$. Нехай $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, тоді рівняння $A_1X = B$ набуде вигляду

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a+c & -b+d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a+c & -b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси маємо $d = b$ і $c = a+1$, тобто при $\alpha = -1$ маємо множину розв'язків $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 1+a & b \end{pmatrix}$, де $a, b \in \mathbb{R}$.

Приклад 4.10. Нехай A, B, C, D – квадратні матриці одного розміру, причому матриці $A+B$, $A-B$ – невироджені. Розв'язати систему матричних рівнянь

$$\begin{cases} AX + BY = C, \\ BX + AY = D \end{cases}$$

відносно квадратних матриць X, Y.

Розв'язання. Задана система рівносильна такій:

$$\begin{cases} (A+B)(X+Y) = C+D, \\ (A-B)(X-Y) = C-D, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (X+Y) = (A+B)^{-1}(C+D), \\ (X-Y) = (A-B)^{-1}(C-D), \end{cases}$$

звідки знаходимо

$$X = \frac{1}{2}\left((A+B)^{-1}(C+D) + (A-B)^{-1}(C-D)\right),$$
$$Y = \frac{1}{2}\left((A+B)^{-1}(C+D) - (A-B)^{-1}(C-D)\right).$$

4.3 Методи обчислення A^n

1. *Метод математичної індукції*

   Метод математичної індукції застосовують у тих випадках, коли треба довести, що деякі твердження справедливі для будь-якого числа n. В таких випадках достатньо перевірити справедливість цього твердження для $n=1$ (база індукції) і довести для будь-якого натурального числа k, що із справедливості твердження при $n=k$ (припущення індукції) випливає, що твердження істинне для $n=k+1$ (індукційний перехід).

Приклад 4.11. Обчислити $A^n = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n$.

Розв'язання. Знайдемо декілька перших степеней матриці: A^2, A^3 і застосуємо метод математичної індукції. Маємо

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\varphi - \sin^2\varphi & -2\sin\varphi\cos\varphi \\ 2\sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\varphi\cos\varphi - \sin 2\varphi\sin\varphi & -\cos 2\varphi\sin\varphi - \sin 2\varphi\cos\varphi \\ \cos 2\varphi\sin\varphi + \sin 2\varphi\cos\varphi & -\sin 2\varphi\sin\varphi + \cos 2\varphi\cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 3\varphi & -\sin 3\varphi \\ \sin 3\varphi & \cos 3\varphi \end{pmatrix}.$$

Для застосування методу математичної індукції припустимо, що $A^{n-1} = \begin{pmatrix} \cos(n-1)\varphi & -\sin(n-1)\varphi \\ \sin(n-1)\varphi & \cos(n-1)\varphi \end{pmatrix}$ і переконаємося, що

$$A^n = A^{n-1}\cdot A = \begin{pmatrix} \cos(n-1)\varphi & -\sin(n-1)\varphi \\ \sin(n-1)\varphi & \cos(n-1)\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}.$$

Приклад 4.12. Обчислити $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{2018}$.

Розв'язання. Знайдемо декілька перших степеней матриці: A^2 , A^3 , а потім застосуємо метод математичної індукції. Маємо

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^2 & 5+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^2 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 5^2 & 5+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^3 & 5^2+5+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^3 \end{pmatrix}.$$

Нехай $A^{n-1} = \begin{pmatrix} 5^{n-1} & 5^{n-2}+5^{n-3}+\cdots+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^{n-1} \end{pmatrix}$. Тоді

$$A^n = A^{n-1}A = \begin{pmatrix} 5^{n-1} & 5^{n-2}+5^{n-3}+\cdots+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5^n & 5^{n-1}+5^{n-2}+5^{n-3}+\cdots+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^n & \dfrac{5^n-1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix},$$

бо $5^{n-1}+5^{n-2}+5^{n-3}+\cdots+1 = \dfrac{5^n-1}{4}$, як сума геометричної прогресії. Тому

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{2018} = \begin{pmatrix} 5^{2018} & \dfrac{5^{2018}-1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^{2018} \end{pmatrix}.$$

2. *Метод циклів (інваріантів)*

Приклад 4.13. Обчислити $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{2015}$.

Розв'язання. Знайдемо декілька перших степеней матриці: A^2, A^3:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -3A.$$

Звідси випливає, що

$$A^{2015} = A^3 \cdot A^{2015-3} = -3A^{2015-2} = 3^2 A^{2015-2\cdot 2} = \cdots = -3^{1007} A =$$

$$= -3^{1007} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $A^{2015} = -3^{1007} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Приклад 4.14. Обчислити $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & 1 \\ 1 & 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}^{2018}$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо A^2:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & 1 \\ 1 & 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & 1 \\ 1 & 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4+2\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})2 & -2-2+1 & 2(1+\sqrt{3})+4-2\sqrt{3} \\ 2(1+\sqrt{3})+4-2\sqrt{3} & 2(1-\sqrt{3})+4+2\sqrt{3} & 1-4 \\ -2+1-2 & 4-2\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})2 & 2(1-\sqrt{3})+4+2\sqrt{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -3 & 6 \\ 6 & 6 & -3 \\ -3 & 6 & 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^2 = 3^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = E$, то

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & 1 \\ 1 & 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}^{2018} = 3^{1009} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{1009} =$$

$$= 3^{1009} \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^2 \right)^{504} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= 3^{2017} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^3 \right)^{168} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 3^{2017} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. *Матричний біном*

Якщо A і B — переставні (комутативні) матриці одного і того ж порядку, то справедлива така формула (*матричний біном*):

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k}.$$

Зокрема, $EB = BE$, тому

$$(E+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^{n-k}.$$

Приклад 4.15. Обчислити $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -6 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{20}$.

Розв'язання. Оскільки $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -6 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A + E$, то

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 6 & 0 \\ -24 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = 6\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \Theta,$$

$$A^4 = A^5 = \dots = A^{20} = \Theta.$$

За формулою матричного бінома знаходимо

$$(A+E)^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k A^k = \sum_{k=0}^{2} C_{20}^k A^k = E + 20A + 190A^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 80 \\ -120 & 60 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2280 & 1140 & 0 \\ -4560 & 2280 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2279 & 1140 & 40 \\ -4560 & 2281 & 80 \\ -120 & 60 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 4.16. Обчислити $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{40}$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо A з рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A + E: \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{40} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{40} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Theta,$$

$$A^4 = A^5 = \cdots = A^{40} = \Theta.$$

Далі, скориставшись формулою матричного бінома, дістанемо

$$(A+E)^{40} = \sum_{k=0}^{40} C_{40}^k A^k = \sum_{k=0}^{2} C_{40}^k A^k = E + 40A + 780A^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 19,5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 8 & 29,5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 4.17. Обчислити $\begin{pmatrix} c & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^n$.

Розв'язання. Нехай $\begin{pmatrix} c & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = B + cE$, де $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Знайдемо

$$B^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ B^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\Theta,$$

$$B^4=B^5=\cdots=\Theta.$$

Оскільки,

$$(cE)^n=\begin{pmatrix}c^n&0&0\\0&c^n&0\\0&0&c^n\end{pmatrix},\ B(cE)^{n-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c^{n-1}&0&0\\0&c^{n-1}&0\\0&0&c^{n-1}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&c^{n-1}&0\\0&0&c^{n-1}\\0&0&0\end{pmatrix},\ B^2(cE)^{n-2}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c^{n-2}&0&0\\0&c^{n-2}&0\\0&0&c^{n-2}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&c^{n-2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

то за формулою матричного бінома

$$(B+cE)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kB^k(cE)^{n-k}=\sum_{k=0}^{2}C_n^kB^k(cE)^{n-k}=$$

$$=C_n^0B^0(cE)^n+C_n^1B(cE)^{n-1}+C_n^2B^2(cE)^{n-2}=$$

$$=\begin{pmatrix}c^n&0&0\\0&c^n&0\\0&0&c^n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&nc^{n-1}&0\\0&0&nc^{n-1}\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&\frac{n(n-1)}{2}c^{n-2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

4. *Метод рекурентних співвідношень*

Приклад 4.18. Обчислити $\begin{pmatrix}a&0&b\\0&a+b&0\\b&0&a\end{pmatrix}^n.$

Розв'язання. Нехай $A^n = \begin{pmatrix} a_n & 0 & b_n \\ 0 & c_n & 0 \\ b_n & 0 & a_n \end{pmatrix}$. Тоді $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = a + b$. Із рівності $A^{n+1} = A^n A$ дістанемо

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & 0 & b_{n+1} \\ 0 & c_{n+1} & 0 \\ b_{n+1} & 0 & a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 0 & b_n \\ 0 & c_n & 0 \\ b_n & 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_n a + b_n b & 0 & a_n b + a b_n \\ 0 & c_n(a+b) & 0 \\ b_n a + a_n b & 0 & b_n b + a_n a \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n a + b_n b, \\ b_{n+1} = a_n b + a b_n, \\ c_{n+1} = c_n(a+b), \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_{n+1} + b_{n+1} = (a+b)(a_n + b_n), \\ a_{n+1} - b_{n+1} = (a-b)(a_n - b_n), \\ c_{n+1} = c_n(a+b), \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_{n+1} + b_{n+1} = (a+b)^{n+1}, \\ a_{n+1} - b_{n+1} = (a-b)^{n+1}, \\ c_{n+1} = (a+b)^{n+1}, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left((a+b)^{n+1} + (a-b)^{n+1}\right), \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left((a+b)^{n+1} - (a-b)^{n+1}\right), \\ c_{n+1} = (a+b)^{n+1}. \end{cases}$$

Приклад 4.19. Обчислити $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

Розв'язання. Нехай $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ 0 & a_n & d_n \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}$. Тоді $a_1 = 1$, $b_1 = \dfrac{1}{5}$,

$c_1 = \dfrac{1}{4}$, $d_1 = \dfrac{1}{8}$. Із рівності $A^{n+1} = A^n A$ дістанемо

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \\ 0 & a_{n+1} & d_{n+1} \\ 0 & 0 & a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ 0 & a_n & d_n \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_n & \frac{1}{5}a_n + b_n & \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{8}b_n + c_n \\ 0 & a_n & \frac{1}{8}a_n + d_n \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

З цієї рівності випливає справедливість такої системи:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n, \\ b_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + b_n, \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{4}a_n + \dfrac{1}{8}b_n + c_n, \\ d_{n+1} = \dfrac{1}{8}a_n + d_n, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_n = 1, \\ b_{n+1} - b_n = \frac{1}{5}, \\ c_{n+1} - c_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8}b_n, \\ d_{n+1} - d_n = \dfrac{1}{8}, \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_n = 1, \\ b_n = \frac{n}{5}, \\ c_{n+1} - c_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{n}{40}, \\ d_n = \dfrac{n}{8}, \end{cases}$$

З третього рівняння системи знайдемо c_n:

$$\begin{aligned} & c_2 - c_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{40}, \\ & c_3 - c_2 = \frac{1}{4} + \frac{2}{40}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & c_n - c_{n-1} = \frac{1}{4} + \frac{n-1}{40}. \end{aligned}$$

Склавши ліві і праві частини цих рівностей і згадавши, що $c_1 = \dfrac{1}{4}$, дістанемо $c_n = \dfrac{n}{4} + \dfrac{n(n-1)}{80} = \dfrac{n(n+19)}{80}$.

Зазначимо, що звідси при $n = 40$ дістанемо розв'язок прикладу 4.16.

5. *Метод зворотних перетворень*

Послідовність x_n називається *зворотною послідовністю другого порядку*, якщо $x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n$ для всіх $n \geq 1$. При фіксованих p та q така послідовність визначається її першими двома членами. Частинні розв'язки рівняння $x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n$ можуть бути знайдені у вигляді $x_n = \lambda^n$, де $\lambda \neq 0$. Підставивши $x_n = \lambda^n$ у рівняння, дістанемо $\lambda^2 - p\lambda - q = 0$. Нехай λ_1 і λ_2 – корені отриманого квадратного рівняння.

Скориставшись теоремою Вієта і методом математичної індукції, можна довести справедливість таких тверджень:

а) якщо $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$, де коефіцієнти C_1 і C_2 визначаються із системи рівнянь

$$C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 = x_1,\ C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2 = x_2;$$

б) якщо $\lambda_1 = \lambda_2$, то $x_n = (C_1 + nC_2)\lambda_1^n$, де коефіцієнти C_1 і C_2 визначаються із системи рівнянь

$$(C_1 + C_2)\lambda_1 = x_1,\ (C_1 + 2C_2)\lambda_1^2 = x_2.$$

Приклад 4.20. Нехай $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_n & c_n \\ b_n & d_n \end{pmatrix}$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_n}{b_n}$.

Розв'язання. Оскільки $A^{n+1} = A^n A$, то

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & c_{n+1} \\ b_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & c_n \\ b_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + 4c_n & 3a_n + 2c_n \\ b_n + 4d_n & 3b_n + 2d_n \end{pmatrix}.$$

Звідси отримуємо систему

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 4c_n, \\ b_{n+1} = b_n + 4d_n, \\ c_{n+1} = 3a_n + 2c_n, \\ d_{n+1} = 3b_n + 2d_n. \end{cases}$$

Послідовно скориставшись третім і першим рівняннями цієї системи, дістанемо

$$c_{n+2} = 3a_{n+1} + 2c_{n+1} = 3a_n + 12c_n + 2c_{n+1} =$$
$$= c_{n+1} - 2c_n + 12c_n + 2c_{n+1} = 3c_{n+1} + 10c_n,$$

тобто $c_{n+2} - 3c_{n+1} - 10c_n = 0$ – зворотня послідовність другого порядку. Для знаходження послідовності c_n треба розв'язати рівняння

$$\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0.$$

Це рівняння має корені $\lambda_1 = 5$ і $\lambda_2 = -2$. Тому

$$c_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n,$$

де коефіцієнти C_1 і C_2 визначаються із системи рівнянь

$$\begin{cases} C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 = c_1, \\ C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2 = c_2 = 3a_1 + 2c_1, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 = 3, \\ C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2 = 9, \end{cases} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{9 - 3\lambda_2}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)}, \\ C_2 = \dfrac{9 - 3\lambda_1}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}, \end{cases}$$

Аналогічно тому, як було визначено послідовність c_n, будемо шукати послідовність b_n, використовуючи другу та четверту рівності здобутої системи. Маємо

$$b_{n+2} = b_{n+1} + 4d_{n+1} = b_{n+1} + 4(3b_n + 2d_n) = b_{n+1} + 12b_n + 8d_n =$$
$$= b_{n+1} + 12b_n + 2(b_{n+1} - b_n) = 3b_{n+1} + 10b_n \iff b_{n+2} - 3b_{n+1} - 10b_n = 0.$$

Оскільки квадратне рівняння, яке відповідає отриманій зворотній послідовності другого порядку, має корені $\lambda_1 = 5$ і $\lambda_2 = -2$, то

$$b_n = B_1\lambda_1^n + B_2\lambda_2^n,$$

де коефіцієнти B_1 і B_2 визначаються із системи рівнянь

$$\begin{cases} B_1\lambda_1 + B_2\lambda_2 = b_1, \\ B_1\lambda_1^2 + B_2\lambda_2^2 = b_2 = b_1 + 4d_1, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B_1\lambda_1 + B_2\lambda_2 = 4, \\ B_1\lambda_1^2 + B_2\lambda_2^2 = 12, \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} B_1 = \dfrac{12 - 4\lambda_2}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)}, \\ B_2 = \dfrac{12 - 4\lambda_1}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}. \end{cases}$$

тоді, враховуючи нерівність $\left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1$, дістанемо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n}{B_1\lambda_1^n + B_2\lambda_2^n} = \frac{C_1}{B_1} = \frac{9 - 3\lambda_2}{12 - 4\lambda_2} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}.$$

Приклад 4.21. Нехай $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_n & c_n \\ b_n & d_n \end{pmatrix}$. Знайти $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$.

Розв'язання. Знайдемо $A^{n+1} = A^n A$. Маємо

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & c_{n+1} \\ b_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & c_n \\ b_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + 2c_n & 2a_n + 3c_n \\ b_n + 2d_n & 2b_n + 3d_n \end{pmatrix}.$$

З цієї рівності отримуємо таку систему:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2c_n, \\ b_{n+1} = b_n + 2d_n, \\ c_{n+1} = 2a_n + 3c_n, \\ d_{n+1} = 2b_n + 3d_n. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + 2c_{n+1}, \\ c_{n+1} = 2a_n + 3\left(\dfrac{a_{n+1} - a_n}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(a_n + 3a_{n+1}). \end{cases}$$

Тоді $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 3a_{n+1}$, $a_{n+2} - 4a_{n+1} - a_n = 0$ (це означає, що a_n – зворотня послідовність другого порядку).

Оскільки $\lambda_1 = 2+\sqrt{5}$ і $\lambda_2 = 2-\sqrt{5}$ – корені квадратного рівняння $\lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0$, то

$$a_n = A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n,$$

де коефіцієнти A_1 і A_2 визначаються із системи рівнянь:

$$\begin{cases} A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 = a_1, \\ A_1\lambda_1^2 + A_2\lambda_2^2 = a_2 = a_1 + 2c_1, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 = 1, \\ A_1\lambda_1^2 + A_2\lambda_2^2 = 5, \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A_1 = \dfrac{5-\lambda_2}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}, \\ A_2 = \dfrac{5-\lambda_1}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}. \end{cases}$$

Скориставшись послідовно другою та четвертою рівностями розглянутої системи, отримаємо

$$b_{n+2} = b_{n+1} + 2d_{n+1} = b_{n+1} + 2(2b_n + 3d_n) = b_{n+1} + 4b_n + 3(b_{n+1} - b_n) =$$
$$= 4b_{n+1} + b_n \iff b_{n+2} - 4b_{n+1} - b_n = 0.$$

Рівняння $\lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0$ має корені $\lambda_1 = 2+\sqrt{5}$ і $\lambda_2 = 2-\sqrt{5}$. Тому

$$b_n = B_1\lambda_1^n + B_2\lambda_2^n,$$

де коефіцієнти B_1 і B_2 визначаються із системи рівнянь

$$\begin{cases} B_1\lambda_1 + B_2\lambda_2 = b_1, \\ B_1\lambda_1^2 + B_2\lambda_2^2 = b_2 = b_1 + 2d_1, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B_1\lambda_1 + B_2\lambda_2 = 2, \\ B_1\lambda_1^2 + B_2\lambda_2^2 = 8, \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} B_1 = \dfrac{8-2\lambda_2}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}, \\ B_2 = \dfrac{8-2\lambda_1}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}, \end{cases}$$

тоді, враховуючи нерівність $\left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1$, отримаємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n}{B_1\lambda_1^n + B_2\lambda_2^n} = \frac{A_1}{B_1} = \frac{5-2+\sqrt{5}}{2(2+\sqrt{5})} = \frac{3+\sqrt{5}}{2(2+\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

4.4 Границі матриць

Нагадаємо, що границя матриці дорівнює матриці з границь її елементів.

Приклад 4.22. Нехай $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $X_n = A^n X_0$. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$ існує і знайти його.

Доведення. Враховуючи, що

$$X_1 = AX_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} \\ 2-2\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= (2-\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = (2-\sqrt{2})X_0,$$

$$X_2 = A^2X_0 = A(AX_0) = (2-\sqrt{2})AX_0 = (2-\sqrt{2})^2 X_0,$$

то по індукції отримаємо

$$X_n = AX_{n-1} = (2-\sqrt{2})^n X_0.$$

Отже, беручи до уваги нерівність $0 < 2-\sqrt{2} < 1$, маємо

$$\lim_{n\to\infty}(2-\sqrt{2})^n X_0 = X_0 \lim_{n\to\infty}(2-\sqrt{2})^n = X_0 \cdot 0 = \Theta,$$

де Θ – нульова матриця.

Приклад 4.23. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} A_n^n$, якщо $A_n = \begin{pmatrix} \frac{2}{n} & \frac{2}{n} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Перший спосіб. Оскільки

$$A_n^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{n} & \frac{2}{n} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{n} & \frac{2}{n} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1+\frac{2}{n}\right)\frac{2}{n} & \left(1+\frac{2}{n}\right)\frac{2}{n} \\ 1+\frac{2}{n} & 1+\frac{2}{n} \end{pmatrix} = \left(1+\frac{2}{n}\right) A_n,$$

$$A_n^3 = \left(1+\frac{2}{n}\right)^2 A_n,$$

то, застосовуючи метод математичної індукції, отримаємо

$$A_n^n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n A_n.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{2}{n} & \frac{2}{n} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = e^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^2 & e^2 \end{pmatrix}$.

Другий спосіб. Враховуючи співвідношення в прямокутному трикутнику з катетами $\frac{2}{n}$ і 1 та гострим кутом φ, отримаємо

$$\frac{2}{n} = \frac{\sqrt{n^2+4}}{n}\sin\varphi,\ \ 1 = \frac{\sqrt{n^2+4}}{n}\cos\varphi,\ \ \sin\varphi+\cos\varphi = \frac{n+2}{\sqrt{n^2+4}}.$$

Тоді

$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{2}{n} & \frac{2}{n} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{n^2+4}}{n} \begin{pmatrix} \sin\varphi & \sin\varphi \\ \cos\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$A_n^2 = \left(\frac{\sqrt{n^2+4}}{n}\right)^2 (\sin\varphi+\cos\varphi) \begin{pmatrix} \sin\varphi & \sin\varphi \\ \cos\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Застосовуючи метод математичної індукції, маємо

$$A_n^n = \left(\frac{\sqrt{n^2+4}}{n}\right)^n (\sin\varphi+\cos\varphi)^{n-1} \begin{pmatrix} \sin\varphi & \sin\varphi \\ \cos\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{n^2+4}}{n}\right)^n \left(\frac{n+2}{\sqrt{n^2+4}}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} \sin\varphi & \sin\varphi \\ \cos\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \left(\frac{n+2}{n}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} \frac{2}{n} & \frac{2}{n} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси $\lim_{n\to\infty} A_n^n = e^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^2 & e^2 \end{pmatrix}$.

Приклад 4.24. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\lim\limits_{n\to\infty}(A_n^n - E)\right)$, де

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{n} \\ -\frac{x}{n} & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Нехай $\dfrac{x}{n} = tg\varphi$. Тоді матриця A_n набуде такого вигляду:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{x}{n} \\ -\dfrac{x}{n} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & tg\varphi \\ -tg\varphi & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\cos\varphi} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \left(1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Тому $A_n^n = \left(1 + \left(\dfrac{x}{n}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} \cos n\varphi & \sin n\varphi \\ -\sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}} = e^0 = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} n\varphi = \lim_{n\to\infty} n\, arctg\left(\frac{x}{n}\right) = x,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} (A_n^n - E) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x - 1 & \sin x \\ -\sin x & \cos x - 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \cdot \begin{pmatrix} \cos x - 1 & \sin x \\ -\sin x & \cos x - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Приклад 4.25. Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta(A^k)}{\Delta\left(\sum\limits_{k=1}^{n} A^k\right)}, \text{ де } A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a+1 & a-1 \\ a-1 & a+1 \end{pmatrix}, \quad a \neq 1.$$

Розв'язання. Знайдемо декілька перших степеней матриці A:

$$A^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} a+1 & a-1 \\ a-1 & a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+1 & a-1 \\ a-1 & a+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (a+1)^2+(a-1)^2 & 2(a^2-1) \\ 2(a^2-1) & (a-1)^2+(a+1)^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2(a^2+1) & 2(a^2-1) \\ 2(a^2-1) & 2(a^2+1) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a^2+1 & a^2-1 \\ a^2-1 & a^2+1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} a^2+1 & a^2-1 \\ a^2-1 & a^2+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+1 & a-1 \\ a-1 & a+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (a^2+1)(a+1)+(a^2-1)(a-1) & (a^2+1)(a-1)+(a^2-1)(a+1) \\ (a^2-1)(a+1)+(a^2+1)(a-1) & (a^2-1)(a-1)+(a^2+1)(a+1) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a^3+1 & a^3-1 \\ a^3-1 & a^3+1 \end{pmatrix}, \ldots,\ A^k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a^k+1 & a^k-1 \\ a^k-1 & a^k+1 \end{pmatrix},\ a \neq 1.$$

Знайдемо $\Delta(A^k) = \left(\frac{a^k+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^k-1}{2}\right)^2 = a^k$. Тоді

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta(A^k) = \frac{a-a^{n+1}}{1-a}.$$

Оскільки

$$\sum_{k=1}^{n} A^k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n}(a^k+1) & \sum\limits_{k=1}^{n}(a^k-1) \\ \sum\limits_{k=1}^{n}(a^k-1) & \sum\limits_{k=1}^{n}(a^k+1) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} n+\dfrac{a-a^{n+1}}{1-a} & \dfrac{a-a^{n+1}}{1-a}-n \\ \dfrac{a-a^{n+1}}{1-a}-n & n+\dfrac{a-a^{n+1}}{1-a} \end{pmatrix},$$

то

$$\Delta\left(\sum_{k=1}^{n} A^k\right) = \frac{1}{2}\left[\left(n+\frac{a-a^{n+1}}{1-a}\right)^2 - \left(\frac{a-a^{n+1}}{1-a}-n\right)^2\right] = \frac{2n(a-a^{n+1})}{1-a}.$$

Тоді шукана границя буде $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ при $a \neq 1$.

Зазначимо, що при $a = 1$ $A = E$, $A^k = E$, а шукана границя буде

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\Delta(nE)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2} = 0.$$

4.5 Матрична експонента

Для будь-якої квадратної матриці A існує $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k!}A^k$, який називається *матричною експонентою* і позначається e^A.

Приклад 4.26. Обчислити e^{tA}, де $t\in\mathbb{R}$ і $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$.

Розв'язання. Знайдемо A^2 і A^3:

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 0 & 9\end{pmatrix},\ A^3=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 0 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 26\\ 0 & 27\end{pmatrix}.$$

Якщо $A^n=\begin{pmatrix}1 & 3^n-1\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}$, то

$$A^{n+1}=\begin{pmatrix}1 & 3^n-1\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3^{n+1}-1\\ 0 & 3^{n+1}\end{pmatrix}.$$

За методом математичної індукції $A^n=\begin{pmatrix}1 & 3^n-1\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}$ для будь-яких $n\in\mathbb{N}$. Тому

$$e^{tA}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}(tA)^k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{t^k}{k!}\begin{pmatrix}1 & 3^k-1\\ 0 & 3^k\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{t^k}{k!} & \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(3t)^k}{k!}-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{t^k}{k!}\right)\\ 0 & \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(3t)^k}{k!}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^t & e^{3t}-e^t\\ 0 & e^{3t}.\end{pmatrix}.$$

Визначники

4.6 Задачі загального характеру

Приклад 4.27. A і B — квадратні матриці, $A^2 = A$, $B^2 = B$, $AB = BA$. Довести, що визначник $\Delta(A - B)$ може набувати тільки значення 0, 1 і -1.

Доведення. Нехай $C = A - B$. Тоді

$$C^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = A - 3AB + 3AB - B = A - B = C.$$

Звідси випливає, що

$$\Delta(C^3) = \Delta(C),\ \Delta^3(C) = \Delta(C),\ \Delta(C)\left(\Delta^2(C) - 1\right) = 0,$$

тобто $\Delta(C)$ може набувати значення тільки 0, 1 і -1, що і треба було довести.

Приклад 4.28. З'ясувати, чи для кожного натурального числа $n \geq 2$ існує квадратна матриця порядку n, визначник якої дорівнює 1, а всі елементи — цілі числа, кожне з яких не менше за n.

Розв'язання. Така матриця існує. Її можна отримати, наприклад, з одиничної матриці n-го порядку шляхом елементарних перетворень, що не змінюють визначник матриці.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ n & n & n & \dots & n & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ n & n & n & \dots & n & n+1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} n+1 & n & n & \dots & n & n+1 \\ n & n+1 & n & \dots & n & n+1 \\ n & n & n+1 & \dots & n & n+1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n+1 & n+1 \\ n & n & n & \dots & n & n+1 \end{pmatrix}$$

Приклад 4.29. Розв'язати рівняння

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix}=0$$

Розв'язання. Із умови задачі випливає, що $\Delta(a_k)=0$ при всіх $k=1,2,\dots,n$, бо тоді визначник $\Delta(x)$ буде мати два однакових рядки. Додамо до елементів першого стовпчика визначника $\Delta(x)$ відповідні елементи решти стовпчиків. Тоді перший елемент кожного рядка визначника буде дорівнювати $x+a_1+a_2+\dots+a_n$. Отже,

$$\Delta(x)=(x+a_1+a_2+\dots+a_n)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix},$$

а $x=-a_1-a_2-\dots-a_n$ є теж коренем рівняння $\Delta(x)=0$. Отже, рівняння $\Delta(x)=0$ має $n+1$ різних коренів: $x_k=a_k$, $k=1,2,\dots,n$; $x_{n+1}=-a_1-a_2-\dots-a_n$. Оскільки $\Delta(x)$ є многочленом $(n+1)$-го степеня, то інших коренів він мати не може.

Приклад 4.30 Числа a, b, $c \in \mathbb{R}$, $abc \neq 0$,

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}.$$

Довести, що $\Delta(AB) \geq 0$. Коли досягається знак рівності?

Розв'язання. Обчислимо спочатку $\Delta(A)$ і $\Delta(B)$:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b-a & c-a \\ c & b-c & a-c \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b-c & a-c \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(a-c) - (b-c)(c-a) = (a-c)(2b-a-c),$$

$$\Delta(B) = \begin{vmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & c \\ 0 & b-a & b-c \\ 0 & c-a & a-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & b-c \\ c-a & a-c \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(a-c) - (c-a)(b-c) = (a-c)(2b-a-c).$$

Оскільки $\Delta(AB) = \Delta(A)\Delta(B)$, то

$$\Delta(AB) = (a-c)^2(2b-a-c)^2 \geq 0.$$

Звідси випливає, що знак рівності, враховуючи умову $abc \neq 0$, досягається у випадках $a = c$ і $2b = a + c$.

Приклад 4.31. Довести, що визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0,$$

якщо точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ лежать на одній прямій.

Розв'язання. Нехай $y = kx + b$ — рівняння прямої. Тоді

$y_1 = kx_1 + b$, $y_2 = kx_2 + b$, $y_3 = kx_3 + b$, а визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ kx_1 + b & kx_2 + b & kx_3 + b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ kx_1 & kx_2 & kx_3 \end{vmatrix} = 0,$$

бо в другому визначнику, додаючи до останнього рядка перший, помножений на $(-b)$, отримаємо визначник з двома пропорційними рядками, значення якого дорівнює 0.

Приклад 4.32. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix},$$

де a , b , c — корені рівняння $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.

Розв'язання. До елементів першого рядка додамо відповідні елементи решти рядків і сористуємося формулами Вієта. Для зведеного кубічного рівняння $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ вони мають такий вигляд:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p,\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q,\ x_1x_2x_3 = -r,$$

де x_1, x_2, x_3 — корені кубічного рівняння. Маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = -p \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} =$$

$$= -p \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b-a & c-a & a \\ c-b & a-b & b \end{vmatrix} = -p \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ c-b & a-b \end{vmatrix} =$$

$$= p\left((a-b)^2 + (c-a)(c-b)\right) =$$

$$= p(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ac - ab) = p(p^2 - 3q),$$

враховуючи, що

$$(a+b+c)^2 = p^2,\ a^2+b^2+c^2 = p^2 - 2(ab+ac+bc) = p^2 - 2q.$$

Приклад 4.33. Нехай A – матриця $n \times n$ така, що $A^2 = 2A$. Яких значення може набувати визначник матриці $2E - A$?

Розв'язання. Оскільки за умовою $A^2 = 2A$, то

$$(2E - A)^2 = 4E - 4A + A^2 = 4E - 2A = 2(2E - A).$$

Звідси, скориставшись формулою $\Delta(AB) = \Delta(A)\Delta(B)$, отримаємо

$$\Delta^2(2E - A) = \Delta(2E)\Delta(2E - A),$$
$$\Delta(2E - A)(\Delta(2E - A) - \Delta(2E)) = 0.$$

Приклад 4.34. Матриця X є розв'язком матричного рівняння

$$AX^2 + BX = \Theta,$$

$$\text{де } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Довести, що $\Delta(X) = 0$.

Доведення. Із заданого рівняння маємо:

$$AX^2 = -BX,$$
$$\Delta(AX^2) = \Delta(-BX),$$
$$\Delta(A)\Delta(X^2) = -\Delta(B)\Delta(X).$$

Оскільки

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0, \quad \Delta(B) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

то $\Delta(X) = 0$.

Приклад 4.35. Знайти найбільше і найменше значення визначника:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{vmatrix},$$

де a, b, c — косинуси кутів, що утворюють деякий вектор з осями координат.

Розв'язання. Оскільки $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, то

$$\Delta = 1 + 2abc - a^2 - b^2 - c^2 = 2abc.$$

Отже, скориставшись нерівністю між середнім арифметичним і середнім геометричним трьох додатних чисел, отримаємо

$$1 = a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \text{ (знак рівності, коли } a^2 = b^2 = c^2\text{)},$$
$$\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \leq \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; (abc)^2 \leq \frac{1}{27}.$$

Тоді $|\Delta| = 2|abc| \leq \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$, тобто $\max\Delta = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$, $\min\Delta = -\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$, бо знак рівності має місце тільки за умови $a^2 = b^2 = c^2 = \dfrac{1}{27}$. Тому $\max\Delta$ досягається, коли всі косинуси додатні або два з трьох косинусів від'ємні; $\min\Delta$ досягається, коли один з косинусів від'ємний, а два інших мають однакові знаки.

Приклад 4.36. Довести, що для всіх допустимих значень x справедлива нерівність

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}^{1/2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

і з'ясувати, при яких x досягається знак рівності.

Доведення. Позначимо заданий визначник через $\Delta(x)$ і обчислимо його: після віднімання від другого рядка першого, а від четвертого — третього та в результаті очевидних перетворень, отримаємо

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-x^2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4-x^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (4-x^2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-x^2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (4-x^2)(1-x^2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(4-x^2)(1-x^2).$$

Розв'язавши методом інтервалів нерівність

$$-(x^2-4)(x^2-1) \geq 0,$$

знаходимо, що область допустимих значень заданої нерівності буде такою: $1 \leq |x| \leq 2$. Для завершення доведення достатньо переконатися, що для всіх $1 \leq |x| \leq 2$ справедлива нерівність

$$-(x^2-4)(x^2-1) \leq \frac{9}{4}.$$

Після очевидних перетворень маємо

$$x^4 - 5x^2 + \frac{25}{4} \geq 0, \text{ або } \left(x^2 - \frac{5}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Ця нерівність виконується для всіх $x \in \mathbb{R}$, а отже, і для допустимих значень даної нерівності $1 \leq |x| \leq 2$. Розв'язуючи рівняння $x^2 - \frac{5}{2} = 0$, знаходимо, що знак рівності в заданій нерівності досягається, якщо покласти $x = \pm\sqrt{2,5}$.

Приклад 4.37. Ров'язати рівняння

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \\ a^3 & a^2 & a & 1 \\ a^6 & a^6 & a^2 & 1 \\ a^9 & a^6 & a^3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язання. Як бачимо, $\Delta(x)$ – многочлен третього порядку. Це означає, що рівняння $\Delta(x) = 0$ має три корені, які легко підібрати так, щоб два рядки з чотирьох були однаковими. Отже, задане рівняння має такі корені: $x = a$, $x = a^2$, $x = a^3$.

4.7 Теорема Лапласа

Відомо, що будь-який визначник можна розкласти за елементами відповідного рядка чи стовпця, тобто виразити через визначники, порядок яких на одиницю менше.

Введемо значно більш загальну формулу розкладу, яка ґрунтується на узагальненні поняття мінора та алгебраїчного доповнення.

Виділимо у визначнику Δ n-го порядку які-небудь k рядків і k стовпців. Елементи, які стоять на перетині цих рядків і стовпців утворюють визначник M k-го порядку, який назвемо *мінором k-го порядку.* Викреслимо потім у визначнику Δ розглянуті рядки і стовпці та зсунемо елементи, які залишилися. Ми отримали мінор $\overline{M}$ $(n-k)$-го порядку.

Мінори M і $\overline{M}$ називаються взаємно доповнюючими.

Наприклад, виділимо у визначнику п'ятого порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

перший і третій рядки, третій і п'ятий стовпці. Ми отримаємо два взаємно доповнюючі мінори:

$$M = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{15} \\ a_{33} & a_{35} \end{vmatrix}, \quad \overline{M} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} \end{vmatrix}$$

Так узагальнюється поняття мінора. Тепер залишається узагальнити поняття алгебраїчного доповнення.

Алгебраїчним доповненням мінора M k *-го порядку називається доповнюючий мінор* $\overline{M}$ *, помножений на* $(-1)^{(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k)+(\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_k)}$ *, де* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ *і* $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ *— відповідно номери рядків і стовпців, які входять у мінор* M *.*

Наприклад, алгебраїчним доповненням мінора

$$M = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{15} \\ a_{33} & a_{35} \end{vmatrix}$$

визначника п'ятого порядку є

$$(-1)^{(1+3)+(3+5)} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} \end{vmatrix}.$$

Теорема 4.7.1 (Теорема Лапласа.). *Виділимо у визначнику* Δ *довільні* k *рядків (стовпців). Тоді визначник* Δ *дорівнює сумі добутків усіх мінорів* k *-го порядку утворених з елементів цих рядків (стовпців), на їх алгебраїчні доповнення.*

Приклад 4.38. Користуючись теоремою Лапласа, обчислити визначник

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ y_1 & y_2 & \cos\beta & \sin\beta \\ z_1 & z_2 & \cos\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Із елементів перших двох рядків заданого визначника утворимо всі можливі мінори другого порядку, які відмінні від нуля:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1,\ M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x_1 & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos\alpha,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x_1 & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin\alpha, M_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x_2 & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos\alpha,$$

$$M_5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x_2 & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin\alpha.$$

Знайдемо тепер відповідні їм алгебраїчні доповнення:

$$A_1 = (-1)^{(1+2)+(1+2)} \begin{vmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \cos\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix} = \sin\gamma\cos\beta - \cos\gamma\sin\beta = \sin(\gamma - \beta),$$

$$A_2 = (-1)^{(1+2)+(1+3)} \begin{vmatrix} y_2 & \sin\beta \\ z_2 & \sin\gamma \end{vmatrix} = -y_2\sin\gamma + z_2\sin\beta,$$

$$A_3 = (-1)^{(1+2)+(1+4)} \begin{vmatrix} y_2 & \cos\beta \\ z_2 & \cos\gamma \end{vmatrix} = y_2\cos\gamma - z_2\cos\beta,$$

$$A_4 = (-1)^{(1+2)+(2+3)} \begin{vmatrix} y_1 & \sin\beta \\ z_1 & \sin\gamma \end{vmatrix} = y_1\sin\gamma - z_1\sin\beta,$$

$$A_5 = (-1)^{(1+2)+(2+4)} \begin{vmatrix} y_1 & \cos\beta \\ z_1 & \cos\gamma \end{vmatrix} = -y_1\cos\gamma + z_1\cos\beta.$$

Застосувавши теорему Лапласа, маємо:

$$\Delta = \sum_{k=1}^{5} M_k A_k = (x_2 - x_1)\sin(\gamma - \beta) + \cos\alpha(-y_2\sin\gamma + z_2\sin\beta) +$$

$$+ \sin\alpha(y_2\cos\gamma - z_2\cos\beta) + \cos\alpha(y_1\sin\gamma - z_1\sin\beta) +$$

$$+ \sin\alpha(-y_1\cos\gamma + z_1\cos\beta) = (x_2 - x_1)\sin(\gamma - \beta) +$$

$$+ y_2(\sin\alpha\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma) - y_1(\sin\alpha\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma) +$$

$$+ z_2(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha) - z_1(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha) =$$

$$= (x_2 - x_1)\sin(\gamma - \beta) + (y_2 - y_1)\sin(\alpha - \gamma) + (z_2 - z_1)\sin(\beta - \alpha).$$

Приклад 4.39. Користуючись теоремою Лапласа, обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. У визначнику Δ виділимо два останніх рядки та утворимо всі можливі мінори другого порядку з елементів, що містяться в цих рядках:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2,\ M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 15,\ M_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 10,$$

$$M_4 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 10,\ M_5 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6,\ M_6 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -5.$$

Запишемо тепер відповідні алгебраїчні доповнення:

$$A_1=(-1)^{(3+4)+(1+2)}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-7,\ A_2=(-1)^{(3+4)+(1+3)}\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=-6,$$

$$A_3=(-1)^{(3+4)+(1+4)}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1,\ A_4=(-1)^{(3+4)+(2+3)}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-8,$$

$$A_5=(-1)^{(3+4)+(2+4)}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1,\ A_6=(-1)^{(3+4)+(3+4)}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2.$$

Отже, за теоремою Лапласа, маємо:

$$\Delta=\sum_{k=1}^{6}A_kM_k=$$

$$=(-7)2+(-6)15+1(10)+(-8)10+(-1)6+(-2)(-5)=-170.$$

4.8 Визначники спеціальних матриць

Відомо, що чим більше нулів серед елементів матриці і чим краще вони розташовані, тим легше обчислювати її визначник. Наприклад, згадаємо, що визначник трикутної матриці (верхньої чи нижньої) дорівнює добутку елементів її головної діагоналі.

Розглянемо другий важливий окремий випадок.

Теорема 4.8.1. *Для визначника* Δ *порядку* $n+m$ *, у якого на перетині перших* n *стовпців і останніх* m *рядків стоять нулі, має місце формула:*

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1\,n+1} & \dots & a_{1\,n+m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{n\,n+1} & \dots & a_{n\,n+m} \\ 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix}.$$

Нехай A і B – квадратні матриці порядків відповідно n і m, а нульова матриця Θ і матриця C – прямокутні. Тоді наведена теорема набуває більш компактного вигляду

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & C \\ \Theta & B \end{vmatrix} = \Delta(A)\Delta(B).$$

За допомогою даної теореми можна довести, що

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & \Theta \\ C & B \end{vmatrix} = \Delta(A)\Delta(B),\ \Delta = \begin{vmatrix} C & A \\ B & \Theta \end{vmatrix} = (-1)^{n+m}\Delta(A)\Delta(B).$$

Приклад 4.40. Проілюструємо застосування останньої формули при обчисленні визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 9 & 4 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Спочатку поміняємо перші два рядки з четвертим і третім відповідно. Маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 3 & 7 & 6 & 9 \\ 9 & 4 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Після додавання п'ятого стовпця до шостого і переставляння третього стовпця з п'ятим отримаємо, що

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & 8 & 3 & 7 & 6 & 15 \\ 9 & 4 & 0 & 0 & 3 & 10 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 3 & 15 \\ 9 & 4 & 3 & 0 & 0 & 10 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 7 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \cdot 10 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -100(-10) = 1000.$$

4.9 Метод зведення до трикутного вигляду

Цей метод полягає в тому, що заданий визначник шляхом перетворення, використовуючи властивості визначника, зводиться до такого вигляду, де всі елементи, які лежать по один бік від однієї з діагоналей, дорівнюють нулю. Випадок побічної діагоналі шляхом зміни порядку рядків (чи стовпців) на зворотний зводиться до випадку з головною діагоналлю. Отриманий визначник дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

Приклад 4.41. Обчислити визначник порядку n, елементи якого задані умовами $a_{i,j} = |i - j|$.

Розв'язання. Із кожного рядка віднімемо попередній, а потім останній стовпець додамо до решти. Маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \dots & n-4 & n-3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-2 & n-3 & n-4 & n-5 & \dots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} n-1 & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-3 & n-1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & \dots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & \dots & -2 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

Приклад 4.42. Обчислити

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Додамо до останнього рядка всі попередні. Маємо:

$$\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Тепер, віднявши від кожного стовпця попередній (із останнього передостанній), знаходимо:

$$\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ n & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ n-1 & 1 & 1-n & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \end{vmatrix}.$$

Далі віднімемо перший рядок від усіх наступних:

$$\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -n & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -n & 0 \end{vmatrix}.$$

Розклавши цей визначник за елементами останнього стовпця, знаходимо:

$$\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}(-1)^n \begin{vmatrix} -n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -n \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1+2n-2}n^{n-2} = (-1)^{n-1}\frac{n+1}{2}n^{n-1}.$$

4.10 Метод виділення лінійних множників

Суть метода полягає в тому, щоб шляхом перетворень отримати визначник, у якого всі елементи в деякому рядку (чи стовпці) мали б спільний множник, який потім виноситься за знак визначника.

Приклад 4.43. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Спочатку віднімемо перший рядок від другого та третього рядків, а потім винесемо спільні множники в елементів цих рядків за знак визначника. Маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2-a^2 & (b+1)^2-(a+1)^2 & (b+2)^2-(a+2)^2 \\ c^2-a^2 & (c+1)^2-(a+1)^2 & (c+2)^2-(a+2)^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ (b-a)(b+a) & (b-a)(b+a+2) & (b-a)(b+a+4) \\ (c-a)(c+a) & (c-a)(c+a+2) & (c-a)(c+a+4) \end{vmatrix} =$$

$$= (a-b)(a-c) \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b+a & b+a+2 & b+a+4 \\ c+a & c+a+2 & c+a+4 \end{vmatrix}.$$

Далі після віднімання першого стовпця від другого та третього стовпців та після очевидних перетворень, отримаємо

$$\Delta = (a-b)(a-c) \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 \\ b+a & 2 & 4 \\ c+a & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (a-b)(a-c) \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 \\ b+a & 2 & 0 \\ c+a & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(a-b)(a-c) \begin{vmatrix} b+a & 1 \\ c+a & 1 \end{vmatrix} = 4(a-b)(a-c)(b-c).$$

Приклад 4.44. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \sin\beta\cos\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \sin\gamma\cos\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Додамо до першого стовпця третій, а потім віднімемо перший рядок від другого та третього. Отриманий визначник розкладемо за елементами першого стовпця. Далі, скориставшись формулами для тригонометричних функцій, обчислюємо визначник другого порядку.

Маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha \\ 1 & \sin\beta\cos\beta & \cos^2\beta \\ 1 & \sin\gamma\cos\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha \\ 0 & \sin\beta\cos\beta - \sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\beta - \cos^2\alpha \\ 0 & \sin\gamma\cos\gamma - \sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\gamma - \cos^2\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{vmatrix} \sin 2\beta - \sin 2\alpha & \cos 2\beta - \cos 2\alpha \\ \sin 2\gamma - \sin 2\alpha & \cos 2\gamma - \cos 2\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sin(\beta-\alpha)\cos(\beta+\alpha) & \sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\gamma-\alpha)\cos(\gamma+\alpha) & \sin(\alpha-\gamma)\sin(\alpha+\gamma) \end{vmatrix} =$$

$$= \sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\begin{vmatrix} -\cos(\beta+\alpha) & \sin(\alpha+\beta) \\ -\cos(\gamma+\alpha) & \sin(\alpha+\gamma) \end{vmatrix} =$$

$$= \sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\left[\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\gamma) - \cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\left[\sin(2\alpha+\beta+\gamma) - \sin(\gamma-\beta) -\right.$$

$$\left. - \sin(2\alpha+\beta+\gamma) + \sin(\beta-\gamma)\right] =$$

$$= \sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\sin(\beta-\gamma).$$

Приклад 4.45. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. До першого рядка додамо сумму решти рядків:

$$\Delta = \begin{vmatrix} b+c+d-a & b+c+d-a & b+c+d-a & b+c+d-a \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix} =$$

$$= (b+c+d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix}.$$

Віднімемо перший стовпець від решти. Маємо:

$$\Delta = (b+c+d-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & -a-b & d-b & c-b \\ c & d-c & -a-c & b-c \\ d & c-d & b-d & -a-d \end{vmatrix} =$$

$$= (b+c+d-a)\begin{vmatrix} -a-b & d-b & c-b \\ d-c & -a-c & b-c \\ c-d & b-d & -a-d \end{vmatrix}.$$

Тепер додамо до першого рядка другий. Тоді визначник набуде такого вигляду:

$$\Delta = (b+c+d-a)\begin{vmatrix} -a-b-c+d & -a-b-c+d & 0 \\ d-c & -a-c & b-c \\ c-d & b-d & -a-d \end{vmatrix} =$$

$$= (b+c+d-a)(-a-b-c+d)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ d-c & -a-c & b-c \\ c-d & b-d & -a-d \end{vmatrix}.$$

Віднімемо від другого стовпця перший. Отримаємо:

$$\Delta = (b+c+d-a)(-a-b-c+d)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d-c & -a-d & b-c \\ c-d & b-c & -a-d \end{vmatrix} =$$

$$= (b+c+d-a)(-a-b-c+d)\begin{vmatrix} -a-d & b-c \\ b-c & -a-d \end{vmatrix}.$$

Насамкінець, додавши до першого рядка другий, знайдемо

$$\Delta = (b+c+d-a)(-a-b-c+d)\begin{vmatrix} -a-c-d+b & -a-c-d+b \\ b-c & -a-d \end{vmatrix} =$$

$$= (b+c+d-a)(-a-b-c+d)(-a-c-d+b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b-c & -a-d \end{vmatrix} =$$

$$= (b+c+d-a)(-a-b-c+d)(a+c+d-b)(a+b+d-c).$$

Приклад 4.46. Обчислити визначник $\Delta_n = |a_{ij}|_{i,j=1}^{n}$, де

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ i, & i \neq j \end{cases}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Розв'язання. З умови випливає, що

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \dots & 0 & n-1 \\ n & n & n & \dots & n & 0 \end{vmatrix} = n! \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

тепер від першого рядка віднімемо другий, від другого третій,..., від передостаннього — останній. В отриманому визначнику до другого стовпця додамо перший, до третього стовпця додамо другий і т. д. Отже,

$$\Delta_n = n! \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = n! \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n-1}(n-1)n! \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)n!.$$

Приклад 4.47. Обчислити визначник

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & \sin\alpha & \dots & \sin\alpha \\ \sin\alpha & 1 & \dots & \sin\alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin\alpha & \sin\alpha & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Спочатку до останнього рядка додамо решту рядків, а потім після винесення спільного множника за знак визначника в отриманому визначнику від кожного стовпця віднімемо останній. Маємо:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & \sin\alpha & \dots & \sin\alpha \\ \sin\alpha & 1 & \dots & \sin\alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n-1)\sin\alpha+1 & (n-1)\sin\alpha+1 & \dots & (n-1)\sin\alpha+1 \end{vmatrix} =$$

$$= ((n-1)\sin\alpha+1) \begin{vmatrix} 1 & \sin\alpha & \dots & \sin\alpha \\ \sin\alpha & 1 & \dots & \sin\alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=((n-1)\sin\alpha+1) \begin{vmatrix} 1-\sin\alpha & 0 & \dots & \sin\alpha \\ 0 & 1-\sin\alpha & \dots & \sin\alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= ((n-1)\sin\alpha+1)(1-\sin\alpha)^{n-1}.$$

4.11 Метод рекурентних співвідношень

Цей метод полягає в тому, що заданий визначник спочатку треба перетворити і розкласти за елементами рядка чи стовпця, а потім виразити через визначники того ж виду, але нижчого порядку. Отримані рівності називають рекурентними співвідношеннями.

Потім обчислюють стільки визначників нижчого порядку, скільки їх було в правій частині рекурентного співвідношення. Визначники більш високого порядку обчислюють послідовно з рекурентного співвідношення. Якщо треба отримати вираз для визначника будь-якого порядку n, то, обчисливши декілька визначників низьких порядків, намагаються побачити загальний вигляд шуканого виразу, а потім доводять справедливість цього виразу при будь-якому n за допомогою рекурентного співвідношення і методу математичної індукції по n.

Приклад 4.48. Обчислити визначник

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta_1 & \alpha & \alpha & \dots & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha+\beta_2 & \alpha & \dots & \alpha & \alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha & \alpha & \alpha & \dots & \alpha+\beta_{n-1} & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha & \dots & \alpha & \alpha+\beta_n \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. У заданому визначнику віднімемо з останнього стовпця перший, а потім отриманий визначник розкладемо за елементами останнього стовпця. Маємо:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta_1 & \alpha & \alpha & \dots & \alpha & -\beta_1 \\ \alpha & \alpha+\beta_2 & \alpha & \dots & \alpha & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha & \alpha & \alpha & \dots & \alpha+\beta_{n-1} & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha & \dots & \alpha & \beta_n \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+1}(-\beta_1)\begin{vmatrix} \alpha & \alpha+\beta_2 & \alpha & \dots & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha+\beta_3 & \dots & \alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha & \alpha & \alpha & \dots & \alpha+\beta_{n-1} \\ \alpha & \alpha & \alpha & \dots & \alpha \end{vmatrix} +$$

$$+\beta_n \begin{vmatrix} \alpha+\beta_1 & \alpha & \alpha & \dots & \alpha \\ \alpha & \alpha+\beta_2 & \alpha & \dots & \alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha & \alpha & \alpha & \dots & \alpha+\beta_{n-1} \end{vmatrix}.$$

У першому визначнику правої частини рівності переставимо послідовно перший стовпець з другим, третім, ... $(n-1)$ стовпцем. Усього треба зробити $(n-2)$ перестановок. Другий же визначник того ж типу, що і Δ_n , але його розмір на одиницю менше. Отже,

$$\Delta_n = (-1)^{n+2}(-1)^{n-2}\beta_1 \begin{vmatrix} \alpha+\beta_2 & \alpha & \dots & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha+\beta_3 & \dots & \alpha & \alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha & \alpha & \dots & \alpha+\beta_{n-1} & \alpha \\ \alpha & \alpha & \dots & \alpha & \alpha \end{vmatrix} + \beta_n\Delta_{n-1}.$$

Після віднімання від перших $n-1$ стовпців останнього отримаємо

$$\begin{vmatrix} \beta_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \\ 0 & \beta_3 & 0 & \dots & 0 & \alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{n-1} & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha\beta_2\beta_3\dots\beta_{n-1}.$$

Тоді

$$\Delta_n = \alpha\beta_1\beta_2\dots\beta_{n-1} + \beta_n\Delta_{n-1} = \alpha\beta_1\beta_2\dots\beta_{n-1} +$$
$$+ \beta_n(\alpha\beta_1\beta_2\dots\beta_{n-2} + \beta_{n-1}\Delta_{n-2}) =$$

$$= \alpha\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-1} + \alpha\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-2}\beta_n + \beta_n\beta_{n-1}\Delta_{n-2} = \cdots =$$

$$= \alpha\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-1} + \alpha\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-2}\beta_n + \alpha\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-3}\beta_{n-1}\beta_n + \cdots +$$

$$+ \beta_2\beta_3\ldots\beta_n(\alpha+\beta_1) = \beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_n\left(\frac{\alpha}{\beta_1} + \frac{\alpha}{\beta_2} + \cdots + \frac{\alpha}{\beta_n} + 1\right).$$

Приклад 4.49. Обчислити визначник $\Delta = |a_{ij}|$, де $a_{ij} = x_i$, якщо $i = j$ і $a_{ij} = b$ $j \neq i$, коли $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Розв'язання. Заданий визначник буде мати такий вигляд:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x_1 & b & b & \ldots & b \\ b & x_2 & b & \ldots & b \\ b & b & x_3 & \ldots & b \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b & b & b & \ldots & x_n \end{vmatrix}.$$

Віднімемо перший рядок від кожного з решти рядків, після чого розкладемо отриманий визначник за елементами останнього стовпця:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x_1 & b & b & \ldots & b & b \\ b-x_1 & x_2-b & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b-x_1 & 0 & x_3-b & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \\ b-x_1 & 0 & 0 & \ldots & x_{n-1}-b & 0 \\ b-x_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & x_n-b \end{vmatrix} =$$

$$= (x_n - b)\begin{vmatrix} x_1 & b & b & \ldots & b \\ b-x_1 & x_2-b & 0 & \ldots & 0 \\ b-x_1 & 0 & x_3-b & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ b-x_1 & 0 & 0 & \ldots & x_{n-1}-b \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix} b-x_1 & x_2-b & 0 & \dots & 0 \\ b-x_1 & 0 & x_3-b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ b-x_1 & 0 & 0 & \dots & x_{n-1}-b \\ b-x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$=(x_n-b)\Delta_{n-1}+(-1)^{n+1}(-1)^n b(b-x_1)(x_2-b)(x_3-b)\dots(x_{n-1}-b).$$

Отже, маємо таку рекурентну формулу:

$$\Delta_n=(x_n-b)\Delta_{n-1}+b(x_{n-1}-b)(x_{n-2}-b)\dots(x_1-b).$$

Використовуючи її послідовно, отримаємо

$$\begin{aligned}\Delta_n&=(x_n-b)(x_{n-1}-b)\Delta_{n-2}+b(x_{n-2}-b)(x_{n-3}-b)\dots(x_1-b)+\\&+b(x_{n-1}-b)(x_{n-2}-b)\dots(x_1-b)=(x_n-b)(x_{n-1}-b)\Delta_{n-2}+\\&+b(x_{n-1}-b)(x_{n-2}-b)\dots(x_1-b)+(x_n-b)b(x_{n-2}-b)\dots(x_1-b)=\dots=\\&=(x_n-b)(x_{n-1}-b)\dots(x_2-b)\Delta_1+b(x_{n-1}-b)(x_{n-2}-b)\dots(x_1-b)+\\&+(x_n-b)b(x_{n-2}-b)\dots(x_1-b)+\dots+(x_n-b)\dots(x_4-b)(x_3-b)b(x_1-b).\end{aligned}$$

Оскільки $\Delta_1=x_1=(x_1-b)+b$, то

$$\begin{aligned}\Delta_n&=(x_n-b)(x_{n-1}-b)\dots(x_2-b)(x_1-b)+\\&+b(x_{n-1}-b)(x_{n-2}-b)\dots(x_1-b)+(x_n-b)b(x_{n-2}-b)\dots(x_1-b)+\\&+\dots+(x_n-b)(x_{n-1}-b)\dots(x_2-b)b,\end{aligned}$$

тобто

$$\Delta_n=\prod_{i=1}^{n}(x_i-b)+b\sum_{k=1}^{n}\prod_{i=1,\,i\neq k}^{n}(x_i-b).$$

Приклад 4.50. Обчислити визначник $\Delta_n=|a_{ij}|$, де $a_{ij}=0$, коли $i=j$; $a_{ij}=a$, якщо $j<i$; $a_{ij}=b$ при $j>i$, для $i=1,2,\dots,n$, $j=1,2,\dots,n$.

Розв'язання. Заданий визначник має такий вигляд:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & b & b & \dots & b & b \\ a & 0 & b & \dots & b & b \\ a & a & 0 & \dots & b & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & 0 & b \\ a & a & a & \dots & a & 0 \end{vmatrix}.$$

Після віднімання від першого рядка другого, від другого — третього, ... , від передостаннього — останнього, отримаємо визначник, який розкладемо за елементами першого стовпця:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a & b \\ a & a & a & \dots & a & 0 \end{vmatrix} = -a \begin{vmatrix} -a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a & b \\ a & a & a & \dots & a & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{n+1}a \begin{vmatrix} b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -a & b \end{vmatrix} = -a\Delta_{n-1} + (-1)^{n+1}ab^{n-1}.$$

Отримаємо рекурентну формулу:

$$\Delta_n = -a\Delta_{n-1} + (-1)^{n+1}ab^{n-1}.$$

Застосовуючи цю формулу $n-2$ рази, виразимо визначник Δ_n через визначник Δ_2:

$$\begin{aligned}\Delta_n &= -a\Delta_{n-1} + (-1)^{n+1}ab^{n-1} = -a(-a\Delta_{n-2} + (-1)^n ab^{n-2})+ \\ &+ (-1)^{n+1}ab^{n-1} = a^2\Delta_{n-2} + (-1)^{n+1}a^2b^{n-2} + (-1)^{n+1}ab^{n-1} = \\ &= a^2(-a\Delta_{n-3} + (-1)^{n-1}ab^{n-3}) + (-1)^{n+1}a^2b^{n-2} + (-1)^{n+1}ab^{n-1} = \\ &= -a^3\Delta_{n-3} + (-1)^{n-1}a^3b^{n-3} + (-1)^{n-1}a^2b^{n-2} + (-1)^{n+1}ab^{n-1} = \cdots = \\ &= (-1)^{n-2}a^{n-2}\Delta_2 + (-1)^{n+1}\left(a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 + a^{n-4}b^4 + \cdots + ab^{n-1}\right).\end{aligned}$$

Оскільки

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{vmatrix} = -ab, \text{ то}$$

$$\Delta_n = (-1)^{n+1}\left(a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 + \cdots + ab^{n-1}\right) \text{ або}$$
$$\Delta_n = (-1)^{n+1}ab\left(a^{n-2} + a^{n-3}b + a^{n-4}b^3 + \cdots + b^{n-2}\right).$$

Якщо $a \neq b$, $\Delta_n = (-1)^{n+1}ab\dfrac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a - b}$.
Якщо $a = b$, $\Delta_n = (-1)^{n+1}(n-1)a^n$.

4.12 Системи лінійних рівнянь

Приклад 4.51. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2} + x_{n-1} &= n, \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2} + x_n &= n-1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ \ldots, \\ x_1 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n &= 2, \\ x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n &= 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Додаючи всі рівняння системи і скориставшись формулою суми арифметичної прогресії, отримаємо рівняння

$$(n-1)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

звідки знаходимо

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2(n-1)}.$$

Віднімаючи від цієї рівності по черзі всі рівняння системи, маємо

$$x_k = \frac{n(n+1)}{2(n-1)} - k, \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Приклад 4.52. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n & = & a_1, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + \cdots + (n-1)x_n + nx_1 & = & a_2, \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 + \cdots + (n-1)x_1 + nx_2 & = & a_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots, \\ x_{n-1} + 2x_n + 3x_1 + \cdots + x_{n-2} & = & a_{n-1}, \\ x_n + 2x_1 + 3x_2 + \cdots + nx_{n-1} & = & a_n. \end{cases}$$

Розв'язання. Сума всіх рівнянь системи буде мати такий вигляд:

$$(1 + 2 + \cdots + n)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

звідки знаходимо

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{2}{n^2 + n} \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Далі віднімемо від другого рівняння системи перше:

$$(n-1)x_1 - x_2 - x_3 - \cdots - x_n = a_2 - a_1.$$

Складаючи останні дві рівності, знаходимо

$$nx_1 = \frac{2}{n^2 + n} \sum_{i=1}^{n} a_i + a_2 - a_1, \text{ тобто } x_1 = \frac{2}{n^3 + n^2} \sum_{i=1}^{n} a_i + \frac{a_2 - a_1}{n}.$$

Аналогічно знаходимо решту невідомих, але в випадку $k = n$ з першого рівняння віднімається останнє.

Приклад 4.53. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \cdots + 9x_9 + 10x_{10} & = & 55, \\ x_2 + 2x_3 + \cdots + 9x_{10} + 10x_1 & = & 55, \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots, \\ x_{10} + 2x_1 + \cdots + 9x_8 + 10x_9 & = & 55. \end{cases}$$

Розв'язання. Склавши всі рівняння системи, отримаємо

$$(1 + 2 + \cdots + 10)(x_1 + x_2 + \cdots + x_{10}) = 10 \cdot 55,$$

звідки знаходимо $(x_1 + x_2 + \cdots + x_{10}) = 10$. Віднімаючи від другого рівняння системи перше, знаходимо

$$9x_1 - x_2 - \cdots - x_{10}) = 0.$$

Склавши дві останні рівності, одержимо $x_1 = 1$. Аналогічно знаходимо решту невідомих.

Приклад 4.54. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_n + x_{n+1} & = & b_1, \\ x_{n-1} + x_{n+1} & = & b_2, \\ \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots, \\ x_1 + x_{n+1} & = & b_n, \\ a(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - x_{n+1} & = & 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Склавши перші n рівнянь системи, отримаємо

$$\sum_{i=1}^{n} x_i + nx_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} b_i \text{ або } \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} b_i - nx_{n+1}.$$

Тоді останнє рівняння системи буде мати такий вигляд:

$$a\sum_{i=1}^{n} b_i - (an + 1)x_{n+1} = 0.$$

Якщо $a \neq -\dfrac{1}{n}$, то $x_{n+1} = \dfrac{a\sum\limits_{i=1}^{n} b_i}{an+1}$, $x_i = b_i - \dfrac{a\sum\limits_{i=1}^{n} b_i}{an+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Якщо $a = -\dfrac{1}{n}$, то система буде мати нескінченну множину розв'язків

$$x_i = b_i - x_{n+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad x_{n+1} \in \mathbb{R}.$$

Приклад 4.55. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 & = & 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots, \\ x_{99} + x_{100} + x_1 & = & 0, \\ x_{100} + x_1 + x_2 & = & 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Склавши всі рівняння системи, отримаємо

$$3x_1 + 3x_2 + \cdots + 3x_{100} = 0 \text{ або } x_1 + x_2 + \cdots + x_{100} = 0.$$

Перепишемо останню рівність у такому вигляді:

$$x_1 + (x_2 + x_3 + x_4) + \cdots + (x_{98} + x_{99} + x_{100}) = 0.$$

Оскільки кожна сума в дужках дорівнює нулю, то $x_1 = 0$. Аналогічно знайдемо решту невідомих $x_2 = x_3 = \cdots = x_{100} = 0$. Отже, система має тільки нульовий розв'язок.

РОЗДІЛ 5

Розв'язання олімпіадних задач

5.1 Матриці

Приклад 5.1. Знайти всі квадратні матриці X другого порядку, для яких $X^2 = E$.

Розв'язання. Нехай $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ – шукана матриця, тоді

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix}.$$

Звідси та з умови задачі отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} a^2+bc=1, \\ bc+d^2=1, \\ ab+bd=0, \\ ac+dc=0. \end{cases} \iff \begin{cases} a^2+bc=1, \\ cb+d^2=1, \\ b(a+d)=0, \\ c(a+d)=0. \end{cases}$$

З двох останніх рівнянь випливає, що або $b=c=0$, або $a+d=0$.

Якщо $b=c=0$, то відповідно з першого та другого рівнянь знаходимо, що $a=\pm1$, $d=\pm1$, тобто можна записати такі рівності з X:

1) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; 3) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; 4) $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

У випадку $a+d=0$ друге рівняння системи збігається з першим і тоді система набуде такого вигляду:

$$\begin{cases} a^2+bc=1, \\ d=-a. \end{cases}$$

З першого рівняння системи знаходимо $a=\pm\sqrt{1-bc}$, $bc<1$. Зауважимо, що у випадку $b=c=0$ отримаємо $a=-d=\pm1$, тобто вирази 3) і 4) будуть варіантами розв'язків для X.

Відповідь: $X=\pm E$ і $X=\begin{pmatrix} \pm\sqrt{1-bc} & b \\ c & \mp\sqrt{1-bc} \end{pmatrix}$, $bc<1$.

Приклад 5.2. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -20 & 10 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. З даного матричного рівняння випливає, що розмір шуканої матриці X буде 2×1. Нехай $X=\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, де α і β – невідомі елементи матриці. Виконаємо тепер дії у лівій частині рівняння:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha+\beta \\ 2\alpha-2\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4\alpha+2\beta & -2\alpha-\beta \\ 4\alpha-4\beta & -2\alpha+2\beta \end{pmatrix}.$$

Порівнюючи елементи отриманої матриці з відповідними елементами матриці в правій частині рівняння, знаходимо невідомі α і β, наприклад, з такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} 4\alpha+2\beta=-2, \\ 4\alpha-4\beta=-20, \end{cases} \Rightarrow \ \beta=3,\ \alpha=-2.$$

Відповідь: $X^T=(-2,3)$.

Приклад 5.3. Чи можливо при елементарних перетвореннях матриці A змінити ранг матриці A^2?

Розв'язання. Матриця $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ шляхом елементарних перетворень зводиться до матриці $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. При цьому $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, а $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ранг змінився.

Відповідь: можливо.

Приклад 5.4. Знайти $P(A)$, якщо $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 7$ та

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Оскільки

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix},$$

то

$$P(A) = A^3 + 2A^2 + A + 7E = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 11 & -6 \\ -2 & -6 & 15 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $P(A) = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 11 & -6 \\ -2 & -6 & 15 \end{pmatrix}$.

Приклад 5.5. Довести, що матриця $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ задовольняє рівнянню

$$X^2 - (a+d)X + (ad - bc)E = \Theta,$$

де $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Підставивши матрицю A в це матричне рівняння, отримаємо

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=\Theta,$$

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix}-(a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+(ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

що і треба було довести.

Приклад 5.6. Розв'язати рівняння $X-AX=B$, якщо $A^2=\Theta$.

Розв'язання. З тотожності $E=E^2-A^2$ випливає, що $(E-A)^{-1}$ існує і дорівнює $(E+A)$. Справді,

$E\equiv(E-A)(E+A),\ 1=\Delta(E)=\Delta(E-A)\Delta(E+A)\ \Rightarrow\ (E-A)^{-1}=E+A.$

Тоді задане рівняння можна розв'язати так:

$$X(E-A)=B,$$

$$X=B(E-A)^{-1}=B(E+A),$$

$$X=B+BA.$$

Відповідь: $X=B+BA$.

Приклад 5.7. Чи існують 2018 різних дійсних матриць $A_1, A_2, \ldots, A_{2018}$ розміром 3×3, таких що $A_iA_j=A_j$ при будь-яких $i,\ j$.

Розв'язання. Так, існують. Нехай, наприклад, $A_k=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Тоді, дійсно,

$$A_iA_j=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ j & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ j & 0 & 1 \end{pmatrix}=A_j.$$

Наведемо ще один приклад. Нехай $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & k & 1 \end{pmatrix}$. Тоді

$$A_iA_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & j & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & j & 1 \end{pmatrix} = A_j.$$

Приклад 5.8. Розв'язати матричне рівняння $AXB + AX = E$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Оскільки $AX = AXE$, то матричне рівняння набуває такого вигляду:

$$AXB + AXE = E.$$

Далі після винесення спільного множника в лівій частині рівняння за дужки і множення обох частин отриманого рівняння спочатку на A^{-1} ($\Delta(A) \neq 0$) зліва, а потім на $(B+E)^{-1}$ ($\Delta(B+E) \neq 0$) справа отримаємо

$$AX(B+E) = E,\ X(B+E) = A^{-1},\ X = A^{-1}(B+E)^{-1}.$$

Оскільки $\Delta(A) = 4$, а $\Delta(B+E) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$, то відповідно

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ і } (B+E)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$X = A^{-1}(B+E)^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $X = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Приклад 5.9. Знайти матрицю X з рівняння $AX - 5X = B$, якщо A і B – задані матриці порядку n, причому $A^3 = 5(A^2 + E)$, де E – одинична матриця.

Розв'язання. Оскільки $A^3 = 5(A^2 + E)$, то

$$A^3 - 5A^2 = 5E \text{ і } A^2(A - 5E) = 5E.$$

Звідси випливає, що $\frac{1}{5}A^2$ – обернена матриця до $(A - 5E)$ та із заданого рівняння маємо:

$$X(A - 5E) = B,\ X = \frac{1}{5}A^2 B.$$

Відповідь: $X = \frac{1}{5}A^2 B$.

Приклад 5.10. Знайти ранг матриці $A = (a_{ij})$ розміром $n \times n$ ($n \geq 3$), де $a_{ij} = i + j - 2ij$.

Розв'язання. Зазначимо, що

$$a_{1j} = 1 + j - 2j = 1 - j,$$
$$a_{2j} = 2 + j - 4j = 2 - 3j,$$
$$a_{3j} = 3 + j - 6j = 3 - 5j = -(1 - j) + 2(2 - 3j) = -a_{1j} + 2a_{2j}.$$

Доведемо, що $a_{i+2\,j} = -a_{ij} + 2a_{i+1\,j}$. Справді, оскільки

$$a_{i+1\,j} = i + 1 + j - 2(i + 1)j = i + 1 - j - 2ij,$$

то

$$\begin{aligned} a_{i+2\,j} &= i + 2 + j - 2(i + 2)j = i + 2 - 3j - 2ij = \\ &= -(1 + i - 2ij) + 2(i + 1 - j - 2ij) = -a_{ij} + 2a_{i+1\,j}. \end{aligned}$$

Таким чином, кожний рядок, починаючи з третього, є лінійною комбінацією двох попередніх, отже, і двох перших. Оскільки перші два рядки лінійно незалежні, то ранг дорівнює 2.

Відповідь: 2.

Приклад 5.11. Обчислити $\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\right)^n$.

Розв'язання. Якщо матриці A і B не переставні, то, взагалі кажучи,

$$(AB)^n \neq A^n B^n.$$

Наприклад,

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq$$
$$\neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Але в деяких випадках добуток матриць значно легше піднести до степеня, ніж піднести до степеня кожний співмножник. Так, якщо B – невироджена матриця, то

$$(BAB^{-1})^n = \underbrace{BAB^{-1} \cdot BAB^{-1} \dots BAB^{-1}}_{n} = B\underbrace{AEAE\dots A}_{n}B^{-1} = BA^nB^{-1}.$$

Оскільки $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, то за наведеною вище формулою отримаємо

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\right)^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Далі методом математичної індукції знайдемо матрицю $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n-1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n-1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, остаточно маємо

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\right)^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} n+2 & 1 \\ 3n+5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3n+1 & -n \\ 9n & -3n+1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} 3n+1 & -n \\ 9n & -3n+1 \end{pmatrix}$.

Приклад 5.12. Нехай A, E, Θ – матриці розміром $n \times n$ (E – одинична, Θ – нульова) і $A^k = \Theta$ при деякому $k > 1$. Довести, що $(E-A)^{-1}$ існує і виразити її через A.

Розв'язання. З умови задачі випливає тотожність $E = E^k - A^k$, звідки маємо

$$E = (E-A)(E^{k-1} + AE^{k-2} + \cdots + A^{k-2}E + A^{k-1}) =$$
$$= (E-A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}),$$
$$\Delta(E) = \Delta(E-A)\Delta(E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}),$$
$$1 = \Delta(E-A)\Delta(E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}).$$

Це означає, що $\Delta(E-A) \neq 0$, тобто матриця $E-A$ невироджена і

$$(E-A)^{-1} = (E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}).$$

Відповідь: $(E-A)^{-1} = (E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1})$.

Приклад 5.13. Знайти матриці X і Y із системи матричних рівнянь

$$\begin{cases} aX + bY = A, \\ cX + dY = B, \end{cases}$$

якщо $abcd \neq 0$, A і B — матриці розміром $n \times n$.

Розв'язання. Розв'яжемо задану систему методом виключення однієї з матриць. Для цього помножимо рівняння системи відповідно на

$(-c)$ і a, а потім їх додамо. Маємо:

$$\begin{cases} -acX - bcY = -cA, \\ acX + adY = aB, \end{cases}$$

звідки знаходимо

$$Y = \frac{aB - cA}{ad - bc},\ (ad - bc \neq 0).$$

Аналогічно знаходимо

$$X = \frac{dA - bB}{ad - bc}.$$

Якщо $ad - bc = 0$, то $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} = k$ і система набуде такого вигляду:

$$\begin{cases} ckX + dkY = A, \\ cX + dY = B. \end{cases}$$

Звідси випливає, що розв'язок існує тільки у випадку $A = kB$, причому

$$Y = \frac{1}{b}(A - aX),$$

де X – довільна матриця розміром $n \times n$.

Відповідь: X – довільна матриця розміром $n \times n$, $Y = \dfrac{1}{b}(A - aX)$.

Приклад 5.14. Обчислити $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{2017}$.

Розв'язання. Знайдемо декілька перших степеней матриці A: A^2, A^3 і застосуємо метод математичної індукції. Маємо:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 2+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 2^2 & 2+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^2+2+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}.$$

Нехай

$$A^{n-1} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$A^n = A^{n-1}A = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix},$$

бо $2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+1 = 2^n - 1$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 2^{2017} & 2^{2017}-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2017} \end{pmatrix}$.

Приклад 5.15. Знайти матрицю X, яка задовольняє рівняння

$$\left(2X^2\right)^{-1} = 2X^{-1}.$$

Розв'язання. З умови та означення оберненої матриці випливає, що

$$2X^{-1} \cdot 2X^2 = E,$$

де E – одинична матриця того ж порядку, що і матриця X. Далі

$$4\left(X^{-1}X^2\right) = E,\ 4\left(X^{-1}X\right)X = E,\ 4X = E,\ X = \frac{1}{4}E.$$

Відповідь: $X = \dfrac{1}{4}E$.

Приклад 5.16. Знайти матрицю A^{2018}, якщо $A = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Оскільки задана матриц A може бути записана у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix},$$

то, скориставшись формулою (приклад 11, метод математичної індукції)

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6}\cdot n & -\sin\frac{\pi}{6}\cdot n \\ \sin\frac{\pi}{6}\cdot n & \cos\frac{\pi}{6}\cdot n \end{pmatrix},$$

отримаємо

$$A^{2018} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6}\cdot 2018 & -\sin\frac{\pi}{6}\cdot 2018 \\ \sin\frac{\pi}{6}\cdot 2018 & \cos\frac{\pi}{6}\cdot 2018 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Приклад 5.17. Довести, що рівняння $X^2-5X+4E=\Theta$ на множині квадратних матриць порядку 2018 має принаймні 2^{2018} розв'язків.

Розв'язання. Шукаємо X у вигляді діагональної матриці $X = diag\{x_1, x_2, \ldots, x_{2018}\}$. Тоді $x_i^2 - 4x_i + 4 = 0$ і $x_i = 4$ або $x_i = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, 2018)$. Різних упорядкованих зібрань таких чисел, а отже, і різних матриць – 2^{2018}.

Приклад 5.18. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} A_n^n$, якщо $A_n = \begin{pmatrix} \sin\frac{1}{n} & \sin\frac{1}{n} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Застосовуючи метод математичної індукції, отримаємо

$$A_n^2 = \begin{pmatrix} \sin\frac{1}{n} & \sin\frac{1}{n} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\frac{1}{n} & \sin\frac{1}{n} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \left(1+\sin\frac{1}{n}\right)\sin\frac{1}{n} & \left(1+\sin\frac{1}{n}\right)\sin\frac{1}{n} \\ \left(1+\sin\frac{1}{n}\right) & \left(1+\sin\frac{1}{n}\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \left(1+\sin\frac{1}{n}\right) \begin{pmatrix} \sin\frac{1}{n} & \sin\frac{1}{n} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \left(1+\sin\frac{1}{n}\right) A_n,$$

$$A_n^3 = \left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^2 A_n, \ \ldots, A_n^n = \left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^{n-1} A_n.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} A_n^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} \sin\frac{1}{n} & \sin\frac{1}{n} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e & e \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e & e \end{pmatrix}$.

Приклад 5.19. Довести, що матричне рівняння $X^2 + 4X + A = \Theta$, де

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -8 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

у класі дійсних матриць розв'язків не має.

Розв'язання. Після очевидних перетворень маємо:

$$X^2 + 4X + A = X^2 + 4EX + 4E^2 - 4E^2 + A = \Theta,$$

$$(X + 2E)^2 = 4E - A,$$

$$\Delta^2(X + 2E) = \Delta(4E - A).$$

Ліва частина останньої числової рівності невідома, а права

$$\Delta(4E - A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 8 \\ 0 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -40 < 0,$$

що неможливо, бо $\Delta^2(X + 2E) \geq 0$.

Таким чином, задане рівняння в класі дійсних матриць розв'язків не має.

Приклад 5.20. Нехай A – матриця розміром $n \times n$ і $A^3 = \Theta$. Довести, що існує матриця X така, що $X^3 = E + A$.

Розв'язання. Матрицю будемо шукати в такому вигляді

$$X = E + \alpha A + \beta A^2,$$

де α і β – невідомі коефіцієнти. Після підстановки значення X в рівняння $X^3 = E + A$ і піднесення до кубу лівої частини рівняння, а також скориставшись формулою $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$, отримаємо

$$\left(E + \alpha A + \beta A^2\right)^3 = E + A,$$

$$(E + \alpha A)^3 + \beta^3 A^6 + 3(E + \alpha A)\beta A^2(E + \alpha A + \beta A^2) = E + A,$$

$$E + 3\alpha EA + 3\alpha^2 A^2 + 3\beta A^2(E + \alpha A + \beta A^2) = E + A,$$

$$3\alpha A + 3\alpha^2 A^2 + 3\beta A^2 = A,$$

звідки знаходимо $\alpha = \dfrac{1}{3}$, $\beta = -\dfrac{1}{9}$.

Отже, матриця, яка задовольняє умову задачі існує і має такий вигляд: $X = E + \dfrac{1}{3}A - \dfrac{1}{9}A^2$. Проведена перевірка показує, що це дійсно так:

$$X^3 = \left(E + \frac{1}{3}A - \frac{1}{9}A^2\right)^3 =$$

$$= \left(E + \frac{1}{3}A\right)^3 - \left(\frac{1}{9}A^2\right)^3 - \frac{1}{3}\left(E + \frac{1}{3}A\right)A^2\left(E + \frac{1}{3}A - \frac{1}{9}A^2\right) =$$

$$E + A + \frac{1}{3}A^2 - \frac{1}{3}A^2\left(E + \frac{1}{3}A\right) = E + A + \frac{1}{3}A^2 - \frac{1}{3}A^2 = E + A.$$

Приклад 5.21. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}^n$.

Розв'язання. Оскільки

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = A,$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = A$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Приклад 5.22. Знайти, при яких $a \in \mathbb{R}$ існуватиме $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$, де $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^n$.

Розв'язання. Аналогічно тому, як робилось у прикладі 3.2 розділу

3.3, знаходимо

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

Коли $|a|<1$, то існує

$$\lim_{n\to\infty} A^n = \begin{pmatrix} 0 & \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-a^n}{1-a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{1-a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $|a|<1$.

Приклад 5.23. Обчислити $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{2018}$.

Розв'язання. Оскільки

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 3^2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3^2 B,$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E, \text{ то}$$

$$A^{2018} = \left(A^2\right)^{1009} = 3^{2018}B^{1009} = 3^{2018}\left(B^3\right)^{672}B^2 = 3^{2018}B^2, \text{ тобто}$$

$$A^{2018} = 3^{2018} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $3^{2018} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Приклад 5.24. Обчислити $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2017}$.

Розв'язання. Нехай $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Тоді

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E, \text{ а}$$

$$A^{2017} = \left(A^2\right)^{1008} A = (-E)^{1008} A = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Приклад 5.25. Обчислити $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{18}$.

Розв'язання. Нехай $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A + E$. Тоді

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 6 & 0 \\ -24 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -12 & 6 & 0 \\ -24 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = A^5 = \cdots = A^{18} = \Theta.$$

За формулою матричного бінома знаходимо

$$(A+E)^{18} = \sum_{k=0}^{18} C_{18}^k A^k E^{18-k} = \sum_{k=0}^{2} C_{18}^k A^k E^{18-k} = E + 18A + 153A^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 54 \\ 0 & 0 & 108 \\ -72 & 36 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1836 & 918 & 0 \\ 3672 & 1836 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1835 & 918 & 54 \\ 3672 & 1837 & 108 \\ -72 & 36 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} -1835 & 918 & 54 \\ 3672 & 1837 & 108 \\ -72 & 36 & 1 \end{pmatrix}$.

Приклад 5.26. Знайти найменше $n \in \mathbb{N}$, при якому виконується рівність

$$\frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Користуючись властивостями матриць і результатами розв'язаного прикладу

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix},$$

отримаємо

$$\frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}^n =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{6} & -\sin\frac{n\pi}{6} \\ \sin\frac{n\pi}{6} & \cos\frac{n\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sin\frac{n\pi}{6} = 0, \\ \cos\frac{n\pi}{6} = 1, \end{cases} \Rightarrow n = 12k,\ k \in \mathbb{N}.$$

Відповідь: Найменше $n = 12$.

Приклад 5.27. Обчислити $\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

Розв'язання. Нехай $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ 0 & a_n & d_n \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}$. Тоді $a_1 = 1$, $b_1 = \dfrac{1}{3}$, $c_1 = \dfrac{1}{2}$, $d_1 = \dfrac{1}{5}$. З рівності $A^{n+1} = A^n A$ маємо

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \\ 0 & a_{n+1} & d_{n+1} \\ 0 & 0 & a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ 0 & a_n & d_n \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_n & 1/3\,a_n + b_n & 1/2\,a_n + 1/5\,b_n + c_n \\ 0 & a_n & 1/5\,a_n + d_n \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

Звідси отримуємо таку систему

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n, \\ b_{n+1} = 1/3\,a_n + b_n, \\ c_{n+1} = 1/2\,a_n + 1/5\,b_n + c_n, \\ d_{n+1} = 1/5\,a_n + d_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n = 1, \\ b_{n+1} - b_n = 1/3, \\ c_{n+1} - c_n = 1/2 + 1/5\,b_n, \\ d_{n+1} - d_n = 1/5, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n = 1, \\ b_n = n/3, \\ c_{n+1} - c_n = 1/2 + n/15, \\ d_n = n/5. \end{cases}$$

З рівняння $c_{n+1} - c_n = 1/2 + n/15$ знайдемо c_n. Маємо

$$c_2 - c_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{15},$$
$$c_3 - c_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{15},$$
$$\ldots,$$
$$c_n - c_{n-1} = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{15}.$$

Звідси випливає, що $c_n = \dfrac{n}{2} + \dfrac{n(n-1)}{30} = \dfrac{n(n-14)}{30}$.

Відповідь: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/3 & n(n-14)/30 \\ 0 & 1 & n/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Приклад 5.28. Знайти A^{2018}, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Покажемо спочатку, що A^4 – діагональна матриця:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \cdot 3^2 \\ 0 & 3^2 & 0 \\ -2 \cdot 3^2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \cdot 3^2 \\ 0 & 3^2 & 0 \\ -2 \cdot 3^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 3^3 & 0 & 2 \cdot 3^3 \\ 0 & 3^3 & 0 \\ -2 \cdot 3^3 & 0 & -2 \cdot 3^3 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} -2\cdot 3^3 & 0 & 2\cdot 3^3 \\ 0 & 3^3 & 0 \\ -2\cdot 3^3 & 0 & -2\cdot 3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\cdot 3^4 & 0 & 0 \\ 0 & 3^4 & 0 \\ 0 & 0 & -4\cdot 3^4 \end{pmatrix}.$$

Неважко переконатись, що множення діагональних матриць зводиться до множення відповідних діагональних елементів. Тому маємо

$$A^{2018} = \left(A^4\right)^{504} A^2 = \begin{pmatrix} 2^{1008}\cdot 3^{2016} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{2016} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{1008}\cdot 3^{2016} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\cdot 3^2 \\ 0 & 3^2 & 0 \\ -2\cdot 3^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2^{1009}\cdot 3^{2018} \\ 0 & 3^{2018} & 0 \\ -2^{1009}\cdot 3^{2018} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (18)^{1009} \\ 0 & 9^{1009} & 0 \\ -(18)^{1009} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & (18)^{1009} \\ 0 & 9^{1009} & 0 \\ -(18)^{1009} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Приклад 5.29. Обчислити $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{100}$.

Розв'язання. Нехай $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A + E$. Тоді

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Theta,$$

$$A^3 = A^4 = \cdots = A^{100} = \Theta.$$

За формулою матричного бінома

$$(A+E)^{100} = \sum_{k=0}^{100} C_{100}^k A^k E^{100-k} = E + 100A + 4950A^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -200 & 100 \\ -100 & 0 & 0 \\ -200 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9900 & -4950 \\ 0 & 19800 & -9900 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -200 & 100 \\ -100 & 9901 & -4950 \\ -200 & 19800 & -9899 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} 1 & -200 & 100 \\ -100 & 9901 & -4950 \\ -200 & 19800 & -9899 \end{pmatrix}$.

Приклад 5.30. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \begin{pmatrix} c & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^n$, $|c| < 1$.

Розв'язання. Знайдемо декілька перших степеней заданої матриці: A, A^2, A^3 і застосуємо метод математичної індукції:

$$A^2 = \begin{pmatrix} c & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & c+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} c^2 & c+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^3 & c^2+c+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c^3 \end{pmatrix}.$$

Нехай $A^{n-1} = \begin{pmatrix} c^{n-1} & c^{n-2}+c^{n-3}+\cdots+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c^{n-1} \end{pmatrix}$. Тоді

$$A^n = A^{n-1}A = \begin{pmatrix} c^n & c^{n-1}+c^{n-2}+\cdots+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix},$$

а $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{1-c} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, бо $|c| < 1$ і $\lim\limits_{n\to\infty}(c^n+c^{n-1}+\cdots+1) = \dfrac{1}{1-c}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{1-c} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Приклад 5.31. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{2}{n} & \dfrac{6}{n} \\ \dfrac{3}{n} & 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{n} & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

Розв'язання. З рівності

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{n} & \frac{6}{n} \\ \frac{3}{n} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{n} & 0 & 1 \end{pmatrix} = A + E$$

знаходимо $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{n} & \frac{6}{n} \\ \frac{3}{n} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{n} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тоді

$$A^2 = \frac{1}{n^2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{n^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 18 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} = \frac{2}{n^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \frac{2}{n^3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{n^3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Theta,$$

$$A^4 = A^5 = \cdots = A^n = \Theta.$$

Скориставшись формулою матричного бінома, отримаємо

$$\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{n} & \frac{6}{n} \\ \frac{3}{n} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{n} & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \lim_{nto\infty}(A+E)^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k E^{n-k} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{2} C_n^k A^k = \lim_{n\to\infty}(E + nA + \frac{n(n-1)}{2}A^2) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} +\right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)}{n^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 9 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Приклад 5.32. Довести, що квадратна матриця 2-го порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

комутативна (переставна) з матрицею $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ тоді й тільки тоді, коли вектор-стовпці $X = \begin{pmatrix} a_{11} - a_{22} \\ a_{12} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ і $Y = \begin{pmatrix} b_{11} - b_{22} \\ b_{12} \\ b_{21} \end{pmatrix}$ — колінеарні.

Розв'язання. Оскільки

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix},$$

а

$$BA = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} & a_{12}b_{11} + a_{22}b_{12} \\ a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22} & a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

і $AB = BA$, то, прирівнюючи відповідні елементи цих матриць, отримаємо таку систему:

$$\begin{cases} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = a_{12}b_{11} + a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22} \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{12}b_{21} = a_{21}b_{12} \\ a_{12}(b_{11} - b_{22}) = b_{12}(a_{11} - a_{22}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_{11} - a_{22}}{b_{11} - b_{22}} = \frac{a_{12}}{b_{12}} = \frac{a_{21}}{b_{21}},$$

звідки і випливає, що X і Y колінеарні, що й треба було довести.

Приклад 5.33. Нехай $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_n & c_n \\ b_n & d_n \end{pmatrix}$. Знайти $\lim_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{c_n}$.

Розв'язання. Оскільки $A^{n+1} = A^n A$, то

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & c_{n+1} \\ b_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & c_n \\ b_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_n + 4c_n & 3a_n + 2c_n \\ 2b_n + 4d_n & 3b_n + 2d_n \end{pmatrix}.$$

Звідси отримуємо таку систему

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 4c_n, \\ b_{n+1} = 2b_n + 4d_n, \\ c_{n+1} = 3a_n + 2c_n, \\ d_{n+1} = 3b_n + 2d_n. \end{cases}$$

Послідовно скориставшись другим і четвертим рівняннями цієї системи, отримаємо

$$b_{n+2} = 2b_{n+1} + 4d_{n+1} = 2b_{n+1} + 4(3b_n + 2d_n) =$$
$$= 2b_{n+1} + 12b_n + 2(b_{n+1} - 2b_n) = 4b_{n+1} + 8b_n,$$

тобто $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – зворотня послідовність другого порядку. Оскільки

$$\lambda_1 = 2(1 + \sqrt{3}) \text{ і } \lambda_2 = 2(1 - \sqrt{3})$$

– корені квадратного рівняння $\lambda^2 - 4\lambda - 8 = 0$, то

$$b_n = B_1\lambda_1^n + B_2\lambda_2^n,$$

де коефіцієнти B_1 і B_2 визначаються із системи рівнянь

$$\begin{cases} B_1\lambda_1 + B_2\lambda_2 = b_1, \\ B_1\lambda_1^2 + B_2\lambda_2^2 = b_2 = 2b_1 + 4d_1, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B_1\lambda_1 + B_2\lambda_2 = 4, \\ B_1\lambda_1^2 + B_2\lambda_2^2 = 16, \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} B_1 = \dfrac{16 - 4\lambda_2}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)}, \\ B_2 = \dfrac{16 - 4\lambda_1}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}. \end{cases}$$

Аналогічно тому, як було визначено послідовність $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, будемо шукати послідовність $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, використовуючи першу та третю рівності системи. Таким чином, $c_{n+2} = 4c_{n+1} + 8c_n$, а $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – зворотня послідовність другого порядку. Оскільки $\lambda_1 = 2(1+\sqrt{3})$ і $\lambda_2 = 2(1-\sqrt{3})$ – корені рівняння $\lambda^2 - 4\lambda - 8 = 0$, то

$$c_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n,$$

де коефіцієнти знаходяться із системи рівнянь

$$\begin{cases} C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 = c_1, \\ C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2 = c_2 = 3a_1 + 2c_1, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 = 3, \\ C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2 = 12, \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{12 - 3\lambda_2}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)}, \\ C_2 = \dfrac{12 - 3\lambda_1}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}. \end{cases}$$

тоді, враховуючи нерівність $\left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1$, отримаємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{B_1\lambda_1^n + B_2\lambda_2^n}{C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{B_1 + B_2\dfrac{\lambda_2^n}{\lambda_1^n}}{C_1 + C_2\dfrac{\lambda_2^n}{\lambda_1^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{B_1}{C_1} = \lim_{n\to\infty}\frac{16 - 4\lambda_2}{12 - 3\lambda_2} = \frac{16 - 8 + 8\sqrt{3}}{12 - 6 + 6\sqrt{3}} = \frac{4}{3}.$$

Відповідь: $\dfrac{4}{3}$.

Приклад 5.34. Нехай $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$. Довести, що існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{d_n}$ і обчислити її.

Розв'язання.

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_n + c_n & 2b_n + d_n \\ a_n & b_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_{n+1} = 2b_n + d_n, \\ d_{n+1} = b_n, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{n+2} - 2b_{n+1} - b_n = 0, \\ d_{n+1} = b_n, \end{cases},$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 + \sqrt{2}, \\ \lambda_2 = 1 - \sqrt{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_n = B_1\lambda_1 + B_2\lambda_2, \\ d_{n+1} = b_n, \end{cases}$$

де $\begin{cases} B_1\lambda_1 + B_2\lambda_2 = b_1 = 1, \\ B_1\lambda_1^2 + B_2\lambda_2^2 = b_2 = 2b_1 + d_1 = 2, \end{cases} \Rightarrow \ B_1 = \dfrac{2 - \lambda_2}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)} \neq 0.$

Маємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{d_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{B_1\lambda_1^n + B_2\lambda_2^n}{B_1\lambda_1^{n-1} + B_2\lambda_2^{n-1}} = \lambda_1 \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \alpha\mu^n}{1 + \alpha\mu^{n-1}} = 1 + \sqrt{2},$$

де $\alpha = \dfrac{B_1}{B_2}$, $\mu = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$, $|\mu| < 1$.

Приклад 5.35. Обчислити $\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{30}$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо матрицю A, а потім декілька перших її степеней. $\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A + E$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Theta, \ A^4 = A^5 = \cdots = A^{30} = \Theta.$$

Скориставшись формулою матричного бінома, отримаємо

$$(A+E)^{30} = \sum_{k=0}^{30} C_{30}^k A^k E^{30-k} = \sum_{k=0}^{2} C_{30}^k A^k = E + 30A + 435A^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 29 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 44 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 44 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Приклад 5.36. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} T^k \left(\dfrac{\varphi}{n}\right)$, де

$$T(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Розв'язання. Скориставшись результатом, який було отримано при розв'язанні прикладу 4.11 розділу 4.3,

$$T^n(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos n\varphi & \sin n\varphi \\ -\sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix},$$

а також формулами

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \cos k\alpha = \frac{\cos\dfrac{(n+1)\alpha}{2}\sin\dfrac{n\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}, \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha = \frac{\sin\dfrac{(n+1)\alpha}{2}\sin\dfrac{n\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}},$$

отримаємо

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T^k\left(\frac{\varphi}{n}\right) = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} A_n & B_n \\ -B_n & A_n \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos\dfrac{(n+1)\varphi}{2n}\sin\dfrac{n\varphi}{2n}}{n\sin\dfrac{\varphi}{2n}} = \dfrac{\cos\dfrac{\varphi}{2}\sin\dfrac{\varphi}{2}}{\dfrac{\varphi}{2}} = \dfrac{\sin\varphi}{\varphi}$, а

$$\lim_{n\to\infty}\frac{B_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\dfrac{(n+1)\varphi}{2n}\sin\dfrac{n\varphi}{2n}}{n\sin\dfrac{\varphi}{2n}} = \frac{\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}{\dfrac{\varphi}{2}} = \frac{1-\cos\varphi}{\varphi},$$

то $M = \lim\limits_{n\to\infty} M_n = \begin{pmatrix} \dfrac{\sin\varphi}{\varphi} & \dfrac{1-\cos\varphi}{\varphi} \\ -\dfrac{1-\cos\varphi}{\varphi} & \dfrac{\sin\varphi}{\varphi} \end{pmatrix}.$

Відповідь: $\begin{pmatrix} \dfrac{\sin\varphi}{\varphi} & \dfrac{1-\cos\varphi}{\varphi} \\ -\dfrac{1-\cos\varphi}{\varphi} & \dfrac{\sin\varphi}{\varphi} \end{pmatrix}.$

Зауваження. Такий самий результат можна отримати, якщо на $\dfrac{A_n}{n}$ і $\dfrac{B_n}{n}$ дивитись, як на інтегральні суми, границі яких при $n\to\infty$ дорівнюють відповідно інтегралам:

$$\int_0^1 \cos x\varphi\,dx = \frac{\sin\varphi}{\varphi}, \quad \int_0^1 \sin x\varphi\,dx = \frac{1-\cos\varphi}{\varphi}.$$

Приклад 5.37. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{1}{n} \\ 0 & 1 & \dfrac{2}{n} \\ -\dfrac{4}{n} & \dfrac{2}{n} & 1 \end{pmatrix}^n.$

Розв'язання. Нехай

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 & \frac{2}{n} \\ -\frac{4}{n} & \frac{2}{n} & 1 \end{pmatrix} = A + E.$$

Тоді $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & \frac{2}{n} \\ -\frac{4}{n} & \frac{2}{n} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

$$A^2 = \frac{1}{n^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{n^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \frac{2}{n^3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{n^3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Theta,$$

$$A^4 = A^5 = \cdots = A^n = \Theta.$$

За формулою матричного бінома маємо

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 & \frac{2}{n} \\ -\frac{4}{n} & \frac{2}{n} & 1 \end{pmatrix}^n = \lim_{nto\infty} (A + E)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k E^{n-k} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2} C_n^k A^k = \lim_{n\to\infty} (E + nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)}{n^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5.2 Визначники

Приклад 5.38. Нехай матриця $n \times n$ така, що $A^2 = 5A$. Які значення може набувати визначник $5E - A$?

Розв'язання. Нехай $\Delta = \Delta(5E - A)$. Тоді

$$(5E - A^2) = 25E - 10A + A^2 = 25E - 5A = 5(5E - A),$$

звідки маємо

$$\Delta^2 = \Delta(5E)\Delta,$$
$$\Delta\left(\Delta - \Delta(5E)\right) = 0.$$

Відповідь: значення шуканого визначника дорівнює 0 або 5^n.

Приклад 5.39. Довести, що існує точка $c \in (0, 1)$, у якій функція

$$f(x) = \begin{vmatrix} x^2+1 & (x-1)^2 & 2x+1 \\ 3x-1 & 3x+2 & x+4 \\ 1 & 1 & x^2+1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x+1 & x^2 & 3x+1 \\ 3x-1 & (x+1)^2 & 4x \\ x^2+1 & x-1 & 2x+2 \end{vmatrix}$$

має горизонтальну дотичну.

Розв'язання. Позначимо перший визначник через $\Delta_1(x)$, а другий — через $\Delta_2(x)$. Оскільки

$$\Delta_1(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ і } \Delta_2(1) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

то $f(0) = \Delta_1(0)\Delta_2(0) = 0$ і $f(1) = \Delta_1(1)\Delta_2(1) = 0$. Тоді за теоремою Ролля існує точка $c \in (0,1)$ така, що $f'(c) = 0$. Отже, у точці $(c, f(c))$ функція $f(x)$ має горизонтальну дотичну.

Приклад 5.40. Який порядок матриці A, якщо $\Delta(A) = 2$ і

$$\Delta(A^3) + \Delta(2A) = \Delta(3A) - 414?$$

Розв'язання. Позначимо через x порядок матриці. Тоді із заданої рівності, враховуючи умову $\Delta(A) = 2$ і властивості визначника, отримаємо таке рівняння і розв'яжемо його:

$$8 + 2^x \cdot 2 = 3^x \cdot 2 - 414$$

$$3^x - 2^x = 211$$

$$x = 5.$$

Відповідь: 5.

Приклад 5.41. Довести, що всі 6 доданків у розкладі визначника 3-го порядку (у вигляді алгебраїчної суми відповідних добутків) не можуть бути одночасно додатними.

Розв'язання. Нехай

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

і всі доданки одночасно додатні, тоді їх добуток теж додатний. Але він дорівнює числу

$$(-1)^3 \left(\prod_{i,j=1}^{3} a_{ij}^2 \right) \le 0.$$

Отже, отримана суперечність доводить задане твердження.

Приклад 5.42. Де на площині $a\,O\,b$ повинні знаходитися точки (a, b) , щоб система рівнянь

$$\begin{cases} bx + y - az = c_1, \\ a(x + y) + bz = c_2, \\ x + y + az = c_3, \end{cases}$$

мала єдиний розв'язок при будь-яких $c_1,\, c_2,\, c_3 \in \mathbb{R}$?

Розв'язання. Спочатку обчислимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} b & 1 & -a \\ a & a & b \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-1 & 1 & -a \\ 0 & a & b \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = (b-1) \begin{vmatrix} a & b \\ 1 & a \end{vmatrix} = (b-1)(a^2 - b).$$

Звідси випливає, що система буде мати єдиний розв'язок при $b \ne 1$ та $b \ne a^2,$ тобто точки (a, b) заповнюють всю площину, крім точок параболи $b = a^2$ і прямої $b = 1$.

Відповідь. На всій площині $a\,O\,b$, крім точок на параболі $b = a^2$ і прямій $b = 1$.

Приклад 5.43. Не обчислюючи визначник Δ, довести, що він ділиться на 29, де

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 3 \\ 1 & 7 & 6 & 9 \\ 2 & 0 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Перемножимо відповідно перший, другий і третій стовпці на 1000, 100, 10 і додамо до четвертого стовпця. Отримаємо визначник, у якого в останньому стовпці всі елементи будуть мати спільний множник 29.

Приклад 5.44. Усі елементи матриці 21×21 — цілі числа. Відомо, що 422 з них мають однаковий залишок від ділення на 17. Довести, що визначник цієї матриці є кратний 17.

Розв'язання. Матриця має 441 елемент, однак тільки 19 мають різні залишки. За принципом Діріхле, існують хоча б два рядки матриці, усі елементи яких мають однаковий залишок від ділення на 17. Віднімемо один рядок від другого та отримаємо рядок, усі елементи якого дають залишок нуль при діленні на 17. Отже, визначник цієї матриці буде кратний 17.

Приклад 5.45. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} z & z^2 & \dots & z^{199} & z^{200} \\ z^2 & z^3 & \dots & z^{200} & z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{200} & z & \dots & z^{198} & z^{199} \end{vmatrix}$$

при $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Розв'язання. Помножимо перший рядок на $-z$ і додамо до доугого. Тоді визначник набуде такого вигляду:

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} z & z^2 & \dots & z^{199} & z^{200} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & z(1-z^{200}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{200} & z & \dots & z^{198} & z^{199} \end{vmatrix}.$$

Звідси маємо, що $\Delta\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right) = 0$, оскільки $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\left(1 - \left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{200}\right) = 0$, бо $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{200} = 1$.

Відповідь. $\Delta\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right) = 0$.

Приклад 5.46. Нехай A – довільна квадратна матриця розміром $n \times n$ і I – квадратна матриця таким самим розміром, усі елементи якої дорівнюють 1. Довести, що $\Delta(A+I) = \Delta(A)$ тоді й тільки тоді, коли сума алгебраїчних доповнень усіх елементів матриці A дорівнює нулю, тобто $\sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij} = 0$.

Розв'язання. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

– задані матриці. Тоді визначник матриці $A+I$ має такий вигляд:

$$\Delta(A+I) = \begin{vmatrix} a_{11}+1 & a_{12}+1 & \dots & a_{1n}+1 \\ a_{21}+1 & a_{22}+1 & \dots & a_{2n}+1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+1 & a_{n2}+1 & \dots & a_{nn}+1 \end{vmatrix}.$$

Цей визначник запишемо як суму двох визначників:

$$\Delta(A+I)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+1 & \dots & a_{1n}+1 \\ a_{21} & a_{22}+1 & \dots & a_{2n}+1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2}+1 & \dots & a_{nn}+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a_{12}+1 & \dots & a_{1n}+1 \\ 1 & a_{22}+1 & \dots & a_{2n}+1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{n2}+1 & \dots & a_{nn}+1 \end{vmatrix}.$$

У другому визначнику віднімемо від кожного стовпця, починаючи з другого, перший стовпець. Перший визначник, як робилося вище, розкладемо на суму двох визначників

$$\Delta(A+I)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 1 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+\dots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Перший визначник суми — це $\Delta(A)$. Розкладемо кожен визначник отриманої суми, починаючи з другого, за елементами першого стовпця, у якому стоять одиниці. Тоді

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} A_{1j}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 1 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} A_{2j}, \dots,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 1 \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} A_{nj},$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}. Отже,

$$\Delta(A+I) = \Delta(A) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij},$$

а це означає, що $\Delta(A+I) = \Delta(A)$ тоді й тільки тоді, коли $\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} = 0$.

Приклад 5.47. Нехай A – невироджена матриця. Довести, що

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ -a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ -a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4\right)^2.$$

Розв'язання. Оскільки

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ -a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ -a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_2 & a_1 & a_4 & -a_3 \\ a_3 & -a_4 & a_1 & a_2 \\ a_4 & a_3 & -a_2 & a_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4\right)^4 E,$$

то з рівності

$$\Delta(A \cdot A^T) = \Delta(A^2) = \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4\right)^4$$

знаходимо

$$\Delta(A) = \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4\right)^2,$$

що і треба було довести.

Приклад 5.48. Обчислити визначник n-го порядку

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Додамо всі рядки до першого. Маємо

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} n-1 & n-1 & n-1 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Після віднімання першого рядка від інших отримаємо

$$\Delta_n = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^n(n-1).$$

Відповідь: $(-1)^n(n-1)$.

Приклад 5.49. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Віднявши перший рядок від решти, отримаємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_n \end{vmatrix} = b_1 b_2 \dots b_n.$$

Відповідь: $\Delta = b_1 b_2 \dots b_n$.

Приклад 5.50. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. З i-го стовпця винесемо за знак визначника x_i і до кожного стовпця додамо решту стовпців:

$$\Delta = x_1x_2\dots x_n \begin{vmatrix} \dfrac{a_1}{x_1} & \dfrac{a_2}{x_2} & \dfrac{a_3}{x_3} & \dots & \dfrac{a_n}{x_n} \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = x_1x_2\dots x_n \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \dfrac{a_1}{x_1} + \dfrac{a_2}{x_2} + \dots + \dfrac{a_n}{x_n} & \dfrac{a_2}{x_2} + \dfrac{a_3}{x_3} + \dots + \dfrac{a_n}{x_n} & \dfrac{a_3}{x_3} + \dots + \dfrac{a_n}{x_n} & \dots & \dfrac{a_n}{x_n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= x_1x_2\dots x_n \left(\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \dots + \frac{a_n}{x_n}\right) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= x_1x_2\dots x_n \left(\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \dots + \frac{a_n}{x_n}\right).$$

Відповідь: $\Delta = x_1x_2\dots x_n \left(\dfrac{a_1}{x_1} + \dfrac{a_2}{x_2} + \dots + \dfrac{a_n}{x_n}\right).$

Приклад 5.51. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -5 \\ 4 & -2 & 7 & 8 & -7 \\ -6 & 4 & -9 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 6 & 5 & 4 & -3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Обчислимо цей визначник, скориставшись теоремою Лапласа. Для цього спочатку, щоб зменшити об'єм обчислень, виконаємо такі перетворення: з другого рядка віднімемо подвоєний перший, а до третього додамо подвоєний четвертий. Маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 6 & 5 & 4 & -3 \end{vmatrix}.$$

У цьому визначнику виділимо 2 і 3 рядки та утворимо всілякі мінори другого порядку з елементів цих рядків. Серед цих мінорів тільки один не дорівнює нулю, тобто

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

його алгебраїчне доповнення –

$$A_1 = (-1)^{(2+3)+(3+5)} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -7 \\ 10 & 0 & 28 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -7 \\ 10 & 28 \end{vmatrix} = -42.$$

Тоді, скориставшись теоремою Лапласа, маємо

$$\Delta = M_1 A_1 = 2(-42) = -84.$$

Відповідь: $\Delta = -84$.

Приклад 5.52. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 & 2 & -1 & -2 & 4 & -1 \\ 5 & 4 & 4 & 3 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 10 & 6 & 4 & 2 & -1 & -2 & 9 & -4 \\ 7 & 3 & 4 & 5 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 7 & 2 & -2 & 3 & 2 & -2 & 4 & -1 \\ 11 & 1 & -1 & 2 & -1 & -4 & 8 & -2 \\ 4 & 4 & 7 & 3 & 2 & 6 & -2 & 4 \\ 12 & 1 & 1 & 2 & -1 & -2 & 9 & -4 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Після застосування властивостей визначника отримаємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 & 2 & -1 & -2 & 4 & -1 \\ 19 & 6 & 6 & 7 & 0 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 5 & -3 \\ 14 & 4 & 5 & 7 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 21 & 4 & 0 & 7 & 0 & -6 & 12 & -3 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 18 & 6 & 9 & 7 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} 19 & 6 & 6 & 1 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 0 & 0 & 5 & -3 \\ 14 & 4 & 5 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 21 & 4 & 0 & 1 & -6 & 12 & -3 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 18 & 6 & 9 & 1 & 2 & 6 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -7 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 3 & 0 & 0 & 5 & -3 \\ -4 & -2 & -4 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & -9 & 0 & -8 & 6 & -5 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 18 & 6 & 9 & 1 & 2 & 6 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & 2 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -9 & -8 & 6 & -5 \\ 4 & 0 & -2 & -2 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 7\begin{vmatrix} 13 & 6 & 9 & 0 & 10 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & 2 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 35 & 14 & 23 & 0 & 30 & 3 \\ 12 & 4 & 6 & 0 & 10 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -7\begin{vmatrix} 13 & 6 & 9 & 10 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 5 & -3 \\ 35 & 14 & 23 & 30 & 3 \\ 12 & 4 & 6 & 10 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -35\begin{vmatrix} 13 & 6 & 9 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 1 & -3 \\ 35 & 14 & 23 & 6 & 3 \\ 12 & 4 & 6 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -35\begin{vmatrix} 13 & 6 & 9 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 40 & 14 & 23 & 7 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 44 & 18 & 27 & 7 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 245\begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 & 0 \\ 40 & 14 & 23 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 44 & 18 & 27 & 1 \end{vmatrix} = 245\begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 & 0 \\ 40 & 14 & 23 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 980\begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 980(-4+3+15-6+6-5) = 980 \cdot 9 = 8820.$$

Відповідь: $\Delta = 8820$.

Приклад 5.53. Обчислити визначник n-го порядку Δ_n , елементи якого a_{ik} , $i,k = \overline{1,n}$ мають вигляд

$$a_{ik} = 1 + x_i y_k.$$

Розв'язання. Визначник Δ_n з елементами a_{ik} $i,k = \overline{1,n}$ має такий вигляд:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_2y_n \end{vmatrix}.$$

Віднімаючи перший стовпець від решти стовпців і далі, користуючись властивостями визначників, отримаємо, що

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1(y_2-y_1) & \dots & x_1(y_n-y_1) \\ 1+x_2y_1 & x_2(y_2-y_1) & \dots & x_2(y_n-y_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & x_n(y_2-y_1) & \dots & x_n(y_n-y_1) \end{vmatrix} =$$

$$= (y_2-y_1)(y_3-y_1)\dots(y_n-y_1)\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1 & \dots & x_1 \\ 1+x_2y_1 & x_2 & \dots & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & x_n & \dots & x_n \end{vmatrix} =$$

$$= (y_2-y_1)(y_3-y_1)\dots(y_n-y_1)\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1+x_2y_1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & x_n & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Звідси маємо, що $\Delta_1 = 1 + x_1y_1$, $\Delta_2 = (y_2-y_1)(x_2-x_1)$, а $\Delta_n = 0$ при $n > 2$.

Відповідь: $\Delta_1 = 1 + x_1y_1$, $\Delta_2 = (y_2-y_1)(x_2-x_1)$, а $\Delta_n = 0$ при $n > 2$.

Приклад 5.54. Обчислити визначник 2018 порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2\cos x & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos x \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Нехай Δ_n – заданий визначник n-го порядку. При $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ маємо

$$\Delta_1 = 2\cos x = \frac{\sin 2x}{\sin x}.$$

$$\Delta_2 = 4\cos^2 x - 1 = 2\cos x \frac{\sin 2x}{\sin x} - 1 = \frac{2\cos x \sin 2x - \sin x}{\sin x} =$$

$$= \frac{\sin 3x + \sin x - \sin x}{\sin x} = \frac{\sin 3x}{\sin x}.$$

Припустимо, що $\Delta_n = \dfrac{\sin(n+1)x}{\sin x}$ для кожного $n \geq 1$ при всіх $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Розклавши Δ_{n+1} по першому рядку, маємо

$$\Delta_{n+1} = 2\cos x \Delta_n - \Delta_{n-1} = 2\cos x \frac{\sin(n+1)x}{\sin x} - \frac{\sin nx}{\sin x} =$$

$$= \frac{2\cos x \sin(n+1)x - \sin nx}{\sin x} = \frac{\sin nx + \sin(n+2)x - \sin nx}{\sin x} = \frac{\sin(n+2)x}{\sin x}.$$

Отже, методом математичної індукції довели, що для кожного $n \geq 1$ і всіх $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\Delta_n = \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}.$$

Функція $\Delta_n(x)$ неперервна при $x \neq \pi k$, при $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ отримаємо

$$\Delta_n(\pi k) = \lim_{x \to \pi k} \Delta_n(x) = \lim_{x \to \pi k} \frac{\sin(n+1)x}{\sin x} = (n+1) \lim_{x \to \pi k} \frac{\cos(n+1)x}{\cos x} =$$

$$= (n+1)\frac{(-1)^{(n+1)k}}{(-1)^k} = (n+1)(-1)^{nk}.$$

Відповідь: для $n = 2018$ отримаємо:

$$x \neq \pi k\,,\ \ k \in \mathbb{Z} \quad \Delta_{2018} = \frac{\sin 2018x}{\sin x}\,;$$
$$x = \pi k\,,\ \ k \in \mathbb{Z} \quad \Delta_{2018} = 2019\,.$$

Приклад 5.55. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos(\alpha+\delta) & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos(\beta+\delta) & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos(\gamma+\delta) & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Розкладемо заданий визначник за елементами першого стовпчика на суму трьох визначників другого порядку, які обчислимо, користуючись співвідношеннями між тригонометричними функціями. Маємо:

$$\Delta = \sin\alpha \begin{vmatrix} \cos(\beta+\delta) & \sin(\beta+\delta) \\ \cos(\gamma+\delta) & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix} - \sin\beta \begin{vmatrix} \cos(\alpha+\delta) & \sin(\alpha+\delta) \\ \cos(\gamma+\delta) & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix} +$$
$$+ \sin\gamma \begin{vmatrix} \cos(\alpha+\delta) & \sin(\alpha+\delta) \\ \cos(\beta+\delta) & \sin(\beta+\delta) \end{vmatrix} =$$
$$= \sin\alpha\,[\sin(\gamma+\delta)\cos(\beta+\delta) - \cos(\gamma+\delta)\sin(\beta+\delta)] +$$
$$+ \sin\beta\,[\sin(\alpha+\delta)\cos(\gamma+\delta) - \cos(\alpha+\delta)\sin(\gamma+\delta)] +$$
$$+ \sin\gamma\,[\sin(\beta+\delta)\cos(\alpha+\delta) - \cos(\beta+\delta)\sin(\alpha+\delta)] =$$
$$= \sin\alpha\sin(\gamma-\beta) + \sin\beta\sin(\alpha-\gamma) + \sin\gamma\sin(\beta-\alpha) =$$
$$= \frac{1}{2}\,[\cos(\alpha-\gamma+\beta) - \cos(\alpha-\gamma+\beta) + \cos(\beta-\alpha+\gamma) - \cos(\alpha-\beta+\gamma) +$$
$$+ \cos(\gamma-\beta+\alpha) - \cos(\gamma+\beta-\alpha)] = 0.$$

Відповідь: 0.

Приклад 5.56. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Для цього обчислення визначника застосуємо метод виділення лінійних множників. Для цього до першого рядка додамо решту рядків:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b+c-x & a+b+c-x & a+b+c-x & a+b+c-x \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}.$$

Віднявши перший стовпець від решти стовпців, знаходимо

$$\Delta = (a+b+c-x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & -x-a & c-a & b-a \\ b & c-b & -x-b & a-b \\ c & b-c & a-c & -x-c \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c-x) \begin{vmatrix} -x-a & c-a & b-a \\ c-b & -x-b & a-b \\ b-c & a-c & -x-c \end{vmatrix}.$$

Далі додамо до першого рядка другий:

$$\Delta = (a+b+c-x) \begin{vmatrix} -x-a-b+c & -x-a-b+c & 0 \\ c-b & -x-b & a-b \\ b-c & a-c & -x-c \end{vmatrix} =$$

$$= (x-a-b-c)(x+a+b-c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ c-b & -x-b & a-b \\ b-c & a-c & -x-c \end{vmatrix}.$$

Тепер віднімемо від другого стовпця перший і розкладемо визначник за елементами першого стовпця:

$$\Delta = (x-a-b-c)(x+a+b-c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c-b & -x-c & a-b \\ b-c & a-b & -x-c \end{vmatrix} =$$

$$= (x-a-b-c)(x+a+b-c)\begin{vmatrix} -x-c & a-b \\ a-b & -x-c \end{vmatrix} =$$

$$= (x-a-b-c)(x+a+b-c)\left((x+c)^2-(a-b)^2\right) =$$

$$= (x-a-b-c)(x+a+b-c)(x+a-b+c)(x-a+b+c)$$

Відповідь: $\Delta = (x-a-b-c)(x+b+c-a)(x+c+a-b)(x+a+b-c)$.

Приклад 5.57. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Від другого рядка віднімемо перший і розкладемо визначник за елементами другого рядка. Маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & x-1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 4 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 3 & 4 & \dots & x+1 \end{vmatrix}.$$

Застосовуючи послідовно цей алгоритм до кожного наступного визначника, отримаємо

$$\Delta = (x-1)(x-2)\dots(x-n+2)\begin{vmatrix} 1 & n \\ 1 & x+1 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)\dots(x-n+1).$$

Відповідь: $\Delta = (x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$.

Приклад 5.58. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & c_n \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Заданий визначник $(n+1)$-го порядку позначимо через $\Delta_{n+1}(c_1, c_2, \dots, c_n)$. Розклавши його по другому рядку, отримаємо

$$\Delta_{n+1}(c_1, c_2, \dots, c_n) = -\prod_{k=2}^{n} c_k + c_1\Delta_n(c_2, c_3, \dots, c_n),$$

де $\Delta_n(c_2, c_3, \dots, c_n)$ – визначник n-го порядку такої ж структури. Повторюючи цю процедуру для визначника, отриманого в правій частині рівності, послідовно дістанемо

$$\Delta_{n+1}(c_1, c_2, \dots, c_n) = -\prod_{k=2}^{n} c_k - c_1\prod_{k=3}^{n} c_k + c_1c_2\Delta_{n-1}(c_3, \dots, c_n) =$$

$$= \dots = -\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{j=1, k\neq k}^{n} c_j\right).$$

Відповідь: $-\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{j=1,k\neq k}^{n} c_j\right)$.

Приклад 5.59. Обчислити визначник

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ x & a & -1 & \dots & 0 \\ x^2 & ax & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^n & ax^{n-1} & ax^{n-2} & \dots & a \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Додавши перший стовпець до другого, після очевидних перетворень отримаємо:

$$\Delta_{n+1}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ x & x+a & -1 & \dots & 0\\ x^2 & x(x+a) & a & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ x^n & x^{n-1}(x+a) & ax^{n-2} & \dots & a\end{vmatrix}=(x+a)\begin{vmatrix}1 & -1 & \dots & 0\\ x & a & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ x^{n-1} & ax^{n-2} & \dots & a\end{vmatrix}=$$

$$=(x+a)\Delta_n=(x+a)^2\Delta_{n-1}=\dots=(x+a)^{n-1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ x & a\end{vmatrix}=(x+a)^n.$$

Відповідь: $(x+a)^n$.

Приклад 5.60. Обчислити визначник

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n\\ -1 & 0 & 3 & 4 & \dots & n\\ -1 & -2 & 0 & 4 & \dots & n\\ -1 & -2 & -3 & 0 & \dots & n\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 0\end{vmatrix}.$$

Розв’язання. Додавши до останнього рядка перший і розклавши визначник за елементами останнього рядка, отримаємо

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n\\ -1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n\\ -1 & -2 & 0 & \dots & n-1 & n\\ -1 & -2 & -3 & \dots & n-1 & n\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n\end{vmatrix}=n\begin{vmatrix}1 & 2 & \dots & n-1\\ -1 & 0 & \dots & n-1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ -1 & -2 & \dots & n-1\end{vmatrix}=n\Delta_{n-1},$$

де Δ_{n-1} – визначник такого ж вигляду, що і заданий визначник Δ_n .

Оскільки $\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}=2$, то, застосувавши $n-2$ рази отриману рекурентну формулу, знайдемо, що

$$\Delta_n = n\Delta_{n-1} = n(n-1)\Delta_{n-2} = n(n-1)(n-2)\Delta_{n-3} = \cdots =$$
$$= n(n-1)(n-2)\ldots 3\Delta_2 = n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2 = n!.$$

Відповідь: $n!$.

Приклад 5.61. Обчислити визначник

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a+b \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Розкладемо визначник Δ_n за елементами першого рядка. Тоді для $n \geq 3$ маємо:

$$\Delta_n = (a+b)\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a+b \end{vmatrix} -$$

$$- ab\begin{vmatrix} 1 & ab & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a+b \end{vmatrix} = (a+b)\Delta_{n-1} - ab\Delta_{n-2}.$$

Щоб отримати рекурентну формулу, застосуємо метод математичної індукції. Для цього обчислимо $\Delta_1 = a + b = \dfrac{a^2 - b^2}{a - b}$ $(a \neq b)$ і $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - ab = a^2 + ab + b^2 = \dfrac{a^3 - b^3}{a - b}$, $(a \neq b)$, а також припустимо, що

$$\Delta_{n-2} = \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a - b}, \quad \Delta_{n-1} = \frac{a^n - b^n}{a - b}.$$

Тоді

$$\Delta_n = (a+b)\frac{a^n - b^n}{a-b} - ab\frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a-b} -$$
$$- \frac{1}{a-b}(a^{n+1} - ab^n + ba^n - b^{n+1} - ba^n + ab^n) =$$
$$= \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

У випадку $a = b$ з тих же міркувань отримаємо:

$$\Delta_n = 2a\Delta_{n-1} - a^2\Delta_{n-2},\ \Delta_1 = 2a,\ \Delta_2 = 3a^2,$$
$$\Delta_{n-2} = (n-1)a^{n-2},\ \Delta_{n-1} = na^{n-1},$$
$$\Delta_n = 2ana^{n-1} - a^2(n-1)a^{n-2} = (n+1)a^n.$$

Відповідь: $\Delta_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} \quad (a \neq b)$, $\Delta_n = (n+1)a^n \quad (a = b)$.

Приклад 5.62. Обчислити визначник

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Віднімаючи перший стовпець від усіх наступних стовпців, отримаємо

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & \ldots & x_n - x_1 \\ x_1^2 & x_2^2 - x_1^2 & \ldots & x_n^2 - x_1^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Далі розкладемо цей визначник за елементами першого рядка. Маємо:

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \ldots & x_n - x_1 \\ x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 & \ldots & x_n^2 - x_1^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_2^{n-1} - x_1^{n-1} & x_3^{n-1} - x_1^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Віднімаючи тепер від кожного рядка попередній рядок, помножений на x_1, одержимо

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \ldots & x_n - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \ldots & x_n(x_n - x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \ldots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}.$$

Після винесення за знак визначника спільного множника першого стовпця, що дорівнює $x_2 - x_1$, спільного множника другого стовпця, що дорівнює $x_3 - x_1$,..., спільного множника n-го стовпця, що дорівнює $x_n - x_1$, дістанемо

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots(x_n - x_1)\Delta(x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

З аналогічних міркувань спочатку матимемо

$$\Delta(x_2, x_3, \ldots, x_n) = (x_3 - x_2)(x_4 - x_2)\ldots(x_n - -x_2)\Delta(x_3, \ldots, x_n),$$

а потім остаточно знайдемо, що

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots(x_n - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)\ldots$$
$$\ldots(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1}).$$

Відповідь: $(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots(x_n - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)\ldots(x_n - -x_2)\ldots(x_n - x_{n-1})$.

5.3 Системи лінійних рівнянь

Приклад 5.63. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+5x_3-2x_4-3x_5 &= -15, \\ 2x_1-3x_2-5x_3+x_4+2x_5 &= 15, \\ 4x_1+x_2-3x_3+4x_4-4x_5 &= 9, \\ x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5 &= -3, \\ -2x_1-2x_2+2x_3-3x_4-x_5 &= -6, \end{cases}$$

Розв'язання. Спочатку запишемо систему так:

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5 &= -3, \\ 2x_1-3x_2-5x_3+x_4+2x_5 &= 15, \\ -2x_1-2x_2+2x_3-3x_4-x_5 &= -6, \\ 3x_1+4x_2+5x_3-2x_4-3x_5 &= -15, \\ 4x_1+x_2-3x_3+4x_4-4x_5 &= 9, \end{cases}$$

а потім розв'яжемо її методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 1 & 2 & 15 \\ -2 & -2 & 2 & -3 & -1 & -6 \\ 3 & 4 & 5 & -2 & -3 & -15 \\ 4 & 1 & -3 & 4 & -4 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -7 & 3 & 0 & 21 \\ 0 & -6 & 4 & -5 & 1 & -12 \\ 0 & 10 & 2 & 1 & -6 & -6 \\ 0 & 9 & -7 & 8 & -8 & 21 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -7 & 3 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & -38 & 13 & 1 & 114 \\ 0 & 0 & 72 & -29 & -6 & -216 \\ 0 & 0 & 56 & -19 & -8 & -168 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -7 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 13 & -38 & 114 \\ 0 & 0 & -6 & -29 & 72 & -216 \\ 0 & 0 & -8 & -19 & 56 & -168 \\ x_1 & x_2 & x_5 & x_4 & x_3 & \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -7 & | & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 13 & -38 & | & 114 \\ 0 & 0 & 0 & 49 & -156 & | & 468 \\ 0 & 0 & 0 & 85 & -248 & | & 744 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -7 & | & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 13 & -38 & | & 114 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{156}{49} & | & \frac{468}{49} \\ 0 & 0 & 0 & 85 & -248 & | & 744 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -7 & | & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 13 & -38 & | & 114 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{156}{49} & | & \frac{468}{49} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & -3 \end{pmatrix}.$$

Звідси знаходимо, що $x_3 = -3$, а $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0$.

Відповідь: $x_3 = -3$, $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0$.

Приклад 5.64. Які умови мають задовольняти числа, щоб система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} -a_3x_2 + a_2x_3 & = & b_1, \\ a_3x_1 - a_1x_3 & = & b_2, \\ -a_2x_1 + a_1x_2 & = & b_3, \\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 & = & c \end{cases}$$

була несумісною?

Розв'язання. Позначимо через A і $\overline{A}$ відповідно основну і розширену матриці заданої лінійної системи рівнянь, тобто

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 & b_1 \\ a_3 & 0 & -a_1 & b_2 \\ -a_2 & a_1 & 0 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & c \end{pmatrix}.$$

Обчислимо всі мінори 3-го порядку матриці A:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2),$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ -a_2 & a_1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -a_2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2),$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_1(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2).$$

Знайдемо визначник розширеної матриці заданої лінійної системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -a_3 & a_2 & b_1 \\ a_3 & 0 & -a_1 & b_2 \\ -a_2 & a_1 & 0 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & c \end{vmatrix} = -b_1\Delta_4 + b_2\Delta_3 - b_3\Delta_2 + c\Delta_1 =$$

$$= -(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2).$$

Розглянемо два випадки:

1. Нехай $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, тобто $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$. Тоді якщо всі числа b_1, b_2, b_3, c дорівнюють нулю, то дана система є сумісною і невизначеною. Якщо ж хоча б одне з чисел b_1, b_2, b_3, c відмінне від нуля, тобто виконується умова $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + c^2 \neq 0$, то система є несумісною.

2. Нехай $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$. Тоді хоча б одне з чисел a_1, a_2, a_3 відмінне від нуля, а, значить, і хоча б один з мінорів $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ відмінний від нуля. Це означає, що ранг матриці дорівнює 3. Якщо при цьому виконується умова $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$, то ранг розширеної матриці

$\overline{A}$ також дорівнює 3, а тому згідно з теоремою Кронекера–Капеллі дана система є сумісною. Оскільки число невідомих дорівнює рангу матриці A, то дана система сумісна і визначена, тобто має єдиний розв'язок.

Якщо ж $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \neq 0$, то ранг розширеної матриці $\overline{A}$ дорівнює 4, тобто не дорівнює рангу основної матриці A, а це означає, що дана система є несумісною.

Отже, якщо $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$ і $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + c^2 \neq 0$ або $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$ і $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \neq 0$, то задана система лінійних рівнянь є несумісною.

Відповідь: якщо $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$ і $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + c^2 \neq 0$ або якщо $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$ і $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \neq 0$.

Приклад 5.65. Для всіх дійсних значень параметрів a і b розв'язати систему

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n & = & 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 + \cdots + x_n & = & 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots, \\ x_1 + \cdots + x_{n-2} + ax_{n-1} + x_n & = & 1, \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + ax_n & = & b, \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Розв'язання

1. Якщо $a = 1, b \neq 1$, то система несумісна.
2. Якщо $a = 1, b = 1$, то система має безліч розв'язків

$$x_n = 1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1}; \quad x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{R}.$$

Нехай $a \neq 1$. Тоді, віднімаючи від лівої та правої частин першого рівняння відповідну ліву та праву частини другого рівняння, отримаємо

$$(a-1)x_1 + (1-a)x_2 = 0,$$

звідки маємо $x_1 = x_2$.

Аналогічно можна показати, що

$$x_3 = x_1, \quad x_4 = x_1, \ \ldots, \ x_{n-1} = x_1.$$

Тому задана система рівнянь при $a \neq 1$ рівносильна такій системі

$$\begin{cases} x_i = x_1, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ (a+n-2)x_1 + x_n = 1, \\ (n-1)x_1 + ax_n = b. \end{cases} \tag{5.1}$$

Звідси, виключаючи x_n з двох останніх рівнянь системи, отримуємо рівняння

$$(a-1)(a-(1-n))x_1 = a-b. \tag{5.2}$$

3. Якщо $a = 1-n$, $b \neq 1-n$, то рівняння (5.1), а тому і задана система несумісні.

4. Якщо $a = 1-n$, $b = 1-n$, то два останніх рівняння системи (5.1) рівносильні рівнянню $x_1 = x_n - 1$. Звідси випливає, що задана система має безліч розв'язків:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = x_n - 1, \quad x_n \in \mathbb{R}.$$

5. Якщо $a \neq 1$, $a \neq 1-n$, $b \in \mathbb{R}$, то з рівняння (5.2) випливає, що $x_1 = \dfrac{a-b}{(a-1)(a-(1-n))}$. А з передостаннього рівняння системи (5.1) випливає, що $x_n = 1-(a+n-2)x_1$. Отже, задана система має єдиний розв'язок

$$x_i = \frac{a-b}{(a-1)(a+n-1)}, \ i = 1, 2, \ldots, n-1; x_n = \frac{b(a-1)+(b-1)(n-1)}{(a-1)(a+n-1)}.$$

Зауваження: Задану систему можна було розв'язати за правилом Крамера.

Приклад 5.66. При якому значенні параметра a система рівнянь

$$\begin{cases} x + 2y - az &= 0, \\ x + y - z &= 1, \\ x + y + (a^5 + a - 3)z &= 3 \end{cases}$$

має розв'язок?

Розв'язання. Розв'яжемо систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + y - z &= 1, \\ x + 2y - az &= 0, \\ x + y + (a^5 + a - 3)z &= 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z &= 1, \\ y - (a-1)z &= -1, \\ (a^5 + a - 2)z &= 2. \end{cases}$$

Отже, система має розв'язок при $a^5 + a - 2 \neq 0$. Оскільки похідна лівої частини $5a^4 + 1 > 0$ при будь-яких $a \in \mathbb{R}$, то $a^5 + a - 2$ монотонно зростає і рівняння $a^5 + a - 2 = 0$ має єдиний корінь $a = 1$.

Таким чином, система має розв'язок при $a \neq 1$.

Відповідь: система має розв'язок при $a \neq 1$.

Приклад 5.67. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots \;\; \dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{cases}$$

де $a_{ij} = min\{i, j\}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $b_1 = n$, $b_k = b_{k-1} + n - k + 1$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Розв'язання. Запишемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{ccccc|r} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & b_1 + n - 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & b_2 + n - 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n & b_{n-1} + 1 \end{array}\right).$$

З рядка з номером n віднімемо рядок з номером $n-1$, після чого з рядка з номером $n-1$ віднімемо рядок з номером $n-2$ і т. д. Отримаємо

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & n-2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Звідси випливає, що $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$.

Відповідь: $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$.

Приклад 5.68. При яких значеннях a для будь-якого числа b знайдеться хоча б одне число c таке, що система рівнянь

$$\begin{cases} x + 2by & = & a, \\ bx + (1-b)y & = & c^2 + ac \end{cases} \tag{5.3}$$

має розв'язок?

Розв'язання. За теоремою Кронекера–Капеллі система (5.3) сумісна тоді й тільки тоді, коли ранг її основної матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2b \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

дорівнює рангу її розширеної матриці

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2b & a \\ b & 1-b & c^2+ac \end{array}\right).$$

Якщо визначник системи не дорівнює нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2b \\ b & 1-b \end{vmatrix} = 1 - b - 2b^2 \neq 0 \;\Leftrightarrow\; b \neq 1,\; b \neq 0,5,$$

то $r(A) = r(\overline{A}) = 2$ і система (5.3) має єдиний розв'язок при будь-яких a і c.

Нехай $\Delta = 0$ (при $b = -1$ чи $b = 0,5$), тоді $r(A) = 1$,

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a \\ -1 & 2 & c^2 + ac \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & c^2 + ac + a \end{array} \right)$$

і $r(\overline{A}) = 1 \Leftrightarrow c^2 + ac + a = 0$. При $b = 0,5$ маємо

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0,5 & 0,5 & c^2 + ac \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2c^2 + 2ac - a \end{array} \right)$$

і $r(\overline{A}) = 1 \Leftrightarrow 2c^2 + 2ac + a = 0$.

Отже, нас цікавлять ті й тільки ті значення a, при яких система квадратних рівнянь

$$\begin{cases} c^2 + ac + a & = & 0, \\ 2c^2 + 2ac - a & = & 0 \end{cases}$$

має розв'язок відносно невідомої c. Ці значення знайдемо, розв'язавши систему нерівностей:

$$\begin{cases} a^2 - 4a & \geq & 0, \\ 4a^2 + 8a & \geq & 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-\infty; -2) \cup \{0\} \cup [4; +\infty).$$

Відповідь: $a \in (-\infty; -2) \cup \{0\} \cup [4; +\infty)$.

Приклад 5.69. При яких натуральних n система лінійних рівнянь сумісна?

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n & = & 1, \\ -x_1 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n & = & 1, \\ -x_1 - x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n & = & 1, \\ -x_1 - x_2 - x_3 + \cdots + x_n & = & 1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots, \\ -x_1 - x_2 - x_3 + \cdots - x_{n-1} & = & 1, \end{cases}$$

Розв'язання. Віднімаючи друге рівняння з першого, третє – з другого і так далі, отримаємо таку систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 0, \\ x_2 + x_3 & = & 0, \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots, \\ x_{n-1} + x_n & = & 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -x_2 = x_3 = \dots = (-1)^{n-1} x_n.$$

Підставляючи ці значення в перше рівняння, отримаємо $x_n = 1$ при парному n і неправильну рівність $0 = 1$ при непарному n.

Отже, система сумісна при парних n ($x_k = (-1)^{k-1}, \;\; k = 1, 2, \dots, n$) і несумісна при непарних n.

Відповідь: система сумісна при парних n.

Список літератури

1. *Беркович Ф. Д.* Задачи математических олимпиад с указаниями и решениями / Ф.Д. Беркович, В.С. Федий, В.И. Шлыков. — Ростов-на-Дону: Феникс, 2008. — 172 с.

2. *Гулевич Н. М.* Математические олимпиады СПГУВК 2011 и 2012 годов / Н.М. Гулевич, В.О. Кузнецов // Математика и ее приложения. — Вып. 4. — СПб: ГУМРФ им. адмирала С.О. Макарова, 2013. — 228 с.

3. Всеукраїнські олімпіади з математики серед студентів технічних, економічних та аграрних ВНЗ / М.І. Деркач, О.І. Песчанський, Ю.Є. Обжерін, О.Ф. Хрустальов. — Севастополь: Сев. НТУ, 2011. — 144 с.

4. *Кожухов И. Б.* Московские городские олимпиады по математике 1996 – 2005 гг. / И.Б. Кожухов, В.А Свентновский, М.В. Соколова. — Москва: Техполиграфцентр, 2010. — 293 с.

5. *Ніколенко В. В.* Збірник задач із математики "Математична олімпіада – 2014"/ В.В. Ніколенко, О.І. Ячменьов. — Суми: Сумський державний університет, 2015. — 39 с.

6. *Окунев Л. Я.* Высшая алгебра / Л.Я. Окунев. — Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. — 432 с.

7. *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре / И.В. Проскуряков. — Москва: Наука, 1984. — 336 с.

8. *Ройтенберг В. Ш.* Задачи студенческих митематических олимпиад ЯГТУ / В.Ш. Ройтенберг, Ю.К. Оленинова, Л.А. Сидорова. — Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2012. — 127 с.

Навчальне видання

Сторчай Володимир Федорович
Купенко Ольга Петрівна

ГОТУЄМОСЯ ДО ОЛІМПІАДИ
ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Навчальний посібник

Редактор Ю.В. Рачковська

Художнє оформлення А.В. Молодченко

Підписано до друку 28.01.2020. Формат 30 х 42/4.
Папір офсетний. Ризографія. Ум. друк. арк. 8,5.
Обл.-вид. арк. 8,5.Тираж 80 пр. Зам. № .

Підготовлено до друку та видрукувано
у Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004.

49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19.