

ремонтно-восстановительных работ на магистральных трубопроводах//Наук. вісн. Будівництва. – Х.:ХНУБА, ХОТВ АБУ,2015. – Вип.5 (79). – С. 61-66.

3. Журба М. Г., Соколов Л. И., Говоруха Ж. И. Водоснабжения. Проектирование систем и сооружений: в 3 т. Т. 3. Системы распределения и подачи воды: Учебное пособие [изд. 3-е]. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2010. – С. 408.

УДК 515.2

МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ НЕХАОТИЧНОЇ ТРАЄКТОРІЇ ВАНТАЖУ 2D-ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА

О.М. Семків

кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, проректор, Національний університет цивільного захисту України, м. Харків, Україна, e-mail: leokuts@mail.ru

Анотація. Розглянуто метод визначення нехаотичної траєкторії переміщення по вертикальній площині вантажу 2D-пружинного маятника залежно від його параметрів.

Ключові слова: пружинний маятник, лагранжіан, рівняння Лагранжа другого роду, метод Рунге-Кутти, інтегральна крива, фазова траєкторія

METHOD OF DETERMINING NONCHAOTIC TRAJECTORY OF 2D-SPRING PENDULUM CARGO

O.M. Semkiv

Ph.D., Vice-Rector, National University of Civil Protection of Ukraine, Kharkiv, e-mail: leokuts@mail.ru

Abstract. A method of determining nonchaotic trajectory movement of 2D-spring pendulum cargo on the vertical surface depending on its parameters is studied.

Keywords: spring pendulum, Lagrangian, Lagrange equation of the second kind, Runge-Kutta methods, integral curve, the phase trajectory

Вступ. Механічні пружини або їх аналоги з еластичних матеріалів входять до складу багатьох машин і механізмів, де діють в режимі подовження або стиснення. Але існують пристрої, в яких тіло пружини має здійснювати «двовимірне» коливання у вертикальній площині навколо закріпленого одного кінця і з вантажем на другому кінці (подібно коливанню маятника). При цьому вважається, що забезпечено незгинання осі пружини у поперечному напрямку. Цю коливальну конструкцію назовемо 2d-пружинним маятником. Доцільність дослідження 2d-пружинних маятників виникла в процесі розрахунків конструкцій з еластичними елементами (рис. 1). Для визначення тра-

екторії переміщення по площині вантажу 2d-пружинного маятника використовують формули для опису кінетичної K і потенціальної P енергій коливної системи [1–7]. Далі за допомогою лагранжіана $L = K - P$ визначають систему рівнянь Лагранжа другого роду. Як узагальнені координати обирають параметри, кількість яких відповідає кількості ступенів свободи коливної системи.

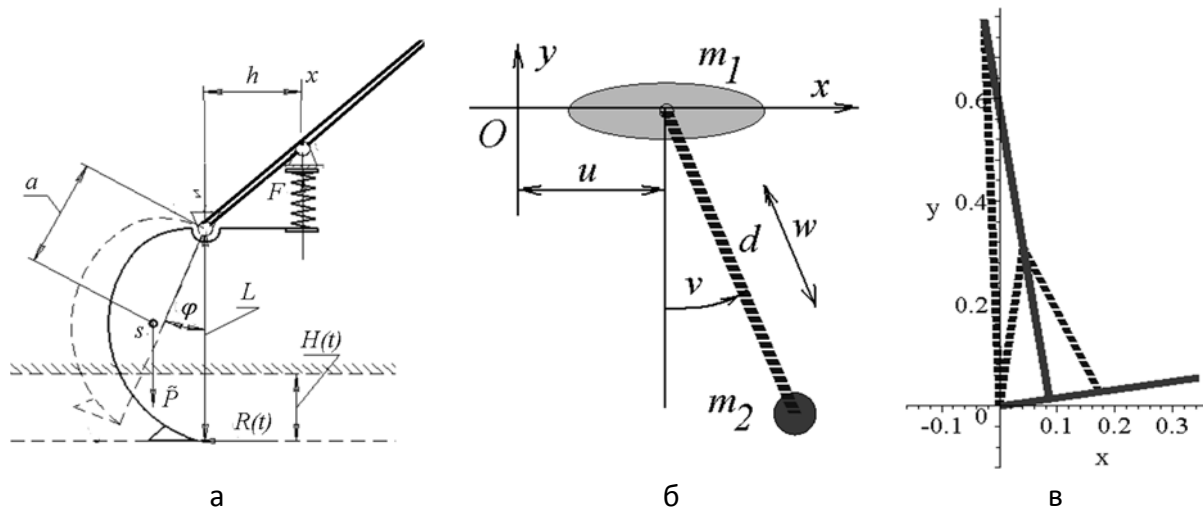


Рис. 1 – Схеми конструкцій з еластичними елементами:

- а) робочого органа розпушувача для ґрунтометальної машини;
- б) еластичної підвіски вертольота; в) протеза стопи з пружинами.

Наприклад, на рис. 1, б, як узагальнені координати можна обрати горизонтальне зміщення точки підвісу $u(t)$, кут відхилення $v(t)$ і подовження тросу $w(t)$. Далі розв'язання системи здійснюють чисельним методом, наприклад Рунге-Кутти, у наведеному прикладі – з початковими умовами $u(0)=u_0$, $u'(0)=Du_0$, $v(0)=v_0$, $v'(0)=Dv_0$, $w(0)=w_0$, $w'(0)=Dw_0$.

У результаті виникає питання: як розпорядитися одержаною в результаті наближеного розв'язку дискретною множиною точок, щоб одержати нехаотичну траєкторію переміщення по площині вантажу 2d-пружинного маятника? Розв'язанню цієї задачі і присвячена дана робота. Відомі підходи до відповіді на задачу можна знайти у розв'язках конкретних задач (див., наприклад [3–5]). Але у відомих методах, як правило, відсутні геометричні пояснення, пов'язані з унаочненням проміжних результатів обчислення траєкторії вантажу 2d-пружинного маятника, що утруднює аналіз одержаного розв'язку. Тому актуальною буде розробка інженерного методу підбору параметрів зазначеної коливної системи, які б забезпечили нехаотичну траєкторію вантажу 2d-пружинного маятника.

Мета роботи. Розробити метод визначення нехаотичної траєкторії переміщення по вертикальній площині вантажу 2d-пружинного маятника залежно від його параметрів.

Матеріал і результати досліджень. На коливання 2d-пружинного маятника впливатимуть такі основні параметри: маса вантажу, початкова довжина пружини у ненавантаженому стані, коефіцієнт жорсткості пружини, а також початкові умови ініціювання коливань: початковий кут відхилення осі пружини та швидкість його відхилення, початкове подовження тіла пружини та швидкість його подовження. Для практики є необхідним графоаналітичний метод визначення набору значень цих параметрів для забезпечення нехаотичності руху вантажу (вагою пружини, тертям у опорі і скрутом пружини нехтуємо).

Особливою траєкторією вважатимемо таку лінію, геометрична форма якої відрізнятиметься певною закономірністю порівняно з хаотичними траєкторіями коливань вантажу 2d-пружинного маятника.

Кінетичну K і потенціальну P енергії 2d-пружинного маятника можна обчислити за формулами:

$$K = \frac{1}{2} m \left(\left(\frac{d}{dt} L(t) \right)^2 + (L(t) + L_0)^2 \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 \right), \quad (1)$$

$$P = \frac{1}{2} m k L^2(t) + 9,81 m (L(t) + L_0) (1 - \cos(\theta(t))) - 9,81 m L(t).$$

Тут $\theta(t)$ – кут відхилення осі маятника від вертикалі, k – коефіцієнт жорсткості пружини; m – маса маятника; $L(t)$ – функція зміни довжини пружини, L_0 – початкова довжина маятника. За допомогою лагранжіана $L = K - P$ складаємо систему диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду:

$$\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) = - \frac{2 \frac{d}{dt} L(t) \frac{d}{dt} \theta(t) + 9,81 \sin(\theta(t))}{L(t) + L_0}; \quad (2)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} L(t) = (L(t) + L_0) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 - \frac{kL(t)}{m} + 9,81 \cos(\theta(t)).$$

Для розв'язання системи (2) чисельним методом Рунге-Кутти необхідно задати умови: початковий кут $\theta(0)$ і початкову швидкість $D\theta(0)$ відхилення тіла пружини, а також початкову довжину $L(0)$ і швидкість $DL(0)$ подовження тіла пружини, а також межі часу інтегрування.

Фіксуємо значення всіх параметрів коливань, крім одного (позначимо його як p), який назвемо керуючим і який буде змінюватися у межах, визначених наперед. Чисельно розв'яжемо систему рівнянь (2) та побудуємо наближене зображення інтегральної кривої у фазовому просторі $\{\theta(t), \dot{\theta}(t), t\}$ (тут крапкою позначено похідну по t). Зображення складатиметься із мно-

жини відрізків, що з'єднують послідовні точки, одержані в результаті наближеного розв'язання системи рівнянь. Побудоване унаочнення залежатиме від певного значення керуючого параметра p . При випадкових значеннях p у фазовому просторі $\{\theta(t), \dot{\theta}(t), t\}$ утвориться «плутана» інтегральна крива, проекція якої на фазову площину $\{\theta(t), \dot{\theta}(t)\}$ також буде «плутаною» фазовою траєкторією (рис. 2). Розв'язання системи рівнянь (2) із випадковим значенням p приведе до хаотичних рухів вантажу на площині xOy . При зміні значення керуючого параметра p мають змінюватися як форма інтегральної кривої, так і форма фазової траєкторії. Нехай знайдеться таке значення керуючого параметра p_k (назвемо його критичним значенням), при якому на фазовій площині $\{\theta(t), \dot{\theta}(t)\}$ із «плутаної» фазової траєкторії сформується закономірна лінія, наприклад, як зображено на рис. 3. Тоді можна стверджувати, що розв'язання системи рівнянь (2) із критичним значенням p_k спричинить закономірні (нехаотичні) рухи вантажу 2d-пружинного маятника на площині xOy .

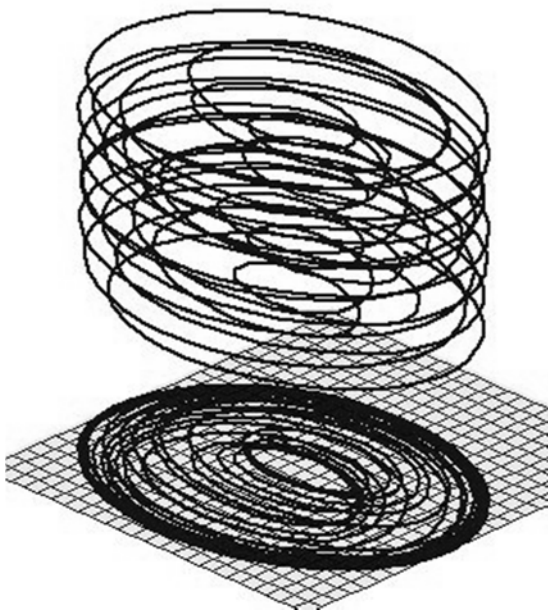


Рис. 2 – Інтегральна крива та фазова траєкторія для випадкового значення керуючого параметра p

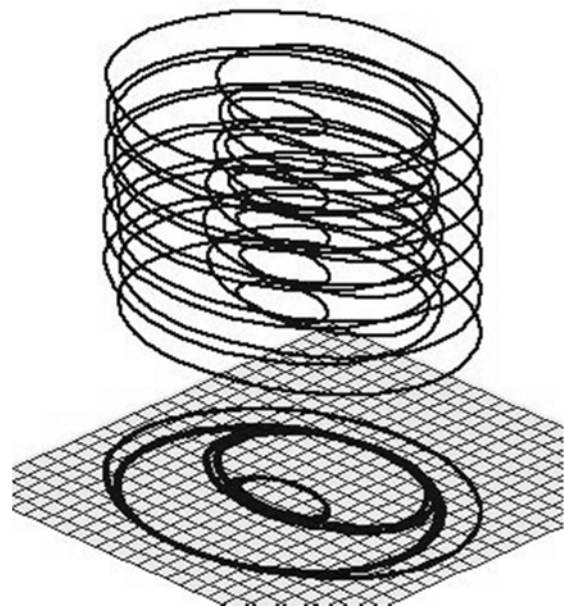


Рис. 3 – Інтегральна крива та фазова траєкторія у випадку критичного значення керуючого параметра p

На мнемонічному рівні це можна проілюструвати як оптичний ефект «наведення на різкість» плутанини фазових траєкторій на фазовій площині $\{\theta(t), \dot{\theta}(t)\}$ — як свого роду проекційне фокусування [10,11]). Зазначимо,

що «сфокусоване» зображення інтегральної кривої при $p = p_k$ складатиметься з мінімальної кількості точок (пікселів) порівняно з кількістю точок у «околі» зображень для критичного значення p_k .

Для формалізації обчислення критичного значення необхідно розробити спосіб оцінки кількості точок на фазовій площині за умови їх можливих суміщень під час проєкціювання інтегральної кривої. Оскільки розв’язок диференціальних рівнянь одержано чисельним методом, то інтегральна крива складатиметься з окремих точок. На фазовій площині проєкції цих точок можуть співпадати, тому фазову траєкторію в момент виявлення критичного значення p_k представлятиме менша кількість точок.

Для оцінки кількості точок проєкції інтегральної кривої у середовищі Maple було складено програму із залученням команд пакету ImageTools. Оцінка кількості точок виражається значеннями побудованої функції $Np(p)$. Критичному значенню p_k відповідатиме екстремум графіка функції $Np(k)$.

Розв’яжемо систему рівнянь (2) з параметрами $m = 1$; $L_0 = 1$ і початковими умовами: початковий кут відхилення $\theta(0) = 0$; початкова швидкість відхилення тіла пружини $D\theta(0) = 0.5$; початкове подовження $L(0) = L_0 = 1$; початкова швидкість подовження тіла пружини $DL(0) = 0$; час t , інтегрування обрано в межах $0..8\pi$. Як керуючий обрано параметр k (коефіцієнт жорсткості пружини), який змінювався на інтервалі $15 \leq k \leq 35$ і який було розділено на $S = 250$ частин. Значення всіх обраних параметрів в умовних величинах.



У результаті виконаних обчислень одержано графік $Np(k)$ функції зміни кількості точок-проєкцій на фазовій площині (рис. 4). Ця функція має глобальний мінімум при $k = 18,12$, а також множини локальних мінімумів, серед яких два будуть яскраво вираженими при $k = 23,0$ і $k = 28,84$.

Слід зазначити, що як керуючий параметр може бути будь-який з параметрів u_0 ; u'_0 ; v_0 ; v'_0 ; w_0 ; $w'_0 = 0$; m_1 ; m_2 і d за умови, що всі інші не будуть змінюватися.

Використовуючи одержані наближені розв’язки $\theta(t)$ і $L(t)$ системи рівнянь Лагранжа другого роду, можна побудувати траєкторію переміщення вантажу $2d$ -пружинного маятника в декартовій системі координат xOy . Для цього слід використати формули:

$$x(t) = (L_0 + L(t)) \sin(\theta(t)); y(t) = -(L_0 + L(t)) \cos(\theta(t)). \quad (3)$$

На рис. 3 зображено фазову траєкторію, яка відповідає випадку $k = 18,12$. На рис. 5 наведено (на площині xOy) нехаотичні траєкторії 2d-пружинного маятника для інших критичних значень k .

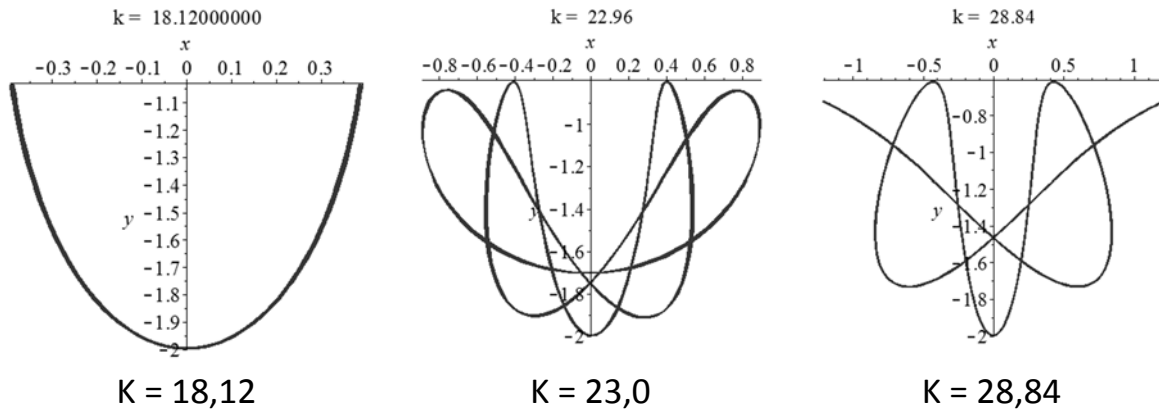
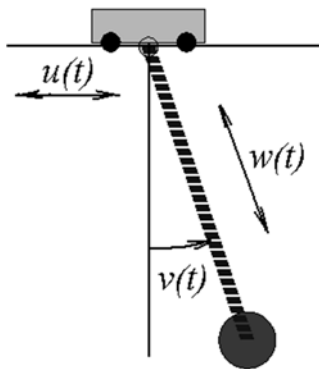


Рис. 5 – Зображення на площині xOy траєкторій вантажу і траєкторій 2d-пружинного маятника залежно від значення k .

Приклад. Дослідимо коливання пружинного маятника під візком (рис. 6). Як узагальнені координати оберемо такі параметри:



- $u(t)$ – горизонтальне зміщення візка;
 - $v(t)$ – кут відхилення пружини від вертикалі;
 - $w(t)$ – пружне подовження пружини.
- Крім того, прийнято такі позначення:
- m_1 – маса візка;
 - m_2 – маса вантажу;
 - d – довжина пружини маятника;
 - k – коефіцієнт жорсткості пружини.

Рис. 6 – Схема маятника під візком

Для складання системи рівнянь Лагранжа другого роду використаємо лагранжіан $L = K - P$,

де формули для кінетичної і потенціальної енергій мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 K &= (m_1 + m_2) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \\
 &+ \frac{1}{2} m_2 \left(\left(\frac{d}{dt} w(t) \right)^2 + w^2(t) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 + 2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 \times \right. \\
 &\left. \left(\left(\frac{d}{dt} w(t) \right) \sin(v(t)) + w(t) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \cos(v(t)) \right) \right) \\
 P &= -m_2 w(t) g \cos(v(t)) + \frac{1}{2} k (w(t) - d)^2.
 \end{aligned} \tag{4}$$

За допомогою лагранжіана складено систему диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду:

$$\begin{aligned}
 &(m_1 + m_2) \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) + \frac{1}{2} m_2 \left(2 \left(\frac{d^2}{dt^2} w(t) \right) \sin(v(t)) \right. \\
 &+ 4 \left(\frac{d}{dt} w(t) \right) \cos(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) + 2 w(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) \cos(v(t)) \\
 &\left. - 2 w(t) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 \sin(v(t)) \right) = 0 \\
 &\frac{1}{2} m_2 \left(4 w(t) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \left(\frac{d}{dt} w(t) \right) + 2 w(t)^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) + 2 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) w(t) \cos(v(t)) \right. \\
 &+ 2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) \left(\frac{d}{dt} w(t) \right) \cos(v(t)) - 2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) w(t) \sin(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \left. \right) \\
 &- m_2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) \left(\left(\frac{d}{dt} w(t) \right) \cos(v(t)) - w(t) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \sin(v(t)) \right) + m_2 g w(t) \sin(v(t)) = 0 \\
 &\frac{1}{2} m_2 \left(2 \left(\frac{d^2}{dt^2} w(t) \right) + 2 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) \sin(v(t)) + 2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) \cos(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \right) \\
 &\left. - \frac{1}{2} m_2 \left(2 w(t) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 + 2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) \cos(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \right) - m_2 g \cos(v(t)) + k (w(t) - d) = 0
 \end{aligned} \tag{5}$$

Розв'язувати систему рівнянь (4) будемо чисельно за допомогою методу Рунге-Кутти з початковими умовами $u_0 = 0$; $u'_0 = 1$; $v_0 = \pi/3$; $v'_0 = 0$; $w_0 = 1$; $w'_0 = 0$ і з параметрами: $m_1 = 150$; $m_2 = 50$; $d = 5$; $g = 9,81$ (усі значення в умовних одиницях). Розрахунок коливань маятника під візком виконаємо за умови визначення значень коефіцієнта жорсткості пружини залежно від інших сталих параметрів схеми. Тобто в процесі обчислень необхідно визначити значення коефіцієнта жорсткості пружини, яке забезпечить нехаотичну

траєкторію переміщення вантажу. У результаті будуємо наближене зображення інтегральної кривої у фазових просторах функцій узагальнених координат, яке залежатиме від певного значення керуючого параметра k . Тому для обчислення критичного значення керуючого параметра необхідно використати спосіб проєкційного фокусування, розглянутий у даній роботі.

Під час обчислень було виявлено декілька критичних значень керуючого параметра t . Найбільш цікавим виявився варіант $k = 328$ при обраних вище значеннях вхідних параметрів і початкових умовах.

На рис. 7 наведено інтегральні лінії та фазові траєкторії у фазових просторах відповідних функцій узагальнених координат.

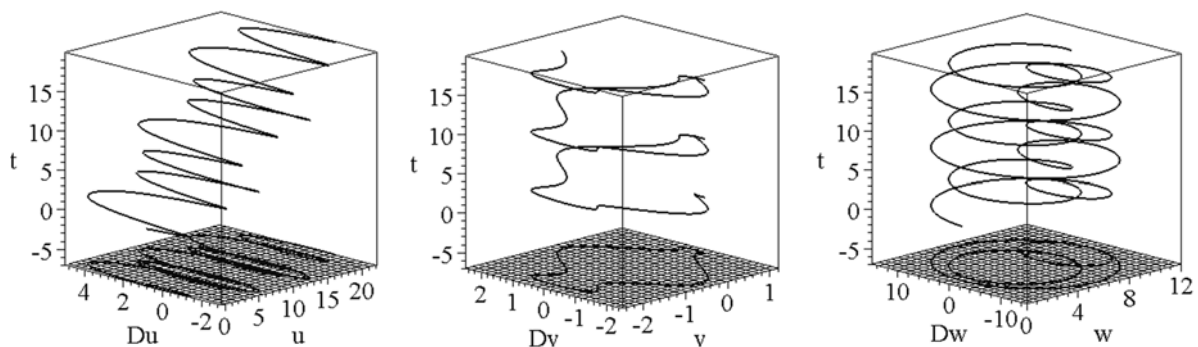


Рис. 7 – Інтегральні лінії та фазові траєкторії

На рис. 8 зображено фазові траєкторії на відповідних координатних площинах.

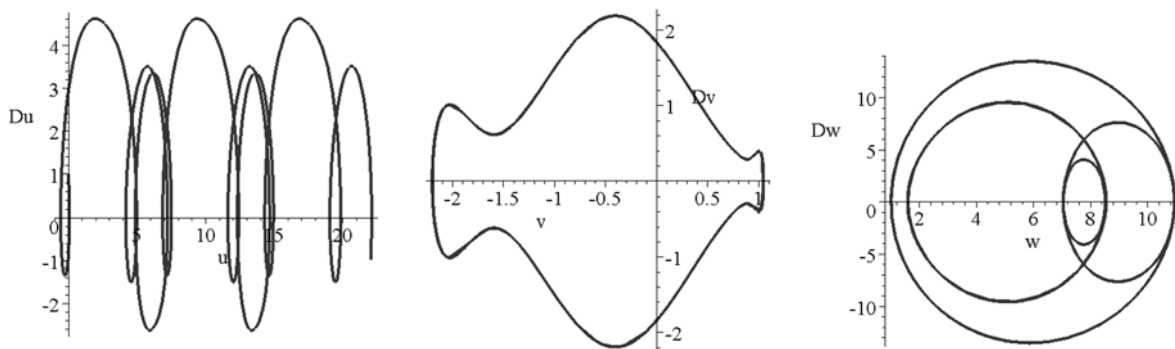


Рис. 8 – Фазові траєкторії на відповідних координатних площинах.

Використовуючи одержані наближені розв'язки $u(t)$, $v(t)$ і $w(t)$ системи рівнянь Лагранжа другого роду, можна побудувати траєкторію переміщення вантажу $2d$ -пружинного маятника в декартовій системі координат xOy . Для цього слід використати формули

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) + (d + w(t)) \sin(v(t)); \\ y(t) &= -(d + w(t)) \cos(v(t)). \end{aligned} \tag{6}$$

На рис. 9 зображено кадри створеного анімаційного фільму коливання 2d-пружинного маятника під візком по розрахованій траєкторії, коли вантаж переміщається не хаотично. Більше того, завдяки організованим рухам вантажу візок переміщається праворуч. Це пояснюється узгодженими з рухом фазою розпрямлення пружини (рис. 9, а) і фазою стиснення пружини (рис. 9, б).

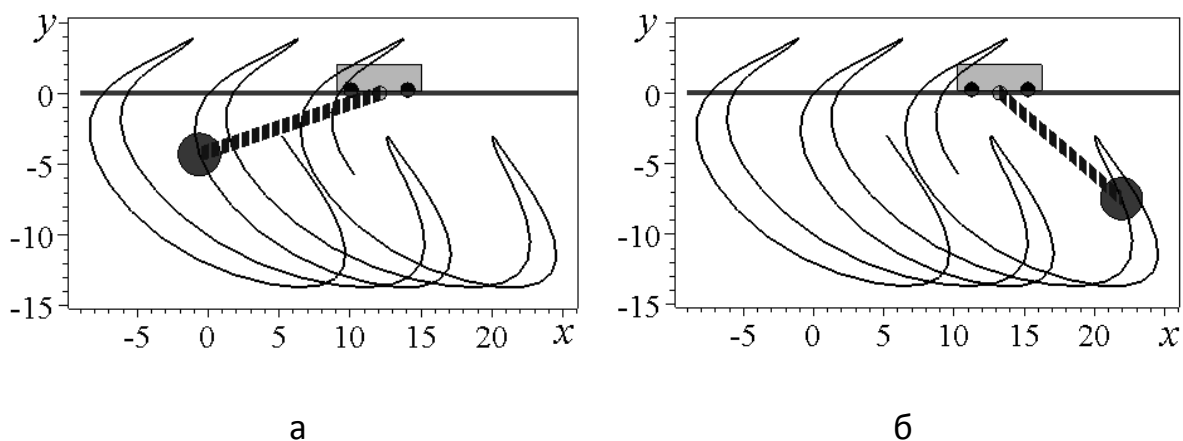


Рис. 9 – Кадри анімаційного фільму коливання 2d-пружинного маятника під візком

Висновок. Розроблений метод дозволяє визначати геометричні форми особливих траєкторій під час коливання вантажу 2d-пружинного маятника залежно від маси вантажу, початкової довжини пружини у розвантаженому стані, коефіцієнта жорсткості пружини, а також від початкових умов ініціювання коливань – таких як початкового кута відхилення тіла пружини, початкової швидкості кута відхилення 2d-пружинного маятника та швидкості початкового подовження тіла пружини.

Запропонований метод дозволяє визначати множину значень параметрів, які забезпечують формування нехаотичних траєкторій переміщення вантажу по вертикальній площині. Для прикладу у даній роботі детально досліджено вплив на форму траєкторії коефіцієнта жорсткості пружини.

Метод дозволяє створювати алгоритми визначення множини критичних значень керуючого параметра, які відповідатимуть нехаотичним траєкторіям коливання вантажу 2d-пружинного маятника. Крім того, попутно можна визначити різноманітні фазові траєкторії, розташовані на фазових площинах, відповідних обчисленому критичному значенню керуючого параметра. Все це дозволяє здійснювати аналіз коливань 2d-пружинного маятника на якісному рівні.

ЛІТЕРАТУРА

1. Rusbridge M.G., Motion of the spring pendulum, *American Journal of Physics*, vol. 48, no. 2, pp. 146–151, 1980.
2. Breitenberger E. Mueller R.D. The elastic pendulum: a nonlinear paradigm, *Journal of Mathematical Physics*, vol. 22, no. 6, pp. 1196–1210, 1981.
3. Lai H.M. On the recurrence phenomenon of a resonant spring pendulum, *American Journal of Physics*, vol. 52, no. 3, pp. 219–223, 1984.
4. Georgiou, I. T. 1999. On the global geometric structure of the dynamics of the elastic pendulum, *Nonlinear Dynam.* 18, 51-68.
5. Girgin Z., Demir E. Investigation of Elastic Pendulum Oscillations by Simulation Technique, *Journal of Engineering Sciences* 2009 15 (1) 81-86
6. Broucke R, Baha P.A. Periodic solutions of a spring-pendulum system. *Celestial mechanics* September 1973, Volume 8, [Issue 2](#), pp 261-267
7. Gavin Henri P. Generalized Coordinates, Lagrange's Equations, and Constraints. CEE 541. Structural Dynamics – Duke University – 2014. 23 p.
8. Chen Y.F. Scientific computing and visualization. Spring pendulum system, top.4. Электронний ресурс. Режим доступу <http://ocw.nctu.edu.tw/upload/classbfs1209054703145981.pdf>
9. Электронний ресурс. Режим доступу: <http://ocw.mit.edu/courses/mechanical-engineering/2-003j-dynamics-and-control-i-spring-2007/lecture-notes/lec17.pdf>
10. Семків О.М. Метод визначання особливих траєкторій коливань вантажу 2d-пружинного маятника. - Харків: ХНАДУ, Вісник ХНАДУ, № 71, 2015. – С. 36-44.
11. Семкив О.М. Особенности геометрической формы колебаний груза 2d-пружинного маятника. - Международная конференция по научному развитию Евразии.–Австрия, г. Вена-VII 2015. – С. 217-214.

УДК 004.942

МЕТОД РАСЧЕТА РАСХОДА РУЧЕЙНОГО ПОТОКА СМЕСИ ОВАЛОИДОВ

А.А. Аннов

специалист по контролю параметров зернисто/кусковых потоков, Штутгарт, Германия, e-mail: annov@gmx.de

Аннотация. С помощью компьютерного моделирования произведена имитация процесса зондирования точечным оптическим лучом ручейного потока смеси эллипсоидов. Предложен метод расчета объемного расхода ручейного потока смеси объектов, имеющих форму оваловидов.

Ключевые слова: смесь эллипсоидов вращения, среднестатистическая хорда смеси, объем порции потока.