УДК 51-74:621

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ КОЛИВАНЬ

О.Е. Корнійчук
кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра загальнотехнічних та природничих дисциплін, Житомирський агротехнічний коледж, м. Житомир, Україна, e-mail: elena.k.02@i.ua

Анотація. Стаття присвячена проблемі використання елементів математичного моделювання в процесі навчання вищої математики студентів технічних спеціальностей. Зокрема, досліджено електричну систему, яка складається з резистора, котушки та конденсатора. Проведено аналіз сили струму в ланцюгу, елементи якого під'єднано до джерела електрорушійної сили, – до батареї або генератора. Модель побудовано на основі теорії диференціальних рівнянь з використанням комп'ютерних технологій та засобів графічної інтерпретації розв'язку.

Ключові слова: електричний ланцюг, опір, індуктивність, ємність, напруга, заряд, сила струму, диференціальне рівняння.

MATHEMATICAL MODELING OF ELECTROMAGNETIC OSCILLATIONS

Olena Korniichuk
Ph.D., Associate Professor, Department of General Technical and Natural Sciences, Zhytomyr Agro-technical College, Zhytomyr, Ukraine, e-mail: elena.k.02@i.ua

Abstract. The article is devoted to the methodology of the use of mathematical modeling in the process of teaching Higher mathematics to students of technical specialties. In particular, the electrical system was investigated, which consists of a resistor, a coil and a capacitor. It was analyzed of the current in the circuit, the elements of which are connected to the source of the EMF – to the battery or generator. The model is based on the theory of differential equations using computer technology and tools graphical interpretation of the solution.

Keywords: electric circuit, resistance, inductance, capacitance, voltage, charge, current, differential equation.

Вступ. У процесі навчання вищої математики студентів технічних спеціальностей необхідно демонструвати математичні факти, об'єкти і процеси у прикладному аспекті. Найважливіший компонент професійної підготовки майбутнього інженера – математичне моделювання природничих, технологічних, економічних процесів і явищ, пов'язаних з проектуванням, конструюванням, виробництвом і експлуатацією технічних об'єктів та механічних систем. Інженер для успішної роботи за фахом повинен володіти ґрунтовними знаннями з математики, фізики, технічної механіки і знати області їх застосувань у професійній діяльності. Без знання математичних методів і законів фізики, без застосування необхідних комп’ютерних технологій діяльність у різноманітних галузях техніки та інженерній справі неможлива.

Питанням мотивації вивчення вищої математики, проблемам формування професійних і математичних компетенцій майбутніх фахівців присвячено велику кількість багаторічних напрацювань автора. Наприклад, математика як складова в розвитку мислення сучасного економіста [1], новітні методи і прийоми навчання математичного моделювання та дослідження організації виробництва [2], формування професійного інтелекту в процесі моделювання систем штучного інтелекту [3], пропедевтика математичного моделювання в курсі вищої математики [4], моделі динаміки у задачах менеджменту лісового та мисливського господарства [5], дослідження диференційних моделей механічних систем [6], модель енергоспоживання через функції Торнквіста [7] та багато інших.

Мета роботи: розширити діапазон реальних застосувань вищої математики, спрямованих на поглиблення теоретичних знань з теорії диференційних рівнянь, на пошуково-дослідну роботу студентів, що сприятиме розвитку компетенцій та підвищенню рівня професійної підготовки фахівців у галузі автомобільного транспорту та агроінженерії.

Виклад матеріалу. Усі зміни, які відбуваються в електричному ланцюзі: включення, вимкнення, коротке замикання, коливання величин будь-якого параметра тощо – тягнуть за собою перехідні процеси.

У разі перехідних процесів можуть виникати великі перенапруги, надструми, електромагнітні коливання, які можуть псувати роботу пристрою аж до виходу його з ладу. З іншого боку, перехідні процеси знаходять корисне практичне застосування, наприклад, у різного роду електронних генераторах. Все це обумовлює необхідність вивчення методів аналізу нестаціонарних режимів роботи ланцюга.

Основним методом аналізу перехідних процесів у лінійних ланцюгах є класичний метод – розв’язування диференціальних рівнянь, які описують електромагнітний стан ланцюга.

Розглянемо *RLC*-ланцюг, який є складовою електричних мереж. Такий ланцюг містить: резистор, опір якого дорівнює *R* (*ом*); котушку, індуктивність якої – *L* (*генрі*); конденсатор, ємність якого – *C* (*фарад*). Ці елементи під'єднано до джерела електрорушійної сили (наприклад, до батареї або до генератора), яке у момент часу *t* подає до ланцюга напругу *E*. Електрична схема побудована у векторному графічному редакторі *Microsoft Visio* (рис. 1).

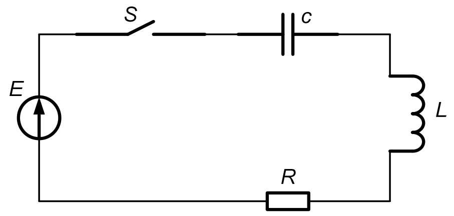

Рисунок 1 – Електричний ланцюг RLC

Нехай наразі ланцюг замкнений, тобто вимикач *S* включений. Позначимо силу струму в мережі у момент часу *t* через *I*, а заряд конденсатора – *Q*. Тоді функції *Q* та *I* задовольняють наступному рівнянню:

$$\frac{dQ}{dt} = I(t) \quad \text{або} \quad Q'(t) = I(t). \tag{1}$$

Використовуючи закони електрики, падіння напруги на зазначених елементах ланцюга записуємо у таблиці 1. Для дослідження поведінки ланцюга (рис. 1) будемо використовувати дані таблиці та другий закон Кірхгофа: алгебраїчна сума падінь напруги на елементах контуру ланцюга дорівнює напрузі, прикладеній щодо цього ланцюга.

Таблиця 1 – Падіння напруги на елементах ланцюга

Елемент ланцюга	*Котушка*	*Резистор*	*Конденсатор*
Падіння напруги на елементі	$L\frac{dI}{dt}$	RI	$\frac{1}{C}Q$

Як наслідок, сила струму та заряд у простому ланцюгу, що складається з резистора, котушки і конденсатора, задовольняє основному рівнянню ланцюга:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E(t). \tag{2}$$

Якщо підставити (1) у рівняння (2), отримаємо лінійне диференціальне рівняння другого порядку відносно заряду *Q* при відомій напрузі *E*:

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t). \tag{3}$$

У більшості практичних задач цікавить не заряд *Q*, а сила струму *I*. Використовуючи рівняння (1), диференціюємо обидві частини рівняння (3) та підставимо *I* замість Q':

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t). \tag{4}$$

Вражає той факт, що рівняння (3) і (4) мають таку саму форму, як і розглянута механічна модель у дослідженнях загасаючих коливань [6] – рівняння руху системи, що складається з тіла, закріпленого на пружині з амортизатором, на яку діє зовнішня сила *F*(*t*):

$$mx'' + cx' + kx = F(t). \tag{5}$$

Отже, між механічними та електричними системами існує аналогія.

Як правило, напруга змінного струму E є гармонійною і дорівнює $E_0 \sin \omega t$ (ω – кругова частота). Тоді рівняння (4) приймає вигляд:

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = \omega E_0 \cos \omega t. \quad (6)$$

Розв'язок цього рівняння є сумою **перехідного струму** $I_{\text{пс}}$ (струму при перехідному процесі або струму невстановленого режиму) та **встановленого періодичного струму** $I_{\text{впс}}$:

$$I = I_{\text{пс}} + I_{\text{впс}}. \quad (7)$$

У випадках, коли потрібно знайти величину короткочасного струму, задаються початкові значення I та Q в момент часу $t = 0$. Тобто розв'язують задачу Коші – задачу з початковими умовами. Тому спочатку необхідно обчислити $I'(0)$. Для цього підставляємо $t = 0$ в рівняння (2):

$$LI'(0) + RI(0) + \frac{1}{C}Q(0) = E(0), \quad (8)$$

що дозволяє виразити $I'(0)$ через початкові значення струму, заряду та напруги.

Наприклад, розглянемо *RLC*-ланцюг, в якому R = 50 Ом, L = 0,1 Гн, C = $5 \cdot 10^{-4}$ Ф. В момент часу $t = 0$, коли значення $I(0) = Q(0) = 0$, ланцюг підключається до батареї із сталою напругою 110 В ($E(0) = 110$). Знайдемо силу струму в ланцюгу.

- Підставляємо дані значення *R, L, C* в рівняння (4):
$$0{,}1I'' + 50I' + 2000I = (110)' = 0.$$
- Відповідне характеристичне рівняння $0{,}1r^2 + 50r + 2000 = 0$ має два корені $r_1 \approx -44$ і $r_2 \approx -456$.
- Записуємо загальний розв'язок: $I(t) = c_1 e^{-44t} + c_2 e^{-456t}$.
- Для знаходження c_1 і c_2 розв'язуємо систему рівнянь:

$I(0) = c_1 + c_2 = 0$

$I'(0) = -44c_1 - 456c_2 = 1100$, звідки $c_1 = -c_2 = 2{,}670$.

Значення $I'(0)$ знайшли, підставляючи початкові умови у рівняння (2): $LI'(0) + RI(0) + \frac{1}{C}Q(0) = E(0)$. Звідки $I'(0) = \frac{E(0)}{L} = \frac{110}{0{,}1} = 1100\ (A/c)$.

- Шукана сила перехідного струму має вигляд:

$$\mathrm{I}_{\text{пс}}(t) = 2{,}67(e^{-44t} - e^{-456t}). \quad (9)$$

Геометричну інтерпретацію розв'язку (9) проведено за допомогою ПЗ *GRAN1* (рис.2, І-1). За графіком бачимо, що сила струму під час перехідного процесу $\mathrm{I}_{\text{пс}}(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ незалежно від сталої напруги.

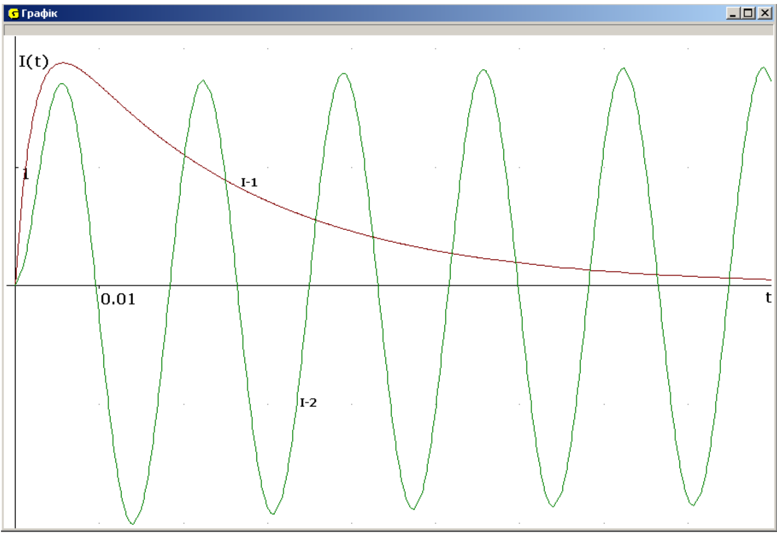

Рисунок 2 – Перехідний струм I-1 при підключенні батареї;
сумарний струм I-2 при підключенні генератора

Якщо *RLC*-ланцюг з тими самими початковими умовами у момент часу $t = 0$ приєднати до генератора змінного струму з напругою $E_0 = 110\ B$ і частотою 60 Гц, то диференціальне рівняння (6) набуває вигляду:

$$0{,}1I'' + 50I' + 2000I = 377 \cdot 110\cos 377t. \qquad (10)$$

Розв'язок цього рівняння є сумарним струмом (7), який складається з перехідного струму $I_{пс}$ та встановленого періодичного струму $I_{впс}$:

$$I(t) = (-0{,}307e^{-44t} + 1{,}311e^{-456t}) + 1{,}846\sin(377t - 0{,}575) \qquad (11)$$

та ілюструється електромагнітними коливаннями на рис. 2, I-2.

Зручним способом для знаходження розв'язку (11), водночас побудови його графіку, дослідження та аналізу математичної моделі (10) є застосування системи комп'ютерної математики *MathCAD.*

Відмітимо, що після однієї п'ятої секунди значення перехідного струму менше за $0{,}000047A$ ($|I_{пс}(0{,}2)| < 0{,}000047A$). Це можна порівняти з величиною струму, який проходить крізь нервове волокно людини (сила струму в аксоні під час передачі нервового імпульсу лише 0,004 *мкА*). Таке мале значення струму показує, що перехідна складова розв'язку зникає дуже швидко.

Висновки. Той факт, що одне й те саме диференціальне рівняння служить математичною моделлю різних фізичних (механічних та електричних) систем, ілюструє важливу об'єднуючу роль математики в дослідженні явищ і процесів.

Аналогії у математичних моделях зустрічаються не лише за однаковим типом рівнянь, а також за отриманими розв'язками, тобто функціями та графіками цих функцій. У дослідженні даної моделі електричної системи та економічної моделі попиту через функції Торнквіста [7], простежується дивовижна аналогія. Візуальна схожість графіка функції, що ілюструє силу короткочасного струму у перехідному періоді, та графіка функції попиту на маловартісні товари. Їх однакова поведінка: стрімке короткострокове зростання до пікового значення, а потім спадання до нульового рівня або рівня насиченості.

В процесі навчання вищої математики студентів технічних спеціальностей особливої актуальності набувають завдання для активізації самостійної пізнавальної діяльності, стимулювання інтересу до математичних методів, формування математичної культури та дослідницьких навичок. Математичне моделювання механічних, електричних, економічних систем посилює розуміння процесів, які відбуваються у природі і суспільстві, та є невід'ємною складовою професійної підготовки майбутніх інженерів. Розв'язування прикладних задач, побудова математичних моделей та їх динамічна візуалізація є основою в організації проблемного навчання та науково-дослідної роботи студентів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Корнійчук О.Е. Математика як складова в розвитку мислення сучасного економіста. Педагогіка і психологія. Київ, 2007. № 1. С. 70-78.

2. Корнійчук О.Е. Новітні методи і прийоми навчання математичного моделювання та дослідження організації виробництва. Освіта та педагогічна наука. Луганськ, 2012. № 3(152). С. 54-61.

3. Корнійчук О.Е. Формування професійного інтелекту в процесі моделювання систем штучного інтелекту. Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського нац. ун-ту ім. І. Огієнка. Сер. Педагогічна. Вип. 20. Кам'янець-Подільський, 2014. С. 90-93.

4. Корнійчук О.Е. Пропедевтика математичного моделювання в курсі вищої математики. Сборник научных трудов международной конференции «Современные инновационные технологии подготовки инженерных кадров для горной промышленности и транспорта 2016». Дніпропетровськ, 2016. С. 431-440.

5. Корнійчук О.Е. Моделі динаміки у задачах менеджменту лісового та мисливського господарства. Фізико-математична освіта : науковий журнал. Вип. 1(11). Суми, 2017. С. 62-67.

6. Корнійчук О.Е. Дослідження диференційних моделей механічних систем. Сборник научных трудов международной конференции «Современные инновационные технологии подготовки инженерных кадров для горной промышленности и транспорта 2018». Дніпро, 2018. С. 345-349.

7. Корнійчук О.Е. Модель енергоспоживання через функції Торнквіста. Сборник научных трудов международной конференции «Современные инновационные технологии подготовки инженерных кадров для горной промышленности и транспорта 2019». Днипро, 2019. С. 320-325.