УДК 517.5

© В.Л.Великин, Г.Н.Великина

ТОЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ И ОЦЕНКИ ВЕЛИЧИНЫ ВЗАИМНОГО УКЛОНЕНИЯ ПОДПРОСТРАНСТВ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ЭРМИТОВЫХ СПЛАЙНОВ НА КЛАССАХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

В работе получено точное значение величины взаимного уклонения пары подпространств интерполяционных эрмитовых сплайнов одного порядка на единичном шаре нормированного пространства дифференцируемых функций, а также оценка сверху для подпространств сплайнов разных порядков.

В роботі отримано точне значення величини взаємного відхилення пари підпросторів інтерполяційних ермітових сплайнів одного порядку на одиничній кулі нормованого простору диференційовних функцій, а також оцінка зверху для підпросторів сплайнів різних порядків.

We obtained exact value of the mutual deviation of a pair of subspaces of interpolatory Hermitian splines of the same order on a unit ball of the normed space of differentiable functions. For the case of subspaces of splines of different orders, we obtained an upper bound, which is exact in certain cases.

Пусть C^q, q=0,1,2, . . . , $(C^0=C)$ – линейное нормированное пространство функций *f*, имеющих на промежутке [0,1] *q* непрерывных производных с нормой

$$\|f\|^{(q)}=\sum_{k=0}^{q}\left\|f^{(k)}\right\|_{C[0,1]}, \qquad \|f\|^{(0)}=\|f\|.$$

Пусть еще $\Delta_n=\{0=x_0<x_1< \ . \ . \ . <x_n=1\}$, $n\geq 1$, – произвольное разбиение промежутка [0,1], $h_i=x_i-x_{i-1}$, $\delta_n=max\,\{h_i:\ i=\overline{1,n}\}$, а $\overline{\Delta}_n$ – разбиение с равноотстоящими узлами.

Ниже используются такие обозначения для $f\in C^q$:

$$f_j^{(k)}=f^{(k)}(x_j),\ j=\overline{0,n},\ \ k=\overline{0,q}.$$

Каждой функции $f\in C^q$ поставим в соответствие интерполяционный эрмитовый сплайн порядка $2m+1$, m =0, 1, 2, . . . , (см., напр., [1]):

$$s_{r,m}(f;\Delta_n,x)=\sum_{k=0}^{r}f_{i-1}^{(k)}H_{k,m}(h_i;x-x_{i-1})+(-1)^k f_i^{(k)}H_{k,m}(h_i;\ x_i-x), \tag{1}$$

$x\in[x_{i-1},x_i]$, $\quad i=\overline{1,n}$, $\quad q,m\geq r$, r=0, 1, 2, . . . , и

$$H_{k,m}(h;\,t)=\frac{(h-t)^{m+1}}{k!m!}\sum_{s=0}^{m-k}\frac{(m+s)!}{s!h^{m+1+s}}t^{k+s}. \tag{2}$$

Подпространство таких сплайнов, при фиксированных *m*, *r* и Δ_n, обозначим через $S_{r,m}(\Delta_n)$. Нетрудно проверить, что

$$H_{k,m}^{(j)}(h;\,0)=\delta_{k,j},\quad H_{k,m}^{(j)}(h;\,h)=0,\quad j=\overline{0,m}, \tag{3}$$

и

$$H_{0,m}(h;\, t) + H_{0,m}\ (h;\, h-t) \equiv 1. \qquad (4)$$

В работах [2]-[3] были получены точные и асимптотически точные оценки величины

$$\Theta_r\,[S_{r_1,m_1}(\Delta_n), S_{r_2,m_2}(\Delta_n)] = \sup_{\|f\|^{(r)}\le 1} \left\| s_{r_1,m_1}(f;\Delta_n,x) - s_{r_2,m_2}(f;\Delta_n,x) \right\| \qquad (5)$$

для $r=0,\,1$ и $r_1 = r_2 = 0,\,1.$

Заметим, что величина (5) представляет собой аналог раствора подпространств гильбертова пространства (см., напр., [4]).

Здесь мы продолжаем исследование величины (5), но уже для произвольных значений r. А именно, в данной работе получены точные значения величины $\Theta_r[S_{r,m}(\Delta_n), S_{r-1,m}(\Delta_n)]$ и оценка сверху для $\Theta_r[S_{r,m+1}(\Delta_n), S_{r,m}(\Delta_n)]$ при произвольных r и m.

Теорема 1. *Для произвольных $r \ge 1$ и $m \ge r$ имеет место следующее равенство*

$$\Theta_r\,[S_{r,m}(\Delta_n), S_{r-1,m}(\Delta_n)] = \alpha_{r,m}\delta_n^r,$$

где

$$\alpha_{r,m} = \frac{1}{(r-1)!}\sum_{j=r}^{m} \frac{(2j-r-1)!}{2^{2j}\, j!(j-r)!}.$$

В частности,

$$\alpha_{m,m} = \frac{1}{2^{2m} m!},\ \alpha_{m-1,m} = \frac{m+3}{2^{2m}(m-1)!}, \ldots,$$

$$\alpha_{1,m} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{5}{256} + \ldots + \frac{C_{2m-1}^{m}}{2^{2m}(2m-1)}$$

и

$$\Theta_r\,[S_{r,m}(\overline{\Delta}_n), S_{r-1,m}(\overline{\Delta}_n)] = \frac{\alpha_{r,m}}{n^r}.$$

Доказательство. Для произвольного $x \in [0,1]$ определим i из условия $x_{i-1} \le x \le x_i$ и положим $t = x - x_{i-1}$. Тогда из (1) и (2) для $x \in [x_{i-1}, x_i]$ имеем

$$s_{r,m}(f;\Delta_n,x) - s_{r-1,m}(f;\Delta_n,x) = f_{i-1}^{(r)} H_{r,m}(h_i;\, t) + (-1)^r f_i^{(r)} H_{r,m}(h_i; h_i - t).$$

Откуда, с учетом (5), получаем

$$\Theta_r\,[S_{r,m}(\Delta_n), S_{r-1,m}(\Delta_n)] \le \max_{1\le i\le n}\ \max_{0\le t\le h_i} \left(H_{r,m}(h_i;\, t) + H_{r,m}(h_i; h_i - t)\right).$$

В силу леммы (1) из [5]

$$\omega_{r,m}(h_i;\, t) := H_{r,m}(h_i;\, t) + H_{r,m}(h_i; h_i - t) = \frac{1}{(r-1)!}\sum_{j=r}^{m} \frac{(2j-r-1)!}{j!(j-r)!\, h_i^{2j-r}}\, t^j (h_i - t)^j.$$

Поскольку график функции $\omega_{r,m}(h_i;t)$ симметричен относительно $t=\frac{h_i}{2}$ и функция $H_{r,m}(h_i;t)$ является алгебраическим многочленом степени $2m+1$, функция $\omega_{r,m}(h_i;t)$ представляет собой алгебраический многочлен степени $2m$. Кроме того, функция $\omega_{r,m}(h_i;t)$ и ее производные на концах промежутка $[0,h_i]$ принимают такие значения:

$$\omega^{(k)}_{r,m}(h_i;\,0)=\ \omega^{(k)}_{r,m}(h_i;h_i)=0,\quad 0\le k\le m\,,\ \ k\ne r\,, \tag{6}$$

и

$$\omega^{(r)}_{r,m}(h_i;0)=\ (-1)^r\ \omega^{(r)}_{r,m}(h_i;h_i)=1. \tag{7}$$

Следовательно, максимальное значение на промежутке $[0,h_i]$ функция $\omega_{r,m}(h_i;t)$ принимает в точке $t=\frac{h_i}{2}$. Действительно, если бы это было не так, то, с учетом равенств (6) и (7) и симметричности функции $\omega_{r,m}(h_i;t)$, ненулевой алгебраический многочлен $\omega^{(2m-1)}_{r,m}(h_i;t)$ первой степени должен был бы иметь не менее двух нулей.

Таким образом,

$$\Theta_r\,[S_{r,m}(\Delta_n),S_{r-1,m}(\Delta_n)]\le \max_{1\le i\le n}\omega_{r,m}(h_i;\frac{h_i}{2})=\max_{1\le i\le n}\alpha_{r,m}\,h_i^r=\alpha_{r,m}\,\delta_n^r\,.$$

Покажем теперь, что для любого $\varepsilon>0$ существует функция f_ε такая, что $\|f_\varepsilon\|^{(r)}\le 1$ и

$$\left\|s_{r,m}(f_\varepsilon;\Delta_n,x)\,-\,s_{r-1,m}(f_\varepsilon;\Delta_n,x)\right\|>\alpha_{r,m}\delta_n^r-\varepsilon\,.$$

Откуда и будет следовать утверждение теоремы 1.

Для построения искомой функции f_ε рассмотрим функцию ψ_r, у которой *r-я* производная на промежутке $[-1,1]$ определена равенствами

$$\psi_r^{(r)}(t)=1,\ t\in\left[-1,\cos\frac{r\pi}{r+1}\right],$$

$$\psi_r^{(r)}(t)=(-1)^{r-k},\quad t\in\left(\cos\frac{(k+1)\pi}{r+1},\cos\frac{k\pi}{r+1}\right],\ \ k=\overline{0,\,r-1},$$

а вне промежутка $[-1,1]$ $\psi_r^{(r)}(t)=0$. И

$$\psi_r^{(j)}(t)=\int_{-1}^{t}\psi_r^{(j+1)}(\tau)d\tau\,,\quad j=\overline{r-1,0}\,.$$

Функция $\psi_r\,(t)$ такова, что

$$\psi_r^{(j)}(-1)\,=\psi_r^{(j)}(1)\,=0,\ j=\overline{r-1,0}\,,\ \ \psi_r^{(r)}(-1)=1,\ \ \psi_r^{(r)}(1)=(-1)^r\,, \tag{8}$$

$$\psi_r\,(t)\,=0,\ t\notin(-1,1). \tag{8'}$$

Пусть теперь натуральные числа s и l таковы, что $h_s = \delta_n$ и, для заданного $\varepsilon > 0$, $\frac{r\delta_n}{l} < \varepsilon$. Тогда функция $f_\varepsilon(x) = 0,\ x \notin [x_{s-1}, x_s]$, и

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{1+\varepsilon}\left(\frac{\delta_n}{2l}\right)^r \psi_r\left(\frac{2l(x - x_{s-1} - p\delta_n / l)}{\delta_n} - 1\right),$$
$$x \in [x_{s-1} + p\delta_n / l, x_{s-1} + (p+1)\delta_n / l],\ p = \overline{0, l-1},$$

является искомой. Действительно, с учетом того, что $\left\|\psi_r^{(j)}\right\| \le (2)^{r-j}$, получаем

$$\left\|f_\varepsilon^{(j)}\right\| = \frac{1}{1+\varepsilon}\left(\frac{\delta_n}{2l}\right)^{r-j}\left\|\psi_r^{(j)}\right\| < \frac{1}{1+\varepsilon}\left(\frac{\delta_n}{l}\right)^{r-j},\quad j = \overline{0, r}.$$

Поэтому,

$$\|f_\varepsilon\|^{(r)} \le \frac{1}{1+\varepsilon}\sum_{j=0}^{r}\left(\frac{\delta_n}{l}\right)^{r-j} < \frac{1}{1+\varepsilon}\left(1 + \frac{r\delta_n}{l}\right) < 1.$$

Кроме того, в силу равенств (8-8′),

$$s_{r,m}(f_\varepsilon; \Delta_n, x) = \frac{1}{1+\varepsilon}\,\omega_{r,m}(h_s; t),\quad t = x - x_{s-1},\quad x \in [x_{s-1}, x_s],$$
$$s_{r,m}(f_\varepsilon; \Delta_n, x) = 0,\quad x \notin [x_{s-1}, x_s],$$

и

$$s_{r-1,m}(f_\varepsilon; \Delta_n, x) = 0,\quad x \in [0,1].$$

Таким образом,

$$\left\|s_{r,m}(f_\varepsilon; \Delta_n, x) - s_{r-1,m}(f_\varepsilon; \Delta_n, x)\right\| = \frac{1}{1+\varepsilon}\max_{0 \le t \le h_s}\omega_{r,m}(h_s; t) =$$
$$= \frac{1}{1+\varepsilon}\,\alpha_{r,m}\delta_n^r > (1-\varepsilon)\,\alpha_{r,m}\delta_n^r.$$

Это и завершает доказательство теоремы 1.

Теорема 2. *Для любых $r \ge 0$ и $m \ge r$ справедливо следующее соотношение:*

$$\Theta_r[S_{r,m+1}(\Delta_n), S_{r,m}(\Delta_n)] \le 2\delta_n\left(\frac{\|\varphi_{0,m}\|}{2+\delta_n} + \|\varphi_{1,m}\|\right), \tag{9}$$

где

$$\varphi_{k,m}(u) = \frac{C_{2m+2-k}^{m+1}}{k!}\,u^{m+1}(1-u)^{m+1}\left(\frac{m+1}{2m+2-k} - u\right). \tag{10}$$

В случае $r = 0$ в соотношении (9) *имеет место знак равенства, правая часть которого при этом равна*

$$\frac{2\delta_n}{2+\delta_n}\|\varphi_{0,m}\|.$$

Доказательство. Заметим, что соотношение (9) при $r = 0$ получено ранее в [2]. Используя равенства (1) и (4), получаем для $x \in [x_{i-1}, x_i]$ и $t = x - x_{i-1}$:

$$s_{r,m+1}(f;\Delta_n,x)-s_{r,m}(f;\Delta_n,x)=(f_{i-1}-f_i)(H_{0,m+1}(h_i;t)-H_{0,m}(h_i;t))+$$

$$+\sum_{k=1}^{r}\Big(f_{i-1}^{(k)}\big(H_{k,m+1}(h_i;t)-H_{k,m}(h_i;t)\big)+(-1)^k f_i^{(k)}\big(H_{k,m+1}(h_i;h_i-t)-H_{k,m}(h_i;h_i-t)\big)\Big)$$

Из равенства (2) следует, что алгебраический многочлен

$$H_{k,m+1}(h_i;t)-H_{k,m}(h_i;t) \tag{11}$$

степени $2m+3$ в точках $t=0$ и $t=h_i$ имеет нули кратности $m+1$. Следовательно, этот многочлен имеет вид

$$(a_k t+b_k)t^{m+1}(h_i-t)^{m+1}. \tag{12}$$

Коэффициент a_k определяем, приравнивая коэффициенты при t^{2m+3} у многочленов (11) и (12):

$$a_k=-\frac{C_{2m+2-k}^{m+1}}{h_i^{2m+3-k}k!},$$

а коэффициент b_k определяем, приравнивая у тех же многочленов коэффициенты при t^{2m+2}:

$$b_k=\frac{C_{2m+1-k}^{m}}{h_i^{2m+2-k}k!}.$$

В результате получаем:

$$H_{k,m+1}(h_i;t)-H_{k,m}(h_i;t)=\frac{C_{2m+2-k}^{m+1}}{h_i^{2m+3-k}k!}\,t^{m+1}(h_i-t)^{m+1}\Big(\frac{m+1}{2m+2-k}h_i-t\Big).$$

Используя функции $\varphi_{k,m}$, $k\le m$, определенные равенством (10), будем иметь

$$H_{k,m+1}(h_i;t)-H_{k,m}(h_i;t)=\varphi_{k,m}(u)\,h_i^k,\qquad u=\frac{t}{h_i}.$$

Таким образом, для $x\in[x_{i-1},x_i]$, $t=x-x_{i-1}$ и $u=\dfrac{t}{h_i}$ получаем

$$s_{r,m+1}(f;\Delta_n,x)-s_{r,m}(f;\Delta_n,x)=(f_{i-1}-f_i)\varphi_{0,m}(u)+$$

$$+\sum_{k=1}^{r}\Big(f_{i-1}^{(k)}\varphi_{k,m}(u)+(-1)^k f_i^{(k)}\varphi_{k,m}(1-u)\Big)h_i^k.$$

Заметим, что, если $\|f\|^{(r)}\le 1$, то и $\|f\|^{(1)}\le 1$. Следовательно, в силу леммы 3 из [2],

$$|f_{i-1}-f_i|\le\frac{2h_i}{2+h_i}<\frac{2\delta_n}{2+\delta_n}.$$

Поэтому,

$$\|s_{r,m+1}(f;\Delta_n,x)-s_{r,m}(f;\Delta_n,x)\|\le\frac{2\delta_n}{2+\delta_n}\|\varphi_{0,m}\|+2\sum_{k=1}^{r}\|f^{(k)}\|\cdot\|\varphi_{k,m}\|\delta_n^k. \tag{13}$$

Оценим сверху $\left\|\varphi_{k,m}\right\|$. Учитывая, что

$$\left\| u^{m+1}(1-u)^{m+1} \right\| = \frac{1}{2^{2m+2}}$$

и

$$\left\| \frac{m+1}{2m+2-k} - u \right\| = \frac{m+1}{2m+2-k},$$

получаем, с учетом равенств (10),

$$\left\|\varphi_{k,m}\right\| \le \frac{C_{2m+2-k}^{m+1}}{2^{2m+2} k!} \cdot \frac{m+1}{2m+2-k} = \frac{C_{2m+1-k}^{m}}{2^{2m+2} k!}.$$

Поскольку

$$\frac{C_{2m-k}^{m}}{(k+1)!} < \frac{C_{2m+1-k}^{m}}{k!},$$

то

$$\left\|\varphi_{k,m}\right\| < \left\|\varphi_{1,m}\right\|, \quad k = \overline{2,m}.$$

Таким образом, из (13) получаем

$$\Theta_r\left[S_{r,m+1}(\Delta_n), S_{r,m}(\Delta_n)\right] \le \frac{2\delta_n}{2+\delta_n}\left\|\varphi_{0,m}\right\| + 2\delta_n \left\|\varphi_{1,m}\right\| \sum_{k=1}^{r} \left\| f^{(k)} \right\|,$$

откуда и следует утверждение теоремы 2.

Следствие. *В случае равномерного разбиения, для любых* $r \ge 0$ *и* $m \ge r$, *справедливо следующее соотношение:*

$$\Theta_r\left[S_{r,m+1}(\overline{\Delta}_n), S_{r,m}(\overline{\Delta}_n)\right] \le \frac{2}{n}\left(\frac{n}{2n+1}\left\|\varphi_{0,m}\right\| + \left\|\varphi_{1,m}\right\|\right).$$

В заключение отметим, что полученные результаты позволяют оценивать погрешность аппроксимации функции интерполяционными эрмитовыми сплайнами данного порядка, исходя из значения соответствующей погрешности аппроксимации функции сплайнами меньшего порядка.

Список литературы

1. Великин В.Л. Точные значения приближений эрмитовыми сплайнами на классах дифференцируемых функций //Известия АН СССР, серия математическая – 1973. – 37. – С.165-185.
2. Великин В.Л. Точные значения и оценки интерполяционных растворов некоторых подпространств эрмитовых сплайнов // Вісник Дніпропетр. ун-ту. – 2009. т.17, № 6/1. – С. 42-47.
3. Великин В.Л. О взаимном уклонении некоторых подпространств интерполяционных эрмитовых сплайнов // Вісник Дніпропетр. ун-ту. – 2010. т.18, № 6/1. – С. 88-90.
4. Ахиезер Н.И. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / Н.И. Ахиезер, И.М. Глазман. – М.: Наука, 1966. – 544 с.
5. Великин В.Л. К вопросу о взаимном уклонении некоторых квадратурных сумм интерполяционного типа // Вісник Дніпропетр. ун-ту. – 2012. т.1, № 1. – С. 1-6.